Глава 2

Теореми за единственост. Теорема за отвореното изображение. Принцип за максимума.

Непосредствени приложения на аналитичността на холоморфните функции са така наречените теореми за единственост.

Определение 2.1. *Подмножеството S на област $D \subseteq \mathbb{C}^n$ се нарича множество на единственост, ако всяка холоморфна в D функция f, която се анулира върху S е тъждествено нулева в D.*

Ясно е, че ако две холоморфни функции $f_1, f_2 : D \to \mathbb{C}$ съвпадат върху множеството на единственост S на областта D, то $f_1 \equiv f_2$ съвпадат в цялата област D. От друга гледна точка, ако $f : S \to \mathbb{C}$ има холоморфно продължение $f : D \to \mathbb{C}$, то това продължение е единствено.

Твърдение 2.2. (Принцип за аналитично продължение) *Всяко отворено подмножество U на област D е множество на единственост.*

Доказателство: За произволна холоморфна функция $f : D \to \mathbb{C}$ с $f|_U \equiv 0$ трябва да установим, че $f|_D \equiv 0$. Още повече, ние ще получим, че $\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}|_D \equiv 0$ при $\forall k \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$. За целта разглеждаме множествата

$$M_k(f) := \left\{ a \in D \,\middle|\, \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) = 0 \right\} \quad \text{за} \quad \forall k \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n.$$

От определението е ясно, че всички $M_k(f)$ са затворени подмножества на D, така че $M(f) := \cap_k M_k(f)$ е затворено подмножество на D.
Твърдим, че $M(f)$ е отворено. За целта е достатъчно да установим, че за $\forall a \in M(f)$, съществува полидиск $\mathcal{P}(a, \varepsilon)$, така че $f|_{\mathcal{P}(a,\varepsilon)} \equiv 0$. Даизберем $\mathcal{P}(a, \varepsilon)$, така че f да се развива в Тейлъров ред

$$f(z) = \sum_k \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) \frac{(z-a)^k}{k!}$$

върху $\mathcal{P}(a, \varepsilon)$. Сега от $\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) = 0$ за $\forall k \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$ стигаме до извода, че $f|_{\mathcal{P}(a,\varepsilon)} \equiv 0$. За $\forall b \in \mathcal{P}(a, \varepsilon)$ прилагаме $\left.\frac{\partial^{|k|}}{\partial z^k}\right|_b$ към $f|_{\mathcal{P}(a,\varepsilon)} \equiv 0$, за да изведем, че $b \in M_k(f)$. Следователно $b \in M(f)$ или $\mathcal{P}(a, \varepsilon) \subseteq M(f)$. Това доказва, че $M(f)$ е отворено множество. Още повече, $M(f)$ е непразно защото съдържа U и $M(f) \equiv D$ съгласно свързаността на D, Q.E.D.

Следствие 2.3. *Ако функцията $f : D \to \mathbb{C}$ е холоморфна в областта $D \subseteq \mathbb{C}^n$ и $\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) = 0$ за $\forall k \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$ и някаква точка $a \in D$, то $f \equiv 0$ в D.*

Доказателство: В означенията от доказателството на Принципа за аналитично продължение (Твърдение 2.2), ако $a \in M(f)$, то $M(f) = D$, доколкото $M(f)$ е затворено и отворено, а D е област, Q.E.D.

Следствие 2.4. *Всеки реален паралелепипед*

$$\Pi^n(a,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, |Re(z_j) - Re(a_j)| < \varepsilon_j,\, Im(z_j) = Im(a_j) \ \text{ за } \forall 1 \le j \le n\},$$

който се съдържа в област $D \subseteq \mathbb{C}^n$ е множество на единственост на D.

Доказателство: Съгласно Следствие 2.3, достатъчно е да докажем, че $\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) = 0$ за $\forall k \in \left(\mathbb{Z}^{\ge 0}\right)^n$. За целта, да развием $f(z)$ в Тейлъров ред върху полидиск $\mathcal{P}(a,\delta)$ с център a,

$$f(z) = \sum_k \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) \frac{(z-a)^k}{k!}.$$

Тогава за $\forall z \in \Pi^n(a,\varepsilon) \cap \mathcal{P}(a,\delta)$ с $Re(z) = x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ е в сила

$$\sum_k \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) \frac{(x - Re(a))^k}{k!} \equiv 0.$$

Диференцирайки $k_1, \dots, k_n$ пъти относно $x_1, \dots, x_n$ и полагайки $x_j = Re(a_j)$ за $\forall 1 \le j \le n$ получаваме $\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) = 0$, Q.E.D.
Типична черта на аналитичните функции на една променлива е изолираността на техните нули.

