Глава 5

Критерий за субхармоничност

Да разгледаме някои общи свойства на полу-непрекъснатите отгоре функции, преди да се съсредоточим върху онези от тях, които са субхармонични.

Лема-Определение 5.1. *Нека D е област в $\mathbb{C}$, а $u : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ е функция с $u(D) \neq \{-\infty\}$. Следните условия са еквивалентни:*
(i) за $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ праобразът $u^{-1}(-\infty, \alpha)$ на интервал $(-\infty, \alpha) \subset \mathbb{R}$ е отворено подмножество на D;
(ii) за $\forall a \in D$ е в сила

$$\limsup_{z \to a, z \neq a} u(z) \leq u(a).$$

Ако горните условия са изпълнени, то u се нарича полу-непрекъсната отгоре. Ако $u : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ е полу-непрекъсната отгоре, то u е ограничена отгоре върху всеки компакт $K \subset D$ и достига точната си горна граница върху K.

Доказателство: Да предположим, че е изпълнено (i) и е нарушено (ii). Тогава съществува точка $a \in D$ и редица $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D \setminus \{a\}$, клоняща към a, така че

$$u(a) < \limsup_{k \to \infty} u(z_k) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} u(z_k).$$

Следователно $\sup\limits_{k \geq n} u(z_k) > u(a)$ за $\forall n \in \mathbb{N}$. С други думи, съществува реално положително число ε, така че $\sup\limits_{k \geq n} u(z_k) \geq u(a) + \varepsilon$. В резултат, можем да изберем подредица $\{z_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ с условието $u(z_{k_n}) \geq u(a) + \varepsilon$ за $\forall n \in \mathbb{N}$. Това е еквивалентно на $\{z_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \subset u^{-1}[u(a) + \varepsilon, \infty)$. Но съгласно предположение (i), подмножеството $u^{-1}[u(a) + \varepsilon, \infty) \subseteq D$ е затворено, така че $\lim\limits_{n \to \infty} z_{k_n} = a \in u^{-1}[u(a) + \varepsilon, \infty)$. По този начин получаваме $u(a) \geq u(a) + \varepsilon$, което противоречи на избора на $\varepsilon > 0$ и доказва $(i) \Longrightarrow (ii)$.
Обратно, при предположение (ii) трябва да докажем, че за $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ подмножеството $u^{-1}[\alpha, \infty) \subseteq D$ е затворено. По-точно, ако редица $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset u^{-1}[\alpha, \infty)$ клони към точка $a \in D$, то твърдим, че $u(a) \geq \alpha$. Наистина, от $u(z_k) \geq \alpha$ за $\forall k \in \mathbb{N}$ и условие (ii) следва, че

$$u(a) \geq \limsup_{k \to \infty} u(z_k) \geq \alpha.$$

Накрая, да допуснем, че съществува компакт $K \subset D$, върху който някаква полу-непрекъсната отгоре функция $u : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ е неограничена отгоре. Тогава за $\forall n \in \mathbb{N}$ съществува $z_n \in K$ с $u(z_n) \geq n$. След евентуално преминаване към подредица можем да считаме, че редицата $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ е сходяща към точка $a \in K$, съгласно компактността на K. Но тогава по условие (ii) имаме

$$u(a) \geq \limsup_{n \to \infty} u(z_n) = \lim_{n \to \infty} u(z_n) = \infty.$$

