Глава 6

Приложения на критерия за субхармоничност. Теорема на Хартогс за точната горна граница на редица от субхармонични функции.

Следствие 6.1. *Нека $u : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ е такава функция в област $D \subseteq \mathbb{C}$, че всяка точка $a \in D$ има околност $U_a \subset D$, върху която $u : U_a \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ е субхармонична. Тогава u е субхармонична върху D.*

Доказателство: За $\forall a \in D$ съществува $R(a) \in \mathbb{R}^{>0}$, така че $\overline{D(a, R(a))} \subseteq U_a$. Следователно $u : D(a, R(a)) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ е субхармонична и

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad \text{за} \quad \forall 0 < \rho < R(a).$$

Съгласно Твърдение 5.5, това е достатъчно за субхармоничността на функцията $u : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, Q.E.D.

Следствие 6.2. *Ако функциите u_1 и u_2 са субхармонични в област $D \subseteq \mathbb{C}$, то за произволни $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^{>0}$ функцията $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ е субхармонична в D.*

Доказателство: Съгласно критерия за субхармоничност (Твърдение 5.5), за $\forall a \in D$ съществува $R_a \in \mathbb{R}^{>0}$, така че за $\forall 0 < \rho < R_a$ е в сила

$$u_1(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1 \left(a + \rho e^{i\theta}\right) d\theta,$$

$$u_2(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_2 \left(a + \rho e^{i\theta}\right) d\theta.$$

За произволни $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ оттук следва

$$\lambda_1 u_1(a) + \lambda_2 u_2(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\lambda_a u_1 \left(a + \rho e^{i\theta}\right) + \lambda_2 u_2 \left(a + \rho e^{i\theta}\right)\right] d\theta$$

за $\forall 0 < \rho < R_a$. По Твърдение 5.5 това е достатъчно за субхармоничността на $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, Q.E.D.

Следствие 6.3. *Ако u_1 и u_2 са субхармонични в област $D \subseteq \mathbb{C}$, то функцията $u = \max(u_1, u_2)$ е субхармонична в D.*

Доказателство: Съгласно критерия за субхармоничност (Твърдение 5.5), за всяка точка $a \in D$ с $\overline{D(a, R_a)} \subset D$ и $\forall 0 < \rho < R_a$ е в сила

$$u_j(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_j \left(a + \rho e^{i\theta}\right) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \left(a + \rho e^{i\theta}\right) d\theta \quad \text{при } j = 1 \text{ или } 2.$$

Вземайки предвид, че $u(a) = u_1(a)$ или $u(a) = u_2(a)$, получаваме

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(a + \rho e^{i\theta}\right) d\theta$$

за $\forall 0 < \rho < R_a$. Съгласно Твърдение 5.5, това е достатъчно за субхармоничността на $u = \max(u_1, u_2)$ в D, Q.E.D.

Следствие 6.4. *Нека $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ е фамилия от субхармонични функции в област $D \subseteq \mathbb{C}$ и функцията*

$$z \mapsto u(z) = \sup_{\alpha\in A} u_\alpha(z)$$

е полу-непрекъсната отгоре в D. Тогава u е субхармонична в D.

Доказателство: Съгласно определението на точна горна граница, за всяка точка $a \in D$, съществува редица $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \subset A$, така че $\{u_{\alpha_n}(a)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ е монотонно растяща и сходяща към $u(a)$. Следователно за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $n_o \in \mathbb{N}$, така че $u(a) - \varepsilon < u_{\alpha_n}(a)$ за $\forall n \geq n_o$. Съгласно субхармоничността на u_{α_n} в D, ако $\overline{D(a, R_a)} \subset D$, то за $\forall 0 < \rho < R_a$ е изпълнено

$$u_{\alpha_n}(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{\alpha_n}\left(a + \rho e^{i\theta}\right) d\theta.$$

Комбинирайки с

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{\alpha_n}\left(a + \rho e^{i\theta}\right) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(a + \rho e^{i\theta}\right) d\theta$$

получаваме

$$u(a) - \varepsilon \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(a + \rho e^{i\theta}\right) d\theta.$$

Пускаме $\varepsilon \to 0$ и извеждаме

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(a + \rho e^{i\theta}\right) d\theta \tag{6.1}$$

за $\forall 0 < \rho < R_a$, при условие, че $\overline{D(a, R_a)} \subset D$. По предположение, функцията $u : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ е полу-непрекъсната отгоре, така че (6.1) е достатъчно за субхармоничността на u в D, Q.E.D.

