Глава 8

Подготвителна теорема на Вайерщрас и нейни приложения

Изучаваните теореми на Вайерщрас са в основата на връзката между комплексния анализ и алгебрата.
За доказателството на първата от тях ще използваме следното следствие от принципа за аргумента:

Следствие 8.1. *Нека $f, g : D_o \to \mathbb{C}$ са нетъждествено нулеви холоморфни функции в област $D_o \subseteq \mathbb{C}$, а $D \subset \mathbb{C}$ е област с компактна затворена обвивка $\overline{D} \subset D_o$ и непрекъсната граница ∂D, върху която f не се анулира. Тогава*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} g(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = \sum_{j=1}^{k} g(a_j),$$

където $a_1, \ldots, a_k$ са нулите на $f : D \to \mathbb{C}$, броени с техните кратности.

Доказателство: Преди всичко, f има краен брой нули $a_1, \ldots, a_k \in D$, броени с техните кратности. За целта избираме отворена околност $U \supset \overline{D}$. Съгласно Твърдение 2.5, за $\forall a \in U$ с $f(a) = 0$ съществува околност $a \in V_a \subset U$, в която a е единствена нула на f. Ако $f(a) \neq 0$, то избираме достатъчно малка околност $a \in V_a \subset U$, в която f не се анулира. По този начин получаваме отворено покритие $U = \cup_{a\in U} V_a$, така че $f : V_a \to \mathbb{C}$ се анулира в не повече от една точка за $\forall a \in U$. Ограничението $\overline{D} = \cup_{a\in U}(V_a \cap \overline{D})$ е покритие от относително отворени подмножества $V_a \cap \overline{D} \subseteq \overline{D}$. Съгласно компактността на $\overline{D}$, съществува крайно подпокритие $\overline{D} = \cup_{j=1}^{m} W_j$ с $W_j \subseteq V_{a_j} \cap \overline{D}$ за някои $a_1, \ldots, a_m \in U$. Ясно е, че множеството на нулите на f в D се съдържа в $\{a_1, \ldots, a_m\}$ (без обезателно да съвпада с това множество).

Ако $a_1, \ldots, a_l \in D$ са различните нули на f в D с кратности $k_1, \ldots, k_l$, $\sum\limits_{j=1}^{l} k_j = k$, да изберем достатъчно малки дискове $D(a_j, \varepsilon_j) \subset D$, $1 \leq j \leq l$, така че $\overline{D(a_j, \varepsilon_j)}$ се съдържат в D и не се пресичат взаимно за $1 \leq j_1 < j_2 \leq l$. Тогава функцията $g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ е холоморфна в отвореното множество $D' := D \setminus [\cup_{j=1}^{l}\overline{D(a_j, \varepsilon_j)}]$ и по Теоремата на Коши (Твърдение 1) е изпълнено

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D'} g(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} g(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta - \sum_{j=1}^{l}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D(a_j,\varepsilon_j)} g(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta\right].$$

Остава да проверим, че

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D(a_j,\varepsilon_j)} g(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = k_j g(a_j) \quad \text{за } \forall 1 \leq j \leq l.$$

Наистина, в достатъчно малка околност U_o на $\overline{D(a_j, \varepsilon_j)}$ можем да представим $f(\zeta) = (\zeta - a_j)^{k_j}\varphi_j(\zeta)$ и $g(\zeta) = (\zeta - a_j)^{m_j}\psi_j(\zeta)$ за някакво неотрицателно цяло

m_j и холоморфни, неанулиращи се $\varphi_j, \psi_j : U_o \to \mathbb{C}$. Непосредствено се вижда, че

$$F(\zeta) := g(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}(\zeta - a_j) = (\zeta - a_j)^{m_j}\frac{\psi_j(\zeta)}{\varphi_j(\zeta)}[k_j\varphi_j(\zeta) + (\zeta - a_j)\varphi_j'(\zeta)]$$

е холоморфна в U_o със стойност $F(a_j) = 0 = k_j 0 = k_j g(a_j)$ за $m_j \in \mathbb{N}$ и $F(a_j) = k_j\psi_j(a_j) = k_j g(a_j)$ за $m_j = 0$. Прилагайки формулата на Коши (Твърдение 1.9) за центъра a_j на $D(a_j, \varepsilon_j)$ получаваме

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D(a_j,\varepsilon_j)} g(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D(a_j,\varepsilon_j)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - a_j}d\zeta = F(a_j) = k_j g(a_j),$$

Q.E.D.

За да формулираме и да докажем Подготвителната теорема на Вайерщрас е нужно да въведем понятието полином на Вайерщрас. За целта да напомним, че множеството $\mathcal{O}_a$ на холоморфните в $a \in \mathbb{C}^n$ функции е комутативен пръстен с единица. Подмножеството

$$\mathfrak{M}_a := \{f \in \mathcal{O}_a \,|\, f(a) = 0\}$$

е идеал в $\mathcal{O}_a$, доколкото $f_1 - f_2 \in \mathfrak{M}_a$ за произволни $f_1, f_2 \in \mathfrak{M}_a$ и $fg \in \mathfrak{M}_a$ за $\forall f \in \mathfrak{M}_a$, $\forall g \in \mathcal{O}_a$. Още повече, идеалът $\mathfrak{M}_a \triangleleft \mathcal{O}_a$ е максимален, т.е. единственият идеал $I \triangleleft \mathcal{O}_a$, съдържащ строго $\mathfrak{M}_a$ е целият пръстен $\mathcal{O}_a$. Наистина, произволна функция $g \in I \setminus \mathfrak{M}_a$ има ненулева стойност $g(a) \in \mathbb{C}^*$ в a, така че съществува $h \in \mathcal{O}_a$ с $g(a)h(a) = 1$. (Например, можем да изберем константата $h(z) \equiv g(a)^{-1}$ за z от достатъчно малка околност на a.) В резултат, $gh - 1 \in \mathfrak{M}_a \subset I$ и $gh \in I$ за идеала $I \triangleleft \mathcal{O}_a$ води до $1 \in I$, откъдето и $I \equiv \mathcal{O}_a$.

Определение 8.2. *Полином на Вайерщрас от степен k в точка $a' \in \mathbb{C}^{n-1}$ е полином*

$$P(z', z_n) = (z_n - a_n)^k + c_1(z')(z_n - a_n)^{k-1} + \ldots + c_{k-1}(z')(z_n - a_n) + c_k(z')$$

на z_n от степен k със старши коефициент 1 и коефициенти $c_i(z') \in \mathfrak{M}_{a'}$ за всички $1 \leq i \leq k$.

Теорема 9. (Подготвителна теорема на Вайерщрас - 1879г.) *Нека функцията $f : U \to \mathbb{C}$ е холоморфна в околност U на точка $a \in \mathbb{C}^n$, $f(a) = 0$ и $f(a', z_n) = f(a_1, \ldots, a_{n-1}, z_n) \not\equiv 0$ в U. Тогава съществува достатъчно малък полидиск $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \times D(a_n, r_n)$ с център a, така че за $\forall b' \in \mathcal{P}'$ уравнението $f(b', z_n) = 0$ има точно k корена $z_n \in D(a_n, r_n)$ и $f(z)$ има единствено представяне*

$$f(z', z_n) = P(z', z_n)\varphi(z) = \left[(z_n - a_n)^k + c_1(z')(z_n - a_n)^{k-1} + \ldots + c_k(z')\right]\varphi(z),$$

където $P(z', z_n)$ е полином на Вайерщрас от степен k в точката $a' \in \mathbb{C}^{n-1}$, а $\varphi : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ е холоморфна неанулираща се функция.

Доказателство: Без ограничение на общността считаме, че $a = 0^n \in \mathbb{C}^n$. Съгласно Твърдение 2.5 за изолираност на нулите на холоморфна функция на една комплексна променлива, съществува достатъчно малък диск $D(0, r_n) \subset \mathbb{C}$, така че единствената нула на $f(0^{n-1}, z_n) = 0$ в $\overline{D(0, r_n)}$ е $z_n = 0$. Съгласно непрекъснатостта на $f(z', z_n)$ относно z', съществува полидиск

$$\mathcal{P}' = D(0, r_1) \times \ldots \times D(0, r_{n-1}) \subset \mathbb{C}^{n-1}$$

с център $0^{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1}$, така че за $\forall b' \in \mathcal{P}'$ уравнението $f(b', z_n) = 0$ няма корени върху окръжността $\partial D(0, r_n)$. По-точно, за $\forall z_n \in \partial D(0, r_n)$ съществува полидиск $\mathcal{P}'(z_n) \subset \mathbb{C}^{n-1}$ с център $0^{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1}$, така че $f(z', z_n)$ не се анулира върху $\mathcal{P}'(z_n) \times z_n$. Обединението $\cup_{z_n \in \partial D(0,r_n)} \mathcal{P}'(z_n) \times z_n$ е ограничено в $\mathbb{C}^n$, така че се покрива от краен брой $\mathcal{P}(\alpha) := \mathcal{P}'(z_n(\alpha)) \times z_n(\alpha)$ за $1 \leq \alpha \leq m$. Ако

$r(\alpha) = (r(\alpha)_1, \dots, r(\alpha)_{n-1}) \in (\mathbb{R}^{>0})^{n-1}$ е поли-радиусът на $\mathcal{P}(\alpha)$, то полагайки $r_j := \min(r(1)_j, \dots, r(m)_j)$ получаваме полидиск

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P}'(0^{n-1}, (r_1, \dots, r_{n-1})),$$

така че за $\forall b' \in \mathcal{P}'$ уравнението $f(b', z_n) = 0$ няма корени върху $\partial D(0, r_n)$. Съгласно Следствие 8.1,

$$k(z') = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(0,r_n)} \frac{\frac{\partial f}{\partial z_n}(z', \zeta_n)}{f(z', \zeta_n)} d\zeta_n$$

е броят на корените $z_n \in D(0, r_n)$ на $f(z', z_n) = 0$. От една страна, $k(z')$ зависи непрекъснато от $z' \in \mathcal{P}'$. От друга страна, $k(z')$ взема неотрицателни цели стойности, така че $k(z') = k$ е константа за $\forall z' \in \mathcal{P}'$. В частност, $k(0^{n-1}) = k$ е кратността на корена $z_n = 0$ на $f(0^{n-1}, z_n) = 0$, така че $k \in \mathbb{N}$.

За произволно $z' \in \mathcal{P}'$ нека $z_n^{(\nu)}(z')$, $1 \leq \nu \leq k$ са нулите на холоморфната функция $f(z', \ ) : D(0, r_n) \to \mathbb{C}$. Образуваме полинома

$$P(z', z_n) := \prod_{\nu=1}^{k} [z_n - z_n^{(\nu)}(z')] = z_n^k + c_1(z') z_n^{k-1} + \ldots + c_{k-1}(z') z_n + c_k(z')$$

на z_n от степен k, със старши коефициент 1. Твърдим, че $P(z', z_n)$ е полином на Вайерщрас в $0^{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1}$. Наистина, за всяко естествено $1 \leq \mu \leq k$, Следствие 8.1 дава

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(0,r_n)} \zeta_n^{\mu} \frac{\frac{\partial f}{\partial z_n}(z', \zeta_n)}{f(z', \zeta_n)} d\zeta_n = \sum_{\nu=1}^{k} [z_n^{(\nu)}(z')]^{\mu} = S_{\mu}(z').$$

По този начин, степенните сборове $S_{\mu}(z')$ на $z_n^{(1)}(z'), \dots, z_n^{(k)}(z')$ се оказват холоморфни функции на $z' \in \mathcal{P}'$. Посредством формулите на Нютон стигаме до извода, че и коефициентите $c_i(z')$, $1 \leq i \leq k$ на $P(z', z_n)$ зависят холоморфно от $z' \in \mathcal{P}'$. Доколкото $f(0^{n-1}, z_n) = 0$ има единствен корен $z_n = 0$ с кратност k, $z_n^{(\nu)}(0^{n-1}) = 0$ за $\forall 1 \leq \nu \leq k$ и $P(0^{n-1}, z_n) = z_n^k$. С други думи, $c_i(0^{n-1}) = 0$ за $\forall 1 \leq i \leq k$ и $P(z', z_n)$ е полином на Вайерщрас от степен k н точката 0^{n-1}.

Така определената функция $\varphi : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ с условието $f(z) = P(z)\varphi(z)$ изпълнява равенството

$$\varphi(z) = \frac{f(z', z_n)}{P(z', z_n)}$$

за $\forall z_n \neq z_n^{(\nu)}(z')$. За да я определим коректно във $\forall z \in \mathcal{P} = \mathcal{P}' \times D(0, r_n)$ полагаме

$$\varphi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(0,r_n)} \frac{f(z', \zeta_n)}{P(z', \zeta_n)} \frac{d\zeta_n}{\zeta_n - z_n} \quad \text{за } \forall z' \in \mathcal{P}', \ \forall z_n \in D(0, r_n).$$

Функцията $\varphi(z', \ ) : D(0, r_n) \to \mathbb{C}$ е холоморфна за всяко $z' \in \mathcal{P}'$. Поради холоморфната зависимост на $f(z', z_n)$ и $P(z', z_n)$ от z', функцията $\varphi(\ , z_n) : \mathcal{P}' \to \mathbb{C}$ е холоморфна за $\forall z_n \in D(0, r_n)$. Прилагайки Теорема 8 на Хартогс за холоморфност получаваме, че $\varphi : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ е холоморфна. По построение, за $\forall z' \in \mathcal{P}'$ функциите $f(z', \ ) : D(0, r_n) \to \mathbb{C}$ и $P(z', \ ) : D(0, r_n) \to \mathbb{C}$ имат едни и същи корени $z_n^{(\nu)}(z')$, $1 \leq \nu \leq k$, така че $\varphi : \mathcal{P}' \times D(0, r_n) \to \mathbb{C}$ не се анулира.

Нека $f(z) = P(z)\varphi(z) = Q(z)\psi(z)$ са две представяния чрез полиноми на Вайерщрас $P(z', z_n)$, $Q(z', z_n)$ от степен k в $0^{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1}$ и холоморфни неанулиращи се $\varphi, \psi : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$. По построение, $P(z', \ ) : D(0, r_n) \to \mathbb{C}$ и $Q(z', \ ) : D(0, r_n) \to \mathbb{C}$

имат едни и същи корени $z_n^{(\nu)}(z')$, $1 \leq \nu \leq k$, а оттам и едни и същи коефициенти по формулите на Виет. Това доказва $P(z', z_n) \equiv Q(z', z_n)$, а оттам и $\varphi(z) \equiv \psi(z)$, Q.E.D.

Да отбележим, че за нетъждествено нулева функция $f : U \to \mathbb{C}$ ограничението $f(a', z_n) \not\equiv 0$ не е съществено. Наистина, при $f(b) \neq 0$ за някое $b \in U$ преместваме началото на координатната система на $\mathbb{C}^n$ в a и прекарваме оста $O\overrightarrow{z_n}$ през b, за да получим $f(0^{n-1}, z_n) \not\equiv 0$.

Да отбележим също, че от Подготвителната теорема на Вайерщрас непосредствено следва комплексната теорема за неявните функции. По-точно, ако функцията f е холоморфна в околност U на точка $a \in \mathbb{C}^n$, $f(a) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial z_n}(a) \neq 0$, то предположенията на Теорема 9 са изпълнени с $k = 1$, така че уравнението $f(z) = 0$ в околност $a \in V_a \subseteq U$ е еквивалентно на уравнение от вида $P(z) = z_n - a_n + c_1(z') = 0$ с холоморфна функция $c_1 : \mathcal{P}' \to \mathbb{C}$. С други думи, хиперповърхнината $f(z) = 0$ се задава локално чрез фиксиране на $z_n = a_n - c_1(z')$ като холоморфна функция на $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$.

Продължаваме с изучаване на свойствата на пръстена $\mathcal{O}_a$ на холоморфните в точка $a \in \mathbb{C}^n$ функции.

Теорема 10. (Теорема на Вайерщрас за деление) *Нека функцията f е холоморфна в околност на точка $a \in \mathbb{C}^n$, а $P(z', z_n)$ е полином на Вайерщрас в a от степен k в $a' \in \mathbb{C}^{n-1}$. Тогава съществува полидиск $\mathcal{P}$ с център a, в който f има единствено представяне*

$$f = P\varphi + Q,$$

където φ е холоморфна в a функция, а $Q \in \mathcal{O}_{a'}[z_n]$ е полином на z_n от степен не по-голяма от $k - 1$, с коефициенти, които са холоморфни в $a' \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Доказателство: Без ограничение на общността можем да считаме, че точката $a = 0^n \in \mathbb{C}^n$ и $P(0^{n-1}, z_n) \not\equiv 0$. Съгласно Твърдение 2.5 за изолираност на нуилте на холоморфна функция на една променлива, съществува диск $D(0, r_n) \subset \mathbb{C}$, така че единственият корен на $P(0^{n-1}, z_n) = 0$ в $D(0, r_n)$ е $z_n = 0$. Както в доказателството на Подготвителната теорема на Вайерщрас (Теорема 9), съществува полидиск $\mathcal{P}' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ с център $0^{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1}$, така че $P : \mathcal{P}' \times \partial D(0, r_n) \to \mathbb{C}$ не се анулира. Полагаме $\mathcal{P} := \mathcal{P}' \times D(0, r_n)$ и определяме

$$\varphi(z', z_n) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(0, r_n)} \frac{f(z', \zeta_n)}{P(z', \zeta_n)} \frac{d\zeta_n}{\zeta_n - z_n}.$$

Тогава $\varphi(z', \ ) : D(0, r_n) \to \mathbb{C}$ е холоморфна за $\forall z' \in \mathcal{P}'$ и $\varphi(\ , z_n) : \mathcal{P}' \to \mathbb{C}$ е холоморфна за $\forall z_n \in D(0, r_n)$, откъдето $\varphi : V = \mathcal{P}' \times D(0, r_n) \to \mathbb{C}$ е холоморфна по Теоремата на Хартогс за холоморфност. Прилагайки формулата на Коши

$$f(z', z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(0, r_n)} \frac{f(z', \zeta_n)}{\zeta_n - z_n} d\zeta_n$$

към холоморфната функция $f(z', \ ) : D(0, r_n) \to \mathbb{C}$ получаваме, че

$$Q(z) := f(z) - P(z)\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(0, r_n)} \frac{[P(z', \zeta_n) - P(z', z_n)]\, f(z', \zeta_n)}{(\zeta_n - z_n) P(z', \zeta_n)} d\zeta_n. \quad (8.1)$$

Ако $P(z',z_n)=z_n^k+\sum\limits_{i=1}^{k}c_i(z')z_n^{k-i}$ с $c_i(z')\in\mathfrak{M}_{a'}$ за $\forall 1\leq i\leq k$, то диференчното частно

$$\begin{aligned}\frac{P(z',\zeta_n)-P(z',z_n)}{\zeta_n-z_n}&=\sum_{s=0}^{k-1}\zeta_n^{k-1-s}z_n^s+\sum_{i=1}^{k}c_i(z')\sum_{s=0}^{k-i-1}\zeta_n^{k-i-1-s}z_n^s=\\&\qquad z_n^{k-1}+\sum_{i=1}^{k-1}q_i(z',\zeta_n)z_n^{k-1-i}\end{aligned}\tag{8.2}$$

е полином на z_n от степен, не по-голяма от $k-1$ с коефициенти $q_i(z',\zeta_n)$, които зависят холоморфно от $z'\in\mathcal{P}'$ за $\forall\zeta_n\in\partial D(0,r_n)$. Замествайки (8.2) в (8.1) получаваме

$$Q(z',z_n)=b_0(z')z_n^{k-1}+b_1(z')z_n^{k-2}+\ldots+b_{k-2}(z')z_n+b_{k-1}(z'),$$

с коефициенти

$$b_i(z'):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D(0,r_n)}q_i(z',\zeta_n)\frac{f(z',\zeta_n)}{P(z',\zeta_n)}d\zeta_n,$$

които са холоморфни относно $z'\in\mathcal{P}'$. (Да отбележим, че $q_0(z',\zeta_n)\equiv 1$.) Това доказва съществуването на представяне $f(z)=P(z)\varphi(z)+Q(z)$ с изброените свойства.

Нека $f=P\varphi+Q=P\varphi_1+Q_1$ са две такива представяния с холоморфни $\varphi,\varphi_1:V\to\mathbb{C}$ и полиноми Q,Q_1 на z_n от степен най-много $k-1$, чиите коефициенти зависят холоморфно от $z'\in\mathcal{P}'$. Тогава $P(\varphi-\varphi_1)=Q_1-Q$. Ако допуснем, че $\varphi\not\equiv\varphi_1$, то за всяко $z'\in\mathcal{P}'$ лявата страна на последното равенство има най-малко k корена, броени с техните кратности, докато $Q(z',\ )-Q_1(z',\ ):D(0,r_n)\to\mathbb{C}$ има най-много $k-1$ корена, броени с техните кратности. Противоречието доказва $\varphi\equiv\varphi_1$, откъдето и $Q\equiv Q_1$, Q.E.D.

Определение 8.3. *Комутативният пръстен с единица R се нарича комутативна област, ако няма делители на нулата, т.е. от $ab=0$ за $a,b\in R$ следва $a=0$ или $b=0$.*

Лема 8.4. *Пръстенът $\mathcal{O}_a$ на холоморфните в точка $a\in\mathbb{C}^n$ функции е комутативна област с единица.*

Доказателство: Нека $f,g\in\mathcal{O}_a$ са такива, че $fg\equiv 0$ в околност U на a. Ако $f(a)\neq 0$, то съгласно непрекъснатостта на f в околност на a, можем да считаме, че $f:U\to\mathbb{C}^*$ не се анулира (след евентуално свиване на U.) Следователно g се анулира тъждествено в U. Ако $f(a)=0$ и f не се анулира тъждествено в U, то след евентуална смяна на координатната система можем да считаме, че $f(a',z_n)\not\equiv 0$. Както в доказателството на Подготвителната теорема на Вайерщрас, съществуват полидиск $\mathcal{P}'(a',r')\subset\mathbb{C}^{n-1}$ и окръжност $\partial D(a_n,r_n)\subset\mathbb{C}$, така че $f:\mathcal{P}'(a',r')\times\partial D(a_n,r_n)\to\mathbb{C}$ не се ануилра. След евентуално свиване на $\mathcal{P}'(a',r')\times\partial D(a_n,r_n)$ можем да предполагаме, че този полидиск се съдържа в U и да изведем, че $g(z',z_n)=0$ за $\forall(z',z_n)\in\mathcal{P}'(a',r')\times\partial D(a_n,r_n)$. Съгласно Принципа за максимума,

$$\max_{z\in\overline{D(a_n,r_n)}}|g(z)|=\max_{z\in\partial D(a_n,r_n)}|g(z)|=0,$$

така че g се анулира тъждествено върху околността $\mathcal{P}'(a',r')\times D(a_n,r_n)$ на a или $g\equiv 0$ в $\mathcal{O}_a$, Q.E.D.

Да напомним, че елементът r на комутативен пръстен с единица R се нарича обратим, ако съществува $s\in R$, така че $rs=1$. Лесно се вижда, че обратният елемент $s=r^{-1}\in R$ е единствен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.5. *Елементите r и s на комутативен пръстен с единица R се наричат асоцирани, ако съществува обратим в R елемент $u \in R$, така че $s = ru$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.6. *Елементът r на комутативен пръстен с единица R се нарича неразложим в R, ако $r \neq 0$ не е обратим в R и във всяко разлагане $r = r_1 r_2$ като произведение на $r_1, r_2 \in R$ множителите r_i са или обратими в R, или асоцирани с r.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.7. *Комутативната област с единица R се нарича област с еднозначно разлагане, ако всеки ненулев необратим елемент $r \in R$ има единствено с точност до асоцираност разлагане $r = r_1 \dots r_k$ в произведение от неразложими в R елементи $r_i \in R$, $1 \leq i \leq k$.*

С помощта на Подготвителната теорема на Вайерщрас ще установим, че пръстенът $\mathcal{O}_a$ на холоморфните в точка $a \in \mathbb{C}^n$ функции е комутативна област с еднозначно разлагане. За целта да напомним, че пръстенът $K[x]$ на полиномите на една променлива x с коефициенти от поле K е комутативна област с единица. В пръстена $K[x]$ е в сила теорема за деление с частно и остатък. По-точно, за произволни $f(x), g(x) \in K[x]$, $g(x) \not\equiv 0$ съществуват еднозначно определени $q(x), r(x) \in K[x]$, така че $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ и $\deg r(x) < \deg g(x)$. В резултат получаваме, че $K[x]$ е област на главни идеали. Наистина, ако $I \lhd K[x]$ е ненулев идеал и $f(x) \in I$ е ненулев полином от минимална степен, принадлежащ на I, то главният идеал $f(x)K[x] \subseteq I$ съвпада с I. Това следва чрез деление на произволен полином $g(x) \in I$ с $0 \not\equiv f(x) \in I$, което дава представяне $g(x) = f(x)q(x) + r(x)$, където $q(x), r(x) \in K[x]$ и $\deg r(x) < \deg f(x)$. Съгласно зибора на $0 \not\equiv f(x) \in I$ от минимална степен, полиномът $r(x) = g(x) - f(x)q(x) \in I$ се анулира тъждествено. Следователно $g(x) \in f(x)K[x]$ и $I \subseteq f(x)K[x]$.

Ще казваме, че $0 \not\equiv f(x) \in K[x]$ дели $g(x) \in K[x]$, ако съществува $q(x) \in K[x]$, така че $g(x) = f(x)q(x)$.

За произволни $f(x), g(x) \in K[x]$, които не са едновременно тъждествено нулеви, определяме най-големия общ делител $d(x) = (f(x), g(x)) \in K[x]$ като общ делител на $f(x)$ и $g(x)$, който се дели на всеки техен общ делител. В областта на главни идеали $K[x]$ произволни неедновременно нулеви полиноми $f(x), g(x) \in K[x]$ имат единствен с точност до асоцираност най-голям общ делител $d(x) = (f(x), g(x))$. По-точно, идеалът $I = f(x)K[x] + g(x)K[x]$ в $K[x]$ има (единствен с точност до асоцираност) пораждащ $h(x)$. От $f(x), g(x) \in I = h(x)K[x]$ следва, че $h(x)$ е общ делител на $f(x)$ и $g(x)$. Условието $h(x) \in I = f(x)K[x] + g(x)K[x]$ дава тъждеството на Безу $h(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$ за подходящи $u(x), v(x) \in K[x]$. По този начин, всеки общ делител $d_1(x)$ на $f(x)$ и $g(x)$ дели $h(x)$ и $h(x)$ се оказва най-голям общ делител $h(x) = (f(x), g(x))$ на $f(x)$ и $g(x)$. Ако $d_1(x) = (f(x), g(x))$ и $d_2(x) = (f(x), g(x))$ са най-големи общи делители на $f(x)$ и $g(x)$, то за всяка пермутация i, j на $1, 2$ полиномът $d_i(x)$ дели полинома $d_j(x)$, доколкото $d_i(x)$ е общ делител на $f(x)$ и $g(x)$, а $d_j(x)$ е техен най-голям общ делител. Но равенствата $d_i(x) = q_{ij}(x)d_j)$ с $q_{ij}(x) \in K[x]$ са изпълнени само ако $q_{ij}(x)q_{ji}(x) \equiv 1$, което означава обратимост на $q_{ij}(x)$ в $K[x]$.

Да отбележим, че ако неразложим в $K[x]$ полином $p(x)$ дели произведението на $f(x)$ и $g(x)$, то $p(x)$ дели $f(x)$ или $g(x)$. Наистина, ако $p(x)$ дели $f(x)g(x)$ и $p(x)$ не дели $f(x)$, то най-големият общ делител $(p(x), f(x)) = 1 \in K[x]$ с точност до асоцираност. Следователно тъждеството на Безу приема вида $1 = p(x)u(x) + f(x)v(x)$ за подходящи полиноми $u(x), v(x) \in K[x]$. Умножавайки

почленно с $g(x)$, получаваме $g(x) = p(x)u(x)g(x)+f(x)g(x)v(x)$. От това, че $p(x)$ дели всяко събираемо отдясно следва, че $p(x)$ дели $g(x)$.
От редовния курс по Висша Алгебра да припомним следната

Лема 8.8. *Пръстенът $K[x]$ на полиномите на една променлива x с коефициенти от поле K е област с еднозначно разлагане.*

Доказателство: Съществуването на разлагане на произволен ненулев необратим полином $f(x) \in K[x]$ в произведение на неразложими в $K[x]$ полином ще извършим с индукция по степента $\deg f(x) \in \mathbb{N}$. Всеки полином $f(x) = ax + b \in K[x]$ от първа степен е неразложим в $K[x]$ и представлява свое разлагане. Аналогично, неразложимите полиноми $f(x) \in K[x]$ от произволна степен представляват свои разлагания. Ако $f(x) \in K[x]$ е разложим, то $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ за полиноми $f_1(x), f_2(x) \in K[x]$ от степен $\deg f_i(x) < \deg f(x)$. По индукционно предположение съществуват неразложими в $K[x]$ полиноми $p_1(x), \dots, p_m(x), p_{m+1}(x), \dots, p_n(x) \in K[x]$, така че $f_1(x) = p_1(x) \dots p_m(x)$ и $f_2(x) = p_{m+1}(x) \dots p_n(x)$. Следователно $f(x) = p_1(x) \dots p_m(x)p_{m+1}(x) \dots p_n(x)$ е разлагане на $f(x)$ в произведение от неразложими в $K[x]$ полиноми $p_i(x) \in K[x]$, $1 \leq i \leq n$.
Да предположим, че

$$f(x) = p_1(x) \dots p_m(x) = q_1(x) \dots q_n(x)$$

са две разлагания на ненулевия необратим полином $f(x) \in K[x]$ в произведение от неразложими в $K[x]$ полиноми $p_i(x), q_j(x) \in K[x]$ за $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Без ограничение считаме, че $m \leq n$. С индукция по m ще установим, че $m = n$ и след евентуална пермутация на $q_1(x), \dots, q_m(x)$ полиномите $q_i(x)$ са асоцирани с $p_i(x)$ за всички $1 \leq i \leq m$. При $m = 1$ от равенството $p_1(x) = q_1(x) \dots q_n(x)$ следва, че неразложимият в $K[x]$ полином $p_1(x)$ дели $q_i(x)$ за някое $1 \leq i \leq n$. След евентуална пермутация на $q_1(x), \dots, q_n(x)$ можем да считаме, че $p_1(x)$ дели $q_1(x)$. Оттук следва асоцираността на $p_1(x)$ с $q_1(x)$, съгласно неразложимостта на $p_1(x)$ и $q_1(x)$. Ако допуснем, че $n > 2$, то в комутативната област $K[x]$ получаваме $1 = q_2(x) \dots q_n(x)$ след евентуална модификация на $q_2(x)$ с обратим в $K[x]$ елемент. Горното равенство може да е изпълнено само, ако $\deg q_i(x) = 0$ и $q_i \in K^*$ за всяко $2 \leq i \leq n$. Това противоречи на определението за неразложимост и доказва $n = 1$. В общия случай, от $p_1(x) \dots p_m(x) = q_1(x) \dots q_n(x)$ следва, че $p_1(x)$ дели $q_1(x)$ след евентуална пермутация на $q_1(x), \dots, q_n(x)$. Поради неразложимостта на $p_1(x)$ и $q_1(x)$ това е възможно само, ако $p_1(x)$ и $q_1(x)$ са асоцирани. След съкращаване на $p_1(x)$ и модификация на $q_2(x)$ с обратим в $K[x]$ елемент получаваме $p_2(x) \dots p_m(x) = q_2(x) \dots q_n(x)$. По индукционно предположение оттук следва $m - 1 = n - 1$ и асоцираност на $p_i(x)$ с $q_i(x)$ за всички $2 \leq i \leq m$. Следователно разлагането $f(x) = p_1(x) \dots p_m(x)$ в произведение от неразложими в $K[x]$ полиноми $p_i(x) \in K[x]$ е единствено с точност до асоцираност, Q.E.D.

За да формулираме и да докажем Лемата на Гаус ни е нужно понятието за примитивен полином и някои негови свойства. Да отбележим, че в комутативна област R с еднозначно разлагане, произволни неедновременно нулеви елементи $r_1, \dots r_n \in R$ имат единствен с точност до асоцираност най-голям общ делител $d = (r_1, \dots r_n) \in R$. По-точно, ако $r_i \in R$ е обратим в R за някое $1 \leq i \leq n$, то $d = (r_1, \dots, r_n) = 1 \in R$. Нека $r_1, \dots r_m$ са ненулеви и необратими, а $r_{m+1} = \dots = r_n = 0$ за някое $1 \leq m \leq n$. Ако $\{p_1, \dots, p_k\}$ е обединението на неразложимите в R множители на $r_1, \dots, r_m$ и $r_i = \prod\limits_{j=1}^{k} p_j^{\delta_{ij}}$ за подходящи

$\delta_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leq i \leq m$, то

$$d = (r_1, \ldots, r_n) = \prod p_j^{\min(\delta_{1j}, \delta_{2j}, \ldots, \delta_{mj})} \in R$$

е най-големият общ делител на $r_1, \ldots, r_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.9. *Полиномът $f(x) = r_0 x^n + r_1 x^{n-1} + \ldots + r_{n-1} x + r_n \in R[x]$ с коефициенти r_i от комутативна област R с еднозначно разлагане се нарича примитивен, ако коефициентите му са взаимно прости, т.е. най-големият общ делител $(r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}, r_n) = 1$.*

ЛЕМА 8.10. *Ако $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ са примитивни полиноми с коефициенти от комутативна област R с еднозначно разлагане, то тяхното произведение $f_1(x) \ldots f_k(x) \in R[x]$ е примитивен полином.*

Доказателство: Ненулевият елемент $\rho \in R$ е неразложим точно когато фактор-пръстенът $R/\rho R$ е област. По-точно, ако ρ е неразложим, $a, b \in R$ и $ab \in \rho R$, то ρ дели a или b, т.е. $a \in \rho R$ или $b \in \rho R$. Обратно, ако фактор-пръстенът $R/\rho R$ е област, то ненулевият елемент $\rho \in R$ не е обратим в R. Ако $\rho = rs$ е същинско разлагане, в което r и s не са обратими в R и не са асоцирани с ρ, то под действие на естествения епиморфизъм $\pi_\rho : R \to R/\rho R$ с ядро $\rho R \lhd R$ получаваме $0 + \rho R = (r + \rho R)(s + \rho R)$ с $r + \rho R \neq 0 + \rho R$ и $s + \rho R \neq 0 + \rho R$. Това противоречи на предположението, че $R/\rho R$ е област и доказва неразложимостта на ρ.

Произволен неразложим в R елемент $\rho \in R$ определя епиморфизъм

$$\Pi_\rho : R[x] \longrightarrow (R/\rho R)\,[x],$$

$$\Pi_\rho \left(\sum_{i=0}^{n} r_i x^{n-i} \right) = \sum_{i=0}^{n} \pi_\rho(r_i) x^{n-i}$$

на съответните полиномиални пръстени, продължаващ естествения епиморфизъм $\pi_\rho : R \to R/\rho R$. Полином $f(x) = r_0 x^n + r_1 x^{n-1} + \ldots + r_{n-1} x + r_n \in R[x]$ е примитивен тогава и само тогава, когато $\Pi_\rho(f) \not\equiv 0 + \rho R \in R/\rho R \subset (R/\rho R)\,[x]$ за всеки неразложим в R елемент $\rho \in R$. Наистина, ако $(r_0, r_1, \ldots r_n) = 1$, то за всеки неразложим в R елемент $\rho \in R$ съществува $0 \leq i \leq n$, така че r_i не се дели на ρ. Следователно $\pi_\rho(r_i) \neq 0 + \rho R \in R/\rho R$, откъдето и $\Pi_\rho(f) \not\equiv 0 + \rho R \in R/\rho R \subset (R/\rho R)\,[x]$. Обратно, нека $\Pi_\rho(f) \not\equiv 0 + \rho R \in (R/\rho R)\,[x]$ за всички неразложими в R елементи $\rho \in R$. Допускането $(r_0, \ldots, r_n) \neq 1$ води до наличие на неразложим в R общ делител $\rho \in R$ на $r_0, r_1, \ldots, r_n$. В резултат, $\Pi_\rho(f) = 0 + \rho R \in (R/\rho R)\,[x]$, противно на предположението. Следователно $f(x) \in R[x]$ е примитивен полином.

С това сме готови да докажем твърдението на лемата. Ако $f_1(x), \ldots, f_k(x) \in R[x]$ са примитивни полиноми и $\rho \in R$ е неразложим в R елемент, то

$$\Pi_\rho(f_1(x) \ldots f_k(x)) = \Pi_\rho(f_1(x)) \Pi_\rho(f_2(x)) \ldots \Pi_\rho(f_k(x)) \not\equiv 0 + \rho R \in (R/\rho R)\,[x],$$

доколкото $(R/\rho R)\,[x]$ е област и $\Pi_\rho(f_i(x)) \not\equiv 0 + \rho R \in (R/\rho R)\,[x]$ за всички $1 \leq i \leq k$. Следователно $f_1(x) \ldots f_k(x) \in R[x]$ е примитивен полином, Q.E.D.

ЛЕМА 8.11. (Лема на Гаус) *Ако R е комутативна област с еднозначно разлагане, то пръстенът на полиномите $R[x]$ на x с коефициенти от R е област с еднозначно разлагане.*

Доказателство: Влагаме комутативната област R в нейното поле от частни K. Произволен ненулев необратим в $K[x]$ полином $f(x) \in R[x] \subset K[x]$ има разлагане $f(x) = g_1(x) \ldots g_r(x)$ в произведение от неразложими в $K[x]$ полиноми $g_i(x) \in K[x]$, $1 \leq i \leq r$. След привеждане под общ знаменател на коефициентите на $g_i(x)$ и отделяне на най-големия общ делител на получените числители можем да представим $g_i(x) = c_i f_i(x)$, където $c_i \in K$, а $f(x) \in R[x]$ е примитивен полином. Твърдим, че $f_i(x)$ са неразложими в $R[x]$. Наистина, всяко разлагане $f_i(x) = f_i'(x) f_i''(x)$ с $f_i'(x), f_i''(x) \in R[x]$, $\deg f_i' \leq \deg f_i''$ определя разлагане $g_i(x) = [c_i f_i'(x)] f_i''(x)$ с $c_i f_i'(x), f_i''(x) \in K[x]$, $\deg c_i f_i'(x) \leq \deg f_i''(x)$. Неразложимостта на $g_i(x) \in K[x]$ в $K[x]$ изисква $c_i f_i'(x) \in K^*$, т.е. $\deg f_i'(x) = 0$. Следователно $f_i' \in R$ в $f_i(x) = f_i' f_i''(x)$. Поради примитивността на $f_i(x) \in R[x]$ константата $f_i' \in R$ е обратима в R и $f_i'' \in R[x]$ е асоциран с $f(x)$. Това доказва неразложимостта на $f(x) \in R[x]$ в $R[x]$.Нека $c = c_1 \dots c_r \in K$ и $d \in R$ е най-големият общ делител на коефициентите на полинома $f(x) \in R[x]$. Ако $c = \frac{a}{b}$ за взаимно прости $a, b \in R$, $b \neq 0$, то най-големият общ делител на коефициентите на полинома $bf(x) = af_1(x) \dots f_r(x)$ е равен на bd или на a, с точност до асоцираност, защото произведението $f_1(x) \dots f_r(x) \in R[x]$ е примитивен полином. Това изисква обратимостта на $b \in R$ в R. Разлагайки $a \in R$ в неразложими множители $a = \rho_1 \dots \rho_s$ с $\rho_j \in R$, получаваме разлагане

$$f(x) = b^{-1} \rho_1 \dots \rho_s f_1(x) \dots f_r(x)$$

на $f(x) \in R[x]$ в неразложими в $R[x]$ елементи.

За единствеността на такова разлагане, нека ненулевият необратим в $R[x]$ полином $f(x)$ се разлага във вида

$$f(x) = a_1 \dots a_p f_1(x) \dots f_k(x) = b_1 \dots b_q g_1(x) \dots g_l(x) \in R[x],$$

където $a_i, b_j \in R$ са неразложими в R, а $f_i(x), g_j(x) \in R[x]$ са примитивни и неразложими в $R[x]$ неконстантни полиноми. Твърдим, че $f_i(x)$ и $g_j(x)$ са неразложими в $K[x]$. Наистина, ако $f_i(x) = h_i'(x) t_i'(x)$ за $h_i'(x), t_i'(x) \in K[x]$, то съществуват $\alpha_i, \beta_i \in K$ и примитивни полиноми $h_i(x), t_i(x) \in R[x]$, така че $h_i'(x) = \alpha_i h_i(x)$ и $t_i'(x) = \beta_i t_i(x)$. Да представим $\alpha_i \beta_i = \frac{c_i}{d_i}$ като частно на взаимно прости $c_i, d_i \in R$, $d_i \neq 0$. Тогава най-големият общ делител на коефициентите на $d_i f_i(x) = c_i h_i(x) t_i(x)$ е едновременно c_i и d_i, с точност до асоцираност. Следователно $u_i = d_i^{-1} c_i \in R$ е обратим в R елемент и $f_i(x) = u_i h_i(x) t_i(x)$ е разалгане на $f_i(x)$ в $R[x]$. Ако $\deg h_i(x) \leq \deg t_i(x)$, то по предположение $u_i h_i(x) \in R[x]$ е обратим в $R[x]$ елемент, т.е. $\deg h_i(x) = 0$ и $h_i \in R$. Оттук $h_i'(x) = \alpha_i h_i \in K$ и $f_i(x) \in R[x] \subset K[x]$ е неразложим в $K[x]$. Съгласно единствеността на разлагането на $f(x) \in R[x] \subset K[x]$ в неразложими в $K[x]$ множители, $k = l$ и съществуват $c_i \in K^*$ с условието $g_i(x) = c_i f_i(x)$ за всички $1 \leq i \leq k$. Ако $c_i = \frac{a_i}{b_i}$ за взаимно прости $a_i, b_i \in R$, $b_i \neq 0$, то най-големият общ делител на коефициентите на полинома $b_i g_i(x) = a_i f_i(x)$ е b_i или a_i с точност до асоцираност. Това означава обратимост на c_i в R, което дава асоцираност на $f_i(x) \in R[x]$ с $g_i(x) \in R[x]$ в $R[x]$. Единствеността на разлагането на неразложими в R множители води до $p = q$ и асоцираност на a_i с b_i в R, а оттам и в $R[x]$, Q.E.D.

ТЕОРЕМА 11. *Пръстенът $\mathcal{O}_a$ на холоморфните в точка $a \in \mathbb{C}^n$ функции е област с еднозначно разлагане.*

Доказателство: Ще работим с индукция по n. Да допуснем, че $\mathcal{O}_{a'}$ са области с еднозначно разлагане за всички $a' \in \mathbb{C}^{n-1}$. Ако функцията f е холоморфна в околност U на a и $f(a', z_n) \not\equiv 0$, то съгласно Подготвителната теорема на Вайерщрас (Теорема 9), в подходяща околност V на a можем да представим $f(z) = P(z', z_n)\varphi(z)$ чрез полином на Вайерщрас $P(z', z_n)$ и холоморфна функция $\varphi : V \to \mathbb{C}^*$. С други думи, $f(z)$ и $P(z)$ са асоцирани в $\mathcal{O}_a$. По Лемата на Гаус (Лема 8.11), $\mathcal{O}_{a'}[z_n]$ е област с еднозначно разлагане, така че съществуват неразложими в $\mathcal{O}_{a'}[z_n]$ полиноми $P_1(z', z_n), \dots P_m(z', z_n) \in \mathcal{O}_{a'}[z_n]$ на z_n с условието

$$f(z) = P_1(z', z_n) \dots P_m(z', z_n) \varphi(z). \tag{8.3}$$

Полиномите $P_i(z', z_n) \in \mathcal{O}_{a'}[z_n]$ са определени с точност до обратими в $\mathcal{O}_{a'}$ функции, т.е. с точност до холоморфни неанулиращи се функции $\psi: U_i \to \mathbb{C}^*$ в околности U_i на a'.

От друга страна, произволна функция $f \in \mathcal{O}_a$ се разлага в произведение $f = f_1 \dots f_k$ от неразложими в $\mathcal{O}_a$ функции $f_j \in \mathcal{O}_a$. Наистина, твърдението е тривиално за неразложима в $\mathcal{O}_a$ функция $f \in \mathcal{O}_a$. За разложими в $\mathcal{O}_a$ функции $f \in \mathcal{O}_a$, с индукция по кратността на корена $z_n = a_n$ на $f(a', z_n) = 0$ установяваме съществуването на разлагане $f = f_1 \dots f_k$ в неразложими $f_j \in \mathcal{O}_a$. От $f(a', z_n) \not\equiv 0$ в околност на a следва, че $f_j(a', z_n) \not\equiv 0$, така че съществуват полиноми на Вайерщрас $Q_j(z', z_n)$, околности V_j на a в $\mathbb{C}^n$ и обратими в $\mathcal{O}_a$ функции $\psi_j : V_j \to \mathbb{C}^*$, изпълняващи $f_j(z', z_n) = Q_j(z', z_n)\psi_j(z)$ за $1 \leq j \leq k$. Съгласно Подготвителната теорема на Вайерщрас (Теорема 9), представянето

$$\left[\prod_{i=1}^{m} P_i(z', z_n)\right] \varphi(z) = f(z) = \left[\prod_{j=1}^{k} Q_j(z', z_n)\right] \left[\prod_{j=1}^{k} \psi_j(z)\right]$$

изисква съвпадение на полиномите на Вайерщрас

$$\prod_{i=1}^{m} P_i(z', z_n) = \prod_{j=1}^{k} Q_j(z', z_n).$$

По Лемата на Гаус (Лема 8.11) оттук следва, че $m = k$ и съществуват обратими в $\mathcal{O}_{a'}$ холоморфни функции $\rho_i(z')$ с $P_i(z', z_n) = \rho_i(z')Q_i(z', z_n)$. Остава да докажем, че произволен неразложим в $\mathcal{O}_{a'}[z_n]$ полином $R(z', z_n) \in \mathcal{O}_{a'}[z_n]$ е неразложим в $\mathcal{O}_a$. При допускане на противното съществуват $g, h \in \mathfrak{M}_a$ с $R(z) = g(z)h(z)$. Прилагайки Подготвителната теорема на Вайерщрас представяме $g(z) = G(z)\varepsilon(z)$ и $h(z) = H(z)\eta(z)$ чрез полиноми на Вайерщрас $G(z), H(z) \in \mathcal{O}_{a'}[z_n]$ от положителна степен спрямо z_n и обратими в $\mathcal{O}_a$ функции $\varepsilon, \eta \in \mathcal{O}_a$. Следователно $P(z) = [G(z)H(z)][\varepsilon(z)\eta(z)]$ и съгласно единствеността от Подготвителната теорема на Вайерщрас получаваме $P(z) = G(z)H(z)$. Това противоречи на неразложимостта на $P \in \mathcal{O}_{a'}[z_n]$ в $\mathcal{O}_{a'}[z_n]$ и доказва неразложимостта на $P \in \mathcal{O}_a$ в $\mathcal{O}_a$, Q.E.D.

ЛЕМА 8.12. *Нека R е комутативна област с еднозначно разлагане, а $f(x)$ и $g(x)$ са полиноми от $R[x]$ са полиноми със старши коефициент 1, Тогава съществуват поилноми $u(x), v(x) \in R[x]$, изпълняващи тъждеството на Безу*

$$d(x) = (f(x), g(x)) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$$

за най-големия общ делител $d(x) \in R[x]$ на $f(x)$ и $g(x)$.

Доказателство: Ако K е полето от частни на R, то можем да разглеждаме $f(x)$ и $g(x)$ като полиноми от $K[x]$. След привеждане под общ знаменател на коефициентите на най-големия общ делител $\delta_o(x) \in K[x]$ на $f(x)$ и $g(x)$ в $K[x]$ и изнасяне на най-големия общ делител на числителите на тези коефициенти получаваме примитивен полином $\delta(x) \in R[x]$, който е най-голям общ делител на $f(x)$ и $g(x)$ в $K[x]$. Твърдим, че $d(x) = r\delta(x)$ за подходящо $r \in R$. Преди всичко, $\delta(x)$ дели $f(x)$ и $g(x)$ в $R[x]$. По-точно, ако $f(x) = \delta(x)\gamma(x)$ за някакъв полином $\gamma(x) \in K[x]$, то съществуват взаимно прости $r_1, r_2 \in R$, $r_2 \neq 0$ и примитивен полином $h(x) \in R[x]$, така че $\gamma(x) = \frac{r_1}{r_2}h(x)$. Сега най-големият общ делител на коефициентите на полинома $r_2 f(x) = r_1 h(x)\delta(x)$ е r_1 и се дели на r_2, така че $r_1 r_2^{-1} \in R$ и $\gamma(x) \in R[x]$. Аналогично, $\delta(x)$ дели $g(x)$ в $R[x]$. По този начин, $\delta(x)$ се оказва общ делител на $f(x)$ и $g(x)$ в $R[x]$, така че $\delta(x)$ дели $d(x)$ в $R[x]$. Нека $d(x) = \delta(x)r(x)$ за подходящ полином $r(x) \in R[x]$. От друга страна, $d(x)$ е общ делител на $f(x)$ и $g(x)$ в $K[x]$, така че $d(x)$ дели $\delta(x)$ в $K[x]$.

Ако $\delta(x) = d(x)\alpha(x)$ за някакъв полином $\alpha(x) \in K[x]$, то $\delta(x) = \delta(x)r(x)\alpha(x)$ в областта $K[x]$ води до $1 = r(x)\alpha(x)$. От $\deg r = 0$ и $r \in R[x]$ следва, че $r \in R$. В пръстена $K[x]$ е изпълнено тъждеството на Безу

$$\delta(x) = f(x)u_1(x) + g(x)v_1(x)$$

за подходящи $u_1(x), v_1(x) \in K[x]$. Ако $u_1(x) = \frac{a_1}{b_1}u_2(x)$ и $v_1(x) = \frac{a_2}{b_2}v_2(x)$ за взаимно прости $a_i, b_i \in R$, $b_i \neq 0$ и примитивни $u_2(x), v_2(x) \in R[x]$, то чрез освобождаване от знаменателя получаваме

$$b_1b_2\delta(x) = f(x)a_1b_2u_2(x) + g(x)a_2b_1v_2(x). \tag{8.4}$$

След евентуално съкращение на общтите множители можем да считаме, че b_1 и b_2 са взаимно прости в R. Следователно $(b_1, a_1b_2) = 1$ и b_1 дели $f(x)u_2(x)$. Аналогично, $(b_2, a_1b_2) = 1$ и b_2 дели $g(x)u_1(x)$. Достатъчно е да докажем, че b_1 дели $u_2(x)$ и b_2 дели $v_2(x)$. Наистина, тогава примитивността на $u_2(x)$ и $v_2(x)$ води до обратимост на b_1 и b_2 в R. По този начин, полиномите $u(x) := ra_1b_1^{-1}u_2(x) \in R[x]$ и $v(x) := ra_2b_2^{-1}v_2(x) \in R[x]$ изпълняват тъждеството на Безу

$$d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$$

в $R[x]$. Ако $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} p_ix^i \in R[x]$ с $p_m = 1$, $u_2(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} q_jx^j \in R[x]$ и b_1 дели $f(x)u_2(x)$, то с индукция ще проверим, че $q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1, q_0$ се делят на b_1. Делимостта на старшия коефициент $p_mq_n = q_n$ пред x^{m+n} на b_1 е известна. Ако допуснем, че b_1 дели $q_n, \ldots, q_{n-i+1}$, то делимостта на коефициента $p_mq_{n-i} + p_{m-1}q_{n-i+1} + p_{m-2}q_{n-i+2} + \ldots$ пред x^{m+n-i} в $f(x)u_2(x)$ на b_1 води до делимост на q_{n-i} с b_1, Q.E.D.

Предположението за единичност на старшите коефициенти на $f(x), g(x) \in R[x]$ е съществено в предшестващата лема. За да илюстрираме с подходящ контрапример да отбележим, че пръстенът $\mathbb{Z}[x]$ на полиномите с целочислени коефициенти е комутативна област с еднозначно разлагане съгласно Лемата на Гаус. За произволно просто p полиномите $f(x) = x$ и $g(x) = p$ от $\mathbb{Z}[x]$ не изпълняват тъждеството на Безу в $\mathbb{Z}[x]$. По-точно, $f(x)$ и $g(x)$ са взаимно прости. Ако допуснем, че тези полиноми изпълняват тъждеството на Безу

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = xu(x) + pv(x) = 1$$

за подходящи $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}[x]$, то при полагане на $x = 0$ получаваме $pv(0) = 1$. Доколкото $v(0) \in \mathbb{Z}$ и p не дели 1, оттук следва, че $f(x) = x$ и $g(x) = p$ не изпълняват тъждеството на Безу в $\mathbb{Z}[x]$.

Твърдение 8.13. *Нека $0^n \in \mathbb{C}^n$ е началото на $\mathbb{C}^n$, а f и g са взаимно прости, холоморфни в 0^n функции. Тогава съществува достатъчно малко $\varepsilon > 0$, така че f и g са взаимно прости в $\mathcal{O}_z$ за всяка точка z от кълбото*

$$B(0^n, \varepsilon) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \,|\, |z| = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \leq \varepsilon \right\}.$$

Доказателство: Ако $f \in \mathcal{O}_{0^n}$ не се анулира в $0^n \in \mathbb{C}^n$, то съществува достатъчно малко $\varepsilon > 0$, така че f не се анулира в нито една точка на кълбото $B(0^n, \varepsilon)$. Следователно $f \in \mathcal{O}_z^*$ е обратим елемент на $\mathcal{O}_z$ за $\forall z \in B(0^n, \varepsilon)$, откъдето f и g са взаимно прости в $\mathcal{O}_z$. Оттук нататък ще предполагаме, че $f(0^n) = g(0^n) = 0$. Твърдим, че съществува подходящ избор на координатна система в $\mathbb{C}^n$, така че $f(0^{n-1}, z_n) \not\equiv 0$ и $g(0^{n-1}, z_n) \not\equiv 0$. При допускане на противното, ако $f|_l \not\equiv 0$ върху права $l \subset \mathbb{C}^n$ през началото $0^n \in \mathbb{C}$, то $g|_l \equiv 0$. Обединението L_f на правите през $0^n \in \mathbb{C}^n$, върху които f се анулира тъждествено е конус с връх $0^n \in \mathbb{C}^n$. Ако U е такава околност на a, в която f

е определена и холоморфна, то $A_f = \{z \in U \,|\, f(z) = 0\}$ е аналитично подпространство на U, съдържащо $L_f \cap U$. Ако f не се анулира тъждествено в U, то $A_f \subset U$ е собствено затворено подмножество. Следователно $U \setminus A_f$ е непразно отворено подмножество на U, което се съдържа в $U \setminus L_f$. По този начин, $g|_{U\setminus L_f} \equiv 0$ води до $g|_U \equiv 0$ и най-големият общ делител на f и g е $f \in \mathcal{O}^*_{0^n}$, противно на допускането за необратимост на f в $\mathcal{O}_{0^n}$. По този начин установяваме съществуването на подходяща координатна система в $\mathbb{C}^n$, относно която $f(0^{n-1}, z_n) \not\equiv 0$ и $g(0^{n-1}, z_n) \not\equiv 0$. Това дава възможност да изберем достатъчно малък диск $D(0,r_n) \subset \mathbb{C}$, така че $f(0^{n-1},\ ) : D(0,r_n) \to \mathbb{C}$ и $g(0^{n-1},\ ) : D(0,r_n) \to \mathbb{C}$ се анулират само за $z_n = 0$. Както в доказателството на Подготвителната теорема на Вайерщрас съществува полидиск $\mathcal{P}' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ с център 0^{n-1}, така че $f : \mathcal{P}' \times \partial D(0,r_n) \to \mathbb{C}^*$ и $g : \mathcal{P}' \times \partial D(0,r_n) \to \mathbb{C}^*$ не се анулират. В полидиска $\mathcal{P} := \mathcal{P}' \times D(0,r_n)$ можем да представим $f(z) = P(z)\varphi(z)$ и $g(z) = Q(z)\psi(z)$ чрез полиноми на Вайерщрас $P, Q \in \mathcal{O}_{0^{n-1}}[z_n]$ и никъде неанулиращи се функции $\varphi, \psi : \mathcal{P} \to \mathbb{C}^*$. Още повече, $P, Q \in \mathcal{O}_{z'}[z_n]$ за $\forall z' \in \mathcal{P}'$ и $\varphi, \psi \in \mathcal{O}^*_z$ за $\forall z \in \mathcal{P}$. Ясно е, че P и Q са взаимно прости в $\mathcal{O}_{0^{n-1}}[z_n]$, защото всеки техен общ делител от $\mathcal{O}_{0^{n-1}}[z_n]$ е общ делител на $f(z)$ и $g(z)$ от $\mathcal{O}_{0^n}$. Вземайки предвид, че полиномите на Вайерщрас P и Q са със старши коефициенти 1, прилагаме Лема 8.12 и получаваме тъждеството на Безу

$$P(z)P_1(z) + Q(z)Q_1(z) = 1 \tag{8.5}$$

за подходящи $P_1, Q_1 \in \mathcal{O}_{0^{n-1}}[z_n]$. Нека $V' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ е околност на $0^{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1}$ в която всички коефициенти на $P_1(z', z_n)$ и $Q_1(z', z_n)$ са определени и холоморфни. Избираме кълбо $B(0^n, \varepsilon) \subset \mathcal{P}$, така че $B'(0^{n-1}, \varepsilon) \subset V'$. Тогава равенството (8.5) е изпълнено в $\mathcal{O}_{z'}[z_n]$ за $\forall z = (z', z_n) \in B(0^n, \varepsilon)$. Ако $P(z)$ и $Q(z)$ имат неразложим общ делител $S \in \mathcal{O}_{z'}[z_n]$ за някое $z = (z', z_n) \in B(0^n, \varepsilon)$, то S дели 1, което е противоречие. Следователно $P(z)$ и $Q(z)$ са взаимно прости в $\mathcal{O}_{z'}[z_n]$, а оттам и $f(z), g(z) \in \mathcal{O}_z$ са взаимно прости в $\mathcal{O}_z$ съгласно $\varphi, \psi \in \mathcal{O}^*_z$, Q.E.D.

Следствие 8.14. (Слаба теорема за нулите) *Ако $f(z', z_n) \in \mathcal{O}_a$ е неразложима в $\mathcal{O}_a$ холоморфна функция и $h(z', z_n) \in \mathcal{O}_a$ се анулира навсякъде, където $f(z', z_n) = 0$, то $f(z', z_n)$ дели $h(z', z_n)$ в $\mathcal{O}_a$.*

Доказателство: Съгласно Подготвителната теорема на Вайерщрас, функцията $f \in \mathcal{O}_a$ е асоцирана в $\mathcal{O}_a$ с неразложим в $\mathcal{O}_{a'}[z_n]$ полином на Вайерщрас $P \in \mathcal{O}_{a'}[z_n]$. Нека $f(z) = P(z)\varphi_o(z)$ за неанулираща се в околност на a холоморфна функция $\varphi_o(z)$. Полиномите P и $(\deg P)^{-1} \frac{\partial P}{\partial z_n}$ от $\mathcal{O}_{a'}[z_n]$ са взаимно прости поради неразложимостта на P в $\mathcal{O}_{a'}[z_n]$ и $\deg \frac{\partial P}{\partial z_n} = \deg P - 1$. Освен това, те имат старши коефициенти 1, така че съгласно Лема 8.12 изпълняват тъждеството на Безу

$$P(z_n)u(z_n) + (\deg P)^{-1} \frac{\partial P}{\partial z_n} v(z_n) = 1 \tag{8.6}$$

за подходящи полиноми $u(z_n), v(z_n) \in \mathcal{O}_{a'}[z_n]$. Равенството (8.6) изисква коренът a_n на $P(a', z_n) = 0$ да е с кратност 1. Тогава по Теоремата на Вайерщрас за деление (Теорема 10) имаме

$$h(z) = P(z)\varphi(z) + \psi(z')$$

за подходящи $\varphi \in \mathcal{O}_a$ и $\psi \in \mathcal{O}_{a'}$. По предположение, $h(z)$ се анулира винаги когато $P(z) = z_n - c_1(z') = 0$. Следователно изборът на $z_n = c_1(z')$ води до анулиране на $\psi(z')$, което може да е изпълнено само когато $\psi(z')$ се анулира в околност на a'. Оттук $h(z) = P(z)\varphi(z) = f(z)\varphi_o(z)\varphi(z)$ и $f(z)$ дели $h(z)$, Q.E.D.