Твърдение 2.5. *Ако функцията f на една комплексна променлива е холоморфна в $a \in \mathbb{C}$, $f(a) = 0$ и f не се анулира тъждествено в околност на a, то съществува $n \in \mathbb{N}$, така че*

$$f(z) = (z-a)^n f_1(z),$$

където $f_1(z)$ е холоморфна в a и не се анулира в някаква околност на a.

Доказателство: Разлагаме $f(z)$ в Тейлъров ред

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(a) \frac{(z-a)^k}{k!}$$

в околност $a \in U_a \subset \mathbb{C}$. По предположение, $f(a) = 0$. Доколкото f не се анулира тъждествено в U_a, съществува $n \in \mathbb{N}$, така че $\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(a) = 0$ за $\forall 1 \le k \le n-1$ и $\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(a) \ne 0$. Тогава

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(a) \frac{(z-a)^k}{k!}.$$

Твърдим, че функцията

$$f_1(z) := \frac{f(z)}{(z-a)^n} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(a) \frac{(z-a)^{k-n}}{k!}$$

е холоморфна в някакъв достатъчно малък диск $D(a,\delta)$ с център a и не се анулира в $D(a,\delta)$. За целта, да отбележим, че абсолютната и равномерна сходимост на Тейлъровия ред на $f(z)$ около a води до $\lim\limits_{k\to\infty} \left| \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(a) \frac{(z-a)^k}{k!} \right| = 0$ за $\forall z \in \overline{D(a,\delta_1)}$ при достатъчно малко $\delta_1 > 0$. Следователно съществува константа $M_1 > 0$, така че $\left| \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(a) \frac{(z-a)^k}{k!} \right| \le M_1$ за $\forall z \in \partial D(a,\delta_1)$ и $\forall k \ge 0$. Оттук

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(a) \frac{(z-a)^{k-n}}{k!} \right| \le \frac{M_1}{\delta_1^n} = M \quad \text{ за } \quad \forall z \in \partial D(a,\delta_1), \quad \forall k \ge 0.$$

По Лемата на Абел, (Лема 1.11), редът $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(a) \frac{(z-a)^{k-n}}{k!}$ е абсолютно и равномерно сходящ върху всеки компакт $K \subset D(a,\delta_1)$ и границата му $f_1(z)$ е холоморфна в a функция. Понеже $f_1(a) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(a) \neq 0$ и холоморфната функция $f_1(z)$ е непрекъсната, съществува достатъчно малко $0 < \delta < \delta_1$, така че $f_1(z) \neq 0$ за $\forall z \in D(a, \delta)$, Q.E.D.

Теорема 3. (Теорема за единственост на Риман - 1851г.) *Ако подмножеството S на област $D \subseteq \mathbb{C}$ има поне една гранична точка $a \in D$, то S е множество на единственост на D.*

Доказателство: Нека $\{a_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq S$ е редица от точки $a_m \neq a$ с $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = a$, а $f : D \to \mathbb{C}$ е холоморфна функция, анулираща се върху S. Тогава $f(a) = \lim\limits_{m\to\infty} f(a_m) = 0$. Ако f не се анулира в околност на a, то съгласно Твърдение 2.5 съществува околност U_a на a върху D, така че $\{z \in U_a \mid f(z) = 0\} = \{a\}$. В частност, $\{a_m\}_{m=1}^{\infty} \cap U_a = \emptyset$, което противоречи на $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = a$. Следователно f се анулира в околност на a върху D. По Принципа за аналитично продължение, (Твърдение 2.2), това е достатъчно за тъждественото анулиране на $f(z)$ върху D, Q.E.D.
Да отбележим, че Принципът за аналитично продължение (Твърдение 2.2), Следствие 2.3, Твърдение 2.5 и Теоремата за единственост на Риман (Теорема 3) остават в сила и за реално-аналитични функции.