Следствие 6.5. *Ако функцията $u : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ е субхармонична в област $D \subseteq \mathbb{C}$, то във всяка точка $a \in D$ е в сила*

$$u(a) = \limsup_{z\in D\setminus\{a\}, z\to a} u(z).$$

Доказателство: Да означим $l_a := \limsup_{z\in D\setminus\{a\}, z\to a} u(z)$. Полу-непрекъснатостта отгоре на u дава $l_a \leq u(a)$.
Да допуснем, че $l_a < u(a)$ и да фиксираме кампактно вложен диск $\overline{D(a, R_a)} \subset D$. Твърдим че за $l_a < \forall l'_a < u(a)$ съществува достатъчно малко $0 < \rho < R_a$, така че $u\left(a + \rho e^{i\theta}\right) < l'_a$ за $\forall \theta \in [0, 2\pi]$. В противен случай, за $\forall n \in \mathbb{N}$ можем да изберем $\theta_n \in [0, 2\pi]$ с $u\left(a + \frac{R_a}{n} e^{i\theta_n}\right) \geq l'_a$. Съгласно компактността на $\overline{D(a, R_a)}$,

съществува сходяща подредица $\left\{a + \frac{R_a}{k_n} e^{i\theta_{k_n}}\right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \left\{a + \frac{R_a}{n} e^{i\theta_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Ясно е, че границата на тази подредица е a и

$$l_a = \limsup_{n\to\infty} u\left(a + \frac{R_a}{k_n} e^{i\theta_{k_n}}\right) \geq l'_a.$$

Това противоречи на $l_a < l'_a$ и установява съществуването на достатъчно малко $0 < \rho < R_a$, за което $u\left(a + \rho e^{i\theta}\right) < l'_a$ при $\forall \theta \in [0, 2\pi]$. Сега критерият за субхармоничност (Твърдение 5.5) дава

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\theta}) d\theta < l'_a \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta\right] = l'_a.$$

Противоречието с $l'_a < u(a)$ и доказва равенството $l_a = u(a)$, Q.E.D.

Следствие 6.6. *Ако функцията $u : D \to \mathbb{R}$ е непрекъсната и субхармонична заедно с $-u$, то u е хармонична.*

Доказателство: В доказателството на Твърдение 5.5 установихме, че произволна субхармонична функция $u : D \to \mathbb{R}$ изпълнява неравенството

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z,\theta) u(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad \text{за} \quad \forall z \in D(a, \rho) \subset \overline{D(a, R_a)} \subset D.$$

Комбинирайки с

$$-u(z) \leq -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z,\theta) u(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad \text{за} \quad \forall z \in D(a, \rho) \subset \overline{D(a, R_a)} \subset D$$

получаваме, че

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z,\theta) u(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad \text{за} \quad \forall z \in D(a, \rho) \subset \overline{D(a, R_a)} \subset D.$$

Съгласно Следствие 4.11, за всяка точка $a \in D$ ограничението $u : D(a, R_a) \to \mathbb{R}$ е хармонична функция. Следователно $u : D \to \mathbb{R}$ е хармонична функция, Q.E.D.

Следствие 6.7. *Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област, а $u : D \to \mathbb{R}$ е от клас $C^2(D)$. В такъв случай, u е субхармонична тогава и само тогава, когато $\Delta u \geq 0$ във всяка точка на D.*

Доказателство: Нека $\Delta u(z) \geq 0$ за $\forall z \in D$. За произволно отворено подмножество $U \subset D$ с компактна затворена обвивка $\overline{U} \subset D$ да изберем хармонична функция $h : U \to \mathbb{R}$ с непрекъснато продължение $h : \overline{U} \to \mathbb{R}$ и $u(\zeta) \leq h(\zeta)$ за $\forall \zeta \in \partial U$. Тогава

$$\Delta(u - h)(z) = \Delta u(z) - \Delta h(z) = \Delta u(z) - 0 = \Delta u(z) \geq 0 \quad \text{за } \forall z \in U.$$

Съгласно Твърдение 4.8, функцията $u - h$ изпълнява принципа за максимума, т.е.

$$u(z) - h(z) \leq \sup_{\zeta \in \partial U} [u(\zeta) - h(\zeta)] \quad \text{за } \forall z \in U.$$

