Глава 3

Теореми за равномерна сходимост на холоморфни функции

Да напомним, че редица от функции $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща към функция $f(x)$ върху подмножество M на дефиниционната област D, ако за $\forall \varepsilon > 0$ съществува $n_o \in \mathbb{N}$, така че $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ за всяко $n \geq n_o$ и всяко $x \in M$.

Лема 3.1. *Ако редица $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ от непрекъснати функции $f_n : M \to \mathbb{C}$ върху подмножество M на метрично пространство X клони равномерно към функция $f : M \to \mathbb{C}$, то граничната функция f е непрекъсната.*

Доказателство: Трябва да проверим, че за всяка точка $a \in M$ и за всяко $\varepsilon > 0$ съществува достатъчно малко кълбо $B(a, \delta) = \{x \in X \,|\, \rho(a, x) < \delta\}$, $\delta \in \mathbb{R}^{>0}$, така че $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ във всички точки $x \in B(a, \delta) \cap M$. Съгласно равномерната сходимост на $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ към f, съществува достатъчно голямо $n_o \in \mathbb{N}$, така че $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ за $\forall n \geq n_o$ и $\forall x \in M$. За произволно фиксирано $n \geq n_o$, непрекъснатостта на f_n в $a \in M$ дава кълбо $B(a, \delta) = B_n(a, \delta)$, така че $|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ за $\forall x \in B(a, \delta)$. В резултат, за произволни $x \in B(a, \delta) \cap M$ и фиксираното $n \geq n_o$ са изпълнени неравенствата

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

Q.E.D.

Функцията $f : X \to \mathbb{C}$ върху метрично пространство X е равонмерно непрекъсната, ако за $\forall \varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за произволни $x, x' \in X$ с $\rho(x, x') < \delta$ е в сила $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Лема 3.2. *Всяка непрекъсната функция $f : K \to \mathbb{C}$ върху компактно подмножество K на метрично пространство X е равномерно непрекъсната.*

Доказателство: Да допуснем противното. Тогава за всяко естествено $n \in \mathbb{N}$ съществуват $x_n, x'_n \in K$ с $\rho(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$. Безкрайната редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ има гранична точка $x_o \in K$ поради компактността на K. Означаваме отново с $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ подредицата, клоняща към x_o. За произволно $\varepsilon > 0$ избираме такова $n_1 \in \mathbb{N}$, че $\rho(x_n, x_o) < \frac{\varepsilon}{2}$ за $\forall n \geq n_1$. За всички естествени $n > \frac{2}{\varepsilon}$ е в сила $\rho(x'_n, x_n) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Следователно за $\forall n > \max\left(n_1, \frac{2}{\varepsilon}\right)$ е изпълнена оценката

$$\rho(x'_n, x_o) \leq \rho(x'_n, x_n) + \rho(x_n, x_o) < \varepsilon$$

и редицата $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ също клони към $x_o = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n$. Съгласно непрекъснатостта на $f : K \to \mathbb{C}$, границите

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_o) = f\left(\lim_{n\to\infty} x'_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$$

съвпадат. Оттук следва

$$0 = \lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon,$$

което е противоречие, доказващо равномерната непхрекъснатост на $f : K \to \mathbb{C}$, Q.E.D.

Равномерната сходимост не е съгласувана с $\mathbb{R}$-диференцируемостта. Ако редицата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ се състои от $\mathbb{R}$-диференцируеми функции и клони равномерно към функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, то f може да не е $\mathbb{R}$-диференцируема. Още повече, дори $f(x)$ да е $\mathbb{R}$-диференируема, редицата $\{f'_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ от производни не винаги клони към $f'(x)$. Например, редицата

$$\left\{f_n(x)=\frac{1}{n}\sin(nx)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

от $\mathbb{R}$-диференцируеми функции $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ клони равномерно към $f(x)\equiv 0$. Константата 0 е $\mathbb{R}$-диференцируема, но редицата $\{f'_n(x)=\cos(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ не е дори поточково сходяща.

Следващата теорема установява съгласуваността на равномерната сходимост с $\mathbb{C}$-диференцируемостта.

Теорема 4. (Теорема на Вайерщрас за равномерната сходимост) *Нека* $D\subseteq\mathbb{C}^n$ *е област, а* $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ *е редица от холоморфни в* D *функции, която е равномерно сходяща върху всеки компакт* $K\subset D$. *Тогава* $f(z):=\lim\limits_{m\to\infty}f_m(z)$ *е холоморфна в* D *функция и за* $\forall k\in\left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$ *редицата* $\left\{\frac{\partial^{|k|}f_m}{\partial z^k}\right\}_{m=1}^{\infty}$ *е равномерно сходяща към* $\frac{\partial^{|k|}f}{\partial z^k}$ *върху всеки компакт* $K\subset D$.

Доказателство: Достатъчно е да проверим, че $f(z)$ е холоморфна във всяка точка $a\in D$, за да твърдим, че $f:D\to\mathbb{C}$ е холоморфна в цялата област D. Избираме полидиск $\overline{\mathcal{P}(a,\rho)}\subset D$. Тогава за всяка холоморфна функция $f_m:D\to\mathbb{C}$ и за $\forall z\in\overline{\mathcal{P}\left(a,\frac{\rho}{2}\right)}$ е в сила формулата на Коши

$$f_m(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n(a,\rho)}\frac{f_m(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

При граничен преход $m\to\infty$, равномерно върху компактите $\overline{\mathcal{P}\left(a,\frac{\rho}{2}\right)}\ni z$ и $T^n(a,\rho)\ni\zeta$ получаваме формулата на Коши

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}f_m(z)=\lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n(a,\rho)}\frac{f_m(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right]=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n(a,\rho)}\frac{\lim\limits_{m\to\infty}f_m(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n(a,\rho)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

за $f:D\to\mathbb{C}$ върху достатъчно малък полидиск около $a\in D$. Следователно $f(z)$ е холоморфна в $a\in D$.

По интегралните формули за производните (Следствие 1.10),

$$\frac{1}{k!}\frac{\partial^{|k|}f_m}{\partial z^k}(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n(a,\rho)}\frac{f_m(\zeta)}{(\zeta-z)^k(\zeta-z)}d\zeta\quad\text{за }\forall z\in\overline{\mathcal{P}\left(a,\frac{\rho}{2}\right)}\quad\text{и}$$

$$\frac{1}{k!}\frac{\partial^{|k|}f}{\partial z^k}(z)=\frac{1}{(2\pi i)^k}\int\limits_{T^n(a,\rho)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^k(\zeta-z)}d\zeta\quad\text{за}\quad\forall z\in\overline{\mathcal{P}\left(a,\frac{\rho}{2}\right)}.$$

В резултат,

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{k!}\frac{\partial^{|k|}f_m}{\partial z^k}(z)\right]=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{T^n(a,\rho)}\frac{\lim\limits_{m\to\infty}f_m(\zeta)}{(\zeta-z)^k(\zeta-z)}d\zeta=$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^k(\zeta - z)} d\zeta = \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(z),$$

равномерно по $\forall z \in \overline{\mathcal{P}\left(a, \frac{\rho}{2}\right)}$. Произволен компакт $K \subset D$ има относително отворено покритие $K = \cup_{a \in K} \left[\mathcal{P}\left(a, \frac{\rho(a)}{2}\right) \cap K\right]$, от което можем да изберем крайно отворено подпокритие $K = \cup_{i=1}^{l} U_i$ с $U_i \subseteq \mathcal{P}\left(a^{(i)}, \frac{\rho(a^{(i)})}{2}\right)$ за някакви $a^{(1)}, \ldots, a^{(l)} \in K$. По определение, за $\forall \varepsilon > 0$ съществуват $m_i \in \mathbb{N}$, така че $\left|\frac{\partial^{|k|} f_m}{\partial z^k}(z) - \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(z)\right| < \varepsilon$ за $\forall m \geq m_i$ и $\forall z \in \mathcal{P}\left(a^{(i)}, \frac{\rho(a^{(i)})}{2}\right)$. Ако $m_0 = \max(m_1, \ldots, m_l)$, то за $\forall m \geq m_0$ и $\forall z \in K$ е изпълнено

$$\left|\frac{\partial^{|k|} f_m}{\partial z^k}(z) - \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(z)\right| < \varepsilon$$

и редицата $\left\{\frac{\partial^{|k|} f_m}{\partial z^k}(z)\right\}_{m=1}^{\infty}$ клони равномерно върху K към $\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(z)$, Q.E.D.
Като приложение на Теоремата на Вайерщрас за равномерната сходимост получаваме следното

Следствие 3.3. *Границата на Шилов S на полидиск*

$$\mathcal{P}(a, r) = D(a_1, r_1) \times \ldots \times D(a_n, r_n)$$

е Декартовото произведение $T^n(a, r) = \partial D(a_1, r_1) \times \ldots \times \partial D(a_n, r_n)$ на граничните окръжности $\partial D(a_j, r_j)$ на дисковете $D(a_j, r_j$.

Доказателство: Първо ще докажем включването $S \subseteq T^n(a, r)$. Да разгледаме холоморфна функция $f : \mathcal{P}(a, r) \to \mathbb{C}$ с непрекъснато продължение $f : \overline{\mathcal{P}(a, r)} \to \mathbb{C}$. Твърдим, че $M := \max\limits_{z \in \overline{\mathcal{P}(a,r)}} |f(z)| = \max\limits_{z \in \partial\mathcal{P}(a,r)} |f(z)|$ се достига в точка $\zeta \in T^n(a, r)$. За произволно фиксирано $\zeta_n \in \partial D(a_n, r_n)$ ще проверим, че функцията

$$f(z', \zeta_n) : \mathcal{P}'(a', r') = D(a_1, r_1) \times \ldots \times D(a_{n-1}, r_{n-1}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

е холоморфна в полидиска $\mathcal{P}(a', r') \subset \mathbb{C}^{n-1}$. Наистина, за произволна редица от комплексни числа $z_n^{(m)} \in D(a_n, r_n)$, сходяща към $\lim\limits_{m \to \infty} z_n^{(m)} = \zeta_n$, функциите

$$\varphi_m(z') = f(z', z_n^{(m)}) : \mathcal{P}(a', r') \longrightarrow \mathbb{C}$$

са холоморфни. Непрекъснатата функция $f : \overline{\mathcal{P}(a, r)} \to \mathbb{C}$ върху компакта $\overline{\mathcal{P}(a, r)}$ е равномерно непрекъсната съгласно Лема 3.2. Следователно редицата $\{\varphi_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$ клони равномерно върху $\overline{\mathcal{P}(a', r')}$ към $f(z', \zeta)$. По Теоремата на Вайерщрас за равномерната сходимост (Теорема 4), граничната функция $f(z', \zeta) : \mathcal{P}(a', r') \to \mathbb{C}$ е холоморфна. Продължавайки по същия начин установяваме, че за произволни фиксирани $\zeta_{m+1} \in \partial D(a_{m+1}, r_{m+1}), \ldots, \zeta_n \in \partial D(a_n, r_n)$, $1 \leq m \leq n - 1$ функцията

$$f(z_1, \ldots, z_m, \zeta_{m+1}, \ldots, \zeta_n) : D(a_1, r_1) \times \ldots \times D(a_m, r_m) \longrightarrow \mathbb{C}$$

е холоморфна. По Принципа на максимума (Твърдение 2.8), $M := \max\limits_{z \in \overline{\mathcal{P}(a,r)}} |f(z)|$ се достига в гранична точка $\zeta \in \partial\mathcal{P}(a, r)$. Твърдим, че за всяка точка $\zeta \in \partial\mathcal{P}(a, r)$ с $|f(\zeta)| = M$ съществува точка $\widetilde{\zeta} \in T^n(a, r)$ с $|f(\widetilde{\zeta}))| = |f(\zeta)| = M$. След евентуална пермутация на променливите $z_1, \ldots, z_n$ можем да считаме, че $\zeta_n \in pr\partial D(a_n, r_n)$. Ако $|\zeta_{n-1} - a_{n-1}| < r_{n-1}$, то по Принципа за максимума, холоморфната функция $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-2}, z_{n-1}, \zeta_n) : D(a_{n-1}, r_{n-1}) \to \mathbb{C}$ е постоянна в $\overline{D(a_{n-1}, r_{n-1})}$. По този начин, $M = |f(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-2}, \widetilde{\zeta}_{n-1}, \zeta_n)|$ за някоя точка $\widetilde{\zeta}_{n-1} \in \partial D(a_{n-1}, r_{n-1})$. Продължавайки по същия начин получаваме, че M се

достига в някаква точка $\widetilde{\zeta} \in T^n(a,r)$. С други думи, границата на Шилов на $\mathcal{P}(a,r)$ се съдържа в $T^n(a,r)$.
За да докажем съвпадението на S с $T^n(a,r)$, за произволна точка $\zeta \in T^n(a,r)$ трябва да построим функция $f_\zeta : \mathcal{P}(a,r) \to \mathbb{C}$, която е холоморфна в $\mathcal{P}(a,r)$, непрекъсната в $\overline{\mathcal{P}(a,r)}$ и изпълнява неравенствата

$$|f_\zeta(\zeta)| > |f_\zeta(z)| \quad \text{за} \quad \forall z \in T^n(a,r) \setminus \{\zeta\}.$$

Твърдим, че

$$f_\zeta(z) := \prod_{j=1}^n \left(1 + \overline{\frac{\zeta_j - a_j}{r_j}}\, \frac{z_j - a_j}{r_j}\right)$$

е такава функция. По-точно,

$$|f_\zeta(z)| = \prod_{j=1}^n \sqrt{2 + 2Re\left(\frac{z_j - a_j}{r_j}\, \overline{\frac{\zeta_j - a_j}{r_j}}\right)}.$$

Както вече доказахме, $Re\left(\frac{z_j-a_j}{r_j}\overline{\frac{\zeta_j-a_j}{r_j}}\right) < 1$ за $\forall z_j \in \partial D(a_j, r_j) \setminus \{\zeta_j\}$, така че

$$|f_\zeta(z)| < 2^n = |f_\zeta(\zeta)| \quad \text{за} \quad \forall z \in T^n(a,r) \setminus \{\zeta\},$$

Q.E.D.

Твърдение 3.4. (Теорема на Монтел) *Нека $D \subseteq \mathbb{C}^n$ е област, а $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ е фамилия от холоморфни върху D функции $f_\alpha : D \to \mathbb{C}$, която е равномерно ограничена върху всеки компакт $K \subset D$. Тогава всяка редица $\{f_m\}_{m=1}^\infty \subseteq \mathcal{F}$ съдържа подредица, която е равномерно сходяща върху всеки компакт $K \subset D$.*

Доказателство: В достатъчно малък полидиск с център в $a \in D$ са изпълнени равномерни по $f_\alpha \in \mathcal{F}$ неравенства на Коши. По-точно, върху всеки затворен полидиск $\overline{\mathcal{P}(a,\rho)} \subset D$ функциите $f_\alpha \in \mathcal{F}$ са непрекъснати, а в $\mathcal{P}(a,\rho)$ са холоморфни относно всяка променлива. Следователно се развиват в абсолютно и равномерно сходящи Тейлърови редове

$$f_\alpha(z) = \sum_{k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f_\alpha}{\partial z^k}(a)(z-a)^k \quad \text{за} \quad \forall z \in \mathcal{P}(a,\rho).$$

Ако $r = (r_1, \dots, r_n) \in \left(\mathbb{R}^{>0}\right)^n$ с $r_j < \rho_j$ има компоненти $\forall 1 \leq j \leq n$, ще записваме накратко $r < \rho$. Всяка функция $f_\alpha \in \mathcal{F}$ и всеки мулти-индекс $k \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$ изпълняват неравенствата на Коши

$$\left| \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f_\alpha}{\partial z^k}(a) \right| \leq \frac{M_{\alpha,r}}{r^k} \quad \text{с} \quad M_{\alpha,r} = \sup_{\zeta \in T^n(a,r)} |f_\alpha(\zeta)|, \quad r < \rho.$$

Съгласно равномерната ограниченост на $\mathcal{F}$ върху компакта $T^n(a,r)$, съществува константа $C_r \in \mathbb{R}^{>0}$, така че

$$\left| \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f_\alpha}{\partial z^k}(a) \right| \leq \frac{C_r}{r^k} \quad \text{за} \quad \forall f_\alpha \in \mathcal{F}, \quad \forall k \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n, \quad \forall r < \rho.$$

Твърдим, че $\forall \{f_m\}_{m=1}^\infty \subseteq \mathcal{F}$ има подредица $\{f_{N(m,m)}\}_{m=1}^\infty \subseteq \{f_m\}_{m=1}^\infty$, която е сходяща в $a \in D$ заедно в всичките си производни. По-точно, ограничената редица $\{f_m(a)\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ има сходяща подредица $\{f_{N(m,0)}(a)\}_{m=1}^\infty$. Съществуват краен брой числови редици $\left\{\frac{\partial^{|k|} f_{N(m,0)}}{\partial z^k}(a)\right\}_{m=1}^\infty$ с $|k| = \sum\limits_{j=1}^n k_j = 1$. Те са ограничени съгласно равномерните неравенства на Коши и съществува подредица $\{f_{N(m,1)}\}_{m=1}^\infty \subseteq \{f_{N(m,0)}\}_{m=1}^\infty$, за която $\left\{\frac{\partial^{|k|} f_{N(m,1)}}{\partial z^k}(a)\right\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ са сходящи числови редици за $\forall k \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$ с $|k| \leq 1$. Продължавайки по същия начин получаваме подредици

$$\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \supseteq \left\{f_{N(m,0)}\right\}_{m=1}^{\infty} \supseteq \left\{f_{N(m,1)}\right\}_{m=1}^{\infty} \supseteq \dots \supseteq \left\{f_{N(m,s)}\right\}_{m=1}^{\infty} \supseteq \dots,$$

така че $\left\{\frac{\partial^{|k|} f_{N(m,s)}}{\partial z^k}(a)\right\}_{m=1}^{\infty}$ са сходящи числови редици за $\forall k \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$ с $|k| \leq s$. Съгласно диагоналния принцип, всички производни на редицата $\{f_{N(m,m)}\}_{m=1}^{\infty}$ са сходящи в a. За $\forall k \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$ е в сила $\{f_{N(m,m)}\}_{m=|k|}^{\infty} \subseteq \{f_{N(m,|k|)}\}_{m=1}^{\infty}$, така че $\left\{\frac{\partial^{|k|} f_{N(m,m)}}{\partial z^k}(a)\right\}_{m=|k|}^{\infty}$ е сходяща числова редица.

Твърдим, че редицата $\{f_{N(m,m)}\}_{m=1}^{\infty}$, която е сходяща в a заедно с всички свои производни е равномерно сходяща в достатъчно малък полидиск $\mathcal{P}(a,\delta) \subset \mathcal{P}(a,r) \subset \mathcal{P}(a,\rho)$ с $\delta < r < \rho$. Сходимостта и фундаменталността на редица $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ са еквивалентни на сходимостта, съответно, фундаменталността на редиците $\{\mathrm{Re}\alpha_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ и $\{\mathrm{Im}\alpha_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Затова редица $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ е сходяща тогава и само тогава, когато е фундаментална. Ще проверим, че редицата $\{f_{N(m,m)}\}_{m=1}^{\infty}$ е равномерно фундаментална в $\mathcal{P}(a,\delta)$. За целта да извадим почленно Тейлъровите развития

$$f_{N(m,m)}(z) = \sum_{k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f_{N(m,m)}}{\partial z^k}(a)(z-a)^k \quad \text{и}$$

$$f_{N(l,l)}(z) = \sum_{k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f_{N(l,l)}}{\partial z^k}(a)(z-a)^k \quad \text{за} \quad \forall z \in \mathcal{P}(a,\delta).$$

За произволно $s \in \mathbb{N}$ съществуват краен брой $k \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$ с $|k| \leq s$. Сходимостта на числовите редици $\left\{\frac{\partial^{|k|} f_{N(m,m)}}{\partial z^k}(a)\right\}_{m=1}^{\infty}$ с $|k| \leq s$ е еквивалентна на фундаменталност. Затова за $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall s \in \mathbb{N}$ съществува $m_o \in \mathbb{N}$, така че

$$\left| \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f_{N(m,m)}}{\partial z^k}(a) - \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f_{N(l,l)}}{\partial z^k}(a) \right| < \frac{\varepsilon}{2\left(\sum\limits_{|k| \leq s} \delta^k\right)} \quad \text{за} \quad \forall m \geq m_o, \quad \forall l \geq m_o.$$

В резултат,

$$\left| \sum_{|k| \leq s} \left[\frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f_{N(m,m)}}{\partial z^k}(a) - \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f_{N(l,l)}}{\partial z^k}(a) \right] (z-a)^k \right| \leq$$

$$\leq \sum_{|k| \leq s} \left| \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f_{N(m,m)}}{\partial z^k}(a) - \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f_{N(l,l)}}{\partial z^k}(a) \right| \delta^k < \frac{\varepsilon}{2\left(\sum\limits_{|k| \leq s} \delta^k\right)} \left(\sum_{|k| \leq s} \delta^k\right) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

От друга страна, за $\forall k \in \left(\mathbb{Z}^{\geq 0}\right)^n$ с $|k| > s$ е изпълнено

$$\left| \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f_{N(m,m)}}{\partial z^k}(a) - \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f_{N(l,l)}}{\partial z^k}(a) \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f_{N(m,m)}}{\partial z^k}(a) \right| + \left| \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f_{N(l,l)}}{\partial z^k}(a) \right| \leq \frac{2C_r}{r^k}.$$

Следователно

$$\left| \sum_{|k| > s} \left[\frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f_{N(m,m)}}{\partial z^k}(a) - \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f_{N(l,l)}}{\partial z^k}(a) \right] (z-a)^k \right| \leq$$

$$\leq \sum_{|k|>s} \frac{2C_r}{r^k}\delta^k = 2C_r \left(\sum_{|k|>s} \left(\frac{\delta}{r}\right)^k \right).$$

По-подробно, $|k| > s$ изисква $k_j > \frac{s}{n}$ за поне едно $1 \leq j \leq n$. Тогава произведението на геометрични прогресии

$$\sum_{|k|>s} \left(\frac{\delta}{r}\right)^k = \sum_{|k|>s} \left(\frac{\delta_1}{r_1}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{\delta_n}{r_n}\right)^{k_n} =$$

$$= \left[\sum_{k_1} \left(\frac{\delta_1}{r_1}\right)^{k_1}\right] \dots \left[\sum_{k_j > \frac{s}{n}} \left(\frac{\delta_j}{r_j}\right)^{k_j}\right] \dots \left[\sum_{k_n} \left(\frac{\delta_n}{r_n}\right)^{k_n}\right] \leq \left(\frac{\delta_j}{r_j}\right)^{\frac{s}{n}} \frac{1}{1-\frac{\delta}{r}}$$

клони към 0 при $s \to \infty$. Затова за $\forall \varepsilon > 0$ съществува $s_o \in \mathbb{N}$, така че

$$\sum_{|k|>s} \left(\frac{\delta}{r}\right)^k < \frac{\varepsilon}{4C_r} \quad \text{за} \quad \forall s \geq s_o.$$

По този начин, за $\forall \varepsilon > 0$ съществуват $s_o \in \mathbb{N}$ и $m_o = m_o(s_o) \in \mathbb{N}$, така че за $\forall m \geq m_o$, $\forall l \geq m_o$ и $\forall z \in \mathcal{P}(a, \delta)$ е в сила

$$\left| f_{N(m,m)}(z) - f_{N(l,l)}(z) \right| < \varepsilon.$$

Това доказва равномерната сходимост на $\{f_{N(m,m)}\}_{m=1}^{\infty}$ върху $\mathcal{P}(a, \delta)$.
За $\forall a \in D$ установихме съществуването на полидиск $\mathcal{P}(a, \delta) = \mathcal{P}(a, \delta(a)) \subset D$ и подредица $\{f_{N(m,m)}\}_{m=1}^{\infty} = \{f_{N(a,m)}\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \{f_m\}_{m=1}^{\infty}$, която е равномерно сходяща в $\mathcal{P}(a, \delta)$. Отвореното покритие $D = \cup_{a \in D} \mathcal{P}(a, \delta)$ има изброима подпокритие. По-точно, за произволна фиксирана точка $a_o \in D$ можем да покрием D с изброимо много затворени кълба, $D = \cup_{m=1}^{\infty} \left[\overline{B(a_o, m)} \cap D \right]$. Всяко затворено кълбо $\overline{B(a_o, m)}$ е компактно и се покрива с краен брой полидискове $\mathcal{P}(a, \delta)$, така че $D = \cup_{j=1}^{\infty} \mathcal{P}_j$ се покрива с изброимо много полидискове $\mathcal{P}_j = \mathcal{P}(a^{(j)}, \delta(a^{(j)}))$. Ако $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}(a^{(1)}, \delta(a^{(1)}))$, то можем да изберем подредици

$$\{f_{N(a^{(1)},m)} = g_{M(m,1)}\}_{m=1}^{\infty} \supseteq \{g_{M(m,2)}\}_{m=1}^{\infty} \supseteq \dots \supseteq \{g_{M(m,s)}\}_{m=1}^{\infty} \supseteq \dots,$$

така че $\{g_{M(m,s)}\}_{m=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща върху $\mathcal{P}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_s$. По диагоналния принцип, $\{g_{M(m,m)}\}_{m=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща върху всеки компакт $K \subset D$. По-точно, включване от вида $K \subset \mathcal{P}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_l$ е достатъчно за равномерната сходимост на $\{g_{M(m,m)}\}_{m=l}^{\infty} \subseteq \{g_{M(m,l)}\}_{m=1}^{\infty}$ върху K, Q.E.D.

ТВЪРДЕНИЕ 3.5. (Теорема на Витали) *Нека D е област, а S е множество на единственост на D. Ако редицата $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ от холоморфни в D функции е равномерно ограничена в D и числовите редици $\{f_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$ са сходящи за всички $z \in S$, то редицата $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща върху всеки компакт $K \subset D$.*

Доказателство: Ако допуснем противното, то съществуват компакт $K \subset D$, $\varepsilon > 0$, редица $\{z_N\}_{N=1}^{\infty}$ и подредици $\{f_{i_N}\}_{N=1}^{\infty}, \{f_{j_n}\}_{N=1}^{\infty}$ на $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$, така че

$$|f_{i_N}(z_N) - f_{j_N}(z_N)| \geq \varepsilon$$

за всяко естествено N. Съгласно Теоремата на Монтел (Твърдение 3.4), съществуват подредици $\{f_{i'_N}\}_{N=1}^{\infty} \subseteq \{f_{i_N}\}_{N=1}^{\infty}$ и $\{f_{j'_N}\}_{N=1}^{\infty} \subseteq \{f_{j_N}\}_{N=1}^{\infty}$, клонящи равномерно върху всеки компакт $K' \subset D$ към холоморфни функции $f : D \to \mathbb{C}$, съответно $g : D \to \mathbb{C}$. Преминавайки към подредица можем да считаме, че $\lim\limits_{N \to \infty} z_N = z_o \in K$. В резултат,

$$|f_{i'_N}(z_N) - f_{j'_N}(z_N)| \geq \varepsilon \quad \text{за} \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Граничен преход $N \to \infty$ в горното неравенство дава

$$|f(z_o) - g(z_o)| \geq \varepsilon > 0.$$

От друга страна, за $\forall z \in S$ е в сила

$$f(z) - g(z) = \lim_{N\to\infty} [f_{i'_N}(z) - f_{j'_N}(z)] = 0,$$

защото числовата редица $\{f_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$ е сходяща по предположение. Доколкото S е множество на единственост, оттук следва $f \equiv g$ върху D, което е противоречие, доказващо равномерната сходимост на $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ върху всеки компакт $K \subset D$, Q.E.D.

Определение 3.6. *Автоморфизъм на област $D \subseteq \mathbb{C}^n$ е взаимно-еднозначно изображение $f : D \to D$, което е холоморфно заедно със своето обратно изображение $f^{-1} : D \to D$.*

Теорема на Осгоод установява, че всяко холоморфно взаимно-еднозначно изображение $f : D \to D$ има холоморфно обратно $f^{-1} : D \to D$.

Множеството $\mathrm{Aut}(D)$ на автоморфизмите на област $D \subseteq \mathbb{C}^n$ е група относно последователното прилагане. Всеки неин елемент $f : D \to D \subseteq \mathbb{C}^n$ е наредена n-торка $f = (f_1, \dots, f_n)$ от холоморфни функции $f_j : D \to \mathbb{C}$.

Картан е установил, че ако $D \subset \mathbb{C}^n$ е ограничена област, то $\mathrm{Aut}(D)$ е група на Ли, т.е. реално аналитично многообразие, върху което груповата операция и обръщането са реално аналитични.

Ще изследваме холоморфните граници на редиците $\{f^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathrm{Aut}(D)$, които са равномерно сходящи върху всеки компакт $K \subset D$.

Лема 3.7. *Ако $D \subset \mathbb{C}^n$ е ограничена област, то всяка редица $\{f^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \mathrm{Aut}(D)$ от автоморфизми на D има подредица $\{f^{(i_m)}\}_{m=1}^{\infty}$, която е равномерно сходяща върху всеки компакт $K \subset D$ към холоморфно изображение $f : D \to \overline{D}$.*

Доказателство: Ако $D \subset B(0^n, R)$ за някакво $R \in \mathbb{R}^{>0}$, то за всеки автоморфизъм $f^{(m)} = (f_1^{(m)}, \dots, f_n^{(m)}) : D \to D$, за всяко $1 \leq j \leq n$ и за всяка точка $z \in D$ е в сила

$$|f_j^{(m)}(z)|^2 \leq \sum_{s=1}^{n} |f_s^{(m)}(z)|^2 < R^2.$$

Следователно редиците от холоморфни функции $\{f_j^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ са равномерно ограничени върху D. По Теоремата на Монтел (Теорема 3.4), съществува подредица $\{f_1^{(N(1,m))}\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \{f_1^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$, която е равномерно сходяща към функция $f_1 : D \to \mathbb{C}$ върху всеки компакт $K \subset D$. Повторното приложение на Теоремата на Монтел към равномерно ограничената редица $\{f_2^{(N(1,m))}\}_{m=1}^{\infty}$ дава подредица $\{f_2^{(N(2,m))}\}_{m=1}^{\infty}$, която е равномерно сходяща към $f_2 : D \to \mathbb{C}$ върху всеки компакт $K \subset D$. Продължавайки по същия начин, получаваме подредица $\{f^{(N(n,m))}\}_{m=1}^{\infty} \subset \{f^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$, така че за всяко $1 \leq j \leq n$ редицата $\{f^{(N(n,m))}\}_{m=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща върху всеки компакт $K \subset D$ към холоморфна функция $f_j : D \to \mathbb{C}$. Теоремата на Вайерщрас (Теорема 4) гарантира холоморфността на функциите $f_j : D \to \mathbb{C}$, а оттам и на изображението $f = (f_1, \dots, f_n) : D \to \mathbb{C}^n$. В произволна точка $z \in D$, стойността

$$f(z) = \Big(\lim_{m\to\infty} f_1^{(N(n,m))}(z), \dots, \lim_{m\to\infty} f_n^{(N(n,m))}(z) \Big) = \lim_{m\to\infty} f^{(N(n,m))}(z).$$

Вземайки предвид, че $f^{(N(n,m))}(z) \in D$ за $\forall m \in \mathbb{N}$, стигаме до извода, че $\lim\limits_{m\to\infty} f^{(N(n,m))}(z) \in \overline{D}$ е от затворената обвивка $\overline{D}$ на D в $\mathbb{C}^n$. С това проверихме, че f е холоморфно изображение $f : D \to \overline{D}$, Q.E.D.

ТВЪРДЕНИЕ 3.8. *Нека $D \subseteq \mathbb{C}^n$ е област, а $f^{(m)} = (f_1^{(m)}, \ldots, f_n^{(m)}) : D \longrightarrow \mathbb{C}^n$ е редица от отворени холоморфни изображения, която клони равномерно върху всеки компакт $K \subset D$ към холоморфно изображение $f = (f_1, \ldots, f_n) : D \to \mathbb{C}^n$. Ако $a \in D$ е изолирана точка на $f^{-1}(f(a))$, то за всяка околност U_a на a върху D съществува $m_o \in \mathbb{N}$, така че $f(a) \in f^{(m)}(U_a)$ за $\forall m \geq m_o$.*

Доказателство: Да допуснем противното. Тогава съществува околност U_a на a върху D, така че $f(a) \notin f^{(m)}(U_a)$ за $\forall m \in \mathbb{N}$. След евентуално свиване можем да считаме, че околността U_a е ограничена (т.е., затворената и обвивка $\overline{U_a} \subset D$ е компактна) и $\overline{U_a} \cap f^{-1}(f(a)) = \{a\}$ и $f(a) \notin f^{(m)}(\overline{U_a})$ за $\forall m \in \mathbb{N}$. В резултат, $f(a) \notin f(\partial U_a)$. Непрекъснатият образ $f(\partial U_a)$ на компакта ∂U_a е компактен. Следователно съществуват полидиск $\mathcal{P}(f(a), r)$ и околност V на $f(\partial U)$ върху $\mathbb{C}^n$, така че $\mathcal{P}(f(a), r) \cap V = \emptyset$. По-точно, за $\forall p \in f(\partial U_a)$ избираме непресичащи се околности W_p на $f(a)$ и V_p на p. Покритието $f(\partial U_a) = \cup_{p \in f(\partial U_a)} V_p$ има крайно подпокритие $f(\partial U_a) \subset V'_{p_1} \cup \ldots \cup V'_{p_k}$ с $V'_{p_j} \subseteq V_{p_j}$. Произволен полидиск $\mathcal{P}(f(a), \varepsilon) \subseteq W_{p_1} \cap \ldots \cap W_{p_k}$ има празно сечение с околността $V = V'_{p_1} \cup \ldots \cup V'_{p_k}$ на $f(\partial U_a)$. За достатъчно големи $m \geq m_o$ е в сила $f^{(m)}(\partial U_a) \subset V$. Непосредствено се проверява, че $\overline{f^{(m)}(U_a)} \subseteq f^{(m)}(\overline{U_a})$. По-точно, ако $p = \lim\limits_{\nu \to \infty} f^{(m)}(z^{(\nu)})$ за някакви точки $z^{(\nu)} \in U_a$, то след евентуално преминаване към подредица можем да считаме, че редицата $\{z^{(\nu)}\}_{\nu=1}^{\infty} \subset \overline{U_a}$ е сходяща към $z^{(0)} = \lim\limits_{\nu \to \infty} z^{(\nu)} \in \overline{U_a}$. Съгласно непрекъснатостта на $f^{(m)}$, имаме $p = f^{(m)}\left(\lim\limits_{\nu \to \infty} z^{(\nu)}\right) = f^{(m)}(z^{(0)}) \in f^{(m)}(\overline{U_a})$. Следователно

$$\partial f^{(m)}(U_a) = \overline{f^{(m)}(U_a)} \setminus f^{(m)}(U_a) \subseteq f^{(m)}(\overline{U_a}) \setminus f^{(m)}(U_a) = f^{(m)}(\partial U_a).$$

По предположение, $f^{(m)}(U_a) \subset \mathbb{C}^n$ са отворени подмножества. Непрекъснатите образи $f^{(m)}(\overline{U_a})$ на компактите $\overline{U_a}$ са компакти, така че затворените обвивки $\overline{f^{(m)}(U_a)} \subseteq f^{(m)}(\overline{U_a})$ на областите $f^{(m)}(U_a)$ са компактни и $\partial f^{(m)}(U_a) \subseteq V_a$. От $\lim\limits_{m \to \infty} f^{(m)}(a) = f(a) \in \mathcal{P}(f(a), r)$ следва $f^{(m)}(a) \in \mathcal{P}(a, r)$ за достатъчно големи $m \geq m_o$. Представяме като непресичащо се обединение

$$\mathcal{P}(f(a), r) =$$

$$= [\mathcal{P}(f(a), r) \cap f^{(m)}(U_a)] \cup \{\mathcal{P}(f(a), r) \cap [\mathbb{C}^n \setminus \overline{f^{(m)}(U_a)}]\} \cup [\mathcal{P}(f(a), r) \cap \partial f^{(m)}(U_a)]$$

на относително затворено $F_{a,m} = \mathcal{P}(f(a), r) \cap \partial f^{(m)}(U_a)$ и непразни отворени $\mathcal{P}(f(a), r) \cap f^{(m)}(U_a) \ni f^{(m)}(a)$, $\mathcal{P}(f(a), r) \cap [\mathbb{C}^n \setminus \overline{f^{(m)}(U_a)}] \ni f(a)$ съгласно

$$f(a) \in [\mathbb{C}^n \setminus f^{(m)}(\overline{U_a})] \subseteq [\mathbb{C}^n \setminus \overline{f^{(m)}(U_a)}].$$

Предположението $F_{a,m} = \emptyset$ противоречи на свързаността на полидиска $\mathcal{P}(f(a), r)$, така че $F_{a,m} = \mathcal{P}(f(a), r) \cap \partial f^{(m)}(U_a) \neq \emptyset$ за достатъчно големи $m \in \mathbb{N}$. Това противоречи на $\mathcal{P}(f(a), r) \subset (\mathbb{C}^n \setminus V) \subset (\mathbb{C}^n \setminus \partial f^{(m)}(U_a))$ и доказва твърдението, Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 3.9. *Нека $D \subseteq \mathbb{C}^n$ е област, $\{f^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ е редица от холоморфни върху D функции, които клонят равномерно върху всеки компакт $K \subset D$ към непостоянна холоморфна функция $f : D \to \mathbb{C}$ и $f^{(m)}(z) \neq 0$ за $\forall z \in D$ и $\forall m \in \mathbb{N}$. Тогава $f(z) \neq 0$ за $\forall z \in D$.*

Доказателство: Да допуснем, че $f(a) = 0$ в някаква точка $a \in D$. Избираме полидиск $\mathcal{P}(a, \varepsilon) \subset D$. Тогава $f : D \to \mathbb{C}$ не се анулира тъждествено върху $\mathcal{P}(a, \varepsilon)$ и съществува $b \in \mathcal{P}(a, \varepsilon)$ с $f(b) \neq 0$. Правата

$$L_{a,b} = \{z = a + t(b - a) \,|\, t \in \mathbb{C}\}$$

през a и b пресича полидиска $\mathcal{P}(a,\varepsilon)$ в диска $D(0,\varepsilon_o)$. По-точно, от $a \neq b$ следва съществуването на $1 \leq j \leq n$ с $|b_j - a_j| \neq 0$ и ε_o е най-малкото от частните $\frac{\varepsilon_j}{|b_j - a_j|}$ за $1 \leq j \leq n$ с $|b_j - a_j| \neq 0$. Полагаме $\varphi^{(m)}(t) = f^{(m)}(a + t(b-a))$ и $\varphi(t) = f(a + t(b-a))$ върху $D_{a,b}$. Непосредствено се вижда, че $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(1) = f(b) \neq 0$, така че $\varphi : D_{a,b} \to \mathbb{C}$ не е постоянна. Оттук $\varphi^{(m)}|_{D_{a,b}} \not\equiv \mathrm{const}$ за достатъчно големи $m \geq m_o$ и $\varphi^{(m)} : D_{a,b} \to \mathbb{C}$ са отворени изображения. По предишното Твърдение 3.8, $f^{(m)}(D_{a,b}) \supseteq \varphi^{(m)}(D_{a,b}) \supset \{0\}$ за достатъчно големи $m \geq m_o$. Противоречието доказва $f(z) \neq 0$ за $\forall z \in D$, Q.E.D.
Следващата теорема характеризира равномерните граници на редици от автоморфизми на ограничена област.

Теорема 5. (Картан) *Нека $D \subset \mathbb{C}^n$ е ограничена област, а $\{f^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathrm{Aut}(D)$ е редица от автоморфизми, която клони равномерно върху всеки компакт $K \subset D$ към холоморфно изображение $f = (f_1, \dots, f_n) : D \to \overline{D}$. Тогава следните твърдения са еквивалентни:*
(а) $f \not\in \mathrm{Aut}(D)$;
(б) Якобиевата детерминанта

$$\det \mathrm{Jac}(f)(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n}(a) \end{vmatrix} = 0$$

се анулира във всяка точка $a \in D$;
(в) $f(D) \subset \partial D$.

Доказателство: Ще докажем екивваленткост на съответните отрицания:
(i) $f \in \mathrm{Aut}(D)$;
(ii) $\det \mathrm{Jac}(f)(a) \neq 0$ в поне една точка $a \in D$;
(iii) $f(D) \not\subset \partial D$.
За $(i) \Longrightarrow (ii)$ да отбележим, че ако $f \in \mathrm{Aut}(D)$ и $a \in D$, то от $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_D$ следва $\mathrm{Jac}(f^{-1})(f(a)) \circ \mathrm{Jac}(f)(a) = E_n$, така че $\det \mathrm{Jac}(f)(a) \neq 0$.
Относно $(ii) \Longrightarrow (iii)$, ако $\det \mathrm{Jac}(f)(a) \neq 0$, то съгласно Теоремата за обратното изображение съществува околност U_a на a върху D и околност $V_{f(a)}$ на $f(a)$ върху $\mathbb{C}^n$, така че $f : U_a \to V_{f(a)}$ е взаимно еднозначно и обратното изображение $f^{-1} : V_{f(a)} \to U_a$ е холоморфно. В частност, $f(D)$ съдържа околността $V_{f(a)}$ на $f(a)$ върху $\mathbb{C}^n$ и не може да се съдържа в границата ∂D.
За $(iii) \Longrightarrow (ii)$ да напомним, че $f(D) \subseteq \overline{D}$. Предположението $f(D) \not\subset \partial D$ е еквивалентно на $f(D) \cap D \neq \emptyset$. Нека $a, b \in D$ са такива точки, че $f(a) = b \in f(D) \cap D$. Редицата $\{[f^{(m)}]^{-1}\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathrm{Aut}(D)$ от автоморфизми на ограничената област D е равномерно ограничена. По теоремата на Монтел съществува подредица $\{[f^{(i_m)}]^{-1}\}_{m=1}^{\infty}$, която е равномерно сходяща върху всеки компакт $K \subset D$ към холоморфно изображение $g : D \to \overline{D}$. В частност,

$$\lim_{m \to \infty} [f^{(i_m)}]^{-1} f(a) = g(b).$$

Произволна околност V_b на $b = f(a)$ с компактна затворена обвевка $\overline{V_b}$ съдържа $f^{(m)}(a)$ за достатъчно големи $m \geq m_o$. Поради равномерната сходимост на $\{[f^{(i_m)}]^{-1}\}_{m=1}^{\infty}$ върху $f(\overline{U_a})$ имаме

$$g(b) = \lim_{m \to \infty} [f^{(i_m)}]^{-1} f^{(i_m)}(a) = \lim_{m \to \infty} a = a.$$

Избираме достатъчно малко V_b, така че компактът $g(\overline{V_b})$ да се съдържа в D. Съществува достатъчно малко $\varepsilon > 0$, за което

$$K = \overline{\cup_{z \in \overline{V_b}} \mathcal{P}(g(z), \varepsilon)} = \cup_{z \in \overline{V_b}} \overline{\mathcal{P}(g(z), \varepsilon)} \subset D.$$

Поради своята затвореност, K е компакт, съдържащ $[f^{(i_m)}]^{-1}(V_b)$ за достатъчно големи $m \geq m_o$. В резултат, за $\forall z \in V$ е изпълнено

$$fg(z) = \lim_{m\to\infty} f[f^{(i_m)}]^{-1}(z) = \lim_{m\to\infty} f^{(i_m)}[f^{(i_m)}]^{-1}(z) = z,$$

съгласно равномерната сходимост на $f^{(i_m)}$ върху $K \supset [f^{(i_m)}]^{-1}(V)$. Оттук $\mathrm{Jac}(f)(g(z))\mathrm{Jac}(g)(z) = E_n$ и $\det \mathrm{Jac}(f)(g(z)) \neq 0$.
Накрая, за $(ii) \Longrightarrow (i)$ да отбележим, че функциите $j_m(z) = \det \mathrm{Jac}(f^{(m)})(z)$ са холоморфни в D и клонят към $j(z) = \det \mathrm{Jac}(f)(z)$ равномерно върху всеки компакт $K \subset D$. Повтаряйки доказателството на $(i) \Longrightarrow (ii)$ получаваме $j_m(z) \neq 0$ за $\forall m \in \mathbb{N}$ и $\forall z \in D$, съгласно $f^{(m)} \in \mathrm{Aut}(D)$. По предположение, $j(a) \neq 0$ в някоя точка $a \in D$. Ако $j|_D \equiv \mathrm{const}$, то j не се анулира никъде върху D. За $j|_D \not\equiv \mathrm{const}$, прилагаме Следствие 3.9 и получаваме $j(z) \neq 0$ за $\forall z \in D$. По Теоремата за обратното изображение, оттук следва, че $f : D \to \mathbb{C}^n$ е отворено изображение и $\forall z \in D$ е изолирана точка на $f^{-1}(f(z))$. Съгласно Твърдение 3.8, $f(D) \subseteq \cup_{m=1}^{\infty} f^{(m)}(D) = D$.
За да проверим, че $f \in \mathrm{Aut}(D)$, напомняме избора на подредица

$$\{[f^{(i_m)}]^{-1}\}_{m=1}^{\infty} \subset \{[f^{(m)}]^{-1}\}_{m=1}^{\infty},$$

която е равномерно сходяща върху всеки компакт $K \subset D$ към холоморфно изображение $g : D \to \mathbb{C}^n$. От $\lim\limits_{m\to\infty} f^{(i_m)}(z) = f(z)$ следва съществуването на компакт $K_z \subset D$, така че $f^{(i_m)}(z) \in K_z$ за достатъчно големи $m \geq m_o$. В резултат,

$$gf(z) = \lim_{m\to\infty} [f^{(i_m)}]^{-1} f^{(i_m)}(z) = z \quad \text{за} \quad \forall z \in D$$

и $\mathrm{Jac}(g)(f(z)) \circ \mathrm{Jac}(f)(z) = E_n$. По този начин, $\det \mathrm{Jac}(g)(y) \neq 0$ за $\forall y \in f(D)$ и повтаряйки горните разсъждения получаваме $g(D) \subseteq D$. Това ни дава основание да твърдим, че за $\forall z \in D$ съществува компакт $K'_z \subseteq D$, така че $[f^{(i_m)}]^{-1}(z) \in K'_z$ за достатъчно големи $m \geq m_o$. Оттук

$$fg(z) = \lim_{m\to\infty} f^{(i_m)}[f^{(i_m)}]^{-1}(z) = z.$$

Равенствата $gf = \mathrm{Id}_D$ и $fg = \mathrm{Id}_D$ установяват, че $f \in \mathrm{Aut}(D)$, Q.E.D.
Да илюстрираме Теоремата на Картан върху конкретна редица от автоморфизми на единичния полидиск $\mathcal{P}(0^n, 1^n)$. За $\forall \alpha \in D(0,1)$ функцията $f_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}}$ е холоморфна в диска $D(0,1)$ и взема стойности в $D(0,1)$. Тя е взаимно еднозначно изображение $f_\alpha : D(0,1) \to D(0,1)$ с обратно

$$f_\alpha^{-1} = \frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}} : D(0,1) \longrightarrow D(0,1),$$

така че $f_\alpha \in \mathrm{Aut}D(0,1)$. Непосредствено се проверява, че ако $\{\alpha^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ е редица от комплексни числа, която клони към $\alpha \in \mathbb{C}$, то редицата

$$\left\{ f_{\alpha^{(m)}}(z) = \frac{z - \alpha^{(m)}}{1 - \overline{\alpha^{(m)}} z} \right\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathrm{Aut}D(0,1)$$

клони равномерно върху $D(0,1)$ към

$$f_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}.$$

За $\alpha \in D(0,1)$ границата $f_\alpha(z) \in \mathrm{Aut}D(0,1)$ е автоморфизъм на единичния диск. В случая $\alpha = e^{i\theta} \in \partial D(0,1)$ имаме постоянна $f_\alpha(z) = -\alpha$, така че f_α изобразява диска $D(0,1)$ в неговата граница $\partial D(0,1)$.

Аналогично, нека $\{\alpha^{(m)} = (\alpha_1^{(m)}, \dots, \alpha_n^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(0^n, 1^n)$ е редица от вътрешни точки, клоняща към $\alpha \in \overline{\mathcal{P}(0^n, 1^n)}$. Тогава

$$f^{(m)}(z) = \left(f_1^{(m)}(z_1) = \frac{z_1 - \alpha_1^{(m)}}{1 - \overline{\alpha_1^{(m)}} z_1}, \dots, f_n^{(m)}(z_n) = \frac{z_n - \alpha_n^{(m)}}{1 - \overline{\alpha_n^{(m)}} z_n} \right)$$

е редица от автоморфизми на полидиска $\mathcal{P}(0^n, 1^n)$, равномерно клоняща към

$$f(z) = \left(f_1(z_1) = \frac{z_1 - \alpha_1}{1 - \overline{\alpha_1} z_1}, \dots, f_n(z_n) = \frac{z_n - \alpha_n}{1 - \overline{\alpha_n} z_n} \right) : \mathcal{P}(0^n, 1^n) \longrightarrow \mathcal{P}(0^n, 1^n)$$

върху $\mathcal{P}(0^n, 1^n)$. Якобиевата матрица

$$Jac(f)(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(z) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial z_2}(z) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_3}{\partial z_3}(z) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial z_{n-1}}(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial f_n}{\partial z_n}(z) \end{pmatrix}$$

е диагонална във всяка точка $z \in \mathcal{P}(0^n, 1^n)$. Ако $\alpha \in \mathcal{P}(0^n, 1^n)$ е вътрешна точка, то $f \in \mathrm{Aut}\mathcal{P}(0^n, 1^n)$, $f(\mathcal{P}(0^n, 1^n)) \not\subset \partial\mathcal{P}(0^n, 1^n)$ и $\det Jac(f)(z) \neq 0$ за $\forall z \in \mathcal{P}(0^n, 1^n)$. В случай, че съществува $\alpha_j \in \partial D(0, 1)$, компонентата $f_j(z_j) = -\alpha_j$ е постоянна и $\det Jacf(z) = 0$ за $\forall z \mathcal{P}(0^n, 1^n)$. Холоморфното изображение $f : \mathcal{P}(0^n, 1^n) \to \partial\mathcal{P}(0^n, 1^n)$ взема стойности в границата на полидиска и не е автоморфизъм.