Глава 4

Плурихармонични и хармонични функции

Нека функцията f е $\mathbb{R}$-диференцируема в околност на точка $z \in \mathbb{C}^n$. В такъв случай, f е холоморфна в z тогава и само тогава, когато $\partial\overline{f}(z) = 0$.

Определение 4.1. *Функцията g е анти-холоморфна в точка $z \in \mathbb{C}^n$, ако g е $\mathbb{R}$-диференцируема в околност на z и $\partial g(z) = 0$.*

По този начин, f е холоморфна в $z \in \mathbb{C}^n$ точно когато $\overline{f}$ е анти-холоморфна в тази точка.
Ще се спрем на някои свойства на реалните и имагинерните части на холоморфните функции. Ако функцията f е холоморфна в точка $z \in \mathbb{C}^n$, то реалната и част $u = Re(f) = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ изпълнява диференциалното уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_j} dz_j = \partial u = \frac{1}{2}\partial f = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j.$$

Съгласно Теорема 2, частните производни $\frac{\partial f}{\partial z_j}$ са холоморфни, така че

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z_k}\partial z_j} d\overline{z_k} \wedge dz_j = \overline{\partial}\partial u = \frac{1}{2}\overline{\partial}\partial f = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z_k}\partial z_j} d\overline{z_k} \wedge dz_j = 0.$$

Оттук получаваме, че реалната част u на холоморфна функция f удовлетворява диференциалните уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z_k}\partial z_j} = 0 \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq k, j \leq n.$$

Да напомним, че ако $x_j = Re(z_j) = \frac{z_j + \overline{z_j}}{2}$ и $y_j = Im(z_j) = \frac{z_j - \overline{z_j}}{2i}$, то

$$\frac{\partial^2}{\partial \overline{z_k}\partial z_j} = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial y_j}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j}\right) + \frac{i}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_k \partial x_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial y_j}\right).$$

Отделяйки реална и имагинерна части на тези оператори, изразяваме условието $\overline{\partial}\partial u = 0$ чрез системата диференциални уравнения

$$\left|\begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j} = 0 \\ \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial y_j} = 0 \end{array}\right. \quad \text{за } \forall 1 \leq k, j \leq n. \tag{4.1}$$

Определение 4.2. *Нека $D \subseteq \mathbb{C}^n$ е област, а $u : D \to \mathbb{R}$ е функция с непрекъснати частни производни от ред 2, т.е. $u \in C^2(D)$. Казваме, че u е плури-хармонична, ако $\overline{\partial}\partial u = 0$.*

Еквивалентно, $u \in C^2(D)$ е плурихармонична, ако изпълнява диференциалните уравнения (4.1). Плурихармоничните функции в област $D \subseteq \mathbb{C}$ се наричат хармонични и се характеризират с диференциалното уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}\partial z} = 0.$$

Операторът $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}\partial z}$ се нарича Лапласиан.

Твърдение 4.3. *Ако $f : D \to \mathbb{C}$ е холоморфна функция в област $D \subseteq \mathbb{C}^n$, то $u = Re(f)$ и $v = Im(f)$ са плури-хармонични функции.*

Доказателство: Вече се убедихме, че ако $f : D \to \mathbb{C}$ е холоморфна, то $u = Re(f)$ е плури-хармонична функция. Остава да отбележим, че в такъв случай $-if$ също е холоморфна, така че $Re(-if) = v = Im(f)$ се оказва плурихармонична, Q.E.D.
За да докажем, че всяка плурихармонична в околност на $a \in \mathbb{C}$ функция се реализира като реална или имагинерна част на холоморфна функция, ще използваме следната

Лема 4.4. (Лема на Поанкаре) *Нека $\mathcal{A}^k$ е множеството на безкрайно $\mathbb{R}$-дифеленцируемите k-форми върху кълбото*

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} x_j^2 < 1 \right\}.$$

Ако $u \in \mathcal{A}^k$ и $du = 0$, то съществува $v \in \mathcal{A}^{k-1}$ с $dv = u$.