Противоречието доказва, че u е ограничена отгоре върху всеки компакт $K \subset D$. Още повече, твърдим, че $M := \sup\limits_{\zeta \in K} u(\zeta)$ се достига в някоя точка $\zeta_o \in K$. Наистина, ако u е постоянна върху K, то няма какво да се доказва. Ако u не е постоянна върху K, то съществува редица $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ с $\lim\limits_{n\to\infty} u(\zeta_n) = M$, $u(\zeta_n) < M$. След евентуално преминаване към подредица можем да считаме, че редицата $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и клони към $\zeta_o \in K$. Сега за $\forall \varepsilon > 0$ съществува $n_o \in \mathbb{N}$, така че $u(\zeta_n) \geq M - \varepsilon$ за $\forall n \geq n_o$. С други думи, $\zeta_n \in u^{-1}[M-\varepsilon, \infty)$ за $\forall n \geq n_o$. Доколкото u е полу-непрекъсната отгоре, праобразът $u^{-1}[M-\varepsilon,\infty) \subset K$ е затворено и съдържа $\zeta_o = \lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n$. По този начин, $u(\zeta_o) \geq M - \varepsilon$ за $\forall \varepsilon > 0$, така че $u(\zeta_o) \geq M$. Комбинирайки с $u(\zeta_o) \leq M$ получаваме $u(\zeta_o) = M$, Q.E.D.

Лема 5.2. *За произволна ограничена отгоре и полу-непрекъсната отгоре функция $u : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ съществува редица от непрекъснати върху D функции $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, така че във всяка точка $z \in D$ редицата $\{u_k(z)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ е намаляваща и клони към $u(z)$.*

Доказателство: Нека $M := \sup\limits_{\zeta \in D} u(\zeta)$,

$$\delta_k(z,\zeta) := u(\zeta) - k|\zeta - z| \quad \text{за} \quad \forall z, \zeta \in D \quad \text{и}$$

$$u_k(z) := \sup_{\zeta\in D} \delta_k(z,\zeta).$$

Тогава $-\infty < u_k(z) < \infty$ и $u_k(z) \geq \delta_k(z,z) = u(z)$. Твърдим, че $u_k(z) \geq u_{k+1}(z)$ за $\forall z \in D$ и $\forall k \in \mathbb{N}$. По-подробно, ако $u_{k+1}(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \delta_{k+1}(z,\zeta_n)$ за някаква редица $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$, то $\delta_{k+1}(z,\zeta_n) \leq \delta_k(z,\zeta_n) \leq u_k(z)$ за $\forall n \in \mathbb{N}$ дава $u_{k+1}(z) \leq u_k(z)$.

От неравенството на триъгълника $|\zeta - z| \leq |\zeta - z'| + |z' - z|$ за $\forall z, z', \zeta \in D$ следва, че

$$\delta_k(z,\zeta) \geq \delta_k(z',\zeta) - k|z'-z|.$$

Прилагайки $\sup\limits_{\zeta\in D}$ получаваме

$$u_k(z) \geq u_k(z') - k|z'-z|.$$

Последното неравенство е в сила и след размяна на z с z', така че

$$|u_k(z) - u_k(z')| \leq k|z - z'|.$$

Това доказва непрекъснатостта на $u_k : D \to \mathbb{R}$ за $\forall k \in \mathbb{N}$.

Остава да проверим, че във всяка точка $z \in D$ числовата редица $\{u_k(z)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ клони към $u(z) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Ако $u(z) > -\infty$, то за произволно $\varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$ подмножеството $u^{-1}(-\infty, u(z)+\varepsilon) \subseteq D$ е отворена околност на z. Затова съществува диск $D(z,\delta) \subset \overline{D(z,\delta)} \subseteq u^{-1}(-\infty, u(z)+\varepsilon) \subseteq D$ с подходящ радиус $\delta \in \mathbb{R}^{>0}$. За достатъчно големи $k_o \in \mathbb{N}$ е в сила $M - k_o\delta < u(z)$. Всяка точка $z' \in u^{-1}(-\infty, u(z)+\varepsilon)$ изпълнява неравенствата

$$\delta_k(z,z') = u(z') - k|z'-z| \leq u(z') < u(z) + \varepsilon.$$

Точките $z' \notin u^{-1}(-\infty, u(z)+\varepsilon)$ са извън $\overline{D(z,\delta)}$, така че

$$\delta_k(z,z') = u(z') - k_o|z-z'| < u(z') - k_o\delta \leq M - k_o\delta < u(z).$$

По този начин,

$$u(z) \leq u_k(z) = \sup_{z'\in D} \delta_k(z,z') < u(z) + \varepsilon \quad \text{за} \quad \forall k \geq k_o$$

и редицата $\{u_k(z)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ клони към $u(z) > -\infty$.

