



ЕКСТРЕМАЛНИ ЗАДАЧИ ЗА ОЦВЕТЯВАНЕ НА ГРАФИ

Автореферат

Недялко Ненов

СУ "Св. Климент Охридски"
Факултет по Математика и Информатика

28.06.2005 г.



АВТОРЕФЕРАТ

1. Исторически обзор.

През 1930 година *P. Ramsey* в [84] доказва едно обобщение на принципа на Дирихле. Частен случай на този резултат се формулира по следния начин:

За произволни естествени числа r и $m \geq 2$ съществува естествено число $N(r, m)$ такова, че ако $n \geq N(r, m)$, тогава при всяко оцветяване на ребрата на пълния граф с n върха в r цвята има подграф $K_m \subset K_n$, всичките ребра на който са оцветени еднакво.

Както и принципа на Дирихле, Теоремата на *Ramsey* има много приложения. Тези приложения изискват да знаем минималното възможно $N(r, m)$ от формулирания по-горе резултат на *Ramsey*. Това минимално число се нарича число на *Ramsey* и се бележи с $R(\underbrace{m, \dots, m}_r)$. Пресмятането на числата на *Ramsey* е много трудна задача и е решена само в няколко частни случая. Теорията, която възниква във връзка с числата на *Ramsey* е важен клон в Теорията на графите и се нарича Теория на *Ramsey*.

Най-малкото известно число на *Ramsey* е $R(3, 3) = 6$. Да припомним, че това означава, че при всяко оцветяване на ребрата на K_6 с два цвята, непременно има едноцветен триъгълник (за краткост това свойство ще отбелязваме със символа $K_6 \rightarrow (3, 3)$) и K_5 няма това свойство. Ясно е, че ако графът G съдържа K_6 , тогава $G \rightarrow (3, 3)$. През 1967 година *P. Erdős* и *A. Hajnal* в [17] формулират следния проблем:

Съществува ли граф $G \rightarrow (3, 3)$, който не съдържа пълния граф с 6 върха K_6 ?

Положителен отговор на този въпрос почти едновременно дават няколко математици. Най-простия такъв граф (с 8 върха) е построен от *R. Graham* в [23] през 1968 година. По-нататък *Erdős* дефинира числата

$$F_e(3, 3; 5) = \min\{|V(G)| : G \rightarrow (3, 3) \text{ и } K_5 \not\subset G\};$$

$$F_e(3, 3; 4) = \min\{|V(G)| : G \rightarrow (3, 3) \text{ и } K_4 \not\subset G\}$$

и поставя като проблем тяхното пресмятане. Числото $F_e(3, 3; 5)$ е пресметнато окончателно през 1998 година. В Таблица 9.1 са отразени различните етапи от оценяването на $F_e(3, 3; 5)$.

Year	Reference	Lower	Upper
1967	P. Erdos, A. Hajnal [17]		?
1969	M. Schauble [88]		42
1971	R.L. Graham, J. H. Spencer [24]		23
1972	S. Lin [46]	10	
1973	R.W. Irving [29]		18
1979	N. Hadziivanov, N. Nenov [37]		16
1980	N. Nenov [55]	11	
1981	N. Nenov [59]		15
1985	N. Hadziivanov, N. Nenov [79]	12	
1993	M. Erikson [16]		17
1994	J. Bukor [8]		16
1998	Piwakowski et'al. [85]	15	

Таблица 9.1. История на оценяването на $F_e(3, 3; 5)$ според [85].

Числото $F_e(3, 3; 4)$ все още не е пресметнато.

Числата $F_e(3, 3; 5)$ и $F_e(3, 3; 4)$, които съответствуват на числото на *Ramsey* $R(3, 3) = 6$, по аналогичен начин се обобщават за произволни числа на *Ramsey*. Графите, които възникват от тези обобщения, се наричат графи на *Folkman* (в чест на *J. Folkman*, който в [19] доказва тяхното съществуване), а минималният брой на върховете на графите на *Folkman*, които не съдържат K_n , се наричат числа на *Folkman*. Числата на *Folkman* обобщават числата на *Ramsey* и са изследвани системно от S. Lin в [46]. В настоящата дисертация ние изследваме графите на *Folkman*, като основната ни цел е пресмятането на нови числа на *Folkman*. На графите на *Folkman* са посветени много работи, част от които са: [10], [19], [20], [27], [30], [46], [47], [48], [49], [85], [90] и [92]. Методите, които разработваме, ни дават възможност да подобрим някои от известните оценки за числата на *Folkman* от [46] и [48]. Тези нови оценки, в някои специални случаи, дават точните стойности на някои числа на *Folkman*. По този начин ние пресмятаме няколко безкрайни серии на числа на

Folkman.

Накрая на този обзор ще отбележим и постиженията, получени с помощта на компютър. В [13] и [85] професор S. Radziszowski и неговите ученици J. Coles, K. Piwakowski и S. Urbanski, използвайки нашия подход към пресмятането на числата на *Folkman* и компютърни програми за генериране на графи с дадени свойства, успяват да пресметнат три нови числа на *Folkman*. Оказа се, че оценките отгоре, които ние даваме на тези числа са точни.

По-подробно резултатите от тази дисертация ще бъдат описани по глави в следващата част на увода.

2. Описание на резултатите.

Разглеждат се само крайни и неориентирани графи, без кратни ребра и примки. С $V(G)$ и $E(G)$ означаваме съответно множеството на върховете и множеството на ребрата на графа G . Допълнителният граф на графа G ще бележим с \overline{G} . Множеството от p върха на графа G се нарича p -клика, ако всеки два от тях са съседни. Най-голямото естествено число p , за което G има p -клика, се нарича кликово число на G и се бележи с $cl(G)$. Едно множество от върхове на графа G , се нарича независимо, ако всеки два от тях не са съседни. Максималният брой независими върхове, които можем да изберем в G , се нарича число на независимост на G и се бележи с $\alpha(G)$. Всички останали означения и понятия са дадени в първа глава.

За даден граф G r -разлагане (r -оцветяване) на върховете на G наричаме всяко разлагане

$$(1) \quad V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Ако всяко от множествата V_i е независимо множество, тогава казваме, че (1) е r -хроматично разлагане. Казваме, че G е r -хроматичен граф, ако той има поне едно r -хроматично разлагане.

Екстремалните задачи, които решаваме са свързани с две обобщения на r -хроматичните графи. Първото обобщение са (a_1, \dots, a_r) -свободните r -разлагания, където a_i са естествени числа. Казваме, че r -разлагането (1) е (a_1, \dots, a_r) -свободно, ако V_i не съдържа a_i -клика за всяко $i = 1, \dots, r$. В тази терминология r -хроматичните разлагания са $\underbrace{(2, \dots, 2)}_r$ -свободни

r -разлагания. Символът

$$G \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r)$$

означава, че G няма (a_1, \dots, a_r) -свободно r -разлагане. За произволни естествени числа a_1, \dots, a_r и q дефинираме

$$H_v(a_1, \dots, a_r; q) = \{G \mid G \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r) \text{ и } cl(G) < q\}.$$

Първата екстремална задача, която разглеждаме, е определянето на минимума на броя на върховете на графите от $H_v(a_1, \dots, a_r; q)$. Във връзка с тази задача дефинираме

$$F_v(a_1, \dots, a_r; q) = \min\{|V(G)| : G \in H_v(a_1, \dots, a_r; q)\}.$$

Ясно е, че от $G \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r)$ следва $cl(G) \geq \max\{a_1, \dots, a_r\}$. В [19] *J. Folkman* доказва, че ако

$$q > \max\{a_1, \dots, a_r\}, \text{ тогава } H_v(a_1, \dots, a_r; q) \neq \emptyset.$$

Следователно

$$(2) \quad F_v(a_1, \dots, a_r; q) \text{ съществува} \iff q > \max\{a_1, \dots, a_r\}.$$

