ЕКСТРЕМАЛНИ ЗАДАЧИ ЗА ОЦВЕТЯВАНЕ НА ГРАФИ

Автореферат

Недялко Ненов

СУ "‘Св. Климент Охридски"’
Факултет по Математика и Информатика

28.06.2005 г.

АВТОРЕФЕРАТ

1. Исторически обзор.

През 1930 година *P. Ramsey* в [84] доказва едно обобщение на принципа на Дирихле. Частен случай на този резултат се формулира по следния начин:

За произволни естествени числа r и $m \geq 2$ съществува естествено число $N(r,m)$ такова, че ако $n \geq N(r,m)$, тогава при всяко оцветяване на ребрата на пълния граф с n върха в r цвята има подграф $K_m \subset K_n$, всичките ребра на който са оцветени еднакво.

Както и принципа на Дирихле, Теоремата на *Ramsey* има много приложения. Тези приложения изискват да знаем минималното възможно $N(r,m)$ от формулирания по-горе резултат на *Ramsey*. Това минимално число се нарича число на *Ramsey* и се бележи с $R(\underbrace{m,\ldots,m}_{r})$. Пресмятането на числата на *Ramsey* е много трудна задача и е решена само в няколко частни случая. Теорията, която възниква във връзка с числата на *Ramsey* е важен клон в Теорията на графите и се нарича Теория на *Ramsey*.

Най-малкото известно число на *Ramsey* е $R(3,3)=6$. Да припомним, че това означава, че при всяко оцветяване на ребрата на K_6 с два цвята, непременно има едноцветен триъгълник (за краткост това свойство ще отбелязваме със символа $K_6 \longrightarrow (3,3)$) и K_5 няма това свойство. Ясно е, че ако графът G съдържа K_6, тогава $G \longrightarrow (3,3)$. През 1967 година P. Erdös и A. Hajnal в [17] формулират следния проблем:

Съществува ли граф $G \longrightarrow (3,3)$, който не съдържа пълния граф с 6 върха K_6?

Положителен отговор на този въпрос почти едновременно дават няколко математици. Най-простия такъв граф (с 8 върха) е построен от R. Graham в [23] през 1968 година. По-нататък Erdös дефинира числата

$$F_e(3,3;5) = \min\{|V(G)| \,:\, G \longrightarrow (3,3) \text{ и } K_5 \not\subset G\};$$

$$F_e(3,3;4) = \min\{|V(G)| \,:\, G \longrightarrow (3,3) \text{ и } K_4 \not\subset G\}$$

и поставя като проблем тяхното пресмятане. Числото $F_e(3,3;5)$ е пресметнато окончателно през 1998 година. В Таблица 9.1 са отразени различните етапи от оценяването на $F_e(3,3;5)$.

Year	Reference	Lower	Upper
1967	P. Erdos, A. Hajnal [17]		?
1969	M. Schauble [88]		42
1971	R.L. Graham, J. H. Spencer [24]		23
1972	S. Lin [46]	10	
1973	R.W. Irving [29]		18
1979	N. Hadziivanov, N. Nenov [37]		16
1980	N. Nenov [55]	11	
1981	N. Nenov [59]		15
1985	N. Hadziivanov, N. Nenov [79]	12	
1993	M. Erikson [16]		17
1994	J. Bukor [8]		16
1998	Piwakowski et'al. [85]	15	

Таблица 9.1. История на оценяването на $F_e(3,3;5)$ според [85].

Числото $F_e(3,3;4)$ все още не е пресметнато.

Числата $F_e(3,3;5)$ и $F_e(3,3;4)$, които съответсвуват на числото на *Ramsey* $R(3,3)=6$, по аналогичен начин се обобщават за произволни числа на *Ramsey*. Графите, които възникват от тези обобщения, се наричат графи на *Folkman* (в чест на *J. Folkman*, който в [19] доказва тяхното съществуване), а минималният брой на върховете на графите на *Folkman*, които не съдържат K_n, се наричат числа на *Folkman*. Числата на *Folkman* обобщават числата на *Ramsey* и са изследвани системно от S. Lin в [46]. В настоящата дисертация ние изследваме графите на *Folkman*, като основната ни цел е пресмятането на нови числа на *Folkman*. На графите на *Folkman* са посветени много работи, част от които са: [10], [19], [20], [27], [30], [46], [47], [48], [49], [85], [90] и [92]. Методите,които разработваме, ни дават възможност да подобрим някои от известните оценки за числата на *Foklman* от [46] и [48]. Тези нови оценки, в някои специални случаи, дават точните стойности на някои числа на *Folkman*. По този начин ние пресмятаме няколко безкрайни серии на числа на

Folkman.

Накрая на този обзор ще отбележим и постиженията, получени с помощта на компютър. В [13] и [85] професор S. Radziszowski и неговите ученици J. Coles, K. Piwakowski и S. Urbanski, използвайки нашия подход към пресмятането на числата на *Folkman* и компютърни програми за генериране на графи с дадени свойства, успяват да пресметнат три нови числа на *Folkman*. Оказа се, че оценките отгоре, които ние даваме на тези числа са точни.

По-подробно резултатите от тази дисертация ще бъдат описани по глави в следващата част на увода.

2. Описание на резултатите.

Разглеждат се само крайни и неориентирани графи, без кратни ребра и примки. С $V(G)$ и $E(G)$ означаваме съответно множеството на върховете и множеството на ребрата на графа G. Допълнителният граф на графа G ще бележим с $\overline{G}$. Множеството от p върха на графа G се нарича p-клика, ако всеки два от тях са съседни. Най-голямото естествено число p, за което G има p-клика, се нарича кликово число на G и се бележи с $cl(G)$. Едно множество от върхове на графа G, се нарича независимо, ако всеки два от тях не са съседни. Максималният брой независими върхове, които можем да изберем в G, се нарича число на независимост на G и се бележи с $\alpha(G)$. Всички останали означения и понятия са дадени в първа глава.

За даден граф G r-разлагане (r-оцветяване) на върховете на G наричаме всяко разлагане

$$V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j. \tag{1}$$

Ако всяко от множествата V_i е независимо множество, тогава казваме, че (1) е r-хроматично разлагане. Казваме, че G е r-хроматичен граф, ако той има поне едно r-хроматично разлагане.

Екстремалните задачи, които решаваме са свързани с две обобщения на r-хроматичните графи. Първото обобщение са $(a_1, \ldots, a_r)$-свободните r-разлагания, където a_i са естествени числа. Казваме, че r-разлагането (1) е $(a_1, \ldots, a_r)$-свободно, ако V_i не съдържа a_i-клика за всяко $i = 1, \ldots, r$. В тази терминология r-хроматичните разлагания са $\underbrace{(2, \ldots, 2)}_{r}$-свободни r-разлагания. Символът

$$G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$$

означава, че G няма $(a_1, \dots, a_r)$-свободно r-разлагане. За произволни естествени числа $a_1, \dots, a_r$ и q дефинираме

$$H_v(a_1, \dots, a_r; q) = \{G \mid G \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r) \text{ и } cl(G) < q\}.$$

Първата екстремална задача, която разглеждаме, е определянето на минимума на броя на върховете на графите от $H_v(a_1, \dots, a_r; q)$. Във връзка с тази задача дефинираме

$$F_v(a_1, \dots, a_r; q) = \min\{|V(G)| : G \in H_v(a_1, \dots, a_r; q)\}.$$

Ясно е, че от $G \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r)$ следва $cl(G) \geq \max\{a_1, \dots, a_r\}$. В [19] *J. Folkman* доказва, че ако

$$q > \max\{a_1, \dots, a_r\}, \text{ тогава } H_v(a_1, \dots, a_r; q) \neq \emptyset.$$

Следователно

$$F_v(a_1, \dots, a_r; q) \text{ съществува } \iff q > \max\{a_1, \dots, a_r\}. \tag{2}$$

Числата $F_v(a_1, \dots, a_r; q)$ се наричат върхови числа на *Folkman*. За естествените числа $a_1, \dots, a_r$ дефинираме

$$p = \max\{a_1, \dots, a_r\} \text{ и } m = \sum_{i=1}^{r}(a_i - 1) + 1. \tag{3}$$

Очевидно е, че

$$K_m \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r) \text{ и } K_{m-1} \overset{v}{\nrightarrow} (a_1, \dots, a_r),$$

където K_m е пълният граф с m върха. Следователно, ако $cl(G) \geq m$, тогава $G \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r)$. От тези разсъждения става ясно, че

$$F_v(a_1, \dots, a_r; q) = m, \quad \text{ако} \quad q > m. \tag{4}$$

Поради това, интересни са тези числа на *Folkman* $F_v(a_1, \dots, a_r; q)$, за които $q \leq m$. В [47] *Luczak* и *Urbanski* доказват, че

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m) = m + \max\{a_1, \dots, a_r\}. \tag{5}$$

За числата $F_v(a_1, \dots, a_r; q)$, $q \leq m-1$ знаем много малко. Ние получаваме оценки за някои от числата $F_v(a_1, \dots, a_r; q)$, $q \leq m - 1$, като в някои специални ситуации разглежданите върхови числа на *Folkman* са пресметнати точно.

Всяко разлагане

$$E(G) = E_1 \cup \ldots \cup E_r, \quad E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j \tag{6}$$

се нарича r-оцветяване на ребрата на графа G. Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа и $a_i \geq 2$, $i = 1, \ldots, r$. Ако K е клика на G и $E(K) \subseteq E_i$, казваме че K е едноцветна клика от i-тия цвят. Казваме, че (6) е $(a_1, \ldots, a_r)$-свободно r-разлагане, ако за всяко $i \in \{1, \ldots, r\}$ не съществува едноцветна a_i-клика от i-тия цвят. Символът $G \xrightarrow{e} (a_1, \ldots, a_r)$ означава, че G няма $(a_1, \ldots, a_r)$-свободно r-оцветяване на ребрата. Дефинираме

$$H_e(a_1, \ldots, a_r; q) = \{G \mid G \xrightarrow{e} (a_1, \ldots, a_r) \text{ и } cl(G) < q\}.$$

Втората основна задача, която разглеждаме е намирането на минимума на броя на върховете на графите от $H_e(a_1, \ldots, a_r; q)$. Във връзка с тази задача дефинираме

$$F_e(a_1, \ldots, a_r; q) = \min\{|V(G)| : G \in H_e(a_1, \ldots, a_r; q)\}.$$

Вярно е, че

$$F_e(a_1, \ldots, a_r; q) \text{ съществува } \iff q > \max\{a_1, \ldots, a_r\}. \tag{7}$$

В случая $r = 2$, твърдението (7) е доказано от *J. Folkman* в [19], а в общия случай това твърдение е доказано от *J. Nešetřil* и *V. Rödl* в [81]. Числата $F_e(a_1, \ldots, a_r; q)$ се наричат ребрени числа на *Folkman.*

Припомняме, че числото на *Ramsey* $R(a_1, \ldots, a_r)$ се дефинира като най-малкото естествено число n, за което $K_n \xrightarrow{e} (a_1, \ldots, a_r)$. От тази дефиниция става ясно, че

$$F_e(a_1, \ldots, a_r; q) = R(a_1, \ldots, a_r), \text{ ако } q > R(a_1, \ldots, a_r). \tag{8}$$

Поради това, числата на *Ramsey* са специален случай на ребрените числа на *Folkman.* Известни са много малко от числата $F_e(a_1, \ldots, a_r)$ даже в ситуацията, когато $R(a_1, \ldots, a_r)$ е пресметнато. Още преди 38 години *P. Erdös* поставя като проблем пресмятането на числото $F_e(3, 3; 5)$. Този проблем е решен окончателно през 1998 година в [85]. Точната стойност на това число е 15. В тази дисертация ние разглеждаме нашия принос (неравенството $F_e(3,3;5) \leq 15$) към решаването на този проблем на *P. Erdös.* Пресмятаме още четири ребрени числа на *Folkman*, а именно числата

$$F_e(3,4;9) = 14, \quad F_e(3,3,3;16) = 21,$$
$$F_e(3,3,3;15) = 23, \quad F_e(3,3,3;14) = 25.$$

Второто обобщение на r-хроматичните графи, което разглеждаме е следното:

Казваме, че графът G е обобщен r-хроматичен граф, ако съществува r-разлагане (1) на $V(G)$ такова, че

$$d(v) \leq |V(G)| - |V_i|, \quad \forall\, v \in V_i, \quad i = 1, \dots, r, \tag{9}$$

където $d(v)$ е степента на върха v.

Ако V_i е независимо множество, тогава неравенството (9) е изпълнено, тъй като ако $v \in V_i$, съседите му принадлежат на $V(G) \backslash V_i$. При фиксирани естествени числа n и r пресмятаме максимума на броя на ребрата на n-върховите обобщени r-хроматични графи. Получените резултати разширяват, обобщават и допълват класическата теорема на *Turan*, тъй като класът на обобщените r-хроматични графи включва в себе си класа на графите, които не съдържат $(r+1)$-клика.

Ще формулираме по-точно основните резултати във всяка глава.

ГЛАВА 1. Дефинират се необходимите понятия и означения от Теория на графите.

ГЛАВА 2. r-разлагането (1) се нарича p-плътно, ако обединението на всеки p от множествата V_i съдържа p-клика. Казваме, че графът G е p-плътен, ако всяко $\chi(G)$-хроматично разлагане, където $\chi(G)$ е хроматичното число на G, е p-плътно. Основният резултат във втора глава е следната:

Теорема 2.2. *Нека G е граф, такъв че $\chi(G) = r$ и $cl(G) < r$. Ако G е p-плътен, тогава*

(а) $|V(G)| \geq r + p$;

(б) *от* $|V(G)| = r + p$ *следва* $G = K_{r-p-1} + \overline{C}_{2p+1}$.

С C_n означаваме простия цикъл с дължина n. Теорема 2.2 в случая $p = 2$ е доказана от *G. Dirac* в [14]. Тази теорема играе важна роля в ГЛАВА 9 при пресмятането на числото $F_e(3,4;9)$.

ГЛАВА 3. Изследват се върховите числа на Folkman и се доказват някои основни техни свойства. Доказана е следната:

Теорема 3.1. *Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа и числата m и p са дефинирани с равенствата (3). Нека G е граф и $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$. Тогава $\chi(G) \geq m$ и ако $\chi(G) = m$, графът G е p-плътен.*

Както вече отбелязахме по-горе, интересни са само числата $F_v(a_1, \ldots, a_r; q)$, за които $q \leq m$. За изследване на числата от този тип важно значение има следната:

Теорема 3.4. *Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа. Нека G е граф, такъв че $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$ и $cl(G) < m$. Тогава е вярно неравенството $\pi(\overline{G}) \geq p$.*

Числото $\pi(G)$ означава максималния брой независими (без общ връх) ребра, които можем да изберем в G. С помощта на Теорема 3.4 даваме нови и елегантни доказателства на следните резултати:

Следствие 3.1, [47] *Нека $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$ и $cl(G) < m$. Тогава $|V(G)| \geq m + p$.*

Следствие 3.2, [48] *Нека $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$ и $cl(G) < m$ и $|V(G)| = m + p$. Тогава $G = K_{m-p-1} + \overline{C}_{2p+1}$.*

Основният резултат в трета глава е:

Теорема 3.5. *Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа и G е граф с $cl(G) < m - 1$ и $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$. Тогава*

(а) $|V(G)| \geq m + p + \alpha(G) - 1$;

(в) *Ако $|V(G)| = m + p + \alpha(G) - 1$, тогава G съдържа като подграф графа $K_{m-p-2} + L_p$. Поради това $|V(G)| \geq m + 3p$.*

Числата m и p се дефинират с равенството (3), а L_p е конкретен граф, дефиниран в **ГЛАВА 3**.

В [48] е доказано неравенството:

$$F_v(a_1, \ldots, a_r; m - 1) \geq m + p + 1.$$

Това неравенство не е точно, тъй като доказваме следната:

Теорема 3.6. *Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа и $m \geq p + 2$. Тогава*

$$F(a_1, \ldots, a_r; m - 1) \geq m + p + 2.$$

В специалния случай $a_1 = \cdots = a_r = 2$, $r \geq 5$, неравенството от Теорема 3.6 е точно.

ГЛАВА 4. От (2) става ясно, че

$$F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1) \quad \text{съществува} \Longleftrightarrow m \geq p+2,$$

Числата m и p са дефинирани с равенствата (3). В тази глава разглеждаме граничния случай $m = p+2$. В уводната част на **ГЛАВА 4** изясняваме, че от $m = p+2$ следва, че числата $F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1)$ са следните:

$$F_v(2,2,2;3); \quad F_v(2,2,p;p+1) \ \text{ и } \ F_v(3,p;p+1) \ \text{ при } \ p \geq 3.$$

В [50] *J. Mycielski* доказва, че $F_v(2,2,2;3) \leq 11$, а в [10] *V. Chvatal* доказва, че $F_v(2,2,2;3) \geq 11$. Така, че $F_v(2,2,2;3) = 11$. В тази глава разглеждаме останалите числа $F_v(2,2,p;p+1)$ и $F_v(3,p;p+1)$, където $p \geq 3$. В [48] е доказано, че

$$2p+3 \leq F_v(3,p;p+1) \leq 2p^2+1.$$

Ние усилваме този резултат като доказваме, че:

Теорема 4.1. *За всяко естествено число $p \geq 3$ са верни неравенствата*

$$2p+4 \leq F_v(2,2,p;p+1) \leq F_v(3,p;p+1) \leq 4p+2.$$

От Теорема 4.1 следва $F_v(3,3;4) \leq 14$. Това неравенство доказваме през 1981 година в [59]. С помощта на компютър през 1998 година в [85] е доказано, че $F_v(3,3;4) \geq 14$. Така, че $F_v(3,3;4) = 14$. Това е второто пресметнато число от разглеждания тип.

За числата $F_v(2,2,p;p+1)$ получаваме друга оценка отгоре с помощта на:

Теорема 4.2. *Нека $p \geq 2$, r и q са естествени числа такива, че*

$$R(3,p) + 2r < R(3,q).$$

Тогава $F_v(\underbrace{2, \ldots, 2}_{r}, p; q) \leq R(3,p) + 2r$. От Теорема 4.2 получаваме

Следствие 4.1. *Верни са неравенствата*

$$F_v(2,2,4;5) \le 13;$$

$$F_v(2,2,6;7) \le 22;$$

$$F_v(2,2,7;8) \le 27;$$

$$F_v(2,2,8;9) \le 32;$$

$$F_v(2,2,9;10) \le 40, \quad \text{ако} \quad R(3,10) \neq 40.$$

Първите четири неравенства дават по-добра оценка от Теорема 4.1. За числото $F(2,2,9;10)$ обаче от Теорема 4.1 получаваме по-добрата оценка отгоре 38.

Интересно е да отбележим, че за числото $F(2,2,5;6)$, Теорема 4.2 не е приложима, понеже $R(3,6) = R(3,5)+4$. Тъй като $R(3,7) > R(3,5)+6$, от Теорема 4.2 ($r=3$, $p=5$ и $q=7$) следва

$$F_v(2,2,2,5;7) \le 20.$$

По-нататък се пресмятат още две числа от разглеждания тип:

$$F_v(2,2,4;5) = 13 \;\; \text{(Теорема 4.4)} \;\; \text{и}$$

$$F_v(3,4;5) = 13 \;\; \text{(Следствие 4.2)}.$$

В края на **ГЛАВА 4** разглеждаме и числата от вида

$$F_v(\underbrace{2,\dots,2}_{r},p;r+p-1) = F_v(2_r,p;r+p-1)$$

$$F_v(\underbrace{3,\dots,3}_{r},p;2r+p-1 = F_v(3_r,p;2r+p-1).$$

За тези числа доказваме:

Теорема 4.6. *За всеки две естествени числа $p \ge 3$ и $r \ge 2$ са верни неравенствата*

$$2p+r+2 \le F_v(2_r,p;r+p-1) \le 4p+r.$$

Теорема 4.7. *Нека $p \ge 3$ и $r \ge 1$ са естествени числа. Тогава*

$$2p+2r+2 \le F_v(3_r,p;2r+p-1) \le 4p+2r.$$

ГЛАВА 5. Разглеждат се числата на *Folkman* $F_v(a_1, \dots, a_r; q)$, когато $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 2$, т.е. числата

$$F_v(\underbrace{2, \dots, 2}_{r}; q) = F_v(2_r; q).$$

От (4) имаме $F_v(2_r; q) = r + 1$, ако $q > r + 1$. Съгласно (5) имаме $F_v(2_r; r + 1) = r + 3$. За следващото число $F_v(2_r; r)$ доказваме:

Теорема 5.1. *Верни са равенствата*

$$F_v(2_r; r) = \begin{cases} 11, & \text{ако } r = 3 \text{ или } r = 4; \\ r + 5, & \text{ако } r \geq 5. \end{cases}$$

Както отбелязахме по-горе в случая $r = 3$ Теорема 5.1 е доказана в [50] и [10]. Ние доказваме Теорема 5.1 при $r \geq 4$. Ще отбележим, че доказателството на тези теореми в случая $r = 4$ е значително по-сложно отколкото в случая $r \geq 5$.

При $r \geq 5$ Теорема 5.1 е усилена по следния начин:

Теорема 5.5. *Нека G е граф такъв, че*

$$G \xrightarrow{v} (2_r), \quad cl(G) < r \text{ и } |V(G)| = F_v(2_r; r),$$

където $r \geq 5$. Тогава $G = K_{r-5} + C_5 + C_5$.

Разгледани са и числата на *Folkman* $F_v(2_r;\, r - 1)$ и $F_v(2_r;\, r - 2)$. Доказани са следните две теореми:

Теорема 5.7. *Нека r е естествено число и $r \geq 4$. Тогава*

(а) $F_v(2_r; r - 1) \geq r + 7$;

(в) $F_v(2_r; r - 1) = r + 7$, *ако* $r \geq 8$.

Теорема 5.9. *Нека $r \geq 5$ е естествено число. Тогава*

(а) $F_v(2_r, r - 2) \geq r + 9$;

(в) $F_v(2_r, r - 2) = r + 9$, *ако* $r \geq 11$.

ГЛАВА 6. Разглеждат се числата $F_v(a_1, \dots, a_r; m - 1)$, когато $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 3$ или 4. Ако $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 3$, съгласно (2) числото $F_v(a_1, \dots, a_r; m - 1)$ съществува тогава и само тогава, когато $m \geq 5$. В граничния случай $m = 5$ има две такива числа: $F_v(3, 3; 4)$ и $F_v(2, 2, 3; 4)$.

В Глава 4 видяхме, че $F_v(3,3;4) = 14$. От Теорема 4.1 имаме $F_v(2,2,3;4) \leq 14$. В края на октомври 2004 година в [13] се появи анонс, според който $F(2,2,3;4) = 14$. За сега няма подробна публикация във връзка с този анонс.

Ако $\max\{a_1,\ldots,a_r\} = 3$ и $m = 6$, тогава има две числа от вида

$$F_v(a_1,\ldots,a_r;m-1): \quad F_v(2,2,2,3;5) \text{ и } F_v(2,3,3;5).$$

За тези числа доказваме

Теорема 6.1. $F_v(2,2,2,3;5) = F_v(2,3,3;5) = 12$**.**

Числата на *Folkman* от вида

$$F_v(\underbrace{3,\ldots,3}_{r},q) = F_v(3_r;q)$$

се наричат триъгълни числа на *Folkman*. От (4) имаме $F_v(3_r;q) = 2r+1$, ако $q > 2r+1$. Съгласно (5), $F_v(3_r;2r+1) = 2r+4$. В тази глава ние правим следващата стъпка към пресмятането на триъгълните числа на *Folkman* като доказваме:

Теорема 6.4.

$$F_v(3_r;2r) = 2r+7, \quad r \geq 3.$$

Ако $\max\{a_1,\ldots,a_r\} = p$, числото $F_v(a_1,\ldots,a_r;m-1)$ зависи от числото $F_v(2,2,p;p+1)$. Това става ясно от следващата теорема, която допълва Теорема 3.6.

Теорема 6.5. *Нека $a_1,\ldots,a_r$ са естествени числа и за тях m и p са дефинирани с равенствата (3), като $m \geq p+2$ и $p \geq 3$. Тогава, ако $F(2,2,p;p+1) \geq 2p+5$, е вярно неравенството*

$$F_v(a_1,\ldots,a_r;m-1) \geq m+p+3$$

Изследването на числата $F_v(a_1,\ldots,a_r;m-1)$, където $m \geq 6$ и $\max\{a_1,\ldots,a_r\} = 3$ завършва с тяхното окончателно пресмятане.

Теорема 6.7. *Нека $a_1,\ldots,a_r$ са естествени числа, за които p и m са дефинирани с равенствата (3). Ако $p = 3$ и $m \geq 6$, тогава*

$$F_v(a_1,\ldots,a_r;m-1) = m+6.$$

Съгласно (2), числата $F_v(a_1, \dots, a_r; m-1)$, $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 4$, съществуват тогава и само тогава, когато $m \geq 6$. С разработената в тази глава техника пресмятаме тези числа.

Теорема 6.8. *Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа, за които p и m са дефинирани с равенствата (3). Ако $p = 4$ и $m \geq 6$, тогава*

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) = m + 7.$$

Накрая на 6-та глава се разглеждат и числата $F_v(a_1, \dots, a_r; m-1)$, когато $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 5$. Съгласно (2) тези числа съществуват тогава и само тогава, когато $m \geq 7$. В [48] е доказано, че

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) \leq m + 25, \quad \text{ако} \quad m \geq 12.$$

Също в [48] е анонсирано без доказателство неравенството

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) \leq 77 - 3m, \quad 8 \leq m \leq 11.$$

Ние подобряваме тези оценки като доказваме, че:

Теорема 6.9. *Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа, за които $m \geq 7$ и $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 5$. Тогава*

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) \leq m + 15.$$

ГЛАВА 7. Да си припомним, че

$$F_v(a_1, \dots, a_r; q) \text{ съществува } \iff q \geq \max\{a_1, \dots, a_r\} + 1.$$

Най-трудни за пресмятане $F_v(a_1, \dots, a_r; q)$ са в граничния случай $q = \max\{a_1, \dots, a_r\} + 1$. В **ГЛАВА 7** се разглеждат числата $F_v(p, p; p+1)$. За тези числа са известни следните две общи оценки:

$$F_v(p, p; p+1) \leq \lfloor 2p\,!\,(e-1) \rfloor - 1, \quad [48]. \tag{10}$$

$$F_v(p, p; p+1) \leq \lfloor p\,!\,e \rfloor - 2, \quad p \geq 3, \quad [65]. \tag{11}$$

Знаем точните стойности само на две от числата $F_v(p, p; p+1)$. Първото е $F_v(2, 2; 3) = 5$ и е очевидно. Второто е $F_v(3, 3; 4) = 14$. Неравенството $F_v(3, 3; 4) \leq 14$ е получено в [59] и е доказано подробно в **ГЛАВА**

4. Неравенството $F_v(3,3;4) \geq 14$ е получено с помощта на компютър в [85]. За следващото число $F_v(4,4;5)$ от (10) имаме $F_v(4,4;5) \leq 81$, а от (11) следва, че $F_v(4,4;5) \leq 63$.

Ние подобряваме тези оценки като доказваме, че

Теорема 7.1. $16 \leq F_v(4,4;5) \leq 35$..

Доказваме и рекурентното неравенство:

Теорема 7.2. *За всяко естествено число $p \geq 2$ е вярно неравенството*

$$F_v(p+1,p+1;p+2) \leq (p+1)F_v(p,p;p+1).$$

От последното неравенство очевидно следва

$$F_v(p,p;p+1) \leq \frac{p\,!}{24}.F_v(4,4:5), \quad p \geq 4.$$

Тъй като $F_v(4,4:5) \leq 35$ получаваме

Следствие 7.1. *За всяко естествено число $p \geq 4$ е вярно неравенството*

$$F_v(p,p;p+1) < 1.46p\,!.$$

Тази оценка съществено подобрява оценките (10) и (11).

ГЛАВА 8. В тази глава се разглеждат оцветявания на ребрата на пълния граф с n върха K_n. Нека γ е r-оцветяване на ребрата на пълния граф с $R(a_1,\ldots,a_r)$ върха. С $t(a_i)$ означаваме броя на едноцветните a_i-клики от i-тия цвят. Дефинираме $t(\gamma) = t(a_1) + \cdots + t(a_r)$. С $M(a_1,\ldots,a_r)$ означаваме $\min t(\gamma)$ по всички r-оцветявания γ на ребрата на пълния граф с $R(a_1,\ldots,a_r)$ върха. Числото $M(a_1,\ldots,a_r)$ се нарича кратност на *Ramsey* съответствуваща на числото на *Ramsey* $R(a_1,\ldots,a_r)$.

Първата теорема, която доказваме в тази глава е:

Теорема 8.1.(съвм. с Н. Хаджииванов)

(а) $M(3,4) = 1$;

(в) *съществува единствено (с точност до изоморфизъм)* 2*-оцветяване на $E(K_9)$, в което няма едноцветни* 3*-клики от пър-*

вия цвят и има единствена едноцветна 4-клика от втория цвят.

Теорема 8.1 по-нататък играе важна роля при пресмятането на числото $F_e(3,4;9)$. Ясно е, че $M(a_1,\dots,a_r) \geq 1$. Измежду известните кратности на *Ramsey* единствено $M(3,4)$ е равна на 1. Изглежда доста вероятно, че други такива кратности на *Ramsey* няма. В подкрепа на тази хипотеза доказваме:

Теорема 8.2. *Нека $a_1,\dots,a_r$ са естествени числа, $a_i \geq 3$, $i=1,\dots,r$, такива, че*

$$R(a_1,\dots,a_r) = R_1 + \dots + R_r + 2 - r, \tag{12}$$

където $R_1 = R(a_1-1, a_2,\dots,a_r),\dots,R_r = R(a_1,a_2,\dots,a_r-1)$. Тогава $M(a_1,a_2,\dots,a_r) \geq 2$.

Полагаме

$$R(\underbrace{3,\dots,3}_{r}) = R_r(3) \quad \text{и} \quad M(\underbrace{3,\dots,3}_{r}) = M_r(3).$$

От доказаните в тази глава резултати с Н. Хаджииванов получаваме

Следствие 8.2. *Нека $n \geq R_n(3)$. Тогава във всяко r-оцветяване на $E(K_n)$ има поне*

$$\frac{1}{r} M_r(3) \binom{n}{3} \binom{R_r(3)}{3}^{-1}$$

едноцветни 3-клики от един и същи цвят.

С помощта на Следствие 8.2 доказваме основния резултат в **ГЛАВА 8**:

Теорема 8.3. (съвм. с Н. Хаджииванов) *Нека F е крайно поле и $|F| \geq R_n(3)$. Тогава уравнението $x^n + y^n = z^n$ има в полето F поне*

$$\frac{|F|(|F|-1)M_n(3)}{n\, R_n(3)(R_n(3)-1)(R_n(3)-2)}$$

абсолютно ненулеви решения.

Тази теорема съществено обобщава резултата на *I. Shur* от [88].

ГЛАВА 9. Тази глава е посветена на ребрените числа на *Folkman*. В началото на главата се разглеждат ребрените $(3,3)$-графи (това са графите $G \xrightarrow{e} (3,3))$. Най-простите примери за такива графи са следните

$$K_6 \xrightarrow{e} (3,3), \quad [26];$$

$$K_8 - C_5 = K_3 + C_5 \xrightarrow{e} (3,3), \quad [23].$$

Тези два факта се обобщават по следния начин:

Теорема 9.1. (съвм. с Н. Хаджииванов) *За всяко естествено число r е вярно, че*

$$C_3 + C_{2r+1} \xrightarrow{e} (3,3).$$

По-нататък се разглежда числото $F_e(3,3;5)$. Пресмятането на това число е поставено като проблем от *P. Erdös*, който е публикуван в [24]. Този проблем е решен окончателно в [85]. Историята на оценяването на $F_e(3,3;5)$ е дадена в Таблица 9.1, която е взета от [85].

В тази глава ние излагаме нашия принос към решаването на този проблем на *P. Erdös*, като доказваме:

Теорема 9.2.

$$F_e(3,3;5) \leq 15.$$

От равенството (8) става ясно, че когато числото $R(a_1,\dots,a_r)$ е известно, интересни са тези от числата $F_e(a_1,\dots,a_r;q)$, за които

$$q \leq R(a_1,\dots,a_r).$$

В [46] *Lin* доказва, че ако е вярно равенството (12), тогава

$$F_e(a_1,\dots,a_r;\ R(a_1,\dots,a_r)) = R(a_1,\dots,a_r) + 2.$$

Оттук *Lin* пресмята, че

$$F_e(3,3;6) = 8, \quad F_e(3,5;14) = 16, \quad F_e(4,4;18) = 20, \quad F_e(3,3,3;17) = 19.$$

Най-малкото число на *Ramsey*, за което равенството (12) не е изпълнено е $R(3,4) = 9$. Поради това най-малкото число от вида

$$F_e(a_1,\dots,a_r;\ R(a_1,\dots,a_r)),$$

което не може да се пресметне по метода на *Lin* е $F_e(3,4;9)$. Ние пресмятаме това число като доказваме

Теорема 9.7. $F_e(3,4;9) = 14$.

В [46] *Lin* доказва също неравенството

$$F_e(a_1, \dots, a_r;\ R(a_1, \dots, a_r)) \geq R(a_1, \dots, a_r) + 4. \tag{13}$$

Също в [46] той изказва предположението, че неравенството (13) е винаги строго. Ние уточняваме този резултат на *Lin* като доказваме:

Теорема 9.10. *Равенство в (13) имаме тогава и само тогава, когато*

$$K_{R-6} + C_5 + C_5 \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r).$$

Тъй като $K_{11} + C_5 + C_5 \xrightarrow{e} (3,3,3)$ (виж Теорема 9.13), от Теорема 9.10 следва, че $F_e(3,3,3;16) = 21$, т.е. хипотезата на *Lin* не е вярна.

В края на **ГЛАВА 9** пресмятаме числата:

$$F_e(3,3,3;16) = 21 \quad \text{(Следствие 9.3);}$$

$$F_e(3,3,3;15) = 23 \quad \text{(Следствие 9.4);}$$

$$F_e(3,3,3;14) = 25 \quad \text{(Следствие 9.5).}$$

Дефинираме графа

$$L_5(p,q,r,s) = K_5 + C_{2p+1} + C_{2q+1} + C_{2r+1} + C_{2s+1}.$$

Оценките отгоре за тези числа получаваме от:

Теорема 9.13. *За произволни естествени числа p, q, r и s е вярно, че*

$$L_5(p,q,r,s) \xrightarrow{e} (3,3,3).$$

Равенството $F_e(3,3,3;16) = 21$ е получено от Теорема 9.13 и Теорема 9.10. Числото $F_e(3,3,3;15) = 23$ е получено с помощта на Теорема 9.13 и следната:

Теорема 9.11. *Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа, $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$ и $r \geq 2$. Тогава*

(a) $F_e(a_1, \dots, a_r; R-2) \geq R + 6$;

(в) *Ако* $(a_1, \ldots, a_r) \neq (3,3)$ *и* $K_{R-9} + C_5 + C_5 + C_5 \xrightarrow{e} (a_1, \ldots, a_r)$, *тогава* $F_e(a_1, \ldots, a_r; R-2) = R+6$.

Числото $F_e(3,3,3;14) = 25$ е пресметнато с помощта на Теорема 9.13 и следната:

Теорема 9.12. *Нека* $a_1, \ldots, a_r$ *са естествени числа такива, че* $a_i \geq 3$, $i = 1, \ldots, r$, $r \geq 2$ *и* $(a_1, \ldots, a_r) \neq (3,3)$. *Тогава*

(а) $F_e(a_1, \ldots, a_r; R-3) \geq R+8$;

(в) *Ако* $(a_1, \ldots, a_r) \neq (3,4)$ *и* $K_{R-12} + C_5 + C_5 + C_5 + C_5 \xrightarrow{e} (a_1, \ldots, a_r)$, *тогава* $F_e(a_1, \ldots, a_r; R-3) = R+8$.

ГЛАВА 10. С $e(G)$ означаваме броя на ребрата на графа G. С $K(p_1, \ldots, p_r)$ означаваме пълния r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$, където $p_i = |V_i|$, $i = 1, \ldots, r$. Ако $n = p_1 + \cdots + p_r$ и $|p_i - p_j| \leq 1$, $\forall\, i, j$, тогава $K(p_1, \ldots, p_r)$ се нарича r-хроматичен n-върхов граф на *Turan* и се бележи с $T_r(n)$. Резултатите в тази глава са свързани със следната класическа:

Теорема на Turan. *Нека* G *е* n*-върхов граф и* $cl(G) \leq r$. *Тогава:*

(а) $e(G) \leq e(T_r(n))$;

(в) $e(G) = e(T_r(n))$ *само когато* $G = T_r(n)$.

Определение 10.1. *Нека* G *е граф и* $V \subseteq V(G)$. *Казваме, че* V *е* δ*-множество в графа* G*, ако*

$$d(v) \leq |V(G)| - |V|, \ \ \forall\, v \in V.$$

Основното понятие обобщен r-хроматичен граф се дефинира по следния начин:

Определение 10.2. *Казваме, че графът* G *е обобщен* r*-хроматичен граф с части* $V_1, \ldots, V_r$*, ако*

$$V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_r, \ \ V_i \cap V_j = \emptyset, \ \ i \neq j$$

и всяко от множествата V_i, $i = 1, \ldots, r$ *е* δ*-множество в* G. *Ако*

$$d(v) = |V(G)| - |V_i|, \ \ \forall\, v \in V_i, \ \ i = 1, \ldots, r$$

тогава казваме, че G е обобщен пълен r-хроматичен граф с части $V_1, \dots, V_r$.

Обобщените r-хроматични графи са въведени в съвместната ни с Н. Хаджииванов статия [43]. За тези графи доказваме:

Теорема 10.1. (съвм. с Н. Хаджииванов) *Нека G е обобщен r-хроматичен граф с части $V_1, \dots, V_r$, където $|V_i| = p_i$, $i = 1, \dots, r$. Тогава:*

(а) $e(G) \leq e(K(p_1, \dots, p_r))$;

(в) $e(G) = e(K(p_1, \dots, p_r))$ *само когато G е обобщен пълен r-хроматичен граф с части $V_1, \dots, V_r$.*

Тъй като от $cl(G) \leq r$ следва, че G е обобщен r-хроматичен граф, Теорема 10.1 може да се разглежда като разширение на Теоремата на *Turan*.

Ако $M \subseteq V(G)$ с $\Gamma(M)$ означаваме множеството от върховете на G, които са съседни на всичките върхове от M. В третия пункт на **ГЛАВА 10** се разглеждат обобщени r-хроматични графи, породени от така наречените α-редици от върхове в граф.

Определение 10.4. *Нека G е граф и $v_1, \dots, v_r \in V(G)$. Казваме, че редицата $v_1, \dots, v_r$ е наследствена, ако*

$$v_i \in \Gamma_G(v_1, \dots, v_{i-1}), \quad i = 2, \dots, r.$$

Определение 10.5. *Нека $v_1, \dots, v_r$ е наследствена редица от върхове в графа G. Дефинираме*

$$V_1 = V(G) \backslash \Gamma_G(v_1),\ V_i = \Gamma_G(v_1, \dots, v_{i-1}) \backslash \Gamma_G(v_i),\ i = 2, \dots, r-1$$

$$V_r = \Gamma_G(v_1, \dots, v_{r-1}).$$

Редицата от подмножества $V_1, \dots, V_r$ се нарича разслоение на $V(G)$, породено от наследствената редица $v_1, \dots, v_r$. Множеството V_i се нарича i-ти слой на това разслоение.

Определение 10.6. *Нека G е граф и $v_1, \dots, v_r \in V(G)$. Казваме, че редицата $v_1, \dots, v_r$ е α-редица на графа G, ако тя удовлетворява следните условия:*

(i) *$v_1, \dots, v_r$ е наследствена редица в G;*

(ii) *v_1 е връх с максимална степен в G;*

(iii) *Ако* $2 \leq i \leq r$, *тогава* v_i *има максимална степен в графа* $G[\Gamma_G(v_1, \ldots, v_{i-1})]$.

В екстремалната теория на графите α-редиците са въведени през 1976 година в [34] и [35]. Доказваме следните:

Теорема 10.4. (съвм. с Н. Хаджииванов) *Нека* $v_1, \ldots, v_r$ *е* α-*редица в* n-*върховия граф* G *и* $V_1, \ldots, V_r$ *е разслоението, породено от тази редица, където* $p_i = |V_i|$, $i = 1, \ldots, r$. *Ако* V_r *е* δ-*множество в* G, *тогава:*

(а) G *е обобщен* r-*хроматичен граф с части* $V_1, \ldots, V_r$*;*

(в) $e(G) \leq e(K(p_1, \ldots, p_r))$ *и равенство се достига само когато* G *е обобщен пълен* r-*хроматичен граф;*

(с) $e(G) \leq (T_r(n))$ *и равенство се достига само когато* G *е обобщен* r-*хроматичен граф на Turan.*

Теорема 10.5. (съвм. с Н. Хаджииванов) *Нека* G *е* n-*върхов граф и* $v_1, \ldots, v_r$ *е* α-*редица в* G, *която не се съдържа в* $(r+1)$-*клики на* G *(или, което е еквивалентно,* $\Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1})$ *е независимо множество). Нека* $V_1, \ldots, V_r$ *е разслоението, породено от тази* α-*редица и* $p_i = |V_i|$, $i = 1, \ldots, r$. *Тогава*

(а) $e(G) \leq e(K(p_1, \ldots, p_r))$;

(в) *Равенство в (а) е възможно само когато* $G = K(p_1, \ldots, p_r)$.

Следващата теорема съществено обобщава Теоремата на *Turan*.

Теорема 10.6. (съвм. с Н. Хаджииванов) *Нека* $v_1, \ldots, v_r$ *е* α-*редица в графа* G, *която не се съдържа в* $(r+1)$-*клика на* G. *Тогава:*

(а) $e(G) \leq e(T_r(n))$, *където* $n = |V(G)|$*;*

(в) *Равенството* $e(G) = e(T_r(n))$ *е възможно само когато* $G = T_r(n)$.

Теорема 10.6 може да се формулира и по следния еквивалентен начин:

Ако G *е* n-*върхов граф и* $e(G) \geq e(T_r(n))$, $r \leq n$, *тогава всяка максимална (в смисъл на включване)* α-*редица има поне* $r+1$ *члена, или* $G = T_r(n)$.

В тази еквивалентна форма Теорема 10.6 е получена от B. Bollobas в [4] (виж Теорема 5, стр, 163) и в монографията [5] (виж Теорема 6, стр. 109).

Резултатите от дисертацията са публикувани в [34], [35], [36], [38], [40], [43],[45], [52], [53], [54], [56], [57], [58], [59], [60], [61], [62], [63], [64], [65], [67], [68], [69], [70], [71], [72], [73], [74], [75], [76], [77], [78], [80].

С изключение на [45], която е приета за печат, всичките статии са излезли от печат. Освен най-новите работи [43], [45], [73] и [76], те са реферирани в реферативните списания. Теоремите 8.1 и 8.3 и цялата десета глава са получени съвместно с Н. Хаджииванов. Частният случай $m = 7$ на Теорема 6.8 е получен съвместно с Е. Недялков. Всички останали резултати са получени самостоятелно. Не е публикувана единствено Теорема 7.2.

В библиографията сме включили всички работи на български автори, свързани с разглежданите проблеми. Поради това, относителния дял на българските работи е голям.

Резултатите от дисертацията се цитират в:

– енциклопедията	[21];
– книгите	[11], [31], [34], [33], [86], [93];
– статиите	[1], [2], [3], [13], [15], [20], [22], [27],
	[30], [82], [85], [90], [87];
– дисертациите	[83] и [91];
– master thesis	[12];
– Рефератите	[7] и [92].

Резултатите от дисертацията са получени в периода от 1976 година до 2004 година. През този период те са докладвани на няколко конференции на СМБ, на семинари по комбинаторика в МГУ (1980), по време на семестъра по дискретна математика в Банаховия център във Варшава (1987). Най-последните резултати са докладвани на Third EuroWorkshop on Optimal Codes and Related Topics, 2001, Sunny Beach, Bulgaria и на семинара по Алгебра и Теория на кодирането в ИМИ - БАН през 2004 година.

В Теорията на графите ме въведе професор Николай Хаджииванов. Под негово ръководство през 1981 година защитих кандидатската си дисертация. Сътрудничеството ни продължава и до днес. За всичко това му изказвам своята благодарност. Благодаря на докторантите Е. Недялков и Н. Колев за оказаната помощ. Благодаря също и на участниците в семинара по Алгебра и Теория на кодирането в ИМИ - БАН за вниманието към тази работа.

Специална благодарност изказвам на член кор. проф. дмн Ст. Додунеков за това, че по време на предзащитата направи важни предложения за подобряването на дисертационния труд.

АВТОРСКА СПРАВКА

Основните научни приноси на дисертационния труд са следните:

1. Дефиниран е и изследван класа на p-наситените графи (Определение 2.1). Доказана е оценка отдолу за броя на върховете на тези графи (Теорема 2.2). Доказано е също, че има единствен граф, за който тази оценка се достига. Разработен е метод за пресмятане на някои Фолкманови числа с помощта на p-наситените графи (виж Теорема 9.6).

2. Доказани са нови резултати за върховите Фолкманови графи (Теорема 3.1, Теорема 3.2, Теорема 3.4). За върховите Фолкманови графи $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots a_r)$ с $cl(G) < m - 1$ е доказано неравенството

$$|V(G)| \geq m + p + \alpha(G) - 1,$$

което е точно. Дадена е проста характеристика на графите, за които се достига равенство (всичките тези графи при дадени m и p, съдържат един фиксиран граф).

3. Числата $F_v(a_1, \ldots a_r; m - 1)$, които съществуват при $m \geq p + 2$ са изследвани в граничния случай $m = p + 2$. При фиксирано p и $m = p + 2$ има две такива числа

$$F_v(2, 2, p; p + 1) \quad \text{и} \quad F_v(3, p; p + 1), \quad p \geq 3.$$

Доказано е, че числата $F_v(a_1, \ldots a_r; m-1)$ силно зависят от граничните числа $F_v(2, 2, p; p+1)$ и $F_v(3, p; p+1)$ (Теорема 6.5). Доказани са оценките

$$2p + 4 \leq F_v(2, 2, p; p + 1) \leq F_v(3, p; p + 1) \leq 4p + 2,$$

които съществено подобряват предшествуващите резултати. Пресметнати са две от тези числа

$$F_v(2, 2, 4; 5) = F_v(3, 4; 5) = 13.$$

За числата $F_v(2, 2, 3; 4) = F_v(3, 3; 4) = 14$ са получени окончателната оценка отгоре 14. (неравенствата $F_v(2, 2, 3; 4) \geq 14$ и $F_v(3, 3; 4) \geq 14$ са получени с компютър съответно в [13] и [85]).

4. Пресметнати са три серии Фолкманови числа от вида $F_v(2,\dots,2;q)$;

$$F_v(2,2,2,2;4) = 11.$$

$$F_v(\underbrace{2,\dots,2}_{r};r-1) = r+7, \quad r \geq 8.$$

$$F_v(\underbrace{2,\dots,2}_{r};r-2) = r+9, \quad r \geq 11.$$

5. Пресметнати са Фолкмановите числа $F_v(a_1,\dots,a_r;m-1)$ в случаите, когато $\max\{a_1,\dots,a_r\} = 3$ или 4 (Теорема 6.7 и Теорема 6.8). Подобряват се съществено оценките за тези числа в случая, когато

$$\max\{a_1,\dots,a_r\} = 5.$$

6. Получена е оценката

$$F_v(p,p;p+1) \leq 1.46p\,!,$$

която силно подобрява предишните оценки.

7. Принос към решаването на проблема на Erdös за пресмятането на числото $F_e(3,3;5)$. Този проблем е от 1967 година. Ние получихме окончателната оценка отгоре $F_e(3,3;5) \leq 15$ (1981). Неравенството

$$F_e(3,3;5) \geq 15$$

е получено в [85] с помощта на компютър през 1998 година.

8. Пресметнати са нови ребрени числа на Фолкман

$$F_e(3,4;9) = 14,\ F_e(3.3.3;16) = 21,\ F_e(3,3,3;15) = 23,\ F_e(3,3,3;14) = 25.$$

9. Въвежда се класа на обобщените r-хроматични графи. Разработен е метод за решаване на екстремални задачи за графи с помощта на обобщените r-хроматични графи. Получени са нови резултати, които обобщават, разширяват и уточняват класическата теорема на Туран за графите.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Baginski P.
A generalization of Ramsey – type theorem on hypermatchings.
J. Graph Theory, v. 50, Issue 2, 2005, 142-149.

[2] Belyi S.G.
Solution of certain combinatorial problems in Ramsey theory for graphs using computer. (in Russian). *Kibernetika (Kiev)* 1985, 116-118.

[3] Belyi S.G.
Triangular Ramsey numbers, triangular Ramsey graphs, triangular multiplicities and distributions of monochromatic triangles. (Russian). *Akad. Nauk Ukrain. SSR,* Inst Kibernetika Kiev 17 (1990), 1-5.

[4] Bollobas B.
Turan's Theorem and Maximal Degrees. *J. Combin. Theory Ser.* B, 75 (1999), 160-164.

[5] Bollobas B.
Modern Graph Theory. *Springer Verlag,* New York, 1998.

[6] Bondy J.A.
Large dense neighborhoods and Turan's theorem. *J. Combin. Theory Ser.* B, 34 (1983), 109-111.

[7] Braβ P.
Zbl. 0813.05046

[8] Bukor J.
A note on the Folkman number *F* (3, 3;5). *Math. Slovaca* 44 (1994), 479-480.

[9] Burr S., Rosta V.
On the Ramsey multiplities of Graphs – Problems and recent results. *Journal of Graph Theory,* Vol. 4 (1980), 347-361.

[10] Chvatal V.
The minimality of the Mycielski graph. *Lecture Notes in Math.* 406 (1974), 243-246.

[11] Chung F., Graham R.
Erdos on Graphs: His Legacy of unsolved problems. New York; A. K. Peters, 1998.

[12] Coles J.
Algorithms for Bouding Folkman number; Master's Thesis Proposal
http://www.cs.rit.edu:8080/ms/static/spr/2004/jpc1870/proposal.pdf

[13] Coles J., Radziszowski S.
Computing the Vertex Folkman Number $F_v(2, 2, 3; 4)$.
The Journal of combin. Math. and combin. Computing, to appear.

[14] Dirac G.
Map colour theorems related to the Heawood color formula. *J. London Math. Soc.,* 31, (1956), 460-471.

[15] Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics.
http://members.aol.com/jeff570/g.html-32K-2001-07-11.

[16] Erickson M.
An upper bound for the Folkman number *F* (3, 3; 5). *J. Graph Theory* 17 (1993), 679-681.

[17] Erdős P., Hajnal A.
Research problem 2-5. *J. Combin. Theory* 2 (1967), 104.

[18] Faudree R.
Complete subdraphs with large degree sums. *J. Graph Theory,* 16 (1992), 327-334.

[19] Folkman J.
Graphs with monochromatic complete subgraph in every edge coloring. *SIAM J. Appl. Math.,* 18 (1970), 19-24

[20] Gardner M.
Ramsey graph theory (in Russian). Kvant, № 4, 1988, 15-20.

[21] GIAN – CARLO ROTA (edit.)
Encyclopedia of Mathematics and its applications, V. 20, pp. 326.

[22] Giraud G.
Sur un probleme d'Erdős et Hajnal. *Annals of Discrete Math.,* 17 (1983), 303-306.

[23] Graham R. L.
On edgewise 2-coloerd graphs with monochromatic triangles containing no complete hexagon. *J. Combin. Theory* 4 (1968), 300.

[24] Graham R. L., Spencer J. H.
On small graphs with forced monochromatic triangles. Recent Trends in Graph Theory, *Lecture Notes in Math.* 186 (1971), 137-141.

[25] Guta P.
On the structure of *k*-chromatic-critical graphs of order *k+p. Stud. Cerc. Math.,* 50 (1998), № 3 – 4, 169-173.

[26} Greenwood R., Gleason A.
Combinatorial relation and chromatic graphs. *Canad. J, Math.,* 7 (1955), 1 – 7.

[27] Hanson D.,MacGillivray G., Youngs D.
The size of a minimum five-chromatic K_4 – free graph. *Discrete Math.,* № 1 – 3 (1993), 353-355.

[28] Halldorsson M., Radhakrishnan J.
Greed is good: Approximating independent sets in sparse and bounded-degree graphs. *Algorithmica* 18 (1), 1997, 145-163.

[29] Irving R. W.
On a bound of Graham and Spencer for graph-coloring constant. *J. Combin. Theory* 15 (1973), 200-203.

[30] Jensen T., Royle G.
Small graphs with chromatic number 5: a computer search. *J. Graph Theory* 19 (1995), 107-116.

[31] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.
Turan's graph Theorem. (Bulgarian) *Narodna prosveta Press.,* Sofia, 1980.

[32] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.
Ramsey numbers. (Bulgarian) *Narodna prosveta Press.,* Sofia, 1982.

[33] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.
Extremal graph theory. (Bulgarian) *"Kliment Ohridski" University Press,* Sofia, 1990.

[34] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
On the maximum number of edges of a graph. (Russian) *C. R. Acad. Bulg. Sci.* 29 (1976), 1575-1578.

[35] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Extremal problems for s-graphs and a theorem of Turan. (Russian) *Serdica* 3, (1977), 117-125.

[36] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Sharpening of a theorem of Greenwood and Gleason on the colorings of the edges of a complete graph with nine vertices. (Russian) *C. R. Acad. Bulgare Sci.* 31 (1978), 631-633.

[37] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
On the Graham-Spencer number. (in Russian) *C. R. Acad. Bulg. Sci.* 32 (1979), 155-158.

[38] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
On the number of nontrivial solutions of Fermat's equation $x^n + y^n = z^n$ in a Galois field.(Russian); *C. R. Acad. Bulg. Sci.* 32 (1979), 557-560.

[39] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
An example of the 16-vertex Ramsey (3, 3) – graph with clique number 4. (Russian)
Serdica 9, (1983), 73-78.

[40] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
On the generalized Turan's theorem and on an extension of this theorem. (Russian); *God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Mekh.* 77 (1983), № 1, 231-242 (1988).

[41] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
On Ramsey graphs. (Russian); *God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Mech.* 78 (1984), 211-214.

[42] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Relations and graphs. (Bulgarian) *Fiz.-Mat. Spis.* 27 (60), (1985), 314-318.

[43] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Generalized *r*-partite graphs and Turan's Theorem. *C. R. Acad. Bulgare. Sci.,* 57 (2004), № 2, 19-24.

[44] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
On the minimum of the number of 3-anticliques in n-vertex graphs without 3-cliques. (Russian), *Serdika* 11 (1985), 251-258.

[45] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Balanced vertex sets in graphs. *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.* 97, (2005), 50-64.

[46] Lin S.
On Ramsey numbers and Kr-coloring of graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 12 (1972), 82-92.

[47] Luczak T., Urbanski S.
A note on restricted vertex Ramsey numbers. *Period. Math. Hungar.* 33 (1996), 101-103.

[48] Luczak T., Rucinski A., Urbanski S.
On minimal vertex Folkman graphs. *Discrete Math.* 236 (2001), 245-262.

[49] Mengersen I.
Minimal Ramsey – Graphen. Habilitations schrift .TU Braunschweig, 1982.

[50] Mycielski J.
Sur le coloriage des graphs. *Colloq. Math.* 3 (1955), 161-162.

[51] Murphy O.
Lower bounds on the stability number of graphs computed in terms of degrees. *Discrete Mathematics,* 90 (1991), 207-211.

[52] Nedialkov E., Nenov N.
Computation of the vertex Folkman numbers F (2, 2, 2, 4; 6) and F (2, 3, 4; 6). *Electron. J. Combin.* 9 (2002), #R9.

[53] Nenov N.
On the Ramsey (3, 4) – graphs. (Russian) *God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Mekh.* 73 (1979), 185-190 (1986).

[54] Nenov N.
On an assumption of Lin about Ramsey–Graham–Spencer numbers. (Russian) *C. R. Acad. Bulg. Sci.* 33 (1980), № 9, 1171-1174.

[55] Nenov N.
A new estimation from below for the Graham–Spencer number N(3, 5). (Russian) *Serdika* 6, (1980), 373-383.

[56] Nenov N.
Certain remarks on Ramsey multiplicities. (Russian); *Mathematics and education in mathematics, Proc. 10th Spring Conf. Union Bulg. Math.,* Sunny Beach 1981, 176-179 (1981).

[57] Nenov N.
Sharpening of Lin's inequalities relating to Ramsey theory. (Russian)
C. A. Acad. Bulg. Sci. 34 (1981), 307-310.

[58] Nenov N.

On a certain constant connected with Ramsey (3, 4)-graphs. (Russian); *Serdika* 7 (1981), 366-371.

[59] Nenov N.
An example of a 15-vertex Ramsey (3, 3)-graph with clique number 4. (Russian)
C. A. Acad. Bulg. Sci. 34 (1981), 1487-1489.

[60] Nenov N.
Generalization of a certain theorem of Greenwood and Gleason on three-color colorings of the edges of a complete graph with 17 vertices. (Russian); *C. A. Acad. Bulg. Sci.* 34 (1981), 1209-1212.

[61] Nenov N.
Lower estimates for some constants related to Ramsey graphs. (Russian); *God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Mekh.* 75 (1981), 27-38 (1984).

[62] Nenov N.
On the Zykov numbers and some its applications to Ramsey theory. *Serdika Bulg. Math. Publ.* 9 (1983), 161-167. (in Russian)

[63] Nenov N.
On a Ramsey type property for the 10 vertices graphs. (Russian); *Mathematics and education in mathematics, Proc. 13th Spring Conf. Union Bulg. Math.,* Sunny Beach 1984, 165-172 (1984).

[64] Nenov N.
The chromatic number of an arbitrary 10-vertex graph without 4-cliques is not larger than 4. (Russian); *C. A. Acad. Bulg. Sci.* 37 (1984), 301-304.

[65] Nenov N.
Application of the corona-product of two graphs in Ramsey theory. *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.* 79 (1985), 349-355. (in Russian)

[66] Nenov N.
Lower bounds for the number of vertices of some Ramsey graphs. (Russian); *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.* 86 (1992), 11-15

[67] Nenov N.
On the (3, 4)-Ramsey graphs without 9-cliques. (Russian); *God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Infor.* 85 (1993), № 1 (Mat.), 71-81 (1991).

[68] Nenov N.
On the small graphs with chromatic number 5 without 4-cliques. *Discrete Math.* 188 (1998), 297-298.

[69] Nenov N.
On a class of vertex Folkman graphs. *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.* 94 (2000), 15-25.

[70] Nenov N.
A generalization of a result of Dirac. *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.* 95 (2001), 59-69.

[71] Nenov N.
On the 3-coloring vertex Folkman number *F* (2, 2, 4). *Serdika Math. J.* 27 (2001), 131-136.

[72] Nenov N.
On the vertex Folkman number *F* (3, 4). *C. A. Acad. Bulgare Sci.* 54, 2 (2001), 23-26.

[73] Nenov N.
Computation of the vertex Folkman numbers *F* (2, 2, 2, 3; 5) and *F* (2, 3, 3; 5). *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.* 95 (2001), 71-82.

[74] Nenov N.
Lower bound for a number of vertices of some vertex Folkman graphs. *C. A. Acad. Bulg. Sci.* 55, 4 (2002), 33-36.

[75] Nenov N.
On a class of vertex Folkman numbers. *Serdika Math. J.* 28 (2002), 219-232.

[76] Nenov N.
Bounds on the vertex Folkman numbers *F* (4, 4; 5). *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.* 96 (2004), 75-83.

[77] Nenov N.
On the triangle vertex Folkman numbers. *Discrete mathematics* 271 (2003), 327-334.

[78] Nenov N., Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.
On edgewise 2 – colored graphs containing a monochromatic triangle. (Russian); *Serdica* 5 (1979), 303-305.

[79] Nenov N., Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.
Every Ramsey graph without 5-cliques has more than 11 vertices. (Russian); *Serdica* 11 (1985), 341-356.

[80] Nenov N., Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.
On minimal *t*-graphs. *Serdica* 6 (1980), 128-142.

[81] Nešetřil J., Rődl V.
The Ramsey property for graphs with forbidden complete subgraphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 20 (1976), 243-249.

[82] Pashov I.
Ramsey multiplicity in the case of 2-colorings of edges of a complete graph with fourteen vertices. (Russian); *Serdica* 10 (1984), 192-197.

[83] Pashov I.
Кратности и реализации на Рамзи. *Ph. D. Thesis,* University of Sofia, 1985.

[84] Ramsey P.
On a problem of formal logic. *Proc. London Math. Soc.,* 30 (1930), 264-268.

[85] Piwakowski K., Radziszowski S., Urbański S.
Computation of the Folkman number F_e (3, 3; 5). *J. Graph Theory* 32 (1999), 41-49.

[86] Рыбников (редактор)
Комбинаторный анализ. *Москва, "Наука",* 1982.

[87] Rowlinson P.
Certain 3-decompositions of complete graphs, with an application to finite Fields. *Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A,* 99 (1985), 277-281.

[88] Schäuble M.
Zu einem Kantenfarbungsproblem. Remerkungen zu einer Note von R. L. Graham. *Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilmenau* 15 (1969), Heft 2, 55-58.

[89] Schur I.
Uber die Kongruenz $x^n + y^n \equiv z^n$ (mod *p*). *Jahr. Deutsch. Math. Verein* 25 (1916), 114-117.

[90] Urbański S.
Remarks on 15-vertex (3, 3) – Ramsey graphs not containing K_5. *Disc. Math. Graph Theory* 16 (1996), 173-179.

[91] Urbański S.
Folkman numbers. *Ph. D.* 1999, UAM, Poland.

[92] Zbl. 0788.05044

[93] Zykov A.
Fundamentals of graph theory. *“Nauka”, Moscow* (1987).