Доказателство: Да означим външното диференциране на k-форми с $d^k : \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}^{k+1}$. Ще построим $\mathbb{R}$-линейни изображения $C^k : \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}^{k-1}$, изпълняващи равенствата

$$C^{k+1}d^k + d^{k-1}C^k = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}^k}.$$

По този начин получаваме, че $C^k u$ е решение на $d^{k-1}v = u$ за $\forall u \in \mathcal{A}^k$ с $d^k u = 0$.
Да означим с $L^k : \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}^k$ $\mathbb{R}$-линейните продължения на изображенията

$$L^k(f_{i_1\dots i_k}(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = \left[\int_0^1 t^{k-1} f_{i_1\dots i_k}(tx)dt \right] dx_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}.$$

Ще проверим, че L^k комутират с d^k, т.е. $L^{k+1}d^k = d^k L^k$. Съгласно $\mathbb{R}$-линейността на L^k и d^k, достатъчно е да пресметнем, че

$$L^{k+1}d^k(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = L^{k+1}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right) =$$

$$= \left[\int_0^1 t^k \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) \right) dt \right] dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} =$$

$$= d\left[\int_0^1 t^{k-1} f(tx)dt \right] dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = d^k L^k(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}).$$

Да напомним, че вътрешното умножение $i_X : \mathcal{A}^k \to \mathcal{A}^{k-1}$ с гладко векторно поле $X = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)$ е $\mathbb{R}$-линейното продължение на

$$i_X \left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1\dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \right) =$$

$$= \sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{s=1}^{k} (-1)^{s-1} f_{i_1\ldots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_s}(X) \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

където $dx_{i_s}(X) = \xi_{i_s}(x)$ е стойността на $dx_{i_s} \in \mathcal{A}^1$ върху X. Да фиксираме гладкото векторно поле

$$X = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Твърдим, че

$$L^k(i_X d^k + d^{k-1} i_X) = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}^k},$$

така че полагайки $C^k = L^{k-1} i_X$ получаваме $C^{k+1} d^k + d^{k-1} C^k = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}^k}$. Използвайки $\mathbb{R}$-линейността на участващите в тъждеството изображения, свеждаме доказателството към

$$L^k \left(i_X d^k + d^{k-1} i_X \right) (f dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) =$$

$$= L^k \left[i_X \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \right) + d^{k-1}(f i_X(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})) \right] =$$

$$= L^k \left[\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} (dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) - \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge i_X(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge i_X(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) + f d^{k-1} i_X(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) \right] =$$

$$= L^k \left[\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} + \right.$$

$$\left. + f d^{k-1} \left(\sum_{s=1}^{k} (-1)^{s-1} x_{i_s} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_s}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \right) \right] =$$

$$= L^k \left[\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} + \right.$$

$$\left. + f \left(\sum_{s=1}^{k} (-1)^{s-1} dx_{i_s} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_s}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \right) \right] =$$

$$= L^k \left[\left(kf + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \right] =$$

$$= \left\{ \int_0^1 t^{k-1} \left[kf(tx) + \sum_{j=1}^{n} t x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) \right] dt \right\} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} =$$

$$= \left[\int_0^1 \frac{d}{dt}(t^k f(tx)) dt \right] dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = f(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

Q.E.D.

Твърдение 4.5. *Ако $U \subseteq \mathbb{C}^n$ е околност на точка $a \in \mathbb{C}^n$ и $u : U \to \mathbb{R}$ е плурихармонична в U, то съществува околност $V \subseteq U$ на a и функции $f, g : V \to \mathbb{C}$, които са холоморфни в a и имат $Re(f) = u$, $Im(g) = u$.*

Доказателство: Да разгледаме диференциалната форма

$$du = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_j} dy_j$$

и нейната спрегната

$$*du = \sum_{j=1}^{n} -\frac{\partial u}{\partial y_j} dx_j + \frac{\partial u}{\partial x_j} dy_j.$$

С помощта на уравненията (4.1) непосредствено се проверява, че $d(*du) = 0$ за плурихармонична u. По-точно,

$$d(*du) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[-\frac{\partial^u}{\partial x_k \partial y_j} dx_k \wedge dx_j - \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j} dy_k \wedge dx_j + \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dy_j + \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial x_j} dy_k \wedge dy_j \right] =$$

$$= \sum_{1 \leq k < j \leq n} \left[-\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial y_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_k} \right] dx_k \wedge dx_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right] dx_j \wedge dy_k +$$

$$+ \sum_{1 \leq k < j \leq n} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial x_k} \right] dy_k \wedge dy_j = 0.$$