Числата $F_v(a_1, \dots, a_r; q)$ се наричат върхови числа на *Folkman*. За естествените числа a_1, \dots, a_r дефинираме

$$(3) \quad p = \max\{a_1, \dots, a_r\} \text{ и } m = \sum_{i=1}^r (a_i - 1) + 1.$$

Очевидно е, че

$$K_m \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r) \text{ и } K_{m-1} \not\xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r),$$

където K_m е пълният граф с m върха. Следователно, ако $cl(G) \geq m$, тогава $G \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r)$. От тези разсъждения става ясно, че

$$(4) \quad F_v(a_1, \dots, a_r; q) = m, \text{ ако } q > m.$$

Поради това, интересни са тези числа на *Folkman* $F_v(a_1, \dots, a_r; q)$, за които $q \leq m$. В [47] *Luczak* и *Urbanski* доказват, че

$$(5) \quad F_v(a_1, \dots, a_r; m) = m + \max\{a_1, \dots, a_r\}.$$

За числата $F_v(a_1, \dots, a_r; q)$, $q \leq m-1$ знаем много малко. Ние получаваме оценки за някои от числата $F_v(a_1, \dots, a_r; q)$, $q \leq m-1$, като в някои

специални ситуации разглежданите върхови числа на *Folkman* са пресметнати точно.

Всяко разлагане

$$(6) \quad E(G) = E_1 \cup \dots \cup E_r, \quad E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

се нарича r -оцветяване на ребрата на графа G . Нека a_1, \dots, a_r са естествени числа и $a_i \geq 2$, $i = 1, \dots, r$. Ако K е клика на G и $E(K) \subseteq E_i$, казваме че K е едноцветна клика от i -тия цвят. Казваме, че (6) е (a_1, \dots, a_r) -свободно r -разлагане, ако за всяко $i \in \{1, \dots, r\}$ не съществува едноцветна a_i -клика от i -тия цвят. Символът $G \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r)$ означава, че G няма (a_1, \dots, a_r) -свободно r -оцветяване на ребрата. Дефинираме

$$H_e(a_1, \dots, a_r; q) = \{G \mid G \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r) \text{ и } cl(G) < q\}.$$

Втората основна задача, която разглеждаме е намирането на минимума на броя на върховете на графите от $H_e(a_1, \dots, a_r; q)$. Във връзка с тази задача дефинираме

$$F_e(a_1, \dots, a_r; q) = \min\{|V(G)| : G \in H_e(a_1, \dots, a_r; q)\}.$$

Вярно е, че

$$(7) \quad F_e(a_1, \dots, a_r; q) \text{ съществува} \iff q > \max\{a_1, \dots, a_r\}.$$

В случая $r = 2$, твърдението (7) е доказано от *J. Folkman* в [19], а в общия случай това твърдение е доказано от *J. Nešetřil* и *V. Rödl* в [81]. Числата $F_e(a_1, \dots, a_r; q)$ се наричат ребрени числа на *Folkman*.

Припомняме, че числото на *Ramsey* $R(a_1, \dots, a_r)$ се дефинира като най-малкото естествено число n , за което $K_n \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r)$. От тази дефиниция става ясно, че

$$(8) \quad F_e(a_1, \dots, a_r; q) = R(a_1, \dots, a_r), \quad \text{ако } q > R(a_1, \dots, a_r).$$

Поради това, числата на *Ramsey* са специален случай на ребрените числа на *Folkman*. Известни са много малко от числата $F_e(a_1, \dots, a_r)$ даже в ситуацията, когато $R(a_1, \dots, a_r)$ е пресметнато. Още преди 38 години *P. Erdős* поставя като проблем пресмятането на числото $F_e(3, 3; 5)$. Този проблем е решен окончателно през 1998 година в [85]. Точната стойност на това число е 15. В тази дисертация ние разглеждаме нашия принос

(неравенството $F_e(3, 3; 5) \leq 15$) към решаването на този проблем на *P. Erdős*. Пресмятаме още четири ребрени числа на *Folkman*, а именно числата

$$F_e(3, 4; 9) = 14, \quad F_e(3, 3, 3; 16) = 21, \\ F_e(3, 3, 3; 15) = 23, \quad F_e(3, 3, 3; 14) = 25.$$

Второто обобщение на r -хроматичните графи, което разглеждаме е следното:

Казваме, че графът G е обобщен r -хроматичен граф, ако съществува r -разлагане (1) на $V(G)$ такова, че

$$(9) \quad d(v) \leq |V(G)| - |V_i|, \quad \forall v \in V_i, \quad i = 1, \dots, r,$$

където $d(v)$ е степенята на върха v .

Ако V_i е независимо множество, тогава неравенството (9) е изпълнено, тъй като ако $v \in V_i$, съседите му принадлежат на $V(G) \setminus V_i$. При фиксирани естествени числа n и r пресмятаме максимума на броя на ребрата на n -върховите обобщени r -хроматични графи. Получените резултати разширяват, обобщават и допълват класическата теорема на *Turan*, тъй като класът на обобщените r -хроматични графи включва в себе си класа на графите, които не съдържат $(r + 1)$ -клика.

Ще формулираме по-точно основните резултати във всяка глава.

ГЛАВА 1. Дефинират се необходимите понятия и означения от Теория на графите.

ГЛАВА 2. r -разлагането (1) се нарича p -плътно, ако обединението на всеки p от множествата V_i съдържа p -клика. Казваме, че графът G е p -плътен, ако всяко $\chi(G)$ -хроматично разлагане, където $\chi(G)$ е хроматичното число на G , е p -плътно. Основният резултат във втора глава е следната:

Теорема 2.2. Нека G е граф, такъв че $\chi(G) = r$ и $cl(G) < r$. Ако G е p -плътен, тогава

- (а) $|V(G)| \geq r + p$;
- (б) от $|V(G)| = r + p$ следва $G = K_{r-p-1} + \overline{C}_{2p+1}$.

С C_n означаваме простия цикъл с дължина n . Теорема 2.2 в случая $p = 2$ е доказана от *G. Dirac* в [14]. Тази теорема играе важна роля в ГЛАВА 9 при пресмятането на числото $F_e(3, 4; 9)$.

ГЛАВА 3. Изследват се върховете числа на Folkman и се доказват някои основни техни свойства. Доказана е следната:

Теорема 3.1. *Нека a_1, \dots, a_r са естествени числа и числата m и p са дефинирани с равенствата (3). Нека G е граф и $G \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r)$. Тогава $\chi(G) \geq m$ и ако $\chi(G) = m$, графът G е p -плътен.*

Както вече отбелязахме по-горе, интересни са само числата $F_v(a_1, \dots, a_r; q)$, за които $q \leq m$. За изследване на числата от този тип важно значение има следната:

Теорема 3.4. *Нека a_1, \dots, a_r са естествени числа. Нека G е граф, такъв че $G \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r)$ и $cl(G) < m$. Тогава е вярно неравенството $\pi(\overline{G}) \geq p$.*

Числото $\pi(G)$ означава максималния брой независими (без общ връх) ребра, които можем да изберем в G . С помощта на Теорема 3.4 даваме нови и елегантни доказателства на следните резултати:

Следствие 3.1, [47] *Нека $G \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r)$ и $cl(G) < m$. Тогава $|V(G)| \geq m + p$.*

Следствие 3.2, [48] *Нека $G \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r)$ и $cl(G) < m$ и $|V(G)| = m + p$. Тогава $G = K_{m-p-1} + \overline{C}_{2p+1}$.*

Основният резултат в трета глава е:

Теорема 3.5. *Нека a_1, \dots, a_r са естествени числа и G е граф с $cl(G) < m - 1$ и $G \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r)$. Тогава*

$$(a) \quad |V(G)| \geq m + p + \alpha(G) - 1;$$

(в) *Ако $|V(G)| = m + p + \alpha(G) - 1$, тогава G съдържа като подграф графа $K_{m-p-2} + L_p$. Поради това $|V(G)| \geq m + 3p$.*

Числата m и p се дефинират с равенството (3), а L_p е конкретен граф, дефиниран в **ГЛАВА 3**.

