Софийски Университет "св. Климент Охридски"
Факултет по Математика и Информатика

Магистърска Програма ”Математика и математична физика”

ПАНЧО ГЕОРГИЕВ БЕШКОВ

Неасоциативни операции върху вариации на структури на Hodge

дипломна работа

за получаване на степен

Магистър по математика

научен ръководител: проф. д-р Азнив Киркор Каспарян

София

2 0 1 5

Съдържание

Глава 1

Увод

Нека (M, g) е пълно Риманово многообразие, относно свързаността на Levi-Civita на g. Геодезичният поток върху M е съответствие, което на допирателен вектор $v \in T^{\mathbb{R}}_p M$ към точка $p \in M$ съпоставя геодезичната $\gamma^v_p : \mathbb{R} \to M$, допираща се до $\left.\frac{d\gamma^v_p(t)}{dt}\right|_{t=0} = v$ в $\gamma^v_p(0) = p$. Подмногообразие $N \subset M$ през $p \in N$ е геодезично, ако ограничението $T^{\mathbb{R}}_p N \ni \ \mapsto \gamma^v_p : \mathbb{R} \to M$ на описаното съответствие върху допирателното пространство към N в p съвпада с геодезичния поток $T^{\mathbb{R}}_p N \ni v \mapsto \widetilde{\gamma^v_p} : \mathbb{R} \to N$ относно свързаността на Levi-Civita на $(N, g|_N)$. По този начин, геодезичността на $N \subset M$ в $p \in N$ е условие за затвореност на N относно геодезичния поток върху M през p.
Целта на настоящата дипломна работа е характеризацията на напълно геодезичните подмногообразия U на хомогенно пространство D чрез затвореност относно неасоциативни структури върху D. По-точно, хомогенните пространства $D = G_{\mathbb{R}}/V$ са фактори на реални линейни алгебрични групи $G_{\mathbb{R}}$ по компактни подгрупи V, съдържащи някакъв максимален компактен тор на $G_{\mathbb{R}}$. Хомогенните пространства D имат естествена комплексна структура. Областите на периодите D, определени като класифициращите пространства на структурите на Hodge с фиксирана решетка, поляризация и числа на Hodge притежават споменатите свойства. Ако $D = G_{\mathbb{R}}/V$ е област на периоди и K е максимална компактна подгрупа на $G_{\mathbb{R}}$, съдържаща V, то $S = G_{\mathbb{R}}/K$ е Риманово симетрично пространство от некомпактен тип. Изображението $\pi : D \to S$, $\pi(aV) = aK$ е естествена проекцияна D върху S. Промяната на комплексната структура на проективно алгебрично многообразие X индуцира промяна на структурата на Hodge върху примитивните кохомологии на X от степен $n = \dim_{\mathbb{C}} X$. По този начин възниква локално холоморфно изображение $\Psi : S \to D$ от произволно параметризиращо пространство S на комплексни структури върху X. Образът на Ψ е комплексно подмногообразие на D, което се допира до така нареченото хоризонтално разпределение върху D. Това води до необходимостта от изучаване на хоризонталните комплексни подмногообразия $U \subset D$, наречени вариации на структури на Hodge.
Интересът към напълно геодезичните вариации на структури на Hodge $U \subset D$ е мотивиран от наличието на интересни фамилии от многообразия на Calabi-Yau с напълно геодезични вариации на структури на Hodge. Понеже U са еквивариантно вложени в D ермитови симетрични пространства от некомпактен тип, някои свойства на комп-

лексно аналитичните компактификации на факторите U/Γ на U по решетки $\Gamma < G_{\mathbb{R}}$ стоят в основата на конструкциите на комплексно аналитичните компактификации на D/Γ.

Настоящата дипломна работа характеризира напълно геодезичните вариации на структури на Hodge $U \subset D$ чрез три типа неасоциативни структури. Изображение $\sigma : S = G_{\mathbb{R}}/K \to G_{\mathbb{R}}$ е сечение на естествената проекция $\pi_K : G_{\mathbb{R}} \to S$, $\pi_K(a) = aK$, ако $\pi\sigma = \mathrm{Id}_S$. Посредством груповото умножение в $G_{\mathbb{R}}$, произволно сечение $\sigma : S \to G_{\mathbb{R}}$ индуцира бинарна операция $\oplus_\sigma : S \times S \to S$, $aK \oplus_\sigma bK = \pi_K(\sigma(aK)\sigma(bK)) = \sigma(aK)bK$ в S. Относно тази операция S е лява квази-група с десен неутрален елемент K, т.е. за произволни точки $p, q \in S$ уравнението $p \oplus_\sigma x = q$ има единствено решение $x_o(p,q) \in S$ и $p \oplus_\sigma H = p$ за $\forall p \in S$. Дипломната работа установява, че $U \subset D$ е напълно геодезична вариация на структура на Hodge тогава и само тогава, когато съществува аналитично сечение $\sigma : S \to G_{\mathbb{R}}$ на $\pi_K : G_{\mathbb{R}} \to S$ с $\sigma(\check{o}) = \sigma(K) = e \in G_{\mathbb{R}}$, така че $(\pi(U), \oplus_\sigma)$ е лява квази-подгрупа на $(S, \oplus_\sigma)$. По определение, последното означава, че за произволни точки $p, q \in \pi(U)$ е в сила $p \oplus_\sigma q, x_o(p,q) \in \pi(U)$, където $x_o(p,q) \in S$ е единственото решение на $p \oplus_\sigma x = q$ от S.

През 60-те години на миналия век Loos забелязва, че геодезичните изометрии $s_x : S \to S$ на Римановo симетрично пространство S задават гладка бинарна операция $S \times S \to S$, $x.y := s_x(y)$. По определение, $s_x : S \to S$ е инволюцията с изолирана фиксирана точка x, чийто диференциал $(ds_x)_x = -\mathrm{Id}_{T_x^{\mathbb{R}}S}$ в $x \in S$ съвпада с умножението с $-1 \in \mathbb{R}$. Освен това $s_x s_y(z) = s_{s_x(y)}(s_x(z))$ за произволни три точки $x, y, z \in S$. Отразявайки тези свойства като аксиоми за $(S, .)$, получаваме понятието Loos-симетрично пространство. Loos доказва, че единствените гладки многообразия S, върху които може да се определи Loos-симетрично пространство $(S, .)$ са Римановите симетрични пространства S. Във втория параграф на третата глава се установява, че вариация на структура на Hodge $U \subset D$ е напълно геодезична тогава и само тогава, когато $(\pi(U), .)$ е Loos-симетрично подпространство на $(S = G_{\mathbb{R}}/K, .)$. Последното означава, че за произволни $a, b \in \pi(U)$ е в сила $a.b, x_o(a,b), y_o(a,b) \in \pi(U)$, където $x_o(a,b)$ е единственото решение на уравнението $a.x = b$ от S, а $y_o(a,b)$ е единственото решение на уравнението $y.a = b$ от S.