По този начин, ако $u(\zeta) \leq h(\zeta)$ за $\forall \zeta \in \partial U$, то $u(z) \leq h(z)$ за $\forall z \in U$ и това доказва субхармоничността на $u(z)$.
Обратно, ако допуснем, че за някаква субхармонична функция $u : D \to \mathbb{R}$ е изпълнено $\Delta u(a) < 0$ в някаква точка $a \in D$, то съществува околност $a \in U_a \subset D$, така че $\Delta u(z) < 0$ за $\forall z \in U_a$. В резултат, $-u : U_a \to \mathbb{R}$ има Лапласиан

$\Delta(-u)(z) > 0$ за $\forall z \in U_a$ и $-u : U_a \to \mathbb{R}$ е субхармонична съгласно доказаната посока на твърдението. Сега Следствие 6.6 гарантира хармоничността на u върху U_a. Оттук получаваме $\Delta u(a) = 0$, противно на предположението $\Delta u(a) < 0$. По този начин, произволна субхармонична функция $u : D \to \mathbb{R}$ има $\Delta u(z) \geq 0$ за $\forall z \in D$, Q.E.D.

Следствие 6.8. *Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област, а $u : D \to \mathbb{R}$ е функция от клас $C^2(D)$. В такъв случай, u е хармонична тогава и само тогава, когато за всяка точка $a \in D$ съществува $R(a) \in \mathbb{R}^{>0}$, така че*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad \text{за } \forall 0 < \rho < R(a). \tag{6.2}$$

Доказателство: Ясно е, че хармоничността на $u : D \to \mathbb{R}$ е еквивалентна на едновременната субхармоничност на u и $-u$. Прилагайки критерия за субхармоничност (Твърдение 5.5) получаваме, че последното условие е равносилно на това, за $\forall a \in D$ да съществува $R(a) \in \mathbb{R}^{>0}$, така че за $\forall 0 < \rho < R(a)$ да е изпълнено

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

и

$$-u(a) \leq -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

Тези две неравенства са еквивалентни на равенството (6.2), Q.E.D.
Следващото следствие предоставя примери за субхармонични функции, получени с помощта на холоморфна функция на една комплексна променлива.

Следствие 6.9. *Нека $f : D \to \mathbb{C}$ е нетъждествено нулева холоморфна функция в област $D \subseteq \mathbb{C}$. Тогава $\log |f(z)| : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ и $|f(z)|^\alpha : D \to \mathbb{R}$ за $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$ са субхармонични функции.*

Доказателство: Съгласно Следствие 6.1, достатъчно е да установим, че $g_1(z) := \log |f(z)|$ и $g_2(z) := |f(z)|^\alpha$ за $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$ са субхармонични в околност на всяка точка от D. Ако $f(a) = 0$, то $|f(a)| = 0$, така че $g_1(a) = -\infty$ и $g_2(a) = 0$. По Твърдение 2.5, съществува околност $U_a \subset D$ на a, така че $f(z) \neq 0$ за $\forall z \in U_a \setminus \{a\}$. Ако $\rho \in \mathbb{R}^{>0}$ е достатъчно малко, така че $D(a, \rho) \subset U_a$, то

$$-\infty = g_1(a) < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(a + \rho e^{i\theta})| d\theta$$

и

$$0 = g_2(a) < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + \rho e^{i\theta})|^\alpha d\theta.$$

Това е достатъчно за локалната субхармоничност на g_1 и g_2 около нула a на f. За $b \in D$ с $f(b) \neq 0$ съществува околност $U_b \subset D$ на b, така че $f(z) \neq 0$ за $\forall z \in U_b$. Освен това, можем да считаме, че околността U_b е свързана и едносвързана, така че съществува многозначна функция $\log(f) : U_b \to \mathbb{C}$. Нека $g : U_b \to \mathbb{C}$ е някакъв неин клон, т.е. $f(z) = e^{g(z)}$. Тогава $g_1(z) = \log |e^{g(z)}| = \log e^{Reg(z)} = Reg(z)$ е хармонична, а оттам и субхармонична функция в U_b.

Вземайки предвид, че $g_2(z) = |e^{g(z)}|^\alpha = e^{\alpha Reg(z)}$, разглеждаме холоморфната функция $e^{\alpha g(z)} : U_b \to \mathbb{C}$ и прилагаме към нея формулата на Коши

$$e^{\alpha g(b)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(b,\rho)} \frac{e^{\alpha g(b+\rho e^{i\theta})}}{\rho e^{i\theta}} d\left(b + \rho e^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{\alpha g(b+\rho e^{i\theta})} d\theta$$

за достатъчно малък диск $D(b, \rho) \subset U_b$. Вземайки абсолютни стойности оценяваме

$$|e^{\alpha g(b)}| = e^{\alpha Reg(b)} \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |e^{\alpha g(b+\rho e^{i\theta})}| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{\alpha Reg(b+\rho e^{i\theta})} d\theta.$$

Съгласно критерия за субхармоничност (Твърдение 5.5), това е достатъчно за субхармоничността на $g_2(z)$ в b, Q.E.D.