Твърдение 2.6. (Теорема за отвореното изображение) *Ако f е непостоянна холоморфна функция в област $D \subseteq \mathbb{C}^n$, то $f : D \to \mathbb{C}$ е отворено изображение, т.е. произволно отворено подмножество $U \subseteq D$ се изобразява в отворено подмножество $f(U) \subseteq \mathbb{C}$.*

Доказателство: За всяка точка $a \in U$ трябва да установим, че съществува $\varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$, така че $D(f(a), \varepsilon) \subseteq f(U)$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $a = 0^n \in \mathbb{C}^n$ и $f(0^n) = 0 \in \mathbb{C}$. Ако съществува околност $0^n \in U_0 \subseteq \mathbb{C}^n$, в която $f(z)$ се анулира тъждествено, то по Принципа за аналитично продължение (Твърдение 2.2), f се анулира тъждествено в D, противно на допускането. Следователно $f : D \to \mathbb{C}$ не се анулира в нито една околност $0^n \in U \subseteq D$. на В частност, всяко кълбо $B(0^n, r) \subset U$ съдържа точка $b \in B(0^n, r)$ с $f(b) \neq 0$. Разглеждаме правата

$$L_b = \{z_1 b \in \mathbb{C}^n \mid z_1 \in \mathbb{C}\}$$

в $\mathbb{C}^n$ през 0^n и b и диска

$$\Delta_b = \{zb \in \mathbb{C}^n \mid z \in D(0, 1)\} \subset L_b,$$

който се съдържа в $B(0^n, r)$. Достатъчно е да докажем съществуването на диск

$$D(f(0), \varepsilon) = D(0, \varepsilon) \subseteq f(\Delta_b) \subseteq f(B(0^n, r)) \subseteq f(U),$$

за да установим верността на твърдението. По този начин, Теоремата за отвореното изображение се свежда до случая на непостоянна холоморфна функция $f(z)$ на една комплексна променлива. Съгласно Твърдение 2.5 съществува околност U_1 на $z_1 = 0$ върху Δ_b, в която $f(z_1) = z_1^n f_1(z_1)$ за холоморфна и никъде неанулираща се функция $f_1 : U_1 \to \mathbb{C}^*$. Избираме достатъчно малко $\rho \in \mathbb{R}^{>0}$, така че $D(0, \rho) \subset \overline{D(0, \rho)} \subset U_1$ и разглеждаме

$$\delta := \inf_{z_1 \in S^1(0,\rho)} |f(z_1)|.$$

Ако $\delta = 0$ то непрекъснатата функция $|f(z)| : S^1(0, \rho) \to \mathbb{R}$ достига минимума си $\delta = 0$ в компакта $S^1(0, \rho)$. Но $f(z_1) = z_1^n f_1(z_1)$ не се анулира в нито една точка на $S^1(0, \rho) \subset U_1$, така че противоречието доказва положителността на

δ. Твърдим, че $D\left(0, \frac{\delta}{2}\right) \subseteq f(\Delta_b)$. Достатъчно е за $\forall w \in D(0, \delta) \setminus f(\Delta_b)$ да проверим, че $|w| \geq \frac{\delta}{2}$. За целта разглеждаме функцията

$$\varphi_w : \Delta_b \longrightarrow \mathbb{C},$$
$$\varphi_w(z_1) = \frac{1}{f(z_1) - w}.$$

Тази функция е холоморфна и съгласно Неравенствата на Коши (Следствие 1.12),

$$\frac{1}{|w|} = |\varphi_w(0)| \leq \max_{z_1 \in S^1(0,\rho)} |\varphi_w(z_1)|.$$

Неравенството на триъгълника дава $|f(z_1) - w| + |w| \geq |f(z_1)|$, а определението на δ гарантира $|f(z_1)| \geq \delta$ за $\forall z_1 \in S^1(0, \rho)$, така че $|f(z_1) - w| \geq \delta - |w|$. С други думи, $|\varphi_w(z_1)| \leq \frac{1}{\delta - |w|}$ за $\forall z_1 \in S^1(0, \rho)$. Комбинирайки с цитираното неравенство на Коши получаваме

$$\frac{1}{|w|} \leq \frac{1}{\delta - |w|},$$

откъдето $|w| \geq \frac{\delta}{2}$, Q.E.D.

Определение 2.7. *Областта $D \subset \mathbb{C}^n$ е ограничена, ако съществува достатъчно голямо $R \in \mathbb{R}^{>0}$, така че $D \subset \overline{B(0^n, R)}$.*

Следствие 2.8. (Принцип за максимума) *Нека $f : D \to \mathbb{C}$ е непостоянна холоморфна функция в ограничена област $D \subset \mathbb{C}^n$, а*

$$M := \sup_{\zeta \in \partial D} \left[\limsup_{z \in D, z \to \zeta} |f(z)| \right].$$

Тогава $|f(z)| < M$ за всяко $z \in D$.

