Глава 7

Теорема на Хартогс за едномерна и многомерна холоморфност

Целта на настоящия въпрос е доказването на следната

Теорема 8. (Теорема на Хартогс за холоморфност) *Нека*

$$\mathcal{P} := \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, |z_j| < R, \forall 1 \leq j \leq n\}$$

е полидискът с център $(0,\dots,0) \in \mathbb{C}^n$ *и радиус* $(R,\dots,R) \in \left(\mathbb{R}^{>0}\right)^n$. *За всяка точка* $a_{\widehat{j}} := (a_1,\dots,a_{j-1},a_{j+1},\dots,a_n) \in D(0,R)^{n-1}$ *разглеждаме диска*

$$\mathcal{P}|_{a_{\widehat{j}}} = \{(a_1,\dots,a_{j-1},z_j,a_{j+1},\dots a_n) \,|\, |z_j| < R\}.$$

Ако ограниченията $f : \mathcal{P}|_{a_{\widehat{j}}} \to \mathbb{C}$ *са холоморфни за* $\forall a_{\widehat{j}} \in D(0,R)^{n-1}$, $\forall 1 \leq j \leq n$, *то* f *е холоморфна в* $\mathcal{P}$.

Доказателството се основава на няколко леми

Лема 7.1. *В предположенията от Теоремата на Хартогс (Теорема 8), ако* f *е ограничена в* $\mathcal{P}$, *то* f *е холоморфна в* $\mathcal{P}$.

Доказателство: Първо с индукция по $n \in \mathbb{N}$ ще установим интегруемостта на f върху тора $T^n(0^n,\rho^n) = \partial D(0,\rho)^n$. За $n=1$ холоморфната функция $f(z_1)$ е непрекъсната, а оттам и интегруема върху $\partial D(0,\rho)$. Да допуснем, че сме доказали интегруемостта на f върху $T^{k-1}(0^{k-1},\rho^{k-1})$. За произволно фиксирано $\varepsilon > 0$ и произволно естествено p можем да изберем точки

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_p < \theta_{p+1} = 2\pi$$

на разстояние

$$\theta_{i+1} - \theta_i < \varepsilon \quad \text{за } \forall 0 \leq i \leq p.$$

Тогава функцията

$$f_\varepsilon : T^k(0^k,\rho^k) \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$f_\varepsilon(z_1,\dots,z_{k-1},z_k) = f(z_1,\dots,z_{k-1},\rho e^{i\theta_j}) \quad \text{за } \theta_j \leq arg(z_k) < \theta_{j+1},\ 0 \leq j \leq p$$

е интегруема върху $T^k(0^k,\rho^k)$ по индукционно предположение. Поточково имаме $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(z) = f(z)$ и $|f_\varepsilon(z)|$ е ограничено върху $T^k(0^k,\rho^k)$. Съгласно Теоремата на Лебег за ограничена сходимост, $f(z)$ е интегруема върху $T^k(0^k,\rho^k)$.
За произволна точка $z_{\widehat{n}} = (z_1,\dots,z_{n-1}) \in D(0,R)^{n-1}$, холоморфната функция $f : \mathcal{P}|_{z_{\widehat{n}}} \to \mathbb{C}$ изпълнява формулата на Коши

$$f(z_1,\dots,z_{n-1},z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(0,\rho)} \frac{f(z_1,\dots,z_{n-1},\zeta_n)}{\zeta_n - z_n} d\zeta_n$$

за $\forall z_n \in D(0,\rho)$, $0 < \rho < R$ (виж Твърдение 1.9). За произволни фиксирани $z_1,\dots,z_{n-1},\zeta_n$ функцията $f(z_1,\dots,z_{n-2},z_{n-1},\zeta)$ е холоморфна относно $z_{n-1} \in D(0,R)$, така че можем да представим

$$f(z_1,\dots,z_{n-1},z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{T^2(0^2,\rho^2)} \frac{f(z_1,\dots,z_{n-2},\zeta_{n-1},\zeta_n)}{(\zeta_{n-1}-z_{n-1})(\zeta_n - z_n)} d\zeta_{n-1} \wedge d\zeta_n.$$

Продължавайки по същия начин получаваме формулата на Коши за $f : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$,

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{T^n(0^n, \rho^n)} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{за } z \in D(0, \rho)^n.$$

Това е достатъчно за да приложим доказателството на Теоремата за холоморфност и аналитичност (Теорема 2), за да получим холоморфността на $f : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$, Q.E.D.