Съгласно Лемата на Поанкаре, съществува кълбо $a \in B(a,r) \subseteq U$, в което затворената форма $*du$ е точна. Това означава съществуване на функция $v : B(a,r) \to \mathbb{R}$ с пълен диференциал $dv = *du$. По-подробно,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial v}{\partial y_j} dy_j = dv = *du = \sum_{j=1}^{n} -\frac{\partial u}{\partial y_j} dx_j + \frac{\partial u}{\partial x_j} dy_j.$$

Оттук следват уравненията на Коши-Риман (1.1), които са еквивалентни на холоморфността на $f(z) := u + iv$ в $a \in V$. Да отбележим също, че холоморфната функция $if = -v + iu : V \to \mathbb{C}$ има имагинерна част $Im(if) = u$, Q.E.D.
Ако u е плурихармонична и сумираме диференциалните уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^u}{\partial y_j^2} = 0$ за всички $1 \leq j \leq n$, то получаваме $\Delta u = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \right) u = 0$, където Δ с сме означили Лапласиана.

Определение 4.6. *Двукратно диференцируемата функция u е хармонична, ако*

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} = 0.$$

Ясно е, че всички плурихармонични функции са хармонични. Обратното не е вярно за $n > 1$.
Продължаваме с изучаване на хармоничните функции върху области $D \subseteq \mathbb{C}$.

Определение 4.7. *Функцията $u : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ върху област $D \subseteq \mathbb{C}$ изпълнява принципа за максимума, ако за всяко отворено множество $U \subset \mathbb{C}$ с компактна затворена обвивка $\overline{U} \subset D$ е в сила*

$$u(z) \leq \sup_{\zeta \in \partial U} u(\zeta) \quad \text{за} \quad \forall z \in U.$$

Твърдение 4.8. *Ако D е област в $\mathbb{C}$, $u \in C^2(D)$ и $\Delta u \geq 0$, то u изпълнява принципа за максимума.*
В частност, всяка хармонична функция $u : D \to \mathbb{R}$ изпълнява принципа за максимума.

Доказателство: Достатъчно е да установим верността на твърдението за $u \in C^2(D)$ с $\Delta u(z) > 0$ във $\forall z \in D$. Наистина, за произволна функция $u \in C^2(D)$ с $\Delta u \geq 0$ разглеждаме функцията

$$u_\varepsilon(z) := u(z) + \varepsilon |z|^2$$

с $\Delta u_\varepsilon = \Delta u + 4\varepsilon > 0$ за някакво $\varepsilon > 0$. Да предположим, че $u_\varepsilon(z) \leq \sup\limits_{\zeta \in \partial U} u_\varepsilon(\zeta)$ за $\forall z \in U$. Съгласно компактността на ∂U, супремумът на u_ε върху ∂U се достига в някаква точка $\zeta_o \in \partial U$. При граничен преход $\varepsilon \to 0$ неравенствата $u(\zeta) + \varepsilon|\zeta|^2 \leq u(\zeta_o) + \varepsilon|\zeta_o|^2$ за $\forall \zeta \in \partial U$ дават $u(\zeta) \leq u(\zeta_o)$, така че $\sup\limits_{\zeta \in \partial U} u(\zeta) = u(\zeta_o)$. Сега за $\forall z \in U$ е в сила

$$u(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(z) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} [\sup_{\zeta \in \partial U} u_\varepsilon(\zeta)] = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(\zeta_o) = u(\zeta_o) = \sup_{\zeta \in \partial U} u(\zeta).$$