Доказателство: За $M = \infty$ твърдението е вярно по тривиални причини. Оттук нататък ще предполагаме, че $M < \infty$. Да разгледаме функцията

$$\varphi : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$\varphi(z) := |f(z)| \quad \text{за} \quad \forall z \in D,$$
$$\varphi(\zeta) := \limsup_{z \in D, z \to \zeta} |f(z)| \quad \text{за} \quad \zeta \in \partial D.$$

Твърдим, че $\varphi(z) \leq M$ за $\forall z \in \overline{D}$. Наистина, нека

$$M_1 := \sup_{z \in \overline{D}} \varphi(z).$$

Тогава $M_1 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $M_1 \geq M$ и съществува редица $\{z_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \overline{D}$ с $\lim_{m\to\infty} \varphi(z_m) = M_1$. Съгласно компактността на $\overline{D}$ можем да считаме, че редицата $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ е сходяща и има граница $\lim_{m\to\infty} z_m = z_0 \in \overline{D}$. Ако допуснем, че $M_1 > M$, то без ограничение можем да предполагаме, че $z_m \in D$ за $\forall m \in \mathbb{N}$. При $z_0 \in D$, непрекъснатостта на φ върху D дава $\varphi(z_0) = \lim_{m\to\infty} \varphi(z_m) = M_1$. От друга страна, Теоремата за отвореното изображение (Твърдение 2.6) гарантира съществуването на диск $D(f(z_0), \varepsilon) \subseteq f(D)$. Ако $f(z_0) = M_1 e^{i\theta_o} \in \mathbb{C}$, то за $f(z_0) + \frac{\varepsilon}{2} e^{i\theta_o} \in D(f(z_0), \varepsilon)$ съществува $t_0 \in D$, така че

$$f(t_0) = f(z_0) + \frac{\varepsilon}{2} e^{i\theta_o} = \left(M_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) e^{i\theta_o}.$$

В резултат, $|f(t_0)| = M_1 + \frac{\varepsilon}{2} > M_1$ противоречи на определението на M_1. За $z_0 \in \partial D$ имаме

$$M \geq \limsup_{m\to\infty} |f(z_m)| = \varphi(z_0) = \lim_{m\to\infty} \varphi(z_m) = M_1,$$

което също е противоречие. С това доказахме, че $M_1 = M$ и $\varphi(z) \leq M$ за $\forall z \in \overline{D}$. В частност, $|f(z)| \leq M$ за $\forall z \in D$ и $f(D) \subset \overline{D(0,M)}$.
Принципът на максимума гласи, че $f(D) \subseteq D(0,M)$. При допускане на противното съществува $z \in D$, така че $f(z) \in \partial D(0,M) = S^1(0,M)$. По Теоремата за отвореното изображение (Твърдение 2.6), $D(f(z),\delta) \subseteq f(D) \subseteq \overline{D(0,M)}$ за достатъчно малко $\delta > 0$ Но ако $f(z) \in S^1(0,M)$, то $D(f(z),\delta)$ пресича $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,M)}$, което е противоречие, доказващо $f(D) \subseteq D(0,M)$, Q.E.D.

Следствие 2.9. *Ако функцията f е холоморфна в ограничена област $D \subseteq \mathbb{C}^n$ и съществува точка $a \in D$ с условието $|f(z)| \leq |f(a)|$ за $\forall z \in D$, то f е постоянна върху D.*

Доказателство: Ако $f(a) = 0$, то $f(z) \equiv 0$ в D и твърдението е доказано. Оттук нататък ще считаме, че $|f(a)| > 0$. Тогава по предположение е в сила $f(D) \subseteq \overline{D(0,|f(a)|)}$. Ако допуснем, че f не е постоянна в D, то получаваме, че $f(D) \subseteq D(0,|f(a)|)$. По-точно, както в края на доказателството на Принципа на максимума (Следствие 2.8), това следва от Теоремата за отвореното изображение (Твърдение 2.6) и факта, че граничната окръжност $\partial D(0,|f(a)|) = S^1(0,|f(a)|)$ е точка на сгъстяване на $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,M)}$. Но $f(a) \in f(D) \subseteq D(0,|f(a)|)$ води до противоречие и доказва, че $f \equiv \text{const}$ е постоянна в D, Q.E.D.

