Глава 9

Интегрални формули на Мартинели-Бохнер и Лере

В настоящия въпрос ще изведем интегрални формули за холоморфна функция f в ограничена област D, свеждайки въпроса към интеграл на подходяща диференциална форма върху $(2n-1)$-мерната сфера

$$S_r = \partial B(0^n, r) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 = r^2 \right\}.$$

За целта ще използваме, че обемът на кълбото

$$B(0^n, r) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 < r^2 \right\}$$

е равен на

$$\mathrm{vol}B(0^n, r) = \frac{(\pi r^2)^n}{n!} = \frac{[\mathrm{vol}D(0,r)]^n}{n!},$$

където $D(0,r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < r\}$ е диск с радиус $r \in \mathbb{R}^{>0}$ в $\mathbb{C}$. По-общо, ако

$$B_r^k := \left\{ x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \,\middle|\, \sum_{j=1}^{k} x_j^2 < r^2 \right\}$$

е кълбо с реална размерност $k \in \mathbb{N}$ и радиус $r \in \mathbb{R}^{>0}$, то обемът

$$\mathrm{vol}B_r^k = \frac{(\pi r^2)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)},$$

където стойностите на Γ- функцията в полу-целите числа са

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right) = \begin{cases} l! & \text{за } k = 2l, \\ \frac{1.3.5\ldots(2l-1)}{2^l}\sqrt{\pi} & \text{за } k = 2l-1 \end{cases}$$

Ясно е, че полидискът $\mathcal{P}(0^n, r^n) = D(0,r) \times \ldots D(0,r) \subset \mathbb{C}^n$ има обем $\mathrm{vol}\mathcal{P}(0^n, r^n) = [\mathrm{vol}D(0,r)]^n$. Тук ще изложим един елементарен подход за доказване на равенството

$$\mathrm{vol}B(0^n, r) = \frac{\mathrm{vol}\mathcal{P}(0^n, r^n)}{n!}.$$

Нека

$$\Delta = \{z \in \mathcal{P}(0^n, r^n) \,|\, |z_i| = |z_j| \text{ за някои } 1 \leq i < j \leq n\}$$

е подмножеството на $\mathcal{P}(0^n, r^n)$, съставено от точките с поне две компоненти от една и съща окръжност в $D(0,r)$. Евклидовата мярка на Δ е нулева, така че

$$\mathrm{vol}\mathcal{P}(0^n, r^n) = \mathrm{vol}\left(\mathcal{P}(0^n, r^n) \setminus \Delta\right).$$

Действието на симетричната група S_n върху $\mathcal{P}(0^n, r^n)$ чрез пермутация на компонентите се наследява от $\mathcal{P}(0^n, r^n) \setminus \Delta$. Още повече, всички S_n-орбити върху

$\mathcal{P}(0^n, r^n) \setminus \Delta$ се състоят от $n!$ точки и множеството $\mathcal{P}(0^n, r^n) \setminus \Delta$ представлява S_n- орбитата на

$$\mathcal{P}_> = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{P}(0^n, r^n) \,|\, |z_1| > |z_2| > \dots |z_{n-1}| > |z_n|\}.$$

Следователно

$$\frac{\mathrm{vol}(\mathcal{P}(0^n, r^n) \setminus \Delta)}{n!} = \mathrm{vol}\left([\mathcal{P}(0^n, r^n) \setminus \Delta]/S_n\right) = \mathrm{vol}\mathcal{P}_>.$$

Ще построим изображение $f : \mathcal{P}_> \to B(0^n, r)$ върху подмножество $Imf \subset B(0^n, r)$ с мярка $\mathrm{vol}(Imf) = \mathrm{vol}B(0^n, r)$, така че $f : \mathcal{P}_> \to Imf$ е взаимно еднозначно и запазва евклидовия обем в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. По-точно, въвеждаме полярни координати $z_j = r_j e^{i\alpha_j}$ с $r_j \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, $\alpha_j \in [0, 2\pi)$ за $\forall z_j \in D(0, r)$, $1 \leq j \leq n$ и определяме

$$f : \mathcal{P}_> \longrightarrow \mathbb{C}^n,$$
$$f\left(r_1 e^{i\alpha_1}, r_2 e^{i\alpha_2}, \dots, r_{n-1} e^{i\alpha_{n-1}}, r_n e^{i\alpha_n}\right) :=$$
$$\left(\sqrt{r_1^2 - r_2^2} e^{i\alpha_1}, \sqrt{r_2^2 - r_3^2} e^{i\alpha_2}, \dots, \sqrt{r_{n-1}^2 - r_n^2} e^{i\alpha_{n-1}}, r_n e^{i\alpha_n}\right).$$

Тогава произволна точка $z \in \mathcal{P}_>$ се изобразява в точка $w = f(z)$ с $\sum\limits_{j=1}^{n} |w_j|^2 = r_1^2 = |z_1|^2 < r^2$ и $w_j \neq 0$ за всички $1 \leq j \leq n-1$. По този начин, ако

$$\mathcal{B}_{\neq 0} := \{z \in B(0^n, r) \,|\, z_j \neq 0 \text{ за } \forall 1 \leq j \leq n-1\},$$

то

$$f : \mathcal{P}_> \to \mathcal{B}_{\neq 0}$$

взема стойности в $\mathcal{B}_{\neq 0}$. Допълнението $B(0^n, r) \setminus \mathcal{B}_{\neq 0}$ има мярка 0 като обединение на $n-1$ кълба $B(0^{n-1}, r)$ с комплексна размерност $n-1$. Следователно $\mathrm{vol}(\mathcal{B}_{\neq 0}) = \mathrm{vol}B(0^n, r)$. За да докажем, че f е взаимно еднозначно и запазва евклидовия обем, да направим смяна от полярните координати $(r_1, \dots, r_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ към $(s_1, \dots, s_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с $s_j = \frac{1}{2} r_j^2$ за $\forall 1 \leq j \leq n$. Тогава

$$f(s_1, \dots, s_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = (s_1 - s_2, s_2 - s_3, \dots, s_{n-1} - s_n, s_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

е линейно изображение с матрица

$$M_f = \begin{pmatrix} L & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & E_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{(2n) \times (2n)},$$

където E_n е единичната матрица, а

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{n \times n}$$

е долно-триъгълна матрица с единици по главния диагонал и минус единици по отсечката, успоредна на главния диагонал и намираща се непосредствено под него. Доколкото M_f е неособена, изображението $f : \mathcal{P}_> \to Imf$ е взаимно еднозначно върху образа си. Още повече, всяка точка $w \in \mathcal{B}_{\neq 0}$ с координати

$$(s(w), \alpha(w)) = (s_1(w), \dots, s_{n-1}(w), s_n(w), \alpha_1(w), \dots, \alpha_n(w)) \in \mathbb{R}^{2n}$$

е образ на точката $z \in \mathcal{P}_>$ с

$$(s(z), \alpha(z)) = \left(\sum_{j=1}^{n} s_j(w), \sum_{j=2}^{n} s_j(w), \dots, \sum_{j=n-1}^{n} s_j(w), s_n(w), \alpha_1(w), \dots, \alpha_n(w)\right).$$

По този начин установихме, че $f : \mathcal{P}_> \to \mathcal{B}_{\neq 0}$ е взаимно еднозначно линейно изображение. Ако $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ с $z_j = x_j + iy_j$ за $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$, то фиксираме формата на обема

$$d\mathrm{vol} = dx \wedge dy = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$$

в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. В полярни координати $z_j = r_j e^{i\alpha_j}$ имаме

$$2idx_j \wedge dy_j = d\overline{z_j} \wedge dz_j = 2ir_j dr_j \wedge d\alpha_j.$$

По-нататък,

$$r_j dr_j \wedge d\alpha_j = ds_j \wedge d\alpha_j,$$

откъдето формата на обема

$$d\mathrm{vol} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} (dx_1 \wedge dy_1) \wedge (dx_2 \wedge dy_2) \wedge \ldots \wedge (dx_n \wedge dy_n) =$$

$$(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} (ds_1 \wedge d\alpha_1) \wedge (ds_2 \wedge d\alpha_2) \wedge \ldots \wedge (ds_n \wedge d\alpha_n) =$$

$$(ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n) \wedge (d\alpha_1 \wedge \ldots \wedge d\alpha_n) = ds \wedge d\alpha.$$

Съгласно $\det(M_f) = 1$, взаимно еднозначното линейно изображение $f : \mathcal{P}_> \to \mathcal{B}_{\neq 0}$ запазва обема и $\mathrm{vol}(\mathcal{P}_>) = \mathrm{vol}(\mathcal{B}_{\neq 0})$.
В доказателството на интегралната формула на Мартинели-Бохнер ще използваме следната

Лема 9.1. *За прозиволни различни $\zeta, z \in \mathbb{C}^n$ да положим $||\zeta - z||^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} |\zeta_j - z_j|^2$, $d\overline{\zeta}_{\widehat{j}} = d\overline{\zeta_1} \wedge \ldots d\overline{\zeta_{j-1}} \wedge d\overline{\zeta_{j+1}} \wedge \ldots \wedge d\overline{\zeta_n}$ и да разгледаме формата на Мартинели-Бохнер*

$$\omega_{MB}(\zeta - z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}(\overline{\zeta_j} - \overline{z_j})}{||\zeta - z||^{2n}} d\overline{\zeta}_{\widehat{j}} \wedge d\zeta.$$

Тогава

$$\int_{S_r} \omega_{MB}(\zeta - z) = 1$$

върху произволна сфера

$$S_r = \partial B(z, r) = \{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid ||\zeta - z||^2 = r^2\}$$

с радиус $r \in \mathbb{R}^>$ и

$$d\omega_{MB}(\zeta - z) = 0$$

за всяко $\zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{z\}$.

Доказателство: Достатъчно е да докажем лемата за $z = 0^n \in \mathbb{C}^n$. Това означава

$$\int_{\partial B(0^n, r)} \omega_{MB}(\zeta) = 1$$

и $d\omega_{MB}(\zeta) = 0$ за $\forall \zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}$. Ограничението

$$\omega_{MB}(\zeta)|_{S_r = \partial B(0^n, r)} = \frac{(n-1)!}{(2\pi i r^2)^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \overline{\zeta_j} d\overline{\zeta}_{\widehat{j}} \wedge d\zeta$$

е неособена $(2n-1)$-форма върху сферата S_r с център $0^n \in \mathbb{C}^n$ и радиус $r > 0$, така че интегралът

$$\int_{S_r} \omega_{MB}(\zeta) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i r^2)^n} \sum_{j=1}^{n} \int_{S_r} (-1)^{j-1} \overline{\zeta_j} d\overline{\zeta}_{\widehat{j}} \wedge d\zeta$$

е коректно определен. По теоремата на Стокс,

$$\int\limits_{\partial B(0^n,r)} (-1)^{j-1}\overline{\zeta_j}d\overline{\zeta}_{\widehat{j}} \wedge d\zeta = \int\limits_{B(0^n,r)} d((-1)^{j-1}\overline{\zeta_j}d\overline{\zeta}_{\widehat{j}} \wedge d\zeta) = \int\limits_{B(0^n,r)} d\overline{\zeta} \wedge d\zeta$$

за всички $1 \leq j \leq n$. Непосредствено се пресмята, че

$$d\overline{\zeta} \wedge d\zeta = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}(d\overline{\zeta_1} \wedge d\zeta_1) \wedge \ldots \wedge (d\overline{\zeta_n} \wedge d\zeta_n) =$$

$$(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}(2i)^n(dx_1 \wedge dy_1) \wedge \ldots \wedge (dx_n \wedge dy_n) =$$

$$(2i)^n(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) \wedge (dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n) = (2i)^n dx \wedge dy,$$

така че

$$\int\limits_{B(0^n,r)} d\overline{\zeta} \wedge d\zeta = (2i)^n \mathrm{vol} B(0^n, r) = \frac{(2\pi i r^2)^n}{n!}.$$

В резултат,

$$\int\limits_{S_r} \omega_{MB}(\zeta) = \frac{(n-1)!n(2\pi i r^2)^n}{(2\pi i r^2)^n n!} = 1.$$

Вземайки предвид, че

$$\overline{\partial}(||\zeta||^{-2n}) = \overline{\partial}\left(\sum_{j=1}^n \overline{\zeta_j}\zeta_j\right)^{-n} = (-n)||\zeta||^{-2n-2}\left(\sum_{s=1}^n \zeta_s d\overline{\zeta_s}\right),$$

а оттам и

$$\overline{\partial}\left(||\zeta||^{-2n}\right) d\overline{\zeta}_{\widehat{j}} \wedge d\zeta = \frac{(-1)^j n}{||\zeta||^{2n+2}}\zeta_j d\overline{\zeta} \wedge d\zeta,$$

получаваме

$$d\omega_{MB}(\zeta) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left[\frac{n}{||\zeta||^{2n}} - n\frac{\sum\limits_{j=1}^n |\zeta_j|^2}{||\zeta||^{2n+2}}\right] d\overline{\zeta} \wedge d\zeta = 0$$

за всички $\zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}$, Q.E.D.

Твърдение 9.2. (Интегрална формула на Мартинели (1938г.) и Бохнер (1943г.)) *Нека $D \subset \mathbb{C}^n$ е ограничена област с частично гладка граница, $f : D \to \mathbb{C}$ е холоморфна функция с непрекъснато продължение $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$, а*

$$\omega_{MB}(\zeta - z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}(\overline{\zeta_j} - \overline{z_j})}{||\zeta - z||^{2n}} d\overline{\zeta}_{\widehat{j}} \wedge d\zeta$$

за $\zeta, z \in \mathbb{C}^n$, $\zeta \neq z$ е формата на Мартинели-Бохнер. Тогава

$$\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\omega_{MB}(\zeta - z) = f(z) \quad \text{за } \forall z \in D.$$

Доказателство: Достатъчно е да докажем, че

$$f(0^n) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\omega_{MB}(\zeta)$$

при предположение, че $z = 0^n \in D$. Избираме достатъчно малко $r > 0$ така че кълбото $B(0^n, r)$ да се съдържа в D. Тогава $D \setminus B(0^n, r) \subset \mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}$, така че $d\omega_{MB}(\zeta)|_{D\setminus B(0^n,r)} = 0$ и

$$d\left[f(\zeta)\omega_{MB}(\zeta)\right]|_{D\setminus B(0^n,r)} = \left[df(\zeta) \wedge \omega_{MB}(\zeta) + f(\zeta)d\omega_{MB}(\zeta)\right]|_{D\setminus B(0^n,r)} = 0$$

съгласно холоморфността на f. По теоремата на Стокс,

$$0 = \int\limits_{D \setminus B(0^n,r)} d\left[f(\zeta)\omega_{MB}(\zeta)\right] = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\omega_{MB}(\zeta) - \int\limits_{S_r} f(\zeta)\omega_{MB}(\zeta).$$

Използвайки непрекъснатостта на холоморфната функция f предсатвяме $f(\zeta) = f(0^n) + \alpha(r)$ за $\zeta \in S_r$ чрез непрекъсната функция $\alpha(r)$ с $\lim\limits_{r\to 0} \alpha(r) = 0$. Следователно

$$\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\omega_{MB}(\zeta) = \int\limits_{S_r} f(\zeta)\omega_{MB}(\zeta) = \int\limits_{S_r} f(0^n)\omega_{MB}(\zeta) + \int\limits_{S_r} \alpha(r)\omega_{MB}(\zeta) = f(0^n) + \beta(r)$$

за

$$\beta(r) = \int\limits_{S_r} \alpha(r)\omega_{MB}(\zeta) \quad \text{с } \lim_{r\to 0} \beta(r) = 0.$$

Доколкото

$$\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\omega_{MB}(\zeta)$$

не зависи от $r \to 0$, оттук следва, че $\beta(r) = 0$ и

$$\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\omega_{MB}(\zeta) = f(0^n),$$

Q.E.D.

За $n = 1$ формата на Мартинели-Бохнер

$$\omega_{MB}(\zeta - z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\zeta - z}$$

съвпада с ядрото на формулата на Коши. За разлика от ядрото на Коши, което зависи холоморфно от z, формата на Мартинели-Бохнер за $n \geq 2$ не зависи холоморфно от z. Накрая да отбележим, че формата на Мартинели-Бохнер е ядро на характеристичната функция на произволна ограничена област $D \subset \mathbb{C}^n$ с частично гладка граница ∂D. По-точно,

$$\int\limits_{\partial D} \omega_{MB}(\zeta - z) = \begin{cases} 1 & \text{за } z \in D; \\ 0 & \text{за } z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}. \end{cases}$$

Наистина,

$$\int\limits_{\partial D} \omega_{MB}(\zeta - z) = 1$$

следва от Твърдение 9.2 при $f|_D \equiv 1$. От друга страна, по Лема 9.1 е изпълнено $d\omega_{MB}(\zeta - z) = 0$ за прозиволни $z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$, $\zeta \in \overline{D}$. Сега формулата на Стокс дава

$$0 = \int\limits_{D} d\omega_{MB}(\zeta - z) = \int\limits_{\partial D} \omega_{MB}(\zeta - z).$$

Интегралната формула на Лере обобщава интегралната формула на Мартинели-Бохнер. За нейното доказателство ни е нужна следната

Лема 9.3. *За произволни $z, w \in \mathbb{C}^n$ с $\langle z, w\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} z_j w_j \neq 0$ нека*

$$\delta(w) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} w_j dw_{\widehat{j}} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} w_j dw_1 \wedge \ldots \wedge dw_{j-1} \wedge dw_{j+1} \wedge \ldots \wedge dw_n$$

и

$$\Omega(z,w) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\delta(w) \wedge dz}{\langle z, w\rangle^n}.$$

Тогава

$$\delta(w) = (-1)^{j-1} w_j^n d\left(\frac{w_1}{w_j}\right) \wedge \ldots \wedge d\left(\frac{w_{j-1}}{w_j}\right) \wedge d\left(\frac{w_{j+1}}{w_j}\right) \wedge \ldots \wedge d\left(\frac{w_n}{w_j}\right)$$

за $\forall 1 \leq j \leq n$*, така че* $\Omega(z,w) = \Omega(z,cw)$ *за произволно* $c \in \mathbb{C}^*$*. Освен това,* $d\Omega(z,w) = 0$ *за произволни* $z, w \in \mathbb{C}^n$ *с* $\langle z, w\rangle \neq 0$*.*

Доказателство: За всяко $i \in \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n\}$ е в сила

$$d\left(\frac{w_i}{w_j}\right) = \frac{1}{w_j} dw_i - \frac{w_i}{w_j^2} dw_j,$$

откъдето

$$(-1)^{j-1} w_j^n d\left(\frac{w_1}{w_j}\right) \wedge \ldots \wedge d\left(\frac{w_{j-1}}{w_j}\right) \wedge d\left(\frac{w_{j+1}}{w_j}\right) \wedge \ldots \wedge d\left(\frac{w_n}{w_j}\right) =$$

$$(-1)^{j-1} w_j dw_{\widehat{j}} + \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{i-1} w_i dw_{\widehat{i}} + \sum_{i=j+1}^{n} (-1)^{i-1} w_i dw_{\widehat{i}} = \delta(w).$$

По този начин, $\delta(cw) = c^n \delta(w)$ за $\forall c \in \mathbb{C}^*$. От друга страна,

$$\langle z, cw\rangle = \sum_{j=1}^{n} c z_j w_j = c\langle z, w\rangle,$$

така че

$$\Omega(z,cw) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{c^n \delta(w) \wedge dz}{c^n \langle z, w\rangle^n} = \Omega(z,w)$$

за произволни $c \in \mathbb{C}^*$ и $z, w \in \mathbb{C}^n$ с $\langle z, w\rangle \neq 0$. Непосредствено пресмятаме, че $d\delta(w) = ndw = ndw_1 \wedge \ldots \wedge dw_n$ и

$$d(\langle z, w\rangle^{-n}) = -\frac{n}{\langle z, w\rangle^{n+1}} \left(\sum_{s=1}^{n} z_s dw_s + w_s dz_s\right),$$

откъдето

$$d\Omega(z,w) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \left[\frac{ndw \wedge dz}{\langle z, w\rangle^n} - \frac{n}{\langle z, w\rangle^{n+1}} \left(\sum_{s=1}^{n} z_s dw_s\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} w_j dw_{\widehat{j}}\right) \wedge dz\right] =$$

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \left[\frac{ndw \wedge dz}{\langle z, w\rangle^n} - \frac{n\left(\sum\limits_{j=1}^{n} z_j w_j\right) dw \wedge dz}{\langle z, w\rangle^{n+1}}\right] = 0,$$

Q.E.D.

Твърдение 9.4. (Интегрална формула на Лере (1956г.)) *Нека* $D \subset \mathbb{C}^n$ *е ограничена област с частично гладка граница* ∂D*,* $\lambda : \partial D \to \mathbb{C}^n$ *е гладка функция с* $\langle \zeta, \lambda(\zeta)\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} \zeta_j \lambda(\zeta)_j \neq 0$*, а* $f : D \to \mathbb{C}$ *е холоморфна функция с непрекъснати продължение* $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$*. Тогава*

$$f(z) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\Omega(\zeta, \lambda(\zeta)) \quad \text{за } \forall z \in D.$$

Доказателство: Достатъчно е да установим, че

$$f(0^n) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\Omega(\zeta, \lambda(\zeta))$$

при предположение, че $0^n \in D$. Вземайки предвид $c(\zeta) := \langle \zeta, \lambda(\zeta) \rangle \neq 0$ за $\forall \zeta \in \partial D$, прилагаме Лема 9.3 и получаваме

$$\Omega(\zeta, \lambda(\zeta)) = \Omega\left(\zeta, \frac{\lambda(\zeta)}{\langle \zeta, \lambda(\zeta) \rangle}\right)$$

във всяка точка $\zeta \in \partial D$. Ще докажем, че

$$f(0^n) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\Omega\left(\zeta, \frac{\lambda(\zeta)}{\langle \zeta, \lambda(\zeta) \rangle}\right), \tag{9.1}$$

използвайки свойствата на формата на Лере $\Omega(z, w)$ върху квадриката

$$Q_1 = \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \,\middle|\, \langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j w_j = 1 \right\}.$$

С тази цел да отбележим, че за $\lambda(\zeta) = \overline{\zeta}$ формата на Лере

$$\Omega(\zeta, \overline{\zeta}) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}\overline{\zeta_j}}{||\zeta||^{2n}} d\overline{\zeta}_{\widehat{j}} \wedge d\zeta = \omega_{MB}(\zeta)$$

съвпада с формата на Мратинели-Бохнер $\omega_{MB}(\zeta)$. Съгласно Твърдение 9.2 е в сила

$$f(0^n) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\Omega(\zeta, \overline{\zeta}).$$

Още повече, $0^n \notin \partial D$ гарантира, че $||\zeta||^2 \neq 0$ за $\forall \zeta \in \partial D$, откъдето $\Omega(\zeta, \overline{\zeta}) = \Omega\left(\zeta, \frac{\overline{\zeta}}{||\zeta||^2}\right)$. В резултат,

$$f(0^n) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\Omega\left(\zeta, \frac{\overline{\zeta}}{||\zeta||^2}\right), \tag{9.2}$$

където точките $\left(\zeta, \frac{\overline{\zeta}}{||\zeta||^2}\right)$ са от квадриката Q_1. Разглеждаме множеството

$$\Sigma = \left\{ z \in \mathbb{C}^n, w \in \mathbb{C}^n, t \in [0,1] \,\middle|\, w = t\frac{\lambda(z)}{\langle z, \lambda(z) \rangle} + (1-t)\frac{\overline{z}}{||z||^2} \right\},$$

чиято проекция върху (z, w) се съдържа в квадриката $Q_1 \subset \mathbb{C}^{2n}$. В Лема 9.3 установихме, че $d\Omega(z, w)|_\Sigma = 0$, откъдето

$$d\left(f(z)\Omega(z, w)\right)|_\Sigma = \left[df \wedge \Omega(z, w) + f(z)d\Omega(z, w)\right]|_\Sigma = 0$$

съгласно холоморфността на f и това, че формата на Лере $\Omega(z, w)$ е кратна на dz. По този начин, формулата на Стокс дава

$$0 = \int\limits_{\Sigma} d(f(z)\Omega(z, w)) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\Omega\left(\zeta, \frac{\lambda(\zeta)}{\langle \zeta, \lambda(\zeta) \rangle}\right) - \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\Omega\left(\zeta, \frac{\overline{\zeta}}{||\zeta||^2}\right).$$

Комбинирайки с (9.2) получаваме (9.1), Q.E.D.