В [48] е доказано неравенството:

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m - 1) \geq m + p + 1.$$

Това неравенство не е точно, тъй като доказваме следната:

Теорема 3.6. *Нека a_1, \dots, a_r са естествени числа и $m \geq p + 2$. Тогава*

$$F(a_1, \dots, a_r; m - 1) \geq m + p + 2.$$

В специалния случай $a_1 = \dots = a_r = 2$, $r \geq 5$, неравенството от Теорема 3.6 е точно.

ГЛАВА 4. От (2) става ясно, че

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) \text{ съществува} \iff m \geq p+2,$$

Числата m и p са дефинирани с равенствата (3). В тази глава разглеждаме граничния случай $m = p+2$. В уводната част на **ГЛАВА 4** изясняваме, че от $m = p+2$ следва, че числата $F_v(a_1, \dots, a_r; m-1)$ са следните:

$$F_v(2, 2, 2; 3); F_v(2, 2, p; p+1) \text{ и } F_v(3, p; p+1) \text{ при } p \geq 3.$$

В [50] *J. Mycielski* доказва, че $F_v(2, 2, 2; 3) \leq 11$, а в [10] *V. Chvatal* доказва, че $F_v(2, 2, 2; 3) \geq 11$. Така, че $F_v(2, 2, 2; 3) = 11$. В тази глава разглеждаме останалите числа $F_v(2, 2, p; p+1)$ и $F_v(3, p; p+1)$, където $p \geq 3$. В [48] е доказано, че

$$2p+3 \leq F_v(3, p; p+1) \leq 2p^2+1.$$

Ние усилваме този резултат като доказваме, че:

Теорема 4.1. *За всяко естествено число $p \geq 3$ са верни неравенствата*

$$2p+4 \leq F_v(2, 2, p; p+1) \leq F_v(3, p; p+1) \leq 4p+2.$$

От Теорема 4.1 следва $F_v(3, 3; 4) \leq 14$. Това неравенство доказваме през 1981 година в [59]. С помощта на компютър през 1998 година в [85] е доказано, че $F_v(3, 3; 4) \geq 14$. Така, че $F_v(3, 3; 4) = 14$. Това е второто пресметнато число от разглеждания тип.

За числата $F_v(2, 2, p; p+1)$ получаваме друга оценка отгоре с помощта на:

Теорема 4.2. *Нека $p \geq 2$, r и q са естествени числа такива, че*

$$R(3, p) + 2r < R(3, q).$$

Тогдава $F_v(\underbrace{2, \dots, 2}_r; p; q) \leq R(3, p) + 2r$. От Теорема 4.2 получаваме

Следствие 4.1. *Верни са неравенствата*

$$F_v(2, 2, 4; 5) \leq 13;$$

$$F_v(2, 2, 6; 7) \leq 22;$$

$$F_v(2, 2, 7; 8) \leq 27;$$

$$F_v(2, 2, 8; 9) \leq 32;$$

$$F_v(2, 2, 9; 10) \leq 40, \text{ ако } R(3, 10) \neq 40.$$

Първите четири неравенства дават по-добра оценка от Теорема 4.1. За числото $F(2, 2, 9; 10)$ обаче от Теорема 4.1 получаваме по-добрата оценка отгоре 38.

Интересно е да отбележим, че за числото $F(2, 2, 5; 6)$, Теорема 4.2 не е приложима, понеже $R(3, 6) = R(3, 5) + 4$. Тъй като $R(3, 7) > R(3, 5) + 6$, от Теорема 4.2 ($r = 3$, $p = 5$ и $q = 7$) следва

$$F_v(2, 2, 2, 5; 7) \leq 20.$$

По-нататък се пресмятат още две числа от разглеждания тип:

$$F_v(2, 2, 4; 5) = 13 \text{ (Теорема 4.4) и}$$

$$F_v(3, 4; 5) = 13 \text{ (Следствие 4.2).}$$

В края на **ГЛАВА 4** разглеждаме и числата от вида

$$F_v(\underbrace{2, \dots, 2}_r, p; r + p - 1) = F_v(2_r, p; r + p - 1)$$

$$F_v(\underbrace{3, \dots, 3}_r, p; 2r + p - 1) = F_v(3_r, p; 2r + p - 1).$$

За тези числа доказваме:

Теорема 4.6. *За всеки две естествени числа $p \geq 3$ и $r \geq 2$ са верни неравенствата*

$$2p + r + 2 \leq F_v(2_r, p; r + p - 1) \leq 4p + r.$$

Теорема 4.7. *Нека $p \geq 3$ и $r \geq 1$ са естествени числа. Тогава*

$$2p + 2r + 2 \leq F_v(3_r, p; 2r + p - 1) \leq 4p + 2r.$$

ГЛАВА 5. Разглеждат се числата на *Folkman* $F_v(a_1, \dots, a_r; q)$, когато $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 2$, т.е. числата

$$F_v(\underbrace{2, \dots, 2}_r; q) = F_v(2_r; q).$$

От (4) имаме $F_v(2_r; q) = r + 1$, ако $q > r + 1$. Съгласно (5) имаме $F_v(2_r; r + 1) = r + 3$. За следващото число $F_v(2_r; r)$ доказваме:

Теорема 5.1. *Верни са равенствата*

$$F_v(2_r; r) = \begin{cases} 11, & \text{ако } r = 3 \text{ или } r = 4; \\ r + 5, & \text{ако } r \geq 5. \end{cases}$$

Както отбелязахме по-горе в случая $r = 3$ Теорема 5.1 е доказана в [50] и [10]. Ние доказваме Теорема 5.1 при $r \geq 4$. Ще отбележим, че доказателството на тези теореми в случая $r = 4$ е значително по-сложно отколкото в случая $r \geq 5$.

При $r \geq 5$ Теорема 5.1 е усилена по следния начин:

Теорема 5.5. *Нека G е граф такъв, че*

$$G \xrightarrow{v} (2_r), \quad cl(G) < r \text{ и } |V(G)| = F_v(2_r; r),$$

където $r \geq 5$. Тогава $G = K_{r-5} + C_5 + C_5$.

Разгледани са и числата на *Folkman* $F_v(2_r; r - 1)$ и $F_v(2_r; r - 2)$. Доказани са следните две теореми:

Теорема 5.7. *Нека r е естествено число и $r \geq 4$. Тогава*

- (а) $F_v(2_r; r - 1) \geq r + 7$;
- (в) $F_v(2_r; r - 1) = r + 7$, ако $r \geq 8$.

Теорема 5.9. *Нека $r \geq 5$ е естествено число. Тогава*

- (а) $F_v(2_r, r - 2) \geq r + 9$;
- (в) $F_v(2_r, r - 2) = r + 9$, ако $r \geq 11$.

ГЛАВА 6. Разглеждат се числата $F_v(a_1, \dots, a_r; m - 1)$, когато $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 3$ или 4. Ако $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 3$, съгласно (2) числото $F_v(a_1, \dots, a_r; m - 1)$ съществува тогава и само тогава, когато $m \geq 5$. В граничния случай $m = 5$ има две такива числа: $F_v(3, 3; 4)$ и $F_v(2, 2, 3; 4)$.

В Глава 4 видяхме, че $F_v(3, 3; 4) = 14$. От Теорема 4.1 имаме $F_v(2, 2, 3; 4) \leq 14$. В края на октомври 2004 година в [13] се появи анонс, според който $F(2, 2, 3; 4) = 14$. За сега няма подробна публикация във връзка с този анонс.

Ако $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 3$ и $m = 6$, тогава има две числа от вида

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m - 1) : F_v(2, 2, 2, 3; 5) \text{ и } F_v(2, 3, 3; 5).$$

За тези числа доказваме

Теорема 6.1. $F_v(2, 2, 2, 3; 5) = F_v(2, 3, 3; 5) = 12$.