Лема 7.2. (Теорема на Бер) *Ако W е отворено подмножество в $\mathbb{R}^n$ и $\{W_m\}_{m=1}^{\infty}$, $W_m \subseteq W$ е редица от отворени и гъсти в W подмножества, то подмножеството $W_o := \cap_{m=1}^{\infty} W_m$ е гъсто в W.*

Доказателство: По определение, W_o е гъсто в W, ако всяко непразно отворено подмножество $U_o \subseteq W$ има непразно сечение $U_o \cap W_o \neq \emptyset$. За да докажем това свойство, да изберем непразно отворено подмножество $V_o \subset U_o$ с компактна затворена обвивка $\overline{V_o} \subset U_o$. Тогава $U_1 := W_1 \cap V_o$ е непразно отворено подмножество на W, доколкото W_1 е отворено е гъсто в W. Избираме непразно отворено подмножество $V_1 \subset U_1$ с компактна затворена обвивка $\overline{V_1} \subset U_1$ и продължаваме по същия начин. По индукция, нека $V_{m-1} \subset U_{m-1}$ е непразно отворено подмножество с компактна затворена обвивка $\overline{V_{m-1}} \subset U_{m-1}$ и $U_m := W_m \cap V_{m-1}$ е непразно отворено множество. Тогава от $\overline{V_m} \subset V_{m-1}$ следва, че $\cap_{m=1}^{\infty} V_m = \cap_{m=1}^{\infty} \overline{V_m}$. Още повече, непразните компактни множества

$$\overline{V_1} \supset \overline{V_2} \supset \ldots \supset \overline{V_m} \supset \overline{V_{m-1}} \supset \ldots$$

имат непразно сечение, така че

$$\emptyset \neq \cap_{m=1}^{\infty} V_m \subseteq (\cap_{m=1}^{\infty} W_m) \cap U_o,$$

което доказва гъстотата на $W_o = \cap_{m=1}^{\infty} W_m$, Q.E.D.

Лема 7.3. *В предположенията от Теоремата на Хартогс, нека*

$$\mathcal{P}' = \{z' = (z_1, \ldots, z_{n-1}) \,|\, |z_j| < R, \forall 1 \leq j \leq n-1\},$$

$f : \mathcal{P}' \times a_n \to \mathbb{C}$ е холоморфна за произволно фиксирано $a_n \in D(0, R)$ и

$$M(z') := \sup_{a_n \in \overline{D(0,\rho)}} |f(z_1, \ldots, z_{n-1}, a_n)| \quad \text{за някое } 0 < \rho < R.$$

Тогава съществува гъсто отворено подмножество $U' \subset \mathcal{P}'$, така че функцията $M(z')$ е ограничена върху всяко компактно подмножество на U'.

Доказателство: Нека V' е произволно непразно отворено подмножество на $\mathcal{P}'$, а

$$V'_k := \{z' \in V' \,|\, M(z') \leq k\} \quad \text{за } \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ясно е, че

$$V'_1 \subseteq V'_2 \subseteq \ldots \subseteq V'_k \subseteq V'_{k+1} \subseteq \ldots.$$

Съгласно непрекъснатостта на $|f(z', \ )| : \overline{D(0,\rho)} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$. върху компакта $\overline{D(0,\rho)}$, $M(z')$ е ограничено за $\forall z' \in \mathcal{P}'$ и $V' = \cup_{k=1}^{\infty} V'_k$. Твърдим, че V'_k са затворени във V'. За целта разглеждаме подмножествата

$$W'_k(a_n) := \{z' \in V' \,|\, |f(z', a_n)| \leq k\}$$

за произволни $a_n \in \overline{D(0,\rho)}$. Поради холоморфността на $f(\ , a_n) : \mathcal{P}' \times a_n \to \mathbb{C}$ за всяко фиксирано a_n, подмножествата $W'_k(a_n)$ са затворени във V'. Следователно $V'_k = \cap_{a_n \in \overline{D(0,\rho)}} W'_k(a_n)$ са затворени във V' за $\forall k \in \mathbb{N}$. Еквивалентно, $V' \setminus V'_k$ са отворени за всяко $k \in \mathbb{N}$. Ако допуснем, че всички $V' \setminus V'_k$ са гъсти отворени подмножества на V', то по Теоремата на Бер (Лема 7.2) получаваме, че сечението $\cap_{k=1}^{\infty}(V' \setminus V'_k) = V' \setminus (\cup_{k=1}^{\infty} V'_k) = V' \setminus V' = \emptyset$ е гъсто във V'.

Противоречието доказва, че поне едно отворено подмножество $V' \setminus V'_{k_o}$ не е гъсто във V'. По определение, това означава съществуване на непразно отворено $W' = W'(V') \subseteq V'$ с $(V' \setminus V'_k) \cap W'(V') = \emptyset$. С други думи, $W'(V') \subseteq V'_{k_o}$ и $M(z') \leq k_o$ за $\forall z' \in W'(V')$.
За всяко непразно отворено подмножество $V' \subseteq \mathcal{P}'$ образуваме $W'(V')$ по гореспоменатия начин и твърдим, че обединението $U' := \cup_{\emptyset \neq V' \subseteq \mathcal{P}'} W'(V')$ изпълнява свойствата, обявени във формулировката на лемата. Наистина, U' е гъсто в $\mathcal{P}'$, доколкото има непразно сечение $U' \cap V' \supseteq W'(V') \neq \emptyset$ с всяко непразно отворено $V' \subseteq \mathcal{P}'$. Произволно компактно подмножество $K' \subset U'$ се покрива от краен брой $W'(V'(\alpha)) \subseteq V'_{k_\alpha}(\alpha)$ с $k_\alpha \in \mathbb{N}$, $1 \leq \alpha \leq m$. Ако $k_o := \max(k_1, \ldots, k_m)$, то $M(z') \leq k_o$ за $\forall z' \in K'$, Q.E.D.
Доказателство на Теорема 8 : Твърдението е тривиално за $n = 1$.
С индукция по $n \in \mathbb{N}$ допускаме, че теоремата е доказана за функции върху $\mathcal{P}' = \{z' = (z_1, \ldots, z_{n-1}) \,|\, |z_j| < R, \forall 1 \leq j \leq n-1\}$. Избираме $0 < \rho < R$ и $0 < \delta < R - \rho$. Съгласно Лема 7.3 съществува навсякъде гъсто отворено подмножество $U' \subset \mathcal{P}'$, така че за всеки компакт $K' \subset U'$ функцията

$$f : K' \times \overline{D(0,\rho)} \to \mathbb{C}$$

е ограничена. За произволно $a' \in U' \cap \mathcal{P}'(0^{n-1}, \delta^{n-1})$ съществува достатъчно малко $\eta > 0$, така че полидискът $\mathcal{P}'(a', \eta^{n-1}) \subset \overline{\mathcal{P}'(a', \eta^{n-1})} \subset U'$ е компактно вложен в U'. В резултат, $f : \mathcal{P}(a', \eta^{n-1}) \times D(0,\rho) \to \mathbb{C}$ е ограничена, а оттам и холоморфна по Лема 7.1. Разлагаме

$$f(z) = \sum_{k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^{n-1}} \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{k! k_n!} \frac{\partial^{|k|+k_n} f}{\partial (z')^k \partial z_k^{k_n}} (a', 0)(z' - a')^k (z_n - a_n)^{k_n}$$

в Тейлъров ред, който е абсолютно и равномерно сходящ върху всеки компакт $K \subset \mathcal{P}'(a', \eta^{n-1}) \times D(0,\rho)$. Ако

$$c_k(z_n) = \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{k! k_n!} \frac{\partial^{|k|+k_n} f}{\partial (z')^k \partial z_n^{k_n}} (a', 0)(z_n - a_n)^{k_n},$$

то

$$f(z) = \sum_{k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^{n-1}} c_k(z_n)(z' - a')^k \tag{7.1}$$

се представя като степенен ред на $n-1$ променливи с холоморфни коефициенти $c_k(z_n) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f}{\partial (z')^k}(a', z_n)$ за $\forall z_n \in D(0,\rho)$. За

$$M = \sup_{z \in \mathcal{P}'(a', \eta^{n-1}) \times D(0,\rho)} |f(z)|$$

и $\forall k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^{n-1}$ са в сила неравенствата на Коши

$$|c_k(z_n)| \leq \frac{M}{\eta^{|k|}}.$$

От друга страна, за всяко $z_n \in D(0, R)$ функцията $f(\ , z_n) : \mathcal{P}'(0^{n-1}, R^{n-1}) \to \mathbb{C}$ е холоморфна по индукционно предположение, така че редът

$$f(z) = \sum_{k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^{n-1}} d_k(z_n)(z')^k \tag{7.2}$$

е равномерно сходящ върху всеки компакт $K \subset \mathcal{P}'(0^{n-1}, (R-\delta)^{n-1})$. Съгласно $\rho < R - \delta$ оттук следва, че за всяко z_n съществува $A(z_n) > 0$ с условието

$$|d_k(z_n)| \leq \frac{A(z_n)}{\rho^{|k|}} \quad \text{за} \quad \forall k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^{n-1}.$$

Вече доказахме, че субхармоничните функции

$$|d_k(z_n)|^{\frac{1}{|k|}} = \left| \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f}{\partial (z')^k} (0^{n-1}, z_n) \right|^{\frac{1}{|k|}} \leq \frac{N^{\frac{1}{|k|}}}{\eta} \leq \frac{N}{\eta}$$

са равномерно ограничени за всички $k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^{n-1}$ и всички $z_n \in D(0, \rho)$, стига да сме избрали

$$N = \max \left(\sup_{z \in \mathcal{P}(0^n, \rho^n)} |f(z)|, 1 \right).$$

Освен това,

$$\limsup_{|k| \to \infty} |d_k(z_n)|^{\frac{1}{|k|}} \leq \frac{1}{\rho} \quad \text{за} \quad \forall z_n \in D(0, \rho).$$

По Теорема 6 оттук следва, че за $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall 0 < r < \rho$ съществува $k_o \in \mathbb{N}$, така че за $\forall k \geq k_o$ и $\forall z_n \in \overline{D(0, r)}$ е изпълнено

$$|d_k(z_n)|^{\frac{1}{|k|}} \leq \frac{1}{\rho} + \varepsilon.$$

Следователно за $\forall z' \in \overline{\mathcal{P}' \left(0^{n-1}, \left(\frac{\rho}{1+2\varepsilon\rho} \right)^{n-1} \right)}$ е в сила

$$|d_k(z_n)| |z'|^k \leq \left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon \right)^{|k|} \left(\frac{\rho}{1 + 2\varepsilon\rho} \right)^{|k|} = \left(\frac{1 + \varepsilon\rho}{1 + 2\varepsilon\rho} \right)^{|k|} < 1$$

и редът 7.2 е равномерно сходящ в $\overline{\mathcal{P}' \left(0^{n-1}, \left(\frac{\rho}{1+2\varepsilon\rho} \right)^{n-1} \right)} \times \overline{D(0, r)}$ към холоморфна функция. За произволен компакт $K \subset \mathcal{P}(0^n, R^n)$ съществуват $\varepsilon > 0$ и $0 < r < \rho$, така че $K \subseteq \overline{\mathcal{P}' \left(0^{n-1}, \left(\frac{\rho}{1+2\varepsilon\rho} \right)^{n-1} \right)} \times \overline{D(0, r)}$. В резултат, редицата от частични суми на Тейлъровия ред на $f(z)$ в $\mathcal{P}(0^n, R^n)$ е равномерно сходяща върху всеки компакт $K \subset \mathcal{P}(0^n, R^n)$. По Теоремата на Вайерщрас за равномерна сходимост, границата $f : \mathcal{P}(0^n, R^n) \to \mathbb{C}$ на тази редица е холоморфна, Q.E.D.