Настоящата работа въвежда понятието Loos-ермитово симетрично пространство $(S, *)$ от некомпактен тип по аналогия с Loos-симетрично. Операцията $x * y = j_x(y)$ върху ермитово симетрично пространство $S = G/K$ от некомпактен тип се задава чрез холоморфната изометрия $j_x : S \to S$ от ред 4 с единствена фиксирана точка x, чийто диференциал $(dj_x)_x = J_x$ в x съвпада с оператора $J_x : T_x^{\mathbb{R}}S \to T_x^{\mathbb{R}}S$ на комплексната структура. В последния, трети параграф на трета глава доказваме, че само ермитовите симетрични пространства S от некомпактен тип имат структура $(S, *)$ на Loos-ермитово симетрично пространство от некомпактен тип. В резултат получаваме, че вариация на структура на Hodge U е напълно геодезично подмногообразие на област на периоди D тогава и само тогава, когато дифеоморфният образ $\pi(U)$ на U има структура $(\pi(U), *)$ на Loos-ермитово симетрично пространство от некомпактен тип, за която $(\pi(U), *^2)$ е Loos-симетрично подпространство на $(S, .)$.

Изучаването на напълно геодезичните вариации на структури на Hodge $U \subset D$ е актуална тематика от алгебричната геометрия. В [FriedmanLaza] Friedman и Laza характеризират тези обекти с тяхната полу-алгебричност и силна квази-проективност. За да формулираме техния резултат да забележим, че всяко комплексно аналитично подпространство $\check{U}$ на дуалното пространство $\check{D}$ на област на периоди D е проективно алгебрично по Теоремата на Chow, защото $\check{D} \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ е проективно алгебрично. Вариация на структура на Hodge $U \subset D$ е полу-алгебрична, ако съществува комплексно аналитично подпространство $\check{U} \subset \check{D}$, така че U е неприводима компонента на $\check{U}$. Произволна област на периоди $D = G_{\mathbb{R}}/V$ е хомогенно пространство на реална линейна алгебрична група $G_{\mathbb{R}} \leq \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$. За всяко комплексно подмногообразие $U \subset D$, подгрупата $\Gamma(U) := \{\gamma \in G_{\mathbb{Z}} \,|\, \gamma(U) = U\}$ на $G_{\mathbb{Z}} := G_{\mathbb{R}} \cap \mathrm{GL}(N, \mathbb{Z})$ е дискретна в $G_{\mathbb{R}}$ и действа напълно прекъснато върху U и D. Ако $Y \subset X$ са проективни алгебрични многообразия, то допълнението $X \setminus Y$ на Y до X се нарича квази-проективно многообразие. Ако за всяка подгрупа $\Gamma_o \leq \Gamma(U)$ с краен индекс $[\Gamma(U) : \Gamma_o] < \infty$ факторът U/Γ_o е квази-проективно многообразие, Friedman и Laza казват, че $U/\Gamma(U)$ е силно квази-проективно. Ако $\Gamma(U)$ няма фиксирани точки върху U, то U/Γ_o е крайно неразклонено покритие на $U/\Gamma(U)$ и квази-проективността на $U/\Gamma(U)$ е еквивалентна на силната квази-проективност на този фактор. Friedman и Laza доказват, че ако $U \subset D$ е полу-алгебрична вариация на структура на Hodge със силно квази-проективен фактор $U/\Gamma(U)$, то $U \subset D$ е напълно геодезично и еквивариантно вложено ермитово симетрично подпространство на D. Вариация на структура на Hodge $U \subset D$ е от тип Calabi-Yau, ако първото число на Hodge на D е $h^{n,0} = 1$. Friedman и Laza установяват, че всяка неприводима ограничена симетрична област $\mathcal{D}$ се реализира чрез напълно геодезична вариация на структура на Hodge $\mathcal{D} \subset D$ от тип Calabi-Yau. Всяка напълно геодезична вариация на структура на Hodge $U \subset D$ от тип Calabi-Yau се получава чрез тензорна конструкция върху тавталогичното разслоение на $\mathcal{D}$.

В своята работа [LiuYin] Liu и Yin дават кохомологична характеризация на пълната геодезичност на образа на пространството на Teichmüller $\mathcal{T}$ на многообразие на Calabi-Yau под действие на изображение на периодите. Да напомним, че многообразие на Calabi-Yau X е проективно алгебрично многообразие с тривиално канонично разслоение $K_X = \mathcal{O}_X$ и анулиращи се кохомологични групи $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ за $\forall 0 < i < n = \dim_{\mathbb{C}} X \geq 3$. Хомологичната група $H_n(X, \mathbb{Z})$ е крайно породен $\mathbb{Z}$-модул и се представя като директно произведение $H_n(X, \mathbb{Z}) = H_n(X, \mathbb{Z})^o \times H_n(X, \mathbb{Z})^{\mathrm{Tor}}$ на свободна абелева група $H_n(X, \mathbb{Z})^o$ с краен ранг и крайна абелева група $H_n(X, \mathbb{Z})^{\mathrm{Tor}}$, наречена торсионна част на $H_n(X, \mathbb{Z})$. Произволен базис γ на $H_n(X, \mathbb{Z})^o / m H_n(X, \mathbb{Z})^o$ се нарича структура с ниво m върху X. Поляризация на X е влагане в проективното пространство на глобалните сечения на линейно разслоение $L \to X$. Пространството на Teichmüller $\mathcal{T}$, параметризиращо многообразията на Calabi-Yau с фиксирана поляризация $L \to X$ и структура γ с ниво m има естествено холоморфно изображение на периодите $\Psi : \mathcal{T} \to D$. Върху многообразието на Calabi-Yau X съществува глобална холоморфна $(n, 0)$-форма Ω, която задава канонична фамилия $\Omega^c(t)$ от холоморфни $(n, 0)$-форми в околност на точката $p \in \mathcal{T}$, отговаряща на X. От друга страна, за произволен ортонормиран базис $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ на $H^{0,1}(X, T^{1,0}X)$, контракцията $\exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} t_i \varphi_i\right) \lrcorner \Omega$ е $(n-1, 1)$-форма. Liu и Yin доказват, че образът $\Psi(\mathcal{T})$ на $\mathcal{T}$ под действие на изображението на периодите Ψ е напълно геодезична еквивариантно вло-

жена вариация на структура на Hodge тогава и само тогава, когато кохомологичните класове $[\Omega^c(t)] = \left[\exp\left(\sum_{i=1}^{N} t_i\varphi_i\right)\lrcorner\Omega\right]$ съвпадат в околност на произволна точка $p \in \mathcal{T}$.
Напълно геодезичните вариации на структури на Hodge $U_1 \subset D$ с комплексна размерност $\dim_{\mathbb{C}} U_1 = 1$ са еквивариантно вложени горни полуравнини

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\} = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/SO(2)$$