Числата на *Folkman* от вида

$$F_v(\underbrace{3, \dots, 3}_r, q) = F_v(3_r; q)$$

се наричат триъгълни числа на *Folkman*. От (4) имаме $F_v(3_r; q) = 2r + 1$, ако $q > 2r + 1$. Съгласно (5), $F_v(3_r; 2r + 1) = 2r + 4$. В тази глава ние правим следващата стъпка към пресмятането на триъгълните числа на *Folkman* като доказваме:

Теорема 6.4.

$$F_v(3_r; 2r) = 2r + 7, \quad r \geq 3.$$

Ако $\max\{a_1, \dots, a_r\} = p$, числото $F_v(a_1, \dots, a_r; m - 1)$ зависи от числото $F_v(2, 2, p; p + 1)$. Това става ясно от следващата теорема, която допълва Теорема 3.6.

Теорема 6.5. *Нека a_1, \dots, a_r са естествени числа и за тях m и p са дефинирани с равенствата (3), като $m \geq p + 2$ и $p \geq 3$. Тогава, ако $F(2, 2, p; p + 1) \geq 2p + 5$, е вярно неравенството*

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m - 1) \geq m + p + 3$$

Изследването на числата $F_v(a_1, \dots, a_r; m - 1)$, където $m \geq 6$ и $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 3$ завършва с тяхното окончателно пресмятане.

Теорема 6.7. *Нека a_1, \dots, a_r са естествени числа, за които p и m са дефинирани с равенствата (3). Ако $p = 3$ и $m \geq 6$, тогава*

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m - 1) = m + 6.$$

Съгласно (2), числата $F_v(a_1, \dots, a_r; m-1)$, $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 4$, съществуват тогава и само тогава, когато $m \geq 6$. С разработената в тази глава техника пресмятаме тези числа.

Теорема 6.8. *Нека a_1, \dots, a_r са естествени числа, за които p и m са дефинирани с равенствата (3). Ако $p = 4$ и $m \geq 6$, тогава*

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) = m + 7.$$

Накрая на 6-та глава се разглеждат и числата $F_v(a_1, \dots, a_r; m-1)$, когато $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 5$. Съгласно (2) тези числа съществуват тогава и само тогава, когато $m \geq 7$. В [48] е доказано, че

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) \leq m + 25, \quad \text{ако } m \geq 12.$$

Също в [48] е анонсирано без доказателство неравенството

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) \leq 77 - 3m, \quad 8 \leq m \leq 11.$$

Ние подобряваме тези оценки като доказваме, че:

Теорема 6.9. *Нека a_1, \dots, a_r са естествени числа, за които $m \geq 7$ и $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 5$. Тогава*

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) \leq m + 15.$$

ГЛАВА 7. Да си припомним, че

$$F_v(a_1, \dots, a_r; q) \text{ съществува} \iff q \geq \max\{a_1, \dots, a_r\} + 1.$$

Най-трудни за пресмятане $F_v(a_1, \dots, a_r; q)$ са в граничния случай $q = \max\{a_1, \dots, a_r\} + 1$. В **ГЛАВА 7** се разглеждат числата $F_v(p, p; p+1)$. За тези числа са известни следните две общи оценки:

$$(10) \quad F_v(p, p; p+1) \leq \lfloor 2p!(e-1) \rfloor - 1, \quad [48].$$

$$(11) \quad F_v(p, p; p+1) \leq \lfloor p!e \rfloor - 2, \quad p \geq 3, \quad [65].$$

Знаем точните стойности само на две от числата $F_v(p, p; p+1)$. Първото е $F_v(2, 2; 3) = 5$ и е очевидно. Второто е $F_v(3, 3; 4) = 14$. Неравенството $F_v(3, 3; 4) \leq 14$ е получено в [59] и е доказано подробно в **ГЛАВА**

4. Неравенството $F_v(3, 3; 4) \geq 14$ е получено с помощта на компютър в [85]. За следващото число $F_v(4, 4; 5)$ от (10) имаме $F_v(4, 4; 5) \leq 81$, а от (11) следва, че $F_v(4, 4; 5) \leq 63$.

Ние подобряваме тези оценки като доказваме, че

Теорема 7.1. $16 \leq F_v(4, 4; 5) \leq 35$.

Доказваме и рекурентното неравенство:

Теорема 7.2. *За всяко естествено число $p \geq 2$ е вярно неравенството*

$$F_v(p+1, p+1; p+2) \leq (p+1)F_v(p, p; p+1).$$

От последното неравенство очевидно следва

$$F_v(p, p; p+1) \leq \frac{p!}{24} \cdot F_v(4, 4; 5), \quad p \geq 4.$$

Тъй като $F_v(4, 4; 5) \leq 35$ получаваме

Следствие 7.1. *За всяко естествено число $p \geq 4$ е вярно неравенството*

$$F_v(p, p; p+1) < 1.46p!.$$

Тази оценка съществено подобрява оценките (10) и (11).

ГЛАВА 8. В тази глава се разглеждат оцветявания на ребрата на пълния граф с n върха K_n . Нека γ е r -оцветяване на ребрата на пълния граф с $R(a_1, \dots, a_r)$ върха. С $t(a_i)$ означаваме броя на едноцветните a_i -кликни от i -тия цвят. Дефинираме $t(\gamma) = t(a_1) + \dots + t(a_r)$. С $M(a_1, \dots, a_r)$ означаваме $\min t(\gamma)$ по всички r -оцветявания γ на ребрата на пълния граф с $R(a_1, \dots, a_r)$ върха. Числото $M(a_1, \dots, a_r)$ се нарича кратност на *Ramsey* съответстваща на числото на *Ramsey* $R(a_1, \dots, a_r)$.

Първата теорема, която доказваме в тази глава е:

Теорема 8.1.(съвм. с Н. Хаджииванов)

(а) $M(3, 4) = 1$;

(в) *съществува единствено (с точност до изоморфизъм) 2-оцветяване на $E(K_9)$, в което няма едноцветни 3-кликни от пър-*

вия цвят и има единствена едноцветна 4-клика от втория цвят.

Теорема 8.1 по-нататък играе важна роля при пресмятането на числото $F_e(3, 4; 9)$. Ясно е, че $M(a_1, \dots, a_r) \geq 1$. Измежду известните кратности на *Ramsey* единствено $M(3, 4)$ е равна на 1. Изглежда доста вероятно, че други такива кратности на *Ramsey* няма. В подкрепа на тази хипотеза доказваме:

Теорема 8.2. *Нека a_1, \dots, a_r са естествени числа, $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$, такива, че*

$$(12) \quad R(a_1, \dots, a_r) = R_1 + \dots + R_r + 2 - r,$$

където $R_1 = R(a_1 - 1, a_2, \dots, a_r), \dots, R_r = R(a_1, a_2, \dots, a_r - 1)$. Тогава $M(a_1, a_2, \dots, a_r) \geq 2$.

Полагаме

$$\underbrace{R(3, \dots, 3)}_r = R_r(3) \quad \text{и} \quad \underbrace{M(3, \dots, 3)}_r = M_r(3).$$

От доказаните в тази глава резултати с Н. Хаджииванов получаваме

Следствие 8.2. *Нека $n \geq R_n(3)$. Тогава във всяко r -оцветяване на $E(K_n)$ има поне*

$$\frac{1}{r} M_r(3) \binom{n}{3} \left(R_r(3) \right)^{-1}$$

едноцветни 3-клики от един и същи цвят.

С помощта на Следствие 8.2 доказваме основния резултат в **ГЛАВА 8**:

Теорема 8.3. (съвм. с Н. Хаджииванов) *Нека F е крайно поле и $|F| \geq R_n(3)$. Тогава уравнението $x^n + y^n = z^n$ има в полето F поне*

$$\frac{|F|(|F| - 1)M_n(3)}{n R_n(3)(R_n(3) - 1)(R_n(3) - 2)}$$

абсолютно ненулеви решения.

Тази теорема съществено обобщава резултата на *I. Shur* от [88].

ГЛАВА 9. Тази глава е посветена на ребрените числа на *Folkman*. В началото на главата се разглеждат ребрените (3, 3)-графи (това

са графите $G \xrightarrow{e} (3, 3)$). Най-простите примери за такива графи са следните

$$K_6 \xrightarrow{e} (3, 3), [26];$$

$$K_8 - C_5 = K_3 + C_5 \xrightarrow{e} (3, 3), [23].$$

Тези два факта се обобщават по следния начин:

Теорема 9.1. (съвм. с Н. Хаджииванов) *За всяко естествено число r е вярно, че*

$$C_3 + C_{2r+1} \xrightarrow{e} (3, 3).$$

По-нататък се разглежда числото $F_e(3, 3; 5)$. Пресмятането на това число е поставено като проблем от *P. Erdős*, който е публикуван в [24]. Този проблем е решен окончателно в [85]. Историята на оценяването на $F_e(3, 3; 5)$ е дадена в Таблица 9.1, която е взета от [85].

В тази глава ние излагаме нашия принос към решаването на този проблем на *P. Erdős*, като доказваме:

Теорема 9.2.

$$F_e(3, 3; 5) \leq 15.$$

От равенството (8) става ясно, че когато числото $R(a_1, \dots, a_r)$ е известно, интересни са тези от числата $F_e(a_1, \dots, a_r; q)$, за които

$$q \leq R(a_1, \dots, a_r).$$

В [46] *Lin* доказва, че ако е вярно равенството (12), тогава

$$F_e(a_1, \dots, a_r; R(a_1, \dots, a_r)) = R(a_1, \dots, a_r) + 2.$$

Оттук *Lin* пресмята, че

$$F_e(3, 3; 6) = 8, \quad F_e(3, 5; 14) = 16, \quad F_e(4, 4; 18) = 20, \quad F_e(3, 3, 3; 17) = 19.$$

Най-малкото число на *Ramsey*, за което равенството (12) не е изпълнено е $R(3, 4) = 9$. Поради това най-малкото число от вида

$$F_e(a_1, \dots, a_r; R(a_1, \dots, a_r)),$$

което не може да се пресметне по метода на *Lin* е $F_e(3, 4; 9)$. Ние пресмятаме това число като доказваме

Теорема 9.7. $F_e(3, 4; 9) = 14$.

В [46] *Lin* доказва също неравенството

$$(13) \quad F_e(a_1, \dots, a_r; R(a_1, \dots, a_r)) \geq R(a_1, \dots, a_r) + 4.$$

Също в [46] той изказва предположението, че неравенството (13) е винаги строго. Ние уточняваме този резултат на *Lin* като доказваме:

Теорема 9.10. *Равенство в (13) имаме тогава и само тогава, когато*

$$K_{R-6} + C_5 + C_5 \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r).$$

Тъй като $K_{11} + C_5 + C_5 \xrightarrow{e} (3, 3, 3)$ (виж Теорема 9.13), от Теорема 9.10 следва, че $F_e(3, 3, 3; 16) = 21$, т.е. хипотезата на *Lin* не е вярна.

В края на **ГЛАВА 9** пресмятаме числата:

$$F_e(3, 3, 3; 16) = 21 \quad (\text{Следствие 9.3});$$

$$F_e(3, 3, 3; 15) = 23 \quad (\text{Следствие 9.4});$$

$$F_e(3, 3, 3; 14) = 25 \quad (\text{Следствие 9.5}).$$

Дефинираме графа

$$L_5(p, q, r, s) = K_5 + C_{2p+1} + C_{2q+1} + C_{2r+1} + C_{2s+1}.$$

Оценките отгоре за тези числа получаваме от:

Теорема 9.13. *За произволни естествени числа p, q, r и s е вярно, че*

$$L_5(p, q, r, s) \xrightarrow{e} (3, 3, 3).$$

Равенството $F_e(3, 3, 3; 16) = 21$ е получено от Теорема 9.13 и Теорема 9.10. Числото $F_e(3, 3, 3; 15) = 23$ е получено с помощта на Теорема 9.13 и следната:

Теорема 9.11. *Нека a_1, \dots, a_r са естествени числа, $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$ и $r \geq 2$. Тогава*

$$(a) \quad F_e(a_1, \dots, a_r; R - 2) \geq R + 6;$$

(в) Ако $(a_1, \dots, a_r) \neq (3, 3)$ и $K_{R-9} + C_5 + C_5 + C_5 \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r)$,
тогава $F_e(a_1, \dots, a_r; R-2) = R+6$.

Числото $F_e(3, 3, 3; 14) = 25$ е пресметнато с помощта на Теорема 9.13 и следната:

Теорема 9.12. Нека a_1, \dots, a_r са естествени числа такива, че $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$, $r \geq 2$ и $(a_1, \dots, a_r) \neq (3, 3)$. Тогава

(а) $F_e(a_1, \dots, a_r; R-3) \geq R+8$;

(в) Ако $(a_1, \dots, a_r) \neq (3, 4)$ и $K_{R-12} + C_5 + C_5 + C_5 + C_5 \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r)$, тогава $F_e(a_1, \dots, a_r; R-3) = R+8$.

ГЛАВА 10. С $e(G)$ означаваме броя на ребрата на графа G . С $K(p_1, \dots, p_r)$ означаваме пълния r -хроматичен граф с части V_1, \dots, V_r , където $p_i = |V_i|$, $i = 1, \dots, r$. Ако $n = p_1 + \dots + p_r$ и $|p_i - p_j| \leq 1$, $\forall i, j$, тогава $K(p_1, \dots, p_r)$ се нарича r -хроматичен n -върхов граф на Turan и се бележи с $T_r(n)$. Резултатите в тази глава са свързани със следната класическа:

Теорема на Turan. Нека G е n -върхов граф и $cl(G) \leq r$. Тогава:

(а) $e(G) \leq e(T_r(n))$;

(в) $e(G) = e(T_r(n))$ само когато $G = T_r(n)$.

Определение 10.1. Нека G е граф и $V \subseteq V(G)$. Казваме, че V е δ -множество в графа G , ако

$$d(v) \leq |V(G)| - |V|, \quad \forall v \in V.$$

Основното понятие обобщен r -хроматичен граф се дефинира по следния начин:

Определение 10.2. Казваме, че графът G е обобщен r -хроматичен граф с части V_1, \dots, V_r , ако

$$V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

и всяко от множествата V_i , $i = 1, \dots, r$ е δ -множество в G . Ако

$$d(v) = |V(G)| - |V_i|, \quad \forall v \in V_i, \quad i = 1, \dots, r$$

тогава казваме, че G е обобщен пълен r -хроматичен граф с части V_1, \dots, V_r .

Обобщените r -хроматични графи са въведени в съвместната ни с Н. Хаджииванов статия [43]. За тези графи доказваме:

Теорема 10.1. (съвм. с Н. Хаджииванов) *Нека G е обобщен r -хроматичен граф с части V_1, \dots, V_r , където $|V_i| = p_i$, $i = 1, \dots, r$. Тогава:*

- (a) $e(G) \leq e(K(p_1, \dots, p_r))$;
- (b) $e(G) = e(K(p_1, \dots, p_r))$ само когато G е обобщен пълен r -хроматичен граф с части V_1, \dots, V_r .

Тъй като от $cl(G) \leq r$ следва, че G е обобщен r -хроматичен граф, Теорема 10.1 може да се разглежда като разширение на Теоремата на Turan.

Ако $M \subseteq V(G)$ с $\Gamma(M)$ означаваме множеството от върховете на G , които са съседни на всичките върхове от M . В третия пункт на ГЛАВА 10 се разглеждат обобщени r -хроматични графи, породени от така наречените α -редици от върхове в граф.

Определение 10.4. *Нека G е граф и $v_1, \dots, v_r \in V(G)$. Казваме, че редицата v_1, \dots, v_r е наследствена, ако*

$$v_i \in \Gamma_G(v_1, \dots, v_{i-1}), \quad i = 2, \dots, r.$$

Определение 10.5. *Нека v_1, \dots, v_r е наследствена редица от върхове в графа G . Дефинираме*

$$V_1 = V(G) \setminus \Gamma_G(v_1), \quad V_i = \Gamma_G(v_1, \dots, v_{i-1}) \setminus \Gamma_G(v_i), \quad i = 2, \dots, r-1$$

$$V_r = \Gamma_G(v_1, \dots, v_{r-1}).$$

Редицата от подмножества V_1, \dots, V_r се нарича разслоение на $V(G)$, породено от наследствената редица v_1, \dots, v_r . Множеството V_i се нарича i -ти слой на това разслоение.

Определение 10.6. *Нека G е граф и $v_1, \dots, v_r \in V(G)$. Казваме, че редицата v_1, \dots, v_r е α -редица на графа G , ако тя удовлетворява следните условия:*

- (i) v_1, \dots, v_r е наследствена редица в G ;
- (ii) v_1 е връх с максимална степен в G ;

- (iii) Ако $2 \leq i \leq r$, тогава v_i има максимална степен в графа $G[\Gamma_G(v_1, \dots, v_{i-1})]$.

В екстремалната теория на графите α -редиците са въведени през 1976 година в [34] и [35]. Доказваме следните:

Теорема 10.4. (съвм. с Н. Хаджииванов) Нека v_1, \dots, v_r е α -редица в n -върховия граф G и V_1, \dots, V_r е разслоението, породено от тази редица, където $p_i = |V_i|$, $i = 1, \dots, r$. Ако V_r е δ -множество в G , тогава:

- (а) G е обобщен r -хроматичен граф с части V_1, \dots, V_r ;
 (в) $e(G) \leq e(K(p_1, \dots, p_r))$ и равенство се достига само когато G е обобщен пълнен r -хроматичен граф;
 (с) $e(G) \leq (T_r(n))$ и равенство се достига само когато G е обобщен r -хроматичен граф на $T_r(n)$.

Теорема 10.5. (съвм. с Н. Хаджииванов) Нека G е n -върхов граф и v_1, \dots, v_r е α -редица в G , която не се съдържа в $(r+1)$ -кликата на G (или, което е еквивалентно, $\Gamma_G(v_1, \dots, v_{r-1})$ е независимо множество). Нека V_1, \dots, V_r е разслоението, породено от тази α -редица и $p_i = |V_i|$, $i = 1, \dots, r$. Тогава

- (а) $e(G) \leq e(K(p_1, \dots, p_r))$;
 (в) Равенство в (а) е възможно само когато $G = K(p_1, \dots, p_r)$.

Следващата теорема съществено обобщава Теоремата на $T_r(n)$.

Теорема 10.6. (съвм. с Н. Хаджииванов) Нека v_1, \dots, v_r е α -редица в графа G , която не се съдържа в $(r+1)$ -кликата на G . Тогава:

- (а) $e(G) \leq e(T_r(n))$, където $n = |V(G)|$;
 (в) Равенството $e(G) = e(T_r(n))$ е възможно само когато $G = T_r(n)$.

Теорема 10.6 може да се формулира и по следния еквивалентен начин:

Ако G е n -върхов граф и $e(G) \geq e(T_r(n))$, $r \leq n$, тогава всяка максимална (в смисъл на включване) α -редица има поне $r+1$ члена, или $G = T_r(n)$.

В тази еквивалентна форма Теорема 10.6 е получена от В. Vollobas в [4] (виж Теорема 5, стр. 163) и в монографията [5] (виж Теорема 6, стр. 109).

Резултатите от дисертацията са публикувани в [34], [35], [36], [38], [40], [43],[45], [52], [53], [54], [56], [57], [58], [59], [60], [61], [62], [63], [64], [65], [67], [68], [69], [70], [71], [72], [73], [74], [75], [76], [77], [78], [80].

С изключение на [45], която е приета за печат, всичките статии са излезли от печат. Освен най-новите работи [43], [45], [73] и [76], те са реферирани в реферативните списания. Теоремите 8.1 и 8.3 и цялата десета глава са получени съвместно с Н. Хаджииванов. Частният случай $m = 7$ на Теорема 6.8 е получен съвместно с Е. Недялков. Всички останали резултати са получени самостоятелно. Не е публикувана единствено Теорема 7.2.

В библиографията сме включили всички работи на български автори, свързани с разглежданите проблеми. Поради това, относителния дял на българските работи е голям.

Резултатите от дисертацията се цитират в:

- енциклопедията [21];
- книгите [11], [31], [34], [33], [86], [93];
- статиите [1], [2], [3], [13], [15], [20], [22], [27], [30], [82], [85], [90], [87];
- дисертациите [83] и [91];
- master thesis [12];
- Рефератите [7] и [92].

Резултатите от дисертацията са получени в периода от 1976 година до 2004 година. През този период те са докладвани на няколко конференции на СМБ, на семинари по комбинаторика в МГУ (1980), по време на семестъра по дискретна математика в Банаховия център във Варшава (1987). Най-последните резултати са докладвани на Third EuroWorkshop on Optimal Codes and Related Topics, 2001, Sunny Beach, Bulgaria и на семинара по Алгебра и Теория на кодирането в ИМИ - БАН през 2004 година.

В Теорията на графите ме въведе професор Николай Хаджииванов. Под негово ръководство през 1981 година защитих кандидатската си дисертация. Сътрудничеството ни продължава и до днес. За всичко това му изказвам своята благодарност. Благодаря на докторантите Е. Недялков и Н. Колев за оказаната помощ. Благодаря също и на участниците в семинара по Алгебра и Теория на кодирането в ИМИ - БАН за вниманието към тази работа.

Специална благодарност изказвам на член кор. проф. дмн Ст. Доду-неков за това, че по време на предзащитата направи важни предложения за подобряването на дисертационния труд.

АВТОРСКА СПРАВКА

Основните научни приноси на дисертационния труд са следните:

1. Дефиниран е и изследван класа на p -наситените графи (Определение 2.1). Доказана е оценка отдолу за броя на върховете на тези графи (Теорема 2.2). Доказано е също, че има единствен граф, за който тази оценка се достига. Разработен е метод за пресмятане на някои Фолкманови числа с помощта на p -наситените графи (виж Теорема 9.6).

2. Доказани са нови резултати за върховете Фолкманови графи (Теорема 3.1, Теорема 3.2, Теорема 3.4). За върховете Фолкманови графи $G \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r)$ с $cl(G) < m - 1$ е доказано неравенството

$$|V(G)| \geq m + p + \alpha(G) - 1,$$

което е точно. Дадена е проста характеристика на графите, за които се достига равенство (всичките тези графи при дадени m и p , съдържат един фиксиран граф).

3. Числата $F_v(a_1, \dots, a_r; m - 1)$, които съществуват при $m \geq p + 2$ са изследвани в граничния случай $m = p + 2$. При фиксирано p и $m = p + 2$ има две такива числа

$$F_v(2, 2, p; p + 1) \quad \text{и} \quad F_v(3, p; p + 1), \quad p \geq 3.$$

Доказано е, че числата $F_v(a_1, \dots, a_r; m - 1)$ силно зависят от граничните числа $F_v(2, 2, p; p + 1)$ и $F_v(3, p; p + 1)$ (Теорема 6.5). Доказани са оценките

$$2p + 4 \leq F_v(2, 2, p; p + 1) \leq F_v(3, p; p + 1) \leq 4p + 2,$$

които съществено подобряват предшестващите резултати. Пресметнати са две от тези числа

$$F_v(2, 2, 4; 5) = F_v(3, 4; 5) = 13.$$

За числата $F_v(2, 2, 3; 4) = F_v(3, 3; 4) = 14$ са получени окончателната оценка отгоре 14. (неравенствата $F_v(2, 2, 3; 4) \geq 14$ и $F_v(3, 3; 4) \geq 14$ са получени с компютър съответно в [13] и [85]).

4. Пресметнати са три серии Фолкманови числа от вида $F_v(2, \dots, 2; q)$;

$$F_v(2, 2, 2, 2; 4) = 11.$$

$$F_v(\underbrace{2, \dots, 2}_r; r-1) = r+7, \quad r \geq 8.$$

$$F_v(\underbrace{2, \dots, 2}_r; r-2) = r+9, \quad r \geq 11.$$

5. Пресметнати са Фолкмановите числа $F_v(a_1, \dots, a_r; m-1)$ в случаите, когато $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 3$ или 4 (Теорема 6.7 и Теорема 6.8). Подобряват се съществено оценките за тези числа в случая, когато

$$\max\{a_1, \dots, a_r\} = 5.$$

6. Получена е оценката

$$F_v(p, p; p+1) \leq 1.46p!,$$

която силно подобрява предишните оценки.

7. Принос към решаването на проблема на Erdős за пресмятането на числото $F_e(3, 3; 5)$. Този проблем е от 1967 година. Ние получихме окончателната оценка отгоре $F_e(3, 3; 5) \leq 15$ (1981). Неравенството

$$F_e(3, 3; 5) \geq 15$$

е получено в [85] с помощта на компютър през 1998 година.

8. Пресметнати са нови ребрени числа на Фолкман

$$F_e(3, 4; 9) = 14, \quad F_e(3.3.3; 16) = 21, \quad F_e(3, 3, 3; 15) = 23, \quad F_e(3, 3, 3; 14) = 25.$$

9. Въвежда се класа на обобщените r -хроматични графи. Разработен е метод за решаване на екстремални задачи за графи с помощта на обобщените r -хроматични графи. Получени са нови резултати, които обобщават, разширяват и уточняват класическата теорема на Туран за графите.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Baginski P.
A generalization of Ramsey – type theorem on hypermatchings.
J. Graph Theory, v. 50, Issue 2, 2005, 142-149.
- [2] Belyi S.G.
Solution of certain combinatorial problems in Ramsey theory for graphs using computer. (in Russian). *Kibernetika (Kiev)* 1985, 116-118.
- [3] Belyi S.G.
Triangular Ramsey numbers, triangular Ramsey graphs, triangular multiplicities and distributions of monochromatic triangles. (Russian). *Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst Kibernetika Kiev* 17 (1990), 1-5.
- [4] Bollobas B.
Turan's Theorem and Maximal Degrees. *J. Combin. Theory Ser. B*, 75 (1999), 160-164.
- [5] Bollobas B.
Modern Graph Theory. *Springer Verlag*, New York, 1998.
- [6] Bondy J.A.
Large dense neighborhoods and Turan's theorem. *J. Combin. Theory Ser. B*, 34 (1983), 109-111.
- [7] Braß P.
Zbl. 0813.05046
- [8] Bukor J.
A note on the Folkman number $F(3, 3;5)$. *Math. Slovaca* 44 (1994), 479-480.
- [9] Burr S., Rosta V.
On the Ramsey multiplities of Graphs – Problems and recent results. *Journal of Graph Theory*, Vol. 4 (1980), 347-361.
- [10] Chvatal V.
The minimality of the Mycielski graph. *Lecture Notes in Math.* 406 (1974), 243-246.
- [11] Chung F., Graham R.
Erdos on Graphs: His Legacy of unsolved problems. New York; A. K. Peters, 1998.

- [12] Coles J.
Algorithms for Bouding Folkman number; Master's Thesis Proposal
<http://www.cs.rit.edu:8080/ms/static/spr/2004/jpc1870/proposal.pdf>
- [13] Coles J., Radziszowski S.
Computing the Vertex Folkman Number $F_v(2, 2, 3; 4)$.
The Journal of combin. Math. and combin. Computing, to appear.
- [14] Dirac G.
Map colour theorems related to the Heawood color formula. *J. London Math. Soc.*,
31, (1956), 460-471.
- [15] Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics.
<http://members.aol.com/jeff570/g.html-32K-2001-07-11>.
- [16] Erickson M.
An upper bound for the Folkman number $F(3, 3; 5)$. *J. Graph Theory* 17 (1993),
679-681.
- [17] Erdős P., Hajnal A.
Research problem 2-5. *J. Combin. Theory* 2 (1967), 104.
- [18] Faudree R.
Complete subdraphs with large degree sums. *J. Graph Theory*, 16 (1992), 327-
334.
- [19] Folkman J.
Graphs with monochromatic complete subgraph in every edge coloring. *SIAM J. Appl. Math.*, 18 (1970), 19-24
- [20] Gardner M.
Ramsey graph theory (in Russian). *Kvant*, № 4, 1988, 15-20.
- [21] GIAN – CARLO ROTA (edit.)
Encyclopedia of Mathematics and its applications, V. 20, pp. 326.
- [22] Giraud G.
Sur un probleme d'Erdős et Hajnal. *Annals of Discrete Math.*, 17 (1983), 303-306.
- [23] Graham R. L.
On edgewise 2-coloerd graphs with monochromatic triangles containing no
complete hexagon. *J. Combin. Theory* 4 (1968), 300.

- [24] Graham R. L., Spencer J. H.
On small graphs with forced monochromatic triangles. Recent Trends in Graph Theory, *Lecture Notes in Math.* 186 (1971), 137-141.
- [25] Guta P.
On the structure of k -chromatic-critical graphs of order $k+p$. *Stud. Cerc. Math.*, 50 (1998), № 3 – 4, 169-173.
- [26] Greenwood R., Gleason A.
Combinatorial relation and chromatic graphs. *Canad. J. Math.*, 7 (1955), 1 – 7.
- [27] Hanson D., MacGillivray G., Youngs D.
The size of a minimum five-chromatic K_4 – free graph. *Discrete Math.*, № 1 – 3 (1993), 353-355.
- [28] Halldorsson M., Radhakrishnan J.
Greed is good: Approximating independent sets in sparse and bounded-degree graphs. *Algorithmica* 18 (1), 1997, 145-163.
- [29] Irving R. W.
On a bound of Graham and Spencer for graph-coloring constant. *J. Combin. Theory* 15 (1973), 200-203.
- [30] Jensen T., Royle G.
Small graphs with chromatic number 5: a computer search. *J. Graph Theory* 19 (1995), 107-116.
- [31] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.
Turan's graph Theorem. (Bulgarian) *Narodna prosveta Press.*, Sofia, 1980.
- [32] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.
Ramsey numbers. (Bulgarian) *Narodna prosveta Press.*, Sofia, 1982.
- [33] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.
Extremal graph theory. (Bulgarian) "*Kliment Ohridski*" University Press, Sofia, 1990.
- [34] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
On the maximum number of edges of a graph. (Russian) *C. R. Acad. Bulg. Sci.* 29 (1976), 1575-1578.
- [35] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Extremal problems for s -graphs and a theorem of Turan. (Russian) *Serdica* 3, (1977), 117-125.

- [36] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Sharpening of a theorem of Greenwood and Gleason on the colorings of the edges of a complete graph with nine vertices. (Russian) *C. R. Acad. Bulgare Sci.* 31 (1978), 631-633.
- [37] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
On the Graham-Spencer number. (in Russian) *C. R. Acad. Bulg. Sci.* 32 (1979), 155-158.
- [38] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
On the number of nontrivial solutions of Fermat's equation $x^n + y^n = z^n$ in a Galois field.(Russian); *C. R. Acad. Bulg. Sci.* 32 (1979), 557-560.
- [39] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
An example of the 16-vertex Ramsey (3, 3) – graph with clique number 4.
(Russian) *Serdica* 9, (1983), 73-78.
- [40] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
On the generalized Turan's theorem and on an extension of this theorem. (Russian); *God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Mekh.* 77 (1983), № 1, 231-242 (1988).
- [41] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
On Ramsey graphs. (Russian); *God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Mech.* 78 (1984), 211-214.
- [42] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Relations and graphs. (Bulgarian) *Fiz.-Mat. Spis.* 27 (60), (1985), 314-318.
- [43] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Generalized r -partite graphs and Turan's Theorem. *C. R. Acad. Bulgare. Sci.*, 57 (2004), № 2, 19-24.
- [44] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
On the minimum of the number of 3-anticliques in n -vertex graphs without 3-cliques. (Russian), *Serdika* 11 (1985), 251-258.
- [45] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Balanced vertex sets in graphs. *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.* 97, (2005), 50-64.