Следствие 6.10. *Ако $u : D \to \mathbb{R}$ е функция от клас $C^2(D)$ в областта D и субхармонична в $D \setminus \{a\}$ за някаква точка $a \in D$, то u е субхармонична в D.*

Доказателство: Съгласно критерия за субхармоничност (Твърдение 5.5), достатъчно е да докажем, че

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

за $\forall 0 < \rho < R_a$ при достатъчно малко $R_a \in \mathbb{R}^{>0}$. За целта избираме някакво $\varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$ и разглеждаме функцията

$$u_\varepsilon(z) := u(z) + \varepsilon \log|z - a| : D \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Твърдим, че $u_\varepsilon(z)$ е субхармонична в D. Вземайки предвид Следствие 6.1, за целта е достатъчно да проверим, че $u_\varepsilon(z)$ е субхармонична в околност на всяка точка от D. Непосредствено забелязваме, че

$$-\infty = u_\varepsilon(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u_\varepsilon(a + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

е в сила за достатъчно малки $\rho \in \mathbb{R}^{>0}$. За $\forall b \in D \setminus \{a\}$ съществува околност $U_b \subset D$ на b, която не съдържа a. В нея $u(z)$ и $log|z - a|$ са субхармонични, така че и $u_\varepsilon(z)$ е субхармонична. Оттук следва че $u_\varepsilon : D \to \mathbb{R}$ е субхармонична. За достатъчно малки $\rho \in \mathbb{R}^{>0}$ и $\forall z \in D(a, \rho)$ е в сила

$$u_\varepsilon(z) = u(z) + \varepsilon \log|z - a| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} P(z, \theta)[u(a + \rho e^{i\theta}) - \varepsilon \log \rho] d\theta.$$

При $\varepsilon \to 0$ получаваме

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} P(z, \theta) u(a + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

После по непрекъснатост, за $z \to a$ следва

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\theta}) d\theta,$$

доколкото $P(a, \theta) = 1$. Това е достатъчно за субхармоничността на u в D, Q.E.D.

ТЕОРЕМА 6. (Теорема на Хартогс за точната горна граница на редица от субхармонични функции) *Да предположим, че редицата*

$$u_k : D(0,R) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

от субхармонични функции в диска $D(0,R)$ *е равномерно ограничена отгоре и за някакво* $0 < \rho < R$ *е в сила*

$$\limsup_{k\to\infty} u_k\left(\rho e^{i\theta}\right) \leq m$$

при всички $\theta \in [0, 2\pi]$*. Тогава за всяко* $0 < r < \rho$ *и всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува* $k_o \in \mathbb{N}$*, така че*

$$\sup_{|z|\leq r} u_k(z) \leq m + \varepsilon \quad \text{за} \quad \forall k \geq k_o.$$

По този начин,

$$\limsup_{k\to\infty} \left[\sup_{|z|\leq r} u_k(z)\right] \leq m \quad \text{за} \quad \forall 0 < r < \rho.$$

В частност, ако $\limsup_{k\to\infty} u_k\left(\rho e^{i\theta}\right) \leq m$ *за всички* $0 < \rho < R$ *и* $\theta \in [0, 2\pi]$*, то* $\limsup_{k\to\infty} \left[\sup_{|z|\leq r} u_k(z)\right] \leq m$ *за всички* $0 < r < R$.

Доказателство: Първо ще установим, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват подмножество $E \subset [0, 2\pi]$ с мярка $l(E) < 2\pi\varepsilon$ и естествено число k_o, така че $u_k(\rho e^{i\theta}) < m + \varepsilon$ за всички $\theta \notin E$ и всички $k \geq k_o$. За целта да разгледаме множествата

$$E_k = \cup_{l\geq k}\{\theta \in [0, 2\pi] \,|\, u_l(\rho e^{i\theta}) \geq m + \varepsilon\}.$$

По определение е ясно, че

$$E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots \supseteq E_k \supseteq E_{k+1} \supseteq \ldots.$$

Ако допуснем, че $\theta \in \cap_{k=1}^{\infty} E_k$, то за $\forall k \in \mathbb{N}$ съществува $l_k \geq k$ с условието $u_{l_k}(\rho e^{i\theta}) \geq m + \varepsilon$. Следователно $\sup_{n\geq k} u_n(\rho e^{i\theta}) \geq m + \varepsilon$, откъдето

$$\limsup_{k\to\infty} u_k(\rho e^{i\theta}) := \inf_{k\to\infty} \left[\sup_{n\geq k} u_n(\rho e^{i\theta})\right] \geq m + \varepsilon,$$

което противоречи на допускането $\limsup_{k\to\infty} u_k(\rho e^{i\theta}) \leq m$. Следователно $\cap_{k=1}^{\infty} E_k = \emptyset$ и $\lim_{k\to\infty} l(E_k) = l\left(\cap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = l(\emptyset) = 0$. По този начин, за $\forall \varepsilon > 0$ съществува $k_o \in \mathbb{N}$, така че $l(E_{k_o}) < 2\pi\varepsilon$. Ако $E := E_{k_o}$, то за $\forall \theta \notin E$ е изпълнено $u_l(\rho e^{i\theta}) < m + \varepsilon$ при произволни $l \geq k_o$.

В доказателството на Твърдение 5.5 установихме, че субхармоничните функции u_k изпълняват неравенствата

$$u_k(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z,\theta) u_k(\rho e^{i\theta}) d\theta \quad \text{за } \forall z \in \overline{D(0,r)} \subset D(0,\rho).$$

Ако

$$u_k(z) \leq M \quad \text{за } \forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in D(0,R),$$
$$C := \sup_{\theta\in[0,2\pi], z\in\overline{D(0,r)}} P(z,\theta)$$

и $E' := [0, 2\pi] \setminus E$, то за $\forall k \geq k_o$ е в сила

$$u_k(z) \leq \frac{C}{2\pi} \int_E P(z,\theta) u_k(\rho e^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{E'} P(z,\theta) u_k(\rho e^{i\theta}) d\theta \leq$$

$$\frac{MCl(E)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E'} P(z,\theta)(m+\varepsilon)d\theta \leq MC\varepsilon + m + \varepsilon,$$

доколкото $l(E) \leq 2\pi\varepsilon$ и

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{E'} P(z,\theta)d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} P(z,\theta)d\theta = 1.$$

Следователно

$$\sup_{|z|\leq r} u_k(z) \leq MC\varepsilon + m + \varepsilon \quad \text{ за } \forall k \geq k_o$$

или

$$\limsup_{k\to\infty}[\sup_{|z|\leq r} u_k(z)] = \inf_{k_o\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq k_o} [\sup_{|z|\leq r} u_k(z)] \leq m + \varepsilon(1+MC).$$

Оттук $\limsup\limits_{k\to\infty}[\sup\limits_{|z|\leq r} u_k(z)] \leq m$, Q.E.D.

Накрая да завършим с още една илюстрация за връзката между субхармоничност на функция на комплексна променлива и изпъкналост на функция на реална променлива.

Теорема 7. (Теорема на Адамар за трите окръжности) *Нека* $f : D^*(0,R) \to \mathbb{C}$ *е нетъждествено нулева холоморфна функция в пунктиран диск*

$$D^*(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z| < R\},$$

а за $\forall 0 < r < R$ *да определим* $M(r) := \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$. *Тогава* $\log M(r)$ *е изпъкнала функция на* $\log(r)$.

Еквивалентно, произволни $0 < r_0 < r < r_1 < R$ *изпълняват неравенството*

$$M(r) \leq M(r_0)^{\eta} M(r_1)^{1-\eta},$$

с

$$\eta = \frac{\log(r_1) - \log(r)}{\log(r_1) - \log(r_0)} \in [0,1].$$

Доказателство: Преди всичко да отбележим, че $M(r) > 0$ за $\forall 0 < r < R$. В противен случай холоморфната функция f се анулира върху цялата окръжност $\partial D(0,r)$, което противоречи на изолираността на нулите на нетъждествено нулева холоморфна функция. Твърдим, че $M(r)$ е равномерно непрекъсната във всеки затворен интервал $[r_0, r_1] \subset (0,R)$. Това е следствие от равномерната непрекъснатост на f във всеки затворен венец

$$\overline{A(r_0,r_1)} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, r_0 \leq |z| \leq r_1\} \subset D(0,R).$$

По-точно, поради непрекъснатостта на f върху компакта $\partial D(0,r)$ е изпълнено $M(r) = |f(z_r)|$ за подходящо $z_r \in \partial D(0,r)$. Съгласно равномерната непрекъснатост на f в $\overline{A(r_0,r_1)}$, за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за произволни $z_r, z \in \overline{A(r_0,r_1)}$ с $|z_r - z| < \delta$ следва $|f(z_r) - f(z)| < \varepsilon$. В частност, за $\forall r' \in [r_0, r_1]$ с $|r - r'| < \delta$ имаме $|f(z_r) - f\left(\frac{r'}{r}z_r\right)| < \varepsilon$. Комбинирайки с неравенството на триъгълника $|f(z_r)| - |f\left(\frac{r'}{r}z_r\right)| \leq |f(z_r) - f\left(\frac{r'}{r}z_r\right)|$, получаваме $|f(z_r)| - \varepsilon \leq |f\left(\frac{r'}{r}z_r\right)|$, откъдето и $M(r) - \varepsilon \leq M(r')$. Чрез размяна на r с r' получаваме $M(r') - \varepsilon \leq M(r)$, откъдето и $|M(r) - M(r')| < \varepsilon$.

Съгласно Следствие 6.9, функцията $u_0(z) = \log|f(z)|$ е субхармонична в пунктирания диск $D^*(0,R)$. Следователно, за $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ функцията $u_\alpha(z) := u_0\left(ze^{i\alpha}\right) = \log|f(ze^{i\alpha})|$ е субхармонична в $D^*(0,R)$. Разглеждаме

$$u(z) := \sup_{\alpha\in\mathbb{R}} u_\alpha(z) = \sup_{\alpha\in\mathbb{R}} \log|f(ze^{i\alpha})|.$$

Доколкото $\log : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$ е монотонно растяща,

$$u(z) = \log \left[\sup_{\alpha \in \mathbb{R}} |f(ze^{i\alpha})| \right] = \log M(|z|).$$

Оттук става ясно, че $u(z)$ е непрекъсната функция на z. Съгласно 6.4 получаваме, че $u(z) = \sup\limits_{\alpha \in \mathbb{R}} u_\alpha(z)$ е субхармонична.

Върху всеки венец $A(r_0, r_1) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, r_0 < |z| < r_1\}$ с компактна затворена обвивка $\overline{A(r_0, r_1)} \subset D^*(0, R)$ разглеждаме функцията $h(z) = a \log |z| + b$ за някакви $a, b \in \mathbb{R}$. Съгласно доказателството на Следствие 6.9, функцията $\log |z|$ е хармонична в $D^*(0, R)$. Следователно $h : A(r_0, r_1) \to \mathbb{R}$ е хармонична и има непрекъснато продължение $h : \overline{A(r_0, r_1)} \to \mathbb{R}$. Да отбележим, че $h(z) = l(\log |z|)$ за линейната функция $l(s) = as + b$. По определението за субхармоничност на $u(z)$, ако $\log M(r_0) \leq l(r_0)$ и $\log M(r_1) \leq l(r_1)$, то $\log M(r) \leq l(r)$. Въвеждайки $t = \log(r)$ и $t_i = \log(r_i)$ за $i = 0, 1$ получаваме, че $\log M(e^{t_0}) \leq l(e^{t_0})$ и $\log M(e^{t_1}) \leq l(e^{t_1})$ са достатъчни за $\log M(e^t) \leq l(e^t)$ във всички $t \in (t_0, t_1)$. Последното условие означава изпъкналост на $\log M$ относно $\log(r)$.

Еквивалентно, за произволни $0 < r_0 < r_1 < R$ с $t_i = \log(r_i)$ за $i = 0, 1$ и $t = \log(r) \in (t_0, t_1)$ съществува единствено число $\eta \in (0, 1)$, така че

$$t = \eta t_0 + (1 - \eta) t_1.$$

По-точно,

$$\eta = \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} = \frac{\log(r_1) - \log(r)}{\log(r_1) - \log(r_0)}.$$

Тогава изпъкналостта на $\log M$ спрямо t гласи, че

$$\log M(e^t) \leq \eta \log M(e^{t_0}) + (1 - \eta) \log M(e^{t_1}).$$

Експоненцирайки това неравенство и заместваийки обратно $r = e^t$ и $r_i = e^{t_i}$ получаваме

$$M(r) \leq M(r_0)^\eta M(r_1)^{1-\eta},$$

Q.E.D.