Да допуснем, че $\Delta u > 0$ във всяка точка на $D \subseteq \mathbb{C}$, но съществуват ограничена област $U \subset \overline{U} \subset D$ и точка $a \in U$ с $u(a) > \sup\limits_{\zeta \in \partial U} u(\zeta)$. Непрекъснатата функция u е ограничена върху компакта $\overline{U}$ и достига максимума си в някаква точка $z_o \in \overline{U}$, т.е. $u(z_o) = \sup\limits_{z \in \overline{U}} u(z)$. Съгласно допускането, $z_o = x_o + iy_o \in U \subset \mathbb{C}$ е вътрешна точка. Ако $x = Re(z)$, $y = Im(z)$ и разглеждаме $u(x+iy)$ като функция на две реални променливи, то $g(y) := u(x_o + iy)$ е реална функция на една променлива с непрекъснати втори производни. Доколкото $g(y)$ достига максимума си за вътрешна точка $y = y_o$, първата производна $\frac{dg}{dy}(y_o) = 0$, а втората производна $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z_o) = \frac{d^2 g}{dy^2}(y_o) \leq 0$. Аналогично, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z_o) \leq 0$, откъдето $\Delta u(z_o) \leq 0$, противно на допускането $\Delta u(z) > 0$ за $\forall z \in U$. Това доказва, че $u(z) \leq \sup\limits_{\zeta \in \partial U} u(\zeta)$ за $\forall z \in U$, Q.E.D.

Определение 4.9. *Ако $\zeta = a + \rho e^{i\theta} \in \partial D(a,\rho) = S^1(a,\rho)$, е точка от граничната окръжност, а $z \in D(a,\rho)$ е вътрешна точка на диска $D(a,\rho) \subset \mathbb{C}$, то ядрото на Поасон е функцията*

$$P(z,\theta) := Re\left[\frac{\rho e^{i\theta} + (z-a)}{\rho e^{i\theta} - (z-a)}\right].$$

Непосредствено се пресмята, че

$$P(z,\theta) = \frac{|\zeta - a|^2 - |z-a|^2}{|\zeta - z|^2} > 0.$$

Лема 4.10. *За произволна непрекъсната функция $h : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ с $h(0) = h(2\pi)$ разглеждаме*

$$P(h) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,\theta) h(\theta) d\theta.$$

Тогава $P(h) : D(a,\rho) \to \mathbb{R}$ е хармонична функция и

$$\lim_{D(a,\rho) \ni z \to a + \rho e^{i\theta}} P(h)(z) = h(\theta)$$

равномерно по $\theta \in [0,2\pi]$.

Доказателство: Без ограничение на общността можем да предполагаме, че центърът $a = 0 \in \mathbb{C}$ и радиусът $\rho = 1$. Функцията

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{i\theta} + (z-a)}{\rho e^{i\theta} - (z-a)} h(\theta) d\theta \quad \text{за} \quad z \in D(a,\rho)$$

е холоморфна, така че

$$Re(f(z)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re\left[\frac{\rho e^{i\theta} + (z-a)}{\rho e^{i\theta} - (z-a)}\right] h(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,\theta)h(\theta)d\theta = P(h)(z)$$

е хармонична за $\forall z \in D(a,\rho)$. Непосредствено се вижда, че

$$P(1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,\theta)d\theta = Re\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta\right] =$$

$$= Re\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\right] + Re\left[\frac{2z}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{e^{i\theta}-z}\right] = 1 + Re\left[\frac{2z}{2\pi i}\int_{S^1(0,1)} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)}\right] =$$

$$= 1 + Re\left[\frac{-2}{2\pi i}\int_{S^1(0,1)}\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{2}{2\pi i}\int_{S^2(0,1)}\frac{d\zeta}{(\zeta - z)}\right] = 1 + Re(-2+2) = 1.$$

Следователно за $\forall z \in D(0,1)$ е изпълнено

$$P(h) - h(\theta_o) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,\theta)h(\theta)d\theta - h(\theta_o) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,\theta)[h(\theta) - h(\theta_o)]d\theta.$$

Ако разглеждаме $h(\theta)$ като непрекъсната функция на $e^{i\theta}$, то за $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$ съществува $\delta \in \mathbb{R}^{>0}$, така че $|h(\theta) - h(\theta_o)| < \varepsilon$ за всички θ с $|e^{i\theta} - e^{i\theta_o}| < \delta$. Вземайки предвид, че $P(z,\theta) > 0$, оценяваме

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|e^{i\theta}-e^{i\theta_o}|<\delta} P(z,\theta)|h(\theta) - h(\theta_o)|d\theta < \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,\theta) = \varepsilon.$$