или $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-орбити. В [Schmid] Schmid доказва, че произволна обща гранична точка $p \in \partial U \cap \partial D \subset \check{D}$ на вариация на структура на Hodge $U \subset D$ и областта на периодите D, която я съдържа има достатъчно малка околност, която се съдържа в околност на безкрайна точка $(i\infty)^k \in (\partial\mathcal{H})^k$ на директно произведение $\mathcal{H}^k = \mathcal{H} \times \ldots \times \mathcal{H}$ на $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-орбити. Този резултат мотивира изучаването на $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-орбитите на началото на област на периоди D. В [Robles] Robles класифицира холоморфните хоризонтални $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-орбити върху $D = G_{\mathbb{R}}/V$, доказвайки, че техните $G_{\mathbb{R}}$-орбити са във взаимно еднозначно съответствие с орбитите на редуктивните части на параболичните подалгебри на Lie на $\mathrm{Lie}G_{\mathbb{R}}$ с фиксиран център и фиксирана обща Картанова подалгебра $\mathfrak{h}$ на $\mathrm{Lie}V$ и $\mathrm{Lie}G_{\mathbb{R}}$, под действие на групата на Weyl на $\mathfrak{h}$.
Настоящата дипломна работа доказва, че проекцията $\pi : D = G_{\mathbb{R}}/V \to G_{\mathbb{R}}/K = S$, $\pi(aV) = aK$ на област на периоди D върху Римановo симетрично пространство S се ограничава до глобален дифеоморфизъм $\pi : U \to \pi(U)$ върху напълно геодезична вариация на структура на Hodge $U \subset D$. За образа $\Psi(S)$ на изображение на периодите $\Psi : S \to D$ на алгебрична фамилия $\mathfrak{X} \to S$ от проективна алгебрични многообразия с едносвързана база S, Liu и Shen доказват в [LiuShen], че ограничението $\pi : \Psi(S) \to \pi\Psi(S)$ е крайно неразклонено покритие. Този резултат може да се разглежда като обобщение на глобалната дифеоморфност на $\pi : U \to \pi(U)$ за напълно геодезична вариация на структура на Hodge $U \subset D$. Още повече, Liu и Shen установяват, че образът $\Psi(S)$ на S има естествено влагане в комплексно линейно пространство и е ограничен относно комплексната евклидова метрика на това пространство.
По-точно, холоморфното допирателно пространство $T_o^{1,0}D = T_o^{1,0}\check{D}$ към компактното дуално $\check{D} = G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ на D има естествено повдигане до нилпотентна подалгебра на Lie $\mathfrak{N}_+$ на $G_{\mathbb{C}}$. Експоненциалното изображение $\exp : \mathfrak{N}_+ \to N_+$ в съответната свързана унипотентна подгрупа N_+ на $G_{\mathbb{C}}$ е взаимно еднозначно. Съгласно $N_+ \cap P_{\mathbb{C}} = \{e\}$, орбитата на началото $N_+(o) \simeq N_+/N_+ \cap P_{\mathbb{C}} = N_+$ е изоморфна на N_+. Метриката на Hodge върху $\mathrm{Lie}G_{\mathbb{C}}$ индуцира комплексна евклидова метрика върху $\mathfrak{N}_+$ и $N_+(o)$. Liu и Shen доказват, че $\Psi(S)$ е ограничено подмножество на $N_+(o) \cap D$ относно комплексната евклидова метрика върху $N_+(o)$, индуцирана от $\mathfrak{N}_+$ посредством дифеоморфизма $\pi_{P_{\mathbb{C}}} \exp : \mathfrak{N}_+ \to N_+(o)$.
Накратко за съдържанието на дипломната работа. Първата глава е посветена на някои геометрични свойства на напълно геодезичните вариации на структури на Hodge. Нейният първи параграф дава предварителни сведения за геодезичните криви относно свързаността на Levi-Civita върху Риманово многообразие (M, g). Тя скицира и доказателството на Теоремата на Cartan-Hadamard за пълните Риманови многообразия с неположителна секционна кривина. Вторият параграф на първа глава напомня, че необходимо и достатъчно условие за пълна геодезичност на подмногообразие

W на Римановo симетрично пространство $S = G_{\mathbb{R}}/K$ през началото $\check{o} \in W$ е затвореността на $T_{\check{o}}^{\mathbb{R}}W \subset \mathrm{Lie}G_{\mathbb{R}}$ относно тройната скобка на Lie $[u,[v,w]] \in T_{\check{o}}^{\mathbb{R}}W$ за всички $u,v,w \in T_{\check{o}}^{\mathbb{R}}W$. Това условие е известно и доказано в монографията [Helgason] на Helgason. Ние забелязваме, че доказателството на достатъчността е в сила за по-широк клас от хомогенни пространства $G_{\mathbb{R}}/H$. Третият параграф на първа глава се състои от предварителни сведения за класифициращи пространства на структури на Hodge, изображение на периодите и вариации на структури на Hodge. Четвъртият параграф дискутира напълно геодезичните вариации на структури на Hodge $U \subset D$. Тя напомня, че всички такива U са еквивариантно вложени в D ермитови симетрични пространства от некомпактен тип. В резултат се получава, че пълната геодезичност на U в $D = G_{\mathbb{R}}/V$ е еквивалентна на пълната геодезичност на $\pi(U)$ в $S = G_{\mathbb{R}}/K$ и изисква глобалната дифеоморфност на $\pi : U \to \pi(U)$.
Втората глава характеризира пълната геодезичнист на вариация на структура на Hodge $U \subset D$ чрез наличието на аналитична лява квази-групова операция с десен неутрален елемент върху $\pi(U) \subset S$. За да мотивира определението на лява квази-група $(\mathcal{L}, \oplus)$ с десен неутрален елемент e_r, първият параграф напомня, че непразно множество G с асоциативна бинарна операция $G \times G \to G$, $(a,b) \mapsto ab$ е група тогава и само тогава, когато уравненията $ax = b$ и $ya = b$ имат единствени решения $x_o(a,b), y_o(a,b) \in G$. Вземайки предвид този факт, през 1935 г. Moufang въвежда понятието квази-група като непразно множество Q с (необезателно асоциативна) бинарна операция $Q \times Q \to Q$, $(a,b) \mapsto a.b$, относно която за произволни $a,b \in Q$ уравненията $a.x = b$ и $y.a = b$ имат единствени решения $x_o(a,b), y_o(a,b) \in Q$. Лява квази-група $(\mathcal{L}, \oplus)$ с десен неутрален елемент e_r е непразно множество $\mathcal{L}$ с бинарна операция $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, $(a,b) \mapsto a \oplus b$, така че за произволни $a,b \in \mathcal{L}$ уравнението $a \oplus x = b$ има единствено решение $x_o(a,b) \in \mathcal{L}$ и $a \oplus e_r = a$ за $\forall a \in \mathcal{L}$. За произволна група G и нейна подгрупа H, лявото хомогенно пространство на G относно H е множеството $G/H = \{gH \,|\, g \in G\}$ на левите съседни класове на G относно H. В [Sabinin] Сабинин казва, че подмножество $Q \subset G$ е трансверзала на G/H, ако Q пресича всеки съседен клас gH в единствен елемент $q(gH)$ и множеството $QH := \{qh \,|\, q \in Q,\, h \in H\}$ покрива G. Той доказва, че груповата операция на G индуцира естествена структура на лява квази-група с десен неятрален елемент $q(H)$ върху произволна трансверзала Q на G/H. Сечение $\sigma : G/H \to G$ на естествената проекция $\pi : G \to G/H$, $\pi(a) = aH$ за $\forall a \in G$ е изображение, изпълняващо условието $\pi\sigma = \mathrm{Id}_{G/H}$. Първият параграф на втора глава установява, че сеченията $\sigma : G/H \to G$ на $\pi : G \to G/H$ са във взаимно еднозначно съответствие с трансверзалите $\sigma(G/H)$ на G/H. В резултат се получава, че произволно сечение $\sigma : G/H \to G$ на $\pi : G \to G/H$ задава бинарна операция