Следствие 2.10. *Ако $D \subset \mathbb{C}^n$ е ограничена област, функцията $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ е непрекъсната, а ограничението и $f : D \to \mathbb{C}$ е холоморфно, то*

$$\max_{z\in\overline{D}} |f(z)| = \max_{\zeta\in\partial D} |f(\zeta)|.$$

Доказателство: Ограничеността на D гарантира компактността на затворената обвивка $\overline{D}$ и на границата $\partial D = \overline{D} \setminus D$. Непрекъснатостта на f върху $\overline{D}$ води до непрекъснатост на $|f|$ върху ∂D, така че съществуват $z_o \in \overline{D}$ и $\zeta_o \in \partial D$ с $\max\limits_{z\in\overline{D}} |f(z)| = |f(z_o)|$ и съответно, $\max\limits_{\zeta\in\partial D} |f(\zeta)| = |f(\zeta_o)|$. Трябва да проверим, че $|f(z_o)| = |f(\zeta_o)|$. От $\partial D \subset \overline{D}$ е ясно, че $|f(z_o)| \geq |f(\zeta_o)|$. При $z_o \in \partial D$ имаме $|f(z_o)| \leq |f(\zeta_o)|$, откъдето $|f(z_o)| = |f(\zeta_o)|$. Ако допуснем, че $z_o \in D$, то $|f(z)| \leq |f(z_o)|$ за $\forall z \in D$ и съгласно Следствие 2.9 получаваме, че $f : D \to \mathbb{C}$ е постоянна в D. Поради непрекъснатостта на f в $\overline{D}$, функцията $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ е постоянна и равенството $|f(z_o)| = |f(\zeta_o)|$ е тривиално изпълнено, Q.E.D.

Определение 2.11. *Границата на Шилов S на ограничена област $D \subset \mathbb{C}^n$ е минималното затворено подмножество $S \subseteq \partial D$, за което*

$$\max_{z\in\overline{D}} |f(z)| = \max_{z\in\partial D} |f(z)| = \max_{z\in S} |f(z)|.$$

за всички функции f, които са холоморфни в D и непрекъснати в $\overline{D}$.

Лема 2.12. *Границата на Шилов на кълбото $B(0^n,1) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid ||z|| < 1\}$ съвпада с цялата граница $\partial B(0^n,1) = S^{2n-1}(0^n,1)$.*

Доказателство: За всяка точка $\zeta \in \partial B(0^n,1)$ трябва да построим функция $f_\zeta(z)$, холоморфна в $B(0^n,1)$, непрекъсната в $\overline{B(0^n,1)}$ и с

$$|f_\zeta(\zeta)| > |f_\zeta(z)| \quad \text{за} \quad \forall z \in \overline{B(0^n,1)} \setminus \{\zeta\}.$$

За $\forall \zeta \in \partial B(0^n,1)$ и $\forall z \in \overline{B(0,1)}$ неравенството на Коши-Буняковски гласи, че

$$|(z,\zeta)| \leq ||z||||\zeta|| = ||z||$$

с равенство точно когато $z = \lambda\zeta$ за някое $\lambda \in \mathbb{C}$. Оттук следва, че

$$Re(z,\zeta) \leq |(z,\zeta)| \leq ||z|| \leq 1$$

с равенство $Re(z,\zeta)=1$ тогава и само тогава, когато $z=\zeta$. Следователно

$$f_\zeta(z) := e^{(z,\zeta)} = e^{\sum\limits_{j=1}^{n} z_j\overline{\zeta_j}}$$

е холоморфна в $B(0^n,1)$, непрекъсната в $\overline{B(0^n,1)}$ и изпълнява неравенството $|f_\zeta(z)| \leq |f_\zeta(\zeta)|$ за $\forall z \in \overline{B(0^n,1)}$ с равенство точно когато $z=\zeta$, Q.E.D.

Следствие 2.13. (Теорема на Лиувил) *Ако функцията f е холоморфна и ограничена в $\mathbb{C}^n$, то f е константа.*

Доказателство: Нека $0^n := (0,\dots,0) \in \mathbb{C}^n$ и $R := (r,\dots,r) \in \left(\mathbb{R}^{>0}\right)^n$. Тогава във всеки полидиск $\mathcal{P}(0^n,R)$ функцията f изпълнява формулата на Коши

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n(0^n,\mathbb{R})} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall z \in \mathcal{P}(0^n,R)$$

и се разлага в ред на Тейлър

$$f(z) = \sum_k \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(0^n)\frac{z^k}{k!}.$$

Неравенствата на Коши (Следствие 1.12) гласят, че за $\forall k \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$ е в сила

$$\left| \frac{1}{k!}\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(0^n)\right| \leq \frac{M_R}{R^k} = \frac{M_R}{r^{|k|}},$$

където $M_R := \max\limits_{\zeta \in T^n(0^n,R)} |f(\zeta)|$. По предположение съществува $M \in \mathbb{R}^{>0}$, така че $|f(z)| \leq M$ за $\forall z \in \mathbb{C}^n$. Следователно $M_R \leq M$ и

$$\left| \frac{1}{k!}\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(0^n)\right| \leq \frac{M}{R^k} = \frac{M}{r|k|} \quad \text{ за } \forall r \in \mathbb{R}^{>0}.$$

По този начин, за всяко $k \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$ с $|k| = \sum\limits_{j=1}^{n} k_j > 0$ е изпълнено $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{M}{r^{|k|}} = 0$, откъдето $\frac{1}{k!}\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(0^n) = 0$. Сега Следствие 2.3 гарантира, че $f(z) \equiv f(0^n)$ е постоянна за $\forall z \in \mathbb{C}^n$, Q.E.D.

Следствие 2.14. (Основна теорема на алгебрата) *Всеки полином $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n \in \mathbb{C}[z] \setminus \mathbb{C}$ се разлага в линейни множители*

$$f(z) = a_0(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n) \quad c \quad \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{C}.$$

Доказателство: Достатъчно е да установим, че всеки полином $f(z) \in \mathbb{C}[z]\setminus\mathbb{C}$ има комплексен корен $\alpha \in \mathbb{C}$ и да приложим индукция по степента $\deg f(z) = n$. Да допуснем противното и да разгледаме холоморфната функция

$$\frac{1}{f(z)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

Ако докажем, че $\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq M$ за някаква реална положителна константа M, то по Теоремата на Лиувил следва $\frac{1}{f(z)} \equiv \mathrm{Const}$, откъдето и $f(z) \equiv \mathrm{Const}$, противно на предположението. За произволни $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ е в сила

$$|f(z)| = \left|z^n\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + \frac{a_n}{z^n}\right)\right| \geq$$

$$\geq |z|^n\left(|a_0| - \left|\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + \frac{a_n}{z^n}\right|\right) \geq$$

$$\geq |z|^n\left(|a_0| - \frac{a_1}{|z|} - \frac{|a_2|}{|z|^2} - \ldots - \frac{|a_{n-1}|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_n|}{|z|^n}\right).$$

Избираме достатъчно голямо реално положително r, така че за всички $z \in \mathbb{C}$ с $|z| \geq r$ да е изпълнено

$$\frac{1}{2}|a_0| > \frac{|a_1|}{r} + \frac{|a_2|}{r^2} + \ldots + \frac{|a_{n-1}|}{r^{n-1}} + \frac{|a_n|}{r^n} \geq \frac{|a_1|}{|z|} + \frac{|a_2|}{|z|^2} + \ldots + \frac{|a_{n-1}|}{|z|^{n-1}} + \frac{|a_n|}{|z|^n}.$$

В резултат,

$$|f(z)| \geq \frac{r^n|a_0|}{2} \quad \text{за} \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| \geq r.$$

От друга страна, непрекъснатата функция

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| : \overline{D(0,r)} \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$$

е ограничена отгоре върху компакта $\overline{D(0,r)}$ с константа $M_1 \in \mathbb{R}^{>0}$, т.е.

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq M_1 \quad \text{за} \quad \forall z \in \overline{D(0,r)}.$$

Ако $M := \max\left(\frac{2}{r^n|a_0|}, M_1\right)$, то

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq M \quad \text{за} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

показва, че холоморфната функция $\frac{1}{f(z)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ е ограничена. По Теоремата на Лиувил, $\frac{1}{f(z)} \equiv \mathrm{Const}$, което противоречи на $f(z) \not\equiv \mathrm{Const}$ и доказва, че всеки полином $f(z) \in \mathbb{C}[z] \setminus \mathbb{C}$ има комплексен корен $\alpha \in \mathbb{C}$ на $f(z)$, Q.E.D.