От друга страна, за $M := \sup\limits_{\theta\in[0,2\pi]} h(\theta)$ имаме

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|e^{i\theta}-e^{i\theta_o}|\geq\delta} P(z,\theta)|h(\theta) - h(\theta_o)|d\theta \leq \frac{2M}{2\pi}\int_{|e^{i\theta}-e^{i\theta_o}|\geq\delta} P(z,\theta)d\theta.$$

Сега $\lim\limits_{D(0,1)\ni z\to e^{i\theta_o}} P(z,\theta) = \lim\limits_{D(0,1)\ni z\to e^{i\theta_o}} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} = 0$ равномерно по $\theta_o \in [0,2\pi]$ за $|e^{i\theta} - e^{i\theta_o}| \geq \delta$ и

$$\lim_{D(0,1)\ni z\to e^{i\theta_o}} \frac{2M}{2\pi}\int_{|e^{i\theta}-e^{i\theta_o}|\geq\delta} P(z,\theta)d\theta = 0.$$

В резултат, $\limsup_{D(0,1)\ni z\to e^{i\theta_o}} |P(h)(z) - h(\theta_o)| \leq \varepsilon$ за всяко $\varepsilon > 0$. Избирайки произволни достатъчно малки $\varepsilon > 0$ получаваме, че $\limsup\limits_{z\to e^{i\theta_o}} |P(h)(z) - h(\theta_o)| = 0$, Q.E.D.

Следствие 4.11. *Непрекъснатата функция* $u : \overline{D(a,\rho)} \to \mathbb{R}$ *има хармонично ограничение* $u : D(a,\rho) \to \mathbb{R}$ *тогава и само тогава, когато*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z,\theta) u(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad \text{за} \quad \forall z \in D(a,\rho). \tag{4.2}$$

Доказателство: Съгласно Лема 4.10, ако

$$u(z) = P(u|_{\partial D(a,\rho)}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z,\theta) u(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad \text{за} \quad \forall z \in D(a,\rho),$$

то функцията $u : D(a,\rho) \to \mathbb{R}$ е хармонична в отворения диск $D(a,\rho)$.
Нека $u : D(a,\rho) \to \mathbb{R}$ е хармонична функция и

$$v(z) = P(u|_{\partial D(a,\rho)})(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z,\theta) u(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad \text{за} \quad \forall z \in D(a,\rho).$$

Тогава $v : D(a,\rho) \to \mathbb{R}$, а оттам и $u - v : D(a,\rho) \to \mathbb{R}$ са хармонични. За $\forall z \in D(a,\rho)$ съществува достатъчно малко $\varepsilon > 0$, така че $z \in D(a,\rho-\varepsilon) \subset \overline{D(a,\rho-\varepsilon)} \subset D(a,\rho)$. По Твърдение 4.8, функцията $u - v$ изпълнява принципа за максимума в $D(a,\rho)$, така че

$$(u-v)(z) \leq \sup_{\theta \in [0,2\pi]} \left[(u-v)\left(a + \left(\rho - \frac{\varepsilon}{m}\right) e^{i\theta}\right)\right]$$

за всички $m \in \mathbb{N}$. Непрекъснатите функции $(u-v)\left(a + \left(\rho - \frac{\varepsilon}{m}\right) e^{i\theta}\right)$ на θ достигат супремумите си върху компакта $[0,2\pi]$ в някакви точки $\theta_m \in [0,2\pi]$, така че

$$(u-v)(z) \leq (u-v)\left(a + \left(\rho - \frac{\varepsilon}{m}\right) e^{i\theta_m}\right) \tag{4.3}$$

Избираме сходяща подредица $\{\theta_{i_m}\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \{\theta_m\}_{m=1}^{\infty} \subset [0,2\pi]$ с $\lim\limits_{m\to\infty} \theta_{i_m} = \theta_o$ и извършваме граничен преход $m \to \infty$ в (4.3). Това дава

$$u(z) - v(z) \leq u(a + \rho e^{i\theta_o}) - v(a + \rho e^{i\theta_o}) = 0.$$

По аналогичен начин се извежда $v(z) - u(z) \leq 0$, за да се получи $u(z) = v(z)$ за $\forall z \in D(a,\rho)$. Оттук

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z,\theta) u(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad \text{за} \quad \forall z \in D(a,\rho),$$

Q.E.D.