$$\oplus_\sigma : G/H \times G/H \longrightarrow G/H,$$

$$aH \oplus_\sigma bH := \pi(\sigma(aH)\sigma(bH)) = \sigma(aH)bH \quad \text{за} \quad \forall aH, bH \in G/H,$$

относно която G/H е лява квази-група с десен неутрален елемент H. В третия параграф на втора глава даваме опростено доказателство на реализацията на произволна лява квази-група с десен неутрален елемент $(\mathcal{L}, \oplus, e_r)$ във вида $(G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}, \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}}, H_{\mathcal{L}})$ за подгрупата $G_{\mathcal{L}}$ на симетричната група $\mathrm{Sym}(\mathcal{L})$ на $\mathcal{L}$, породена от левите $\oplus$-транслации, стабилизатора $H_{\mathcal{L}} = \mathrm{Stab}_{G_{\mathcal{L}}}(e_r)$ на e_r в нея и подходящо сечение $\sigma_{\mathcal{L}} : G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}} \to G_{\mathcal{L}}$ на $\pi : G_{\mathcal{L}} \to G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}$. Този факт е установен в монографията на Сабинин [Sabinin], използвайки трансверзали на леви хомогенни пространства вместо техни сечения. В случая $(\mathcal{L}, \oplus, e_r) = (G/H, \oplus_\sigma, H)$ доказваме, че подгрупата $\widetilde{G_{\mathcal{L}}}$ на G, породена от образа $\sigma(G/H)$ на сечение $\sigma : G/H \to G$ действа транзитивно върху G/H, а групата $G_{\mathcal{L}}$ е образът на $\widetilde{G_{\mathcal{L}}}$ под действие на хомоморфизма $\Lambda : G \to \mathrm{Sym}(G/H)$, отговарящ на действието $G \times G/H \to G/H$, $(a, bH) \mapsto abH$ на G върху G/H чрез леви транслации относно груповата операция в G. В този параграф въвеждаме понятието лява квази-подгрупа $(\mathcal{L}_1, \oplus)$ на лява квази-група $(\mathcal{L}, \oplus)$ като непразно подмножество $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}$, което е затворено относно $\oplus$ и решаването на уравненията $a \oplus x = b$ за всички $a, b \in \mathcal{L}_1$. Доказваме, че реализацията $(G_{\mathcal{L}_1}/H_{\mathcal{L}_1}, \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}_1}})$ на лява квази-подгрупа $(\mathcal{L}_1, \oplus)$ на лява квази-група $(\mathcal{L}, \oplus)$ е ограничението на реализацията $(G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}, \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}})$ на $(\mathcal{L}, \oplus)$. Основният резултат на втора глава установява, че вариация на структура на Hodge $U \subset D$ е напълно геодезична тогава и само тогава, когато съществува аналитично сечение $\sigma : S = G_{\mathbb{R}}/K \to G_{\mathbb{R}}$ на $\pi_K : G_{\mathbb{R}} \to G_{\mathbb{R}}/K = S$ с $\sigma(\check{o}) = \sigma(K) = e \in G_{\mathbb{R}}$, така че $(\pi(U), \oplus_\sigma)$ е лява квази-подгрупа на $(S, \oplus_\sigma)$.

Последната, трета глава изучава Loos-симетричните подпространства и въвежда Loss-ермитовите симетрични пространства. След определяне на понятието Loos-симетрично пространство $(S, .)$ проверяваме, че геодезичните изометрии $s_x : S \to S$ върху Риманово симетрично пространство S с изолирани фиксирани точки $x \in S$ задават Loos-симетрична квази-група $(S, .)$ относно операцията $x.y := s_x(y)$. Напомняме идеята за доказателство на резултата на Loos, установяващ Римановата симетричност на многообразие S с Loos-симетрична структура $(S, .)$. Нашите разглеждания се ограничават до Риманови симетрични пространства от некомпактен тип и съответните им Loos-симетрични структури $(S, .)$ от некомпактен тип, в които за всяко $a \in S$ уравнението $a.x = x$ имат глабално (а не само локално) единствено решение $x = a$. Трета глава установява, че $U \subset D = G_{\mathbb{R}}/V$ е напълно геодезична вариация на структура на Hodge тогава и само тогава, когато проекцията $\pi(U)$ на U в Риманово симетрично пространство $S = G_{\mathbb{R}}/K$ с $K \supseteq V$ е Loos-симетрично подпространство на $(S, .)$ от некомпактен тип. В последния, трети параграф на трета глава въвеждаме Loos-ермитова структура $(S, *)$ върху ермитово симетрично пространство $S = G/K$ от некомпактен тип. По-точно, за произволни точки $x, y \in S$ определяме $x * y := j_x(y)$ като образа на y под действие на холоморфната изометрия $j_x : S \to S$ с единствена фиксирана точка x, чийто диференциал $(djx)_x = J_x$ в x съвпада с комплексната структура $J_x : T_x^{\mathbb{R}} S \to T_x^{\mathbb{R}} S$. Проверяваме, че единствените Риманови многообразия, върху които съществува Loos-ермитова симетрична структура $(S, *)$ от некомпактен тип са ермитовите симетрични пространства S от некомпактен тип. Забелязваме, че всяко Loos-ермитово симетрично пространство $(S, *)$ от некомпактен тип определя Loos-симетрично пространство $(S, *^2)$ от некомпактен тип с относно операцията $x *^2 y := x * (x * y)$. В резулатт получаваме, че вариация на структура на Hodge $U \subset D$ е напълно геодезична точно когато съществува Loos-ермитова симетрична структура $(\pi(U), *)$ върху дифеоморфния образ $\pi(U)$ на U, така че $(\pi(U), .)$ с $x.y := x * (x * y)$ е Loos-симетрично подпространство на Loos-симетричното пространство $(S, .)$ от некомпактен тип.

Глава 2

Напълно геодезични вариации на структури на Hodge

2.1 Предварителни сведения за Риманови многообразия

Да напомним, че топологично пространство X е Хаусдорфово, ако за всеки две различни точки $p, q \in X$ съществуват отворени подмножества $p \in U_p \subset X$ и $q \in U_q \subset X$ с празно сечение $U_p \cap U_q = \emptyset$.