Ако $u(z) = -\infty$, то за произволно $C \in \mathbb{R}^{>0}$ подмножеството $u^{-1}(-\infty, -C) \subseteq D$ е отворено и съдържа диск $D(z,\delta) \subset \overline{D(z,\delta)} \subset u^{-1}(-\infty,-C) \subseteq D$. Ако $z' \in u^{-1}(-\infty,-C)$, то за $\forall k \in \mathbb{N}$ е в сила

$$\delta_k(z,z') = u(z') - k|z'-z| \leq u(z') < -C.$$

Избираме достатъчно голямо $k_o \in \mathbb{N}$, така че $k_o\delta > M+C$. Тогава за произволни $z' \notin u^{-1}(-\infty, -C)$ и $\forall k \geq k_o$ имаме

$$\delta_{k_o}(z, z') = u(z') - k_o|z' - z| < M - k_o\delta < -C.$$

В резултат, $u_k(z) = \sup\limits_{z' \in D} \delta_k(z, z') \leq -C$ за $\forall k \geq k_o$ и редицата $\{u_k(z)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ клони към $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(z) = -\infty = u(z)$, Q.E.D.

Определение 5.3. *Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област, а $u : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ е полунепрекъсната отгоре функция в D. Казваме, че u е субхармонична, ако за произволно отворено подмножество $U \subset D$ с компактна затворена обвивка $\overline{U} \subset D$ и всяка хармонична функция $h_U : U \to \mathbb{R}$ с непрекъснато продължение $h_U : \overline{U} \to \mathbb{R}$ неравенствата $u(\zeta) \leq h(\zeta)$ за $\forall \zeta \in \partial U$ водят до $u(z) \leq h(z)$ за $\forall z \in U$.*

При наличие на двукратна $\mathbb{R}$-диференцируемост, субхармоничните функции са обобщение на изпъкналите функции $u : (a, b) \to \mathbb{R}$ в интервала $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Наистина, за произволни $a \leq t_0 < t_1 \leq b$, непрекъснатите решения $h : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ на диференциалното уравнение $\frac{d^2h}{dt^2} = 0$ са линейните функции $h(t) = \alpha t + \beta$ за някакви $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Функциите $u : (a, b) \to \mathbb{R}$, за които условията $u(t_0) \leq h(t_0)$ и $u(t_1) \leq h(t_1)$ върху краищата на произволен интервал $[t_0, t_1] \subset (a, b)$ влекат $u(t) \leq h(t)$ за $\forall t \in [t_0, t_1]$ се наричат изпъкнали.
Да отбележим също, че всяка хармонична функция h_o е субхармонична. Наистина, за всяко отворено подмножество $U \subset D$ с компактна затворена обвивка $\overline{U} \subset D$ и за всяка хармонична функция $h : U \to \mathbb{R}$ с непрекъснато продължение $h : \overline{U} \to \mathbb{R}$, функцията $h_o - h : U \to \mathbb{R}$ е хармонична. Съгласно Твърдение 4.8, $h_0 - h$ изпълнява принципа за максимума, т.е.

$$h_o(z) - h(z) \leq \sup_{\zeta \in \partial U} [h_o(\zeta) - h(\zeta)] \quad \text{за } \forall z \in U.$$

По този начин, от $h_o(\zeta) \leq h(\zeta)$ за $\forall \zeta \in \partial U$ следва $h_o(z) \leq h(z)$ за $\forall z \in U$ и h_o се оказва субхармонична.

Лема 5.4. *Нека функцията $u : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ е субхармонична в областта D. Тогава:*
(i) $u^{-1}(-\infty)$ не съдържа непразно отворено в $\mathbb{C}$ подмножество;
(ii) за произволен диск $\overline{D(a, \rho)} \subset D$ интегралът

$$\int_0^{2\pi} |u(a + \rho e^{i\theta})| d\theta < \infty$$

по граничната окръжност $\partial D(a, \rho) \subset D$ е сходящ.

Доказателство: (i) Ако допуснем противното, то съществува отворено в $\mathbb{C}$ подмножество $U \subseteq u^{-1}(-\infty)$. Без ограничение на общността считаме, че U е множеството на вътрешните точки на $u^{-1}(-\infty)$, т.е. $z \in U$ точно когато съществува диск $\overline{D(z, \varepsilon)} \subset u^{-1}(-\infty)$. Избираме гранична точка $a \in \partial U = \overline{U} \setminus U$ и затворен диск $\overline{D(a, \rho)} \subset D$. Тогава $D(a, \rho) \cap U \neq \emptyset$ и $D(a, \rho) \cap [D \setminus u^{-1}] \neq \emptyset$. След евентуално свиване на ρ можем да считаме, че $\partial D(a, \rho) \cap U \neq \emptyset$. Тогава $\partial D(a, \rho) \cap U$ е отворено подмножество на $\partial D(a, \rho)$.
Ако U_o е околност на $\overline{D(a, \rho)}$ с компактна затворена обвивка $\overline{U_o} \subset D$, то съгласно Лема-Определение 5.1, полу-непрекъснатата отгоре функция u е ограничена върху компакта $\overline{U_o}$, а оттам и върху U_o. Сега по Лема 5.2 съществува редица $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ от непрекъснати в U_o функции $u_k : U_o \to \mathbb{R}$, така че във всяка точка

$z \in U_o$ числовата редица $\{u_k(z)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ намалява и клони към $u(z)$. Нека

$$h_k(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z,\theta) u_k(a+\rho e^{i\theta}) d\theta \quad \text{за} \quad z \in D(a,\rho)$$

и $h_k(z) = u(z)$ за $z \in \partial D(a,\rho)$. Лема 4.10 гарантира хармоничността на функциите $h_k : D(a,\rho) \to \mathbb{R}$ и непрекъснатостта на $h_k : \overline{D(a,\rho)} \to \mathbb{R}$. От $h_k(\zeta) = u_k(\zeta) \geq u(\zeta)$ за $\forall \zeta \in \partial D(a,\rho)$ и субхармоничността на u получаваме $u(z) \leq h(z)$ за $\forall z \in D(a,\rho)$. В частност, за $z_o \in D(a,\rho) \setminus u^{-1}(-\infty)$ имаме

$$-\infty < u(z_o) \leq h_k(z_o) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z_o,\theta) u_k(a+\rho e^{i\theta}) d\theta.$$

За всяко фиксирано $\theta \in [0,2\pi]$ редицата $\{P(z_o,\theta)u_k(a+\rho e^{i\theta})\}_{k=1}^{\infty}$ намалява и клони към $P(z_o,\theta)u(a+\rho e^{i\theta})$ благодарение на $P(z_o,\theta) > 0$. Следователно по Теоремата на Лебег за монотонна сходимост, редицата от интеграли

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z_o,\theta) u_k(a+\rho e^{i\theta}) d\theta \right\}_{k=1}^{\infty}$$

намалява и клони към $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z_o,\theta) u(a+\rho e^{i\theta}) d\theta$. Вземайки предвид, че отвореното подмножество $U \cap \partial D(a,\rho) \subseteq \partial D(a,\rho)$ има положителна мярка, получаваме

$$-\infty < u(z_o) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z_o,\theta) u(a+\rho e^{i\theta}) d\theta = -\infty.$$

Противоречието доказва, че $u^{-1}(-\infty)$ не съдържа отворено в $\mathbb{C}$ подмножество.
(ii) По аналогия с (i) да изберем околност U_o на $\overline{D(a,\rho)}$ с компактна затворена обвивка $\overline{U_o} \subset D$. Тогава полу-непрекъснатата отгоре функция $u : \overline{U_o} \to \mathbb{R}$ е ограничена. В резултат, съществуват непрекъснати функции $u_k : U_o \to \mathbb{R}$, така че във всяка точка $z \in U_o$ редицата $\{u_k(z)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ намалява и клони към $u(z)$. Тогава

$$h_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z,\theta) u_k(a+\rho e^{i\theta}) d\theta$$

е редица от хармонични в $D(a,\rho)$ и непрекъснати в $\overline{D(a,\rho)}$ функции, изпълняващи неравенствата $u(z) \leq h_k(z)$ за $\forall z \in D(a,\rho)$. Съгласно (i), множеството $u^{-1}(-\infty)$ не покрива $D(a,\rho)$ и съществува $z_o \in D(a,\rho) \setminus u^{-1}(-\infty)$. За произволна функция $v : U_o \to \mathbb{R}$ да означим $v^+(z) := \max(v(z),0)$ и $v^-(z) := \min(v(z),0)$ за $\forall z \in U_o$ и да разложим $v = v^+ + v^- = v^+ - |v^-|$. Полагайки

$$I_k^+ := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z_o,\theta) u_k^+(a+\rho e^{i\theta}) d\theta,$$

$$I_k^- := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z_o,\theta) |u_k^-(a+\rho e^{i\theta})| d\theta,$$

получаваме $-\infty < u(z_o) \leq I_k^+ - I_k^-$. Ако

$$S_k = \left\{ \theta \in [0,2\pi] \,|\, u_k\left(a+\rho e^{i\theta}\right) > 0 \right\},$$

то
$$I_k^+ = \frac{1}{2\pi}\int_{S_k} P(z_o,\theta)u_k\left(a+\rho e^{i\theta}\right)d\theta.$$
Въвеждаме $M_k := \sup\limits_{z\in\overline{D(a,\rho)}} u_k(z)$ и забелязваме, че
$$M_1 \geq M_2 \geq \ldots \geq M_k \geq M_{k+1} \geq \ldots .$$
Следователно $u_k(a+\rho e^{i\theta}) \leq M_1$ за $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\forall\theta \in [0,2\pi]$. От друга страна, непрекъснатата функция $P(z_o,\ ) : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^{>0}$ е ограничена върху компакта $[0,2\pi]$, т.е. съществува $C := \sup\limits_{\theta\in[0,2\pi]} P(z_o,\theta) < \infty$. Вземайки предвид $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\theta = 1$, получаваме $I_k^+ \leq M_1 C$ за $\forall k \in \mathbb{N}$. От друга страна, редицата $\left\{|u_k^-(a+\rho e^{i\theta})|\right\}_{k=1}^{\infty}$ е монотонно растяща и сходяща към $|u^-(a+\rho e^{i\theta})|$ за всички $\theta \in [0,2\pi]$. Вземайки предвид, че $P(z_o,\theta) > 0$, получаваме монотонно растяща редица
$$\left\{P(z_o,\theta)|u_k^-(a+\rho e^{i\theta})|\right\}_{k=1}^{\infty},$$
клоняща към $P(z_o,\theta)|u^-(a+\rho e^{i\theta})|$. По Теоремата на Лебег за монотонната сходимост, редицата
$$\left\{I_k^- = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(z_o,\theta)|u_k^-(a+\rho e^{i\theta})|d\theta\right\}_{k=1}^{\infty}$$
расте монотонно и клони към
$$I^- := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(z_o,\theta)|u^-(a+\rho e^{i\theta})|d\theta.$$
По този начин, от $I_k^- \leq M_1 C - u(z_o)$ следва $I^- \leq M_1 C - u(z_o) < \infty$. Доколкото ядрото на Поасон $P(z_o,\theta) = Re\left[\frac{\rho e^{i\theta}+(z_o-a)}{\rho e^{i\theta}-(z_o-a)}\right]$ зависи непрекъснато от θ и затвореният интервал $[0,2\pi]$ е компактен, съществува $\delta \in \mathbb{R}^{>0}$, така че $P(z_o,\theta) \geq \delta$ за $\forall\theta \in [0,2\pi]$. Следователно
$$\frac{\delta}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |u^-(a+\rho e^{i\theta})|d\theta < \infty,$$
откъдето и
$$\int\limits_0^{2\pi} |u^-(a+\rho e^{i\theta})|d\theta < \infty.$$
Ако $S = \left\{\theta \in [0,2\pi] \,|\, u\left(a+\rho e^{i\theta}\right) > 0\right\}$ и $M = \sup\limits_{\theta\in[0,2\pi]} u\left(a+\rho e^{i\theta}\right)$, то
$$\int\limits_0^{2\pi} u^+\left(a+\rho e^{i\theta}\right)d\theta = \int\limits_S u\left(a+\rho e^{i\theta}\right)d\theta \leq M\left[\int\limits_S d\theta\right] \leq M\left[\int\limits_0^{2\pi} d\theta\right] = 2\pi M < \infty,$$
така че
$$\int\limits_0^{2\pi} |u(a+\rho e^{i\theta})|d\theta = \int\limits_0^{2\pi} |u^+(a+\rho e^{i\theta}) - |u^-(a+\rho e^{i\theta})||d\theta \leq$$
$$\int\limits_0^{2\pi} u^+(a+\rho e^{i\theta})d\theta + \int\limits_0^{2\pi} |u^-(a+\rho e^{i\theta})|d\theta < \infty,$$
Q.E.D.

Твърдение 5.5. (Критерий за субхармоничност)*Нека $u : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ е полу-непрекъсната отгоре функция в област $D \subseteq \mathbb{C}$. В такъв случай, u е субхармонична тогава и само тогава, когато за $\forall a \in D$ съществува $R = R(a) \in \mathbb{R}^{>0}$ с условието*

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad \text{за} \quad \forall 0 < \rho < R(a). \tag{5.1}$$

Доказателство: Нека $u : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ е субхармонична и $\overline{D(a, R)} \subset D$. Тогава съществува отворена околност $U_o \supset \overline{D(a, R)}$ с компактна затворена обвивка $\overline{U_o} \subset D$. В качеството си на полу-непрекъсната отгоре, функцията u е ограничена върху $U_o \subset \overline{U_o}$. Това дава възможност да приложим Лема 5.2 и да изберем редица $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ от непрекъснати функции $u_k : U_o \to \mathbb{R}$, която във всяка точка $z \in U_o$ намалява и клони към $u(z)$. Тогава функцията

$$h_k(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, \theta) u_k(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad \text{за}$$

е хармонична в $D(a, \rho)$ и непрекъсната в $\overline{D(a, \rho)}$ за всички $0 < \rho < R$. Съгласно определението за субхармоничност, $u(\zeta) \leq u_k(\zeta) = h_k(\zeta)$ за $\forall \zeta \in \partial D(a, \rho)$ дава $u(z) \leq h_k(z)$ за $\forall z \in D(a, \rho)$. По този начин получаваме

$$u(z) \leq h_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, \theta) u_k(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad \text{за} \quad \forall z \in D(a, \rho).$$

Приложението на Теоремата на Лебег за монотонната сходимост дава

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, \theta) u(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad \text{за } \forall z \in D(a, \rho), \quad \forall 0 < \rho < R.$$

В частност,

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\theta}) d\theta,$$

възоснова на $P(a, \theta) = 1$.

Обратно, да предположим, че за всяка точка $a \in D$ съществува $D(a, R) \subset D$, така че върху всяка вътрешна окръжност $\partial D(a, \rho) \subset D(a, R)$ е в сила (5.1). За произволно отворено подмножество $U \subset D$ с компактна затворена обвивка $\overline{U} \subset D$ ще докажем, че

$$u(z) \leq \sup_{\zeta \in \partial U} u(\zeta) \quad \text{за} \quad \forall z \in U. \tag{5.2}$$

Тогава всяка хармонична функция $h : U \to \mathbb{R}$ с непрекъснато продължение $h : \overline{U} \to \mathbb{R}$ има хармонична, а оттам и субхармонична противоположна $-h : U \to \mathbb{R}$. Прилагайки доказаната посока на твърдението получаваме

$$-h(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-h(a + \rho e^{i\theta})] d\theta \quad \text{за} \quad \forall 0 < \rho < R.$$

Събирайки почленно с (5.1) стигаме до извода, че

$$u(a) - h(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(a + \rho e^{i\theta}) - h(a + \rho e^{i\theta})] d\theta \quad \text{за} \quad \forall 0 < \rho < R.$$

Това дава възможност да приложим (5.2) и да стигнем до неравенствата

$$u(z) - h(z) \leq \sup_{\zeta \in \partial U} [u(\zeta) - h(\zeta)] \quad \text{за} \quad \forall z \in U.$$

Сега $u(\zeta) \leq h(\zeta)$ за $\forall \zeta \in \partial U$ води до $u(z) \leq h(z)$ за $\forall z \in U$ и доказва субхармоничността на u.

Да допуснем, че (5.2) не е изпълнено. Тогава съществува $z_o \in U$ с

$$u(z_o) > \sup_{\zeta \in \partial U} u(\zeta). \tag{5.3}$$

Полу-непрекъснатата отгоре функция u е ограничена върху компакта $\overline{U}$ и достига $\sup_{z \in \overline{U}} u(z) = u(c)$ в някаква точка $c \in \overline{U}$. Съгласно (5.3) точката е вътрешна за U. Нека V е свързаната компонента на U, съдържаща c и

$$S = \{z \in V \mid u(z) = u(c)\}.$$

Очевидно, S е непразно, доколкото $c \in S$. Вземайки предвид, че $u(z) \leq u(c)$ за $\forall z \in V$, можем за представим

$$S = \{z \in V \mid u(z) \geq u(c)\} = u^{-1}[u(c), \infty) \cap V.$$

Това показва, че $S \subseteq V$ е относително затворено във V, благодарение на полу-непрекъснатостта на u отгоре. Твърдим, че за $\forall b \in S$ с $\overline{D(b, R_b)} \subset V$ имаме $D(b, R_b) \subset S$, така че $S \subseteq V$ е отворено, а оттам и съвпада с V. Условието $D(b, R_b) \subset S$ е еквивалентно на $\partial D(b, \rho) \subset S$ за $\forall 0 < \rho < R_b$. По предположение,

$$u(c) = u(b) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(b + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad \text{за } \forall 0 < \rho < R_b.$$

Ако съществува $\theta_o \in [0, 2\pi]$ с $u(b + \rho e^{i\theta_o}) < u(c)$, то съществува достатъчно малко $\varepsilon_o > 0$, така че $u(b + \rho e^{i\theta_o}) < u(c) - \varepsilon_o$. Но множеството $u^{-1}(-\infty, u(c) - \varepsilon_o)$ е отворено съгласно полу-непрекъснатостта на u отгоре, така че съществува непразен отворен интервал $I \subset [0, 2\pi]$, съдържащ θ_o и съставен от такива θ, за които $u(b + \rho e^{i\theta}) < u(c) - \varepsilon_o$. Означавайки с $l(I)$ и $l([0, 2\pi] \setminus I)$ мерките на I и $[0, 2\pi] \setminus I$ оценяваме

$$u(c) \leq \frac{1}{2\pi} \int_I u(b + \rho e^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi] \setminus I} u(b + \rho e^{i\theta}) d\theta <$$

$$(u(c) - \varepsilon_o) \frac{l(I)}{2\pi} + u(c) \frac{l([0, 2\pi] \setminus I)}{2\pi} = u(c) - \varepsilon_o \frac{l(I)}{2\pi}.$$

От $l(I) > 0$ следва противоречие, което доказва $D(b, R_b) \subseteq S$ за $\forall b \in S$. В резултат, $S = V$ води до $u|_V \equiv u(c)$, откъдето

$$u(z_o) > \sup_{\zeta \in \partial U} u(\zeta) \geq \sup_{\zeta \in \partial V} u(\zeta) = u(c) = \sup_{z \in \overline{U}} u(z) \geq u(z_o).$$

Това установява верността на (5.2), Q.E.D.