- [46] Lin S.
On Ramsey numbers and Kr-coloring of graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 12 (1972), 82-92.
- [47] Luczak T., Urbanski S.
A note on restricted vertex Ramsey numbers. *Period. Math. Hungar.* 33 (1996), 101-103.
- [48] Luczak T., Rucinski A., Urbanski S.
On minimal vertex Folkman graphs. *Discrete Math.* 236 (2001), 245-262.
- [49] Mengersen I.
Minimal Ramsey – Graphen. Habilitations schrift .TU Braunschweig, 1982.
- [50] Mycielski J.
Sur le coloriage des graphes. *Colloq. Math.* 3 (1955), 161-162.
- [51] Murphy O.
Lower bounds on the stability number of graphs computed in terms of degrees. *Discrete Mathematics*, 90 (1991), 207-211.
- [52] Nedialkov E., Nenov N.
Computation of the vertex Folkman numbers $F(2, 2, 2, 4; 6)$ and $F(2, 3, 4; 6)$. *Electron. J. Combin.* 9 (2002), #R9.
- [53] Nenov N.
On the Ramsey $(3, 4)$ – graphs. (Russian) *God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Mekh.* 73 (1979), 185-190 (1986).
- [54] Nenov N.
On an assumption of Lin about Ramsey–Graham–Spencer numbers. (Russian) *C. R. Acad. Bulg. Sci.* 33 (1980), № 9, 1171-1174.
- [55] Nenov N.
A new estimation from below for the Graham–Spencer number $N(3, 5)$. (Russian) *Serdika* 6, (1980), 373-383.
- [56] Nenov N.
Certain remarks on Ramsey multiplicities. (Russian); *Mathematics and education in mathematics, Proc. 10th Spring Conf. Union Bulg. Math.*, Sunny Beach 1981, 176-179 (1981).

- [57] Nenov N.
Sharpening of Lin's inequalities relating to Ramsey theory. (Russian)
C. A. Acad. Bulg. Sci. 34 (1981), 307-310.
- [58] Nenov N.
On a certain constant connected with Ramsey (3, 4)-graphs. (Russian); *Serdika* 7 (1981), 366-371.
- [59] Nenov N.
An example of a 15-vertex Ramsey (3, 3)-graph with clique number 4. (Russian)
C. A. Acad. Bulg. Sci. 34 (1981), 1487-1489.
- [60] Nenov N.
Generalization of a certain theorem of Greenwood and Gleason on three-color colorings of the edges of a complete graph with 17 vertices. (Russian); *C. A. Acad. Bulg. Sci.* 34 (1981), 1209-1212.
- [61] Nenov N.
Lower estimates for some constants related to Ramsey graphs. (Russian); *God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Mekh.* 75 (1981), 27-38 (1984).
- [62] Nenov N.
On the Zykov numbers and some its applications to Ramsey theory. *Serdika Bulg. Math. Publ.* 9 (1983), 161-167. (in Russian)
- [63] Nenov N.
On a Ramsey type property for the 10 vertices graphs. (Russian); *Mathematics and education in mathematics, Proc. 13th Spring Conf. Union Bulg. Math., Sunny Beach* 1984, 165-172 (1984).
- [64] Nenov N.
The chromatic number of an arbitrary 10-vertex graph without 4-cliques is not larger than 4. (Russian); *C. A. Acad. Bulg. Sci.* 37 (1984), 301-304.
- [65] Nenov N.
Application of the corona-product of two graphs in Ramsey theory. *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.* 79 (1985), 349-355. (in Russian)
- [66] Nenov N.
Lower bounds for the number of vertices of some Ramsey graphs. (Russian); *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.* 86 (1992), 11-15

- [67] Nenov N.
On the (3, 4)-Ramsey graphs without 9-cliques. (Russian); *God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Infor.* 85 (1993), № 1 (Mat.), 71-81 (1991).
- [68] Nenov N.
On the small graphs with chromatic number 5 without 4-cliques. *Discrete Math.* 188 (1998), 297-298.
- [69] Nenov N.
On a class of vertex Folkman graphs. *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.* 94 (2000), 15-25.
- [70] Nenov N.
A generalization of a result of Dirac. *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.* 95 (2001), 59-69.
- [71] Nenov N.
On the 3-coloring vertex Folkman number $F(2, 2, 4)$. *Serdika Math. J.* 27 (2001), 131-136.
- [72] Nenov N.
On the vertex Folkman number $F(3, 4)$. *C. A. Acad. Bulgare Sci.* 54, 2 (2001), 23-26.
- [73] Nenov N.
Computation of the vertex Folkman numbers $F(2, 2, 2, 3; 5)$ and $F(2, 3, 3; 5)$. *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.* 95 (2001), 71-82.
- [74] Nenov N.
Lower bound for a number of vertices of some vertex Folkman graphs. *C. A. Acad. Bulg. Sci.* 55, 4 (2002), 33-36.
- [75] Nenov N.
On a class of vertex Folkman numbers. *Serdika Math. J.* 28 (2002), 219-232.
- [76] Nenov N.
Bounds on the vertex Folkman numbers $F(4, 4; 5)$. *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.* 96 (2004), 75-83.
- [77] Nenov N.
On the triangle vertex Folkman numbers. *Discrete mathematics* 271 (2003), 327-334.

- [78] Nenov N., Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.
On edgewise 2 – colored graphs containing a monochromatic triangle. (Russian);
Serdica 5 (1979), 303-305.
- [79] Nenov N., Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.
Every Ramsey graph without 5-cliques has more than 11 vertices. (Russian);
Serdica 11 (1985), 341-356.
- [80] Nenov N., Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.
On minimal t -graphs. *Serdica* 6 (1980), 128-142.
- [81] Nešetřil J., Růdl V.
The Ramsey property for graphs with forbidden complete subgraphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 20 (1976), 243-249.
- [82] Pashov I.
Ramsey multiplicity in the case of 2-colorings of edges of a complete graph with fourteen vertices. (Russian); *Serdica* 10 (1984), 192-197.
- [83] Pashov I.
Кратности и реализации на Рамзи. *Ph. D. Thesis*, University of Sofia, 1985.
- [84] Ramsey P.
On a problem of formal logic. *Proc. London Math. Soc.*, 30 (1930), 264-268.
- [85] Piwakowski K., Radziszowski S., Urbański S.
Computation of the Folkman number $F_e(3, 3; 5)$. *J. Graph Theory* 32 (1999), 41-49.
- [86] Рыбников (редактор)
Комбинаторный анализ. Москва, "Наука", 1982.
- [87] Rowlinson P.
Certain 3-decompositions of complete graphs, with an application to finite Fields.
Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A, 99 (1985), 277-281.
- [88] Schäuble M.
Zu einem Kantenfärbungsproblem. Remerkungen zu einer Note von R. L. Graham.
Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilmenau 15 (1969), Heft 2, 55-58.
- [89] Schur I.
Über die Kongruenz $x^n + y^n \equiv z^n \pmod{p}$. *Jahr. Deutsch. Math. Verein* 25 (1916), 114-117.

- [90] Urbański S.
Remarks on 15-vertex $(3, 3)$ – Ramsey graphs not containing K_5 . *Disc. Math. Graph Theory* 16 (1996), 173-179.
- [91] Urbański S.
Folkman numbers. *Ph. D.* 1999, UAM, Poland.
- [92] Zbl. 0788.05044
- [93] Zykov A.
Fundamentals of graph theory. “*Nauka*”, Moscow (1987).