Определение 1. *Хаусдорфово топологично пространство X е m-мерно многообразие над полето $k = \mathbb{R}$ или $k = \mathbb{C}$, ако съществува отворено покритие $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ и хомеомерфизми $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ върху отворени подмножества $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq k^m$, така че за произволни $\alpha, \beta \in A$ с $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ композициите*

$$\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

са диференцируеми изображения.

Допирателното пространство $T_p^{\mathbb{R}} M$ към многообразие M в точка $p \in M$ може да се определи като $\mathbb{R}$-линейното пространство на диференциранията на гладките локални функции върху околност на p. Произволни координати $x_1, \ldots, x_m$ върху k^m задават гладки координати $x_1 \varphi_\alpha, \ldots, x_n \varphi_\alpha$ върху $U_\alpha \ni p$. С известна неточност, ще бележим тези координати с $x_1, \ldots, x_m$. Всеки избор на локални координати в околност на точка p отговаря на избор на базис $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ на допирателното пространство $T_p^{\mathbb{R}} M$ към M в p.

Скаларно произведение в m-мерно линейно пространство $\mathbb{R}^m$ над $\mathbb{R}$ е симетрична билинейна форма

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

с $\langle v, v \rangle > 0$ за $\forall v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0^m\}$. Спрямо ортонормиран базис на $\mathbb{R}^m$, скаларното произведение на два вектора $u, v \in \mathbb{R}^m$ се задава като

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_m v_m.$$

Неотрицателния корен квадратен $\sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} v_i^2}$ на вектор $v \in \mathbb{R}^m$ се нарича норма на вектора v.

Определение 2. *Гладко n-мерно многообразие X над $\mathbb{R}$ се нарича Риманово, ако в допирателното пространство $T_x^{\mathbb{R}}X$ към X в произволна точка $x \in X$ е зададено скаларно произведение на вектори*

$$g_x(\ ,\ ) : T_x^{\mathbb{R}}X \times T_x^{\mathbb{R}}X \longrightarrow \mathbb{R},$$

което зависи гладко от x.

По определение, гладкостта на $g_x(\ ,\ )$ означава, че за произволни гладки векторни полета U и V върху X, съответствието $x \mapsto g_x(U(x), V(x))$ е гладка функция на x. Фамилията $g = \{g_x(\ ,\ )\}_{x\in X}$ от гладки скаларни произведения се нарича метрика върху X. Метриката определя норма $||u||_x := \sqrt{g_x(u,u)}$ на допирателен вектор $u \in T_x^{\mathbb{R}}X$. Дължината на гладка крива $\gamma : [0,t] \to X$ се задава като интеграла

$$L(\gamma) := \int_0^t \left\| \frac{d\gamma}{dt}(s) \right\| ds$$

на нормата на допирателните и вектори. Съответствието

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0},$$

$$d(x,y) = \inf\{L(\gamma) \,|\, \gamma(0) = x, \quad \gamma(1) = y\},$$

съпоставящо на точки $x, y \in X$ минималната дължина на гладка крива върху X от x до y е метрика върху Римановото многообразие X. По определение, метриката е симетрична функция $d(x,y) = d(y,x)$ за $\forall x, y \in X$, която изпълнява неравенството на триъгълника $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ за произволни три точки $x, y, z \in X$ и се анулира само за равни аргументи, т.е. $d(x,y) \geq 0$ за $\forall x, y \in X$ с $d(x,y) = 0$ точно когато $x = y$. Топологично пространство X с метрика $d : X \times X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ се нарича метрично пространство.
Редица от точки $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в метрично пространство (X, d) е фундаментална, ако

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0.$$

Редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ е сходяща, ако съществува точка $x \in X$, така че

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Ясно е, че всяка сходяща редица в метрично пространство (X, d) е фундаментална. Ако всяка фундаментална редица в (X, d) е сходяща метричното пространство (X, d) се нарича пълно.

Определение 3. *Риманово многообразие (X, g) е пълно, ако X е пълно относно метриката $d : X \times X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, индуцирана от g.*

Нека $\mathcal{V}(X)$ е пространството на гладките векторни полета върху многообразие X. Непосредствено се вижда, че $\mathcal{V}(X)$ е модул над пръстена $C^\infty(X)$ на гладките функции $X \to \mathbb{R}$ върху X. Афинна свързаност върху X е $\mathbb{R}$-линейно изображение

$$\nabla : \mathcal{V}(x) \times \mathcal{V}(X) \longrightarrow \mathcal{V}(X),$$

$$\nabla(U,V) \mapsto \nabla_U(V)$$

със свойствата

$$\nabla_{fU}(V) = f\nabla_U(V) \quad \text{и} \quad \nabla_U(fV) = U(f)V + f\nabla_U(V) \quad \text{за} \quad \forall U,V \in \mathcal{V}(X),\ \forall f \in C^\infty(X).$$

Нека $x_1, \dots, x_m$ са гладки локални координати върху гладко многообразие X над $\mathbb{R}$. Фиксираме базиса $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ от гладки векторни полета и въвеждаме символите на Christoffel $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(X)$ чрез равенствата

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Скобката на Lie $[U,V]$ на гладки векторни полета U и V върху многообразие X е гладкото векторно поле върху X, което действа върху гладка функция $f \in C^\infty(X)$ по пръвилото

$$[U,V](f) = U(V(f)) - V(U(f)).$$

Афинна свързаност ∇ е симетрична, ако $\nabla_U(V) - \nabla_V(U) = [U,V]$ за произволни гладки векторни полета U и V. Афинна свързаност ∇ е съгласувана с Риманова метрика g върху многообразие X, ако за произволни глудки векторни полета U, V, W е в сила равенството

$$Wg(U,V) = g(\nabla_W(U), V) + g(U, \nabla_W(V)).$$

Може да се докаже, че върху произволно Риманово многообразие (X,g) съществува единствена симетрична афинна свързаност ∇, съгласувана с g. Тази свързаност носи името на Levi-Civita. Нека $(g^{kl})_{k,l=1}^m$ е обратната матрица на $\left(g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right)_{i,j=1}^m$, т.е.

$$\sum_{j=1}^m g^{ij} g_{jk} = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{за } 1 \leq i = j \leq m, \\ 0 & \text{за } 1 \leq i \neq j \leq m. \end{cases}$$

Символите на Christoffel на свързаността на Levi-Civita са

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m g^{kl} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right]$$

за $\forall 1 \leq i,j,l \leq m$. Ако не е казано противното, геодезичните и експоненциалните изображения върху Риманово многообразие (X,g) се подразбират, че са относно свързаността на Levi-Civita.

Гладка крива $\gamma : \mathbb{R} \to X$ е геодезична, ако допирателните вектори $\frac{d\gamma}{dt} \in T^{\mathbb{R}}_{\gamma(t)}X$ към γ се пренасят успаредно по протежение на γ. Последното означава, че $\gamma(t)$ изпълнява диференциалното уравнение

$$\nabla_{\frac{d\gamma(t)}{dt}}\left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\right) = 0.$$

Ако $\gamma_i(t) := x_i\gamma(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са координатните функции върху γ, то

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{d\gamma_i(t)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

и диференциалното уравнение на геодезичната γ приема вида

$$0 = \nabla_{\frac{d\gamma(t)}{dt}}\left(\frac{d\gamma(t)}{dt}\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d\gamma_i(t)}{dt}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{d\gamma_j(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{d\gamma_i(t)}{dt}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{d\gamma_j(t)}{dt}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{d\gamma_i(t)}{dt}\frac{d\gamma_j(t)}{dt}\sum_{k=1}^{m}\Gamma_{ij}^{k}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{d^2\gamma_k(t)}{dt^2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) + \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\Gamma_{ij}^{k}\frac{d\gamma_i(t)}{dt}\frac{d\gamma_j(t)}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Горното диференциално уравнение е равносилно на анулирането на коефициентите на гладките векторни полета $\frac{\partial}{\partial x_k}$ за $\forall 1 \leq k \leq m$ и се свежда до системата от обикновени диференциални уравнения

$$\frac{d^2\gamma_k(t)}{dt^2} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\Gamma_{ij}^{k}\frac{d\gamma_i(t)}{dt}\frac{d\gamma_j(t)}{dt} = 0 \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq k \leq m.$$

Разглежданите диференциални уравнения са от втори ред, така че техните решения се определят еднозначно от началната точка $\gamma(0) = 0^m \in \mathbb{R}^m$ и началния допирателен вектор $\frac{d\gamma(t)}{dt}\Big|_{t=0} = v \in \mathbb{R}^m$.

Определение 4. *За произволна точка $x \in X$ и произволен допирателен вектор $v \in T^{\mathbb{R}}_x X$ към X в x с достатъчно малка дължина, означаваме с $\gamma_x^v : \mathbb{R} \to X$ геодезичната в X с начални условия*

$$\gamma_x^v(0) = x, \quad \frac{d\gamma_x^v(t)}{dt}\Big|_{t=0} = v.$$

Експоненциалното изображение $\exp_x : U'_{0^m} \to U_x$ от околност $U'_{0^m} \subset T^{\mathbb{R}}_x X$ на нулевия допирателен вектор в околност $U_x \subset X$ на x се определя като стойността

$$\exp_x(v) := \gamma_x^v(1)$$

на геодезичната $\gamma_x^v : \mathbb{R} \to X$ в $t = 1$. Върху произволно многообразие X с афинна свързаност, геодезичните изпълняват равенството

$$\gamma_o^v(st) = \gamma_o^{sv}(t)$$

за $\forall o \in X$, $\forall v \in T_o^{\mathbb{R}}M$ и за всички $s, t \in \mathbb{R}$, за които $\gamma_o^{sv}(t)$ е определено. Причина за това е, че кривата $t \mapsto \gamma_o^v(st)$ изпълнява диференциалното уравнение на геодезична върху X и има начални условия $\gamma_o^v(st)|_{t=0} = o$, $\left.\frac{\gamma_o^v(st)}{st}\right|_{t=0} = sv$.
За достатъчно близки точки $x, y \in X$ върху многообразие X с афинна свързаност ∇ съществува единствена геодезична $\gamma : [0,1] \to X$ с $\gamma_{x,y}(0) = x$ и $\gamma_{x,y}(1) = y$.
Следващата теорема на Hopf-Rinow характеризира пълните Риманови многообразия.

Теорема 5. (Hopf-Rinow) *Следните условия са еквивалентни за Риманово многообразие (X, g):*
(i) (X, g) е пълно, т.е. X е пълно метрично пространство относно индуцираното от g разстояние $d : X \times X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$;
(ii) съществува точка $x \in X$, в която експоненциалното изображение

$$\exp_x : T_x^{\mathbb{R}} X \longrightarrow X$$

е определено върху цялото допирателно пространство $T_x^{\mathbb{R}}X$ към X в x;
(iii) във всяка точка $x \in X$ експоненциалното изображение $exp_x : T_x^{\mathbb{R}}X \to X$ е определено върху цялото допирателно пространство $T_x^{\mathbb{R}}X$ към X в x.
Ако (X, g) е пълно Риманово многообразие, то произволни две точки $x, y \in X$ могат да се свържат чрез геодезична отсечка с дължина $d(x, y)$.

Кривината на афинна свързаност ∇ се определя като

$$R(U, V) := \nabla_U \nabla_V - \nabla_V \nabla_U - \nabla_{[U,V]}$$

за произволни гладки векторни полета U и V. Ако $U(x), V(x)$ е ортонормиранана система вектори от $T_x^{\mathbb{R}}X$ относно $g_x : T_x^{\mathbb{R}}X \times T_x^{\mathbb{R}}X \to \mathbb{R}$, то реалното число

$$K_x(U(x), V(x)) := g_x((R(U, V)V)(x), U(x))$$

се нарича секционна кривина на 2-мерното подпространство на $T_x^{\mathbb{R}}X$, породено от векторите $U(x)$ и $V(x)$.

Определение 6. *Гладко изображение $\pi : T \to X$ на многообразия се нарича неразклонено покритие, ако всяка точка $x \in X$ има околност $U \subseteq X$, чийто праобраз $\pi^{-1}(U) = \cup_\alpha U_\alpha$ е непресичащо се обединение на отворени подмножества $U_\alpha \subset T$, върху които $\pi : U_\alpha \to U$ е дифеоморфизъм.*
С известна неточност казваме също, че дефиниционната област T на π е неразклонено покритие на X.

Всяко неразклонено покритие $\pi : T \to X$ е сюрективно изображение на многообразия с една и съща размерност $\dim_{\mathbb{R}} T = \dim_{\mathbb{R}} X$.
Нека $\gamma_x(t)$ е крива върху X през x. За всяка точка $a \in \pi^{-1}(x)$ "над"x съществува единствена крива $\gamma_a^*(t)$ върху покритието T през a, такава че $\pi(\gamma_a^*(t)) = \gamma_x(t)$. Кривата $\gamma_a^*(t)$ се нарича повдигане на $\gamma_x(t)$ през a.
Многообразието T е едносвързано, ако всяка затворена крива върху T може да се свие в точка чрез непрекъсната деформация. Покритието $U_X : \widetilde{X} \to X$ е универсално,

ако $\widetilde{X}$ е едносвързано многообразие. Ако $\psi : T_1 \to \widetilde{X}$ е неразклонено покритие на едносвързано многообразие $\widetilde{X}$, то T_1 е едносвързано и ψ е дифеоморфизъм. Затова всяко многообразие X има единствено с точност до дифеоморфизъм универсално покритие $\widetilde{X}$. Универсалното покритие $U_X : \widetilde{X} \to X$ се пропусква през произволно неразклонено покритие $\pi : T \to X$. По-точно, съществува неразклонено покритие $\varphi : \widetilde{X} \to T$, затварящо комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "U_X"'] & T \arrow[d, "\pi"] \\ & X \end{tikzcd} .$$

Всяко гладко изображение $f : M \to N$ на многоообразия над $\mathbb{R}$ индуцира $\mathbb{R}$-линейно изображение $(df)_p : T_p^{\mathbb{R}} M \to T_{f(p)}^{\mathbb{R}} N$ на съответните допирателни пространства, което се нарича диференциал на f в точката $p \in M$. Гладко изображение $f : (M, g) \to (N, h)$ на Риманови многообразшя е локална изометрия, ако $g = f^* h$. Последното равенство означава, че за всяка точка $p \in M$ и за произволни векторни полета U и V върху M е изпълнено

$$g_p(U(p), V(p)) = h_{f(p)}((df)_p U(p), (df)_p V(p)).$$

Ако $f : (M, g) \to (N, h)$ е локална изометрия, то M и N имат една и съща свързаност на Levi-Civita и една и съща Риманова кривина.

Теорема 7. (Ambrose) *Ако $f : (M, g) \to (N, h)$ е локална изометрия и (M, g) е пълно Риманово многообразие, то f е неразклонено покритие и (N, h) е също пълно Риманово многообразие.*

Идея за доказателство: За всяка геодезична $\gamma : [a, b] \to N$ и всяка точка $p \in f^{-1}(\gamma(a))$ от слоя на f над $\gamma(a)$ съществува геодезична $\widetilde{\gamma} : [a, b] \to M$ с начало $\widetilde{\gamma}(a) = p$, така че $f\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ за $\forall t \in [a, b]$. По-точно, изометрията $(df)_p : T_p^{\mathbb{R}} M \to T_{\gamma(a)}^{\mathbb{R}} N$ е обратимо изображение и издърпва допирателния вектор $\frac{\gamma(t)}{dt}(a) = v \in T_{\gamma(a)}^{\mathbb{R}} N$ до еднозначно определен вектор $u = (df)_p^{-1}(v) \in T_p^{\mathbb{R}} M$ с $(df)_p(u) = v$. Тогава геодезичната $\widetilde{\gamma} : [a, b] \to M$ с начални условия $\widetilde{\gamma}(a) = p$ и $\left.\frac{\widetilde{\gamma}(t)}{dt}\right|_{t=a} = u$ изпълнява обявените условия.
Локалната изометрия $f : M \to N$ е локален дифеоморфизъм и отворено изображение. Затова $f(M)$ е отворено подмножество на N. Ако допуснем, че $f(M) \subsetneq N$, то съществува гранична точка $q \in \overline{f(M)} \setminus f(M)$. Избираме достатъчно малко $\delta > 0$, така че всяка точка от кълбото $B_\delta(q) := \{x \in N \mid d(x, q) < \delta\}$ се свързва с q чрез единствена геодезична с минимална дължина. Всяка точка $q \in B_\delta(q) \cap f(M)$ има праобраз $p \in M$, $f(p) = y$. Нека $\gamma : [0, 1] \to N$ е геодезичната с минимална дължина от $\gamma(0) = y$ до $\gamma(1) = q$. Съществува геодезична $\widetilde{\gamma} : [0, 1] \to M$ с $\widetilde{\gamma}(0) = p$ и $f\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ за $\forall t \in [0, 1]$. Тогава $f\widetilde{\gamma}(1) = \gamma(1) = q \in f(M)$ противоречи на избора на q и доказва сюрективността на $f : M \to N$.
Римановото многообразие (N, h) е пълно, защото за всяка геодезична $\gamma : [a, b] \to N$ и всяка точка $p \in f^{-1}(\gamma(a))$ съществува геодезична $\widetilde{\gamma} : [a, b] \to M$ с $\widetilde{\gamma}(a) = p$ и

$f\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ за $\forall t \in [a,b]$. Съгласно пълнотата на (M,g), геодезичната $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to M$ е определена за $\forall t \in \mathbb{R}$. Следователно $\gamma(t) := f\widetilde{\gamma}(t) : \mathbb{R} \to N$ е определена за $\forall t \in \mathbb{R}$ и (N,h) е пълно Риманово многообразие.
Нека $q \in N$ и $f^{-1}(q) = \{p_\alpha\}_{\alpha \in I}$ за някакво индексно множество I. Избираме достатъчно малко $\delta > 0$, така че всяка точка от отвореното кълбо

$$V := B_\delta(q) := \{x \in N \,|\, d(x,q) < \delta\}$$

да може да се свърже с q чрез единствена геодезична с минимална дължина. За всяко $\alpha \in I$ нека $U_\alpha := B_\delta(p_\alpha) := \{y \in M \,|\, d(y,p_\alpha) < \delta\}$ е отвореното кълбо с център p_α и радиус δ в M Доказва се, че $f : U_\alpha \to V$ са дифеоморфизми за $\forall \alpha \in I$, $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ за $\forall \alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in I$ и $f^{-1}(V) = \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$. С това се установява, че $f : (M,g) \to (N,h)$ е неразклонено покритие и е в сила теоремата на Ambrose.
За да формулираме следващата Лема 8 трябва да въведем няколко определения. Нека $\gamma : [a,b] \to M$ е геодезична, а X е гладко векторно поле върху $\gamma([a,b])$. Ако допирателният вектор $\frac{d\gamma}{dt}$ към γ и векторното поле X изпълняват доференциалното уравнение

$$\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} X + R\left(\frac{d\gamma}{dt}, X\right)\frac{d\gamma}{dt} = 0,$$

казваме, че X е Якобиево векторно поле по протежение на γ. За произволна геодезична $\gamma : [a,b] \to M$ и произволни допирателни вектори $u, v \in T^{\mathbb{R}}_{\gamma(a)}M$ може да се докаже, че съществува единствено Якобиево векторно поле V по протежение на γ с $V(\gamma(a)) = u$ и $\left(\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} V\right)(\gamma(a)) = v$. Точките $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ от Риманово многообразие M са спрегнати относно геодезична $\gamma : [a,b] \to M$, ако същесутва нетъждествено нулево Якобиево векторно поле X по протежение на γ, което се анулира в $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$, т.е. $X(\gamma(a)) = X(\gamma(b)) = 0$. Якобиево векторно поле X по протежение на геодезична γ е нормално, ако X е перпендикулярно на допирателното векторно поле $\frac{d\gamma(t)}{dt}$ към γ. Може да се докаже, че за произволно Якобиево векторно поле X по протежение на геодезична γ съществуват константи $a, b \in \mathbb{R}$, така че $X^\perp := X - at\frac{d\gamma(t)}{dt} - b\frac{d\gamma(t)}{dt}$ е нормално Якобиево векторно поле по протежение на γ.

Лема 8. *Нека (M,g) е пълно Риманово многообразие с неположижителни секционни квивини и $p \in M$ е точка от M. Тогава нито една точка $q \in M \setminus \{p\}$ не е спрегната с p по протежение на геодезична $\gamma : [a,b] \to M$ с $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$.*

Доказателство. Нека $\gamma : \mathbb{R} \to M$ е геодезична с начало $\gamma(0) = p$ и X е нормално Якобиево векторно поле по протежение на γ с $X(p) = 0$. Разглеждаме функцията $f(t) := g_{\gamma(t)}(X,X)$ с производни $f'(t) = 2g_{\gamma(t)}\left(\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}(X), X\right)$ и

$$f''(t) = 2g_{\gamma(t)}\left(\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}(X), X\right) + 2\left\|\left|\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}(X)\right\|\right| = -2R\left(\frac{d\gamma}{dt}, X\right) + 2\left\|\left|\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}(X)\right\|\right|^2 \geq 0.$$

Функцията $f(t)$ е ненамаляваща, съгласно $f'(0) = 0$ и $f'(t) \geq 0$ за $\forall t > 0$. Поради дискретността на множеството на нулите на Якобиево векторно поле, $f(t) > 0$ за достатъчно малки $t > 0$. Следователно $f(t) > 0$ за $\forall t > 0$ и не съществува спрегната с p точка относно геодезичната γ.

$\square$

Теорема 9. *Нека (M, g) е пълно Риманово многообразие с неположителни секционни кривини. Тогава за всяка точка $p \in M$ експоненциалното изображение*

$$\exp_p : T_p^{\mathbb{R}} M \longrightarrow M$$

е неразклонено покритие.
В частност, ако M е едносвързано, то $\exp_p : T_p^{\mathbb{R}} M \to M$ е дифеоморфизъм.

Идея за доказателство: Съгласно Лема 8, $\exp_p : T_p^{\mathbb{R}} M \to M$ е локален дифеоморфизъм. Нека $\widetilde{g} := \exp_p^*(g)$ е издърпването на метриката g до метрика върху $T_p^{\mathbb{R}} M$, така че $\exp_p : (T_p^{\mathbb{R}} M, \widetilde{g}) \to (M, g)$ е локална изометрия. Геодезичните върху $(T_p^{\mathbb{R}} M, \widetilde{g})$ през началото $0 \in T_p^{\mathbb{R}} M$ са реалните прави през 0 и са определени за $\forall t \in \mathbb{R}$. Затова експоненциалното изображение $\exp_0 : T_0^{\mathbb{R}}(T_p^{\mathbb{R}} M) \to T_p^{\mathbb{R}} M$ е глобално определено и $(T_p^{\mathbb{R}} M, \widetilde{g})$ е пълно Риманово многообразие по Теорема 5 на Hopf-Rinow. Прилагаме Теорема 7 на Ambrose и получаваме, че $\exp_p : T_p^{\mathbb{R}} M \to M$ е нераклонено покритие.

Определение 10. *Риманово многообразие S е Риманово симетрично пространство, ако за всяка точка $p \in S$ съществува глобална геодезична изометрия $s_p : S \to S$ с изолирана фиксирана точка p, чийто диференциал $(ds_p)_p : T_p^{\mathbb{R}} S \to T_p^{\mathbb{R}} S$ в p действа като умножение с $-1 \in \mathbb{R}$.*

Теорема 11. *Ако S е Риманово симетрично пространство, то свързаната компонента G на тъждественото изображение в групата на изометриите $I(S)$ на S има естествена структура на група на Lie, действаща транзитивно върху S и $S = G/K$ е хомогенно пространство.*

Преди всичко, S е пълно Риманово многообразие. По-точно, за произволна локална геодезична $\gamma : [a, b] \to S$, геодезичната симетрия $s_{\gamma(a)} : S \to S$ задава продължение $s_{\gamma(a)}\gamma$ на γ, защото $s_{\gamma(a)}$ е изометрия. По този начин, всяка локална геодезична γ върху S се продължава до геодезична $\gamma : \mathbb{R} \to S$ и S е пълно Риманово многообразие. Сега по Теорема 5 на Hopf-Rinow, всеки две точки $p, q \in S$ могат да се свържат с геодезична $\gamma_{p,q} : \mathbb{R} \to S$, чиято отсечка от $\gamma_{p,q}(0) = p$ до $\gamma_{p,q}(1) = q$ е с минимална дължина $d(p, q)$. Ако $m := \gamma_{p,q}\left(\frac{1}{2}\right)$ е средата на геодезичната отсечка с краища p и q, то $s_m(p) = q$ и всяка точка $q \in S$ е в орбитата на p под действие на групата на изометриите $I(S)$ на S. Оказва се, че свързаната компонента G на $I(S)$ също действа транзитивно върху S.
Риманово симетрично пространство $S = G/K$ е от некомпактен тип, ако групата G е некомпактна.
Римановите симетрични пространства $S = G/K$ от некомпактен тип имат неположителни секционни кривини и се свиват в точка чрез непрекъсната трансформация. В частност, те са едносвързани и е в сила следното следствие от Теорема 9 на Cartan-Hadamard.

Следствие 12. *В произволна точка $o = K \in S = G/K$ на Риманово симетрично пространство S от некомпактен тип, експоненциалното изображение*

$$\exp_o : T_o^{\mathbb{R}} S \longrightarrow S$$

е глабален дифеоморфизъм.

2.2 Предварителни сведения за напълно геодезични подпространства на хомогенни пространства

За произволна точка p на Риманово многообразие (M, g) и за произволен допирателен вектор $v \in T_p^{\mathbb{R}} M$ да напомним, че $\gamma_p^v : \mathbb{R} \to M$ е M-геодезичната с начални условия

$$\gamma_p^v(0) = p, \quad \frac{d\gamma_p^v(t)}{dt}\Big|_{t=0} = v.$$

Нека N е подмногообразие на M, $p \in N$ е точка от N и $v \in T_p^{\mathbb{R}} N$ е допирателен вектор към N в p. Ограничението на метриката g на M върху N превръща N в Риманово многообразие. Геодезичните $\widetilde{\gamma_p^v} : \mathbb{R} \to N$ с минимална дължина относно свързаността на Levi-Civita на N ще наричаме накратко N-геодезични.

Определение 13. *Нека (M, g) е Риманово многообразие, $N \subset M$ е подмногообразие и $p \in N$. Ако за всеки допирателен вектор $v \in T_p^{\mathbb{R}} N$ към N в p, M-геодезичната $\gamma_p^v : \mathbb{R} \to M$, допираща се до*

$$\frac{d\gamma_p^v(t)}{dt}\Big|_{t=0} = v \quad \textit{в} \quad \gamma_p^v(0) = p$$

съвпада с N-геодезичната $\widetilde{\gamma_p^v} : \mathbb{R} \to N$ с начални условия

$$\frac{d\widetilde{\gamma_p^v}(t)}{dt}\Big|_{t=0} = v, \quad \gamma_p^v(0) = p,$$

подмногообразието N е геодезично в p.
Подмногообразие N на Риманово многообразие (M, g) е напълно геодезично, ако N е геодезично във всяка своя точка $p \in N$.

Непосредствено се вижда, че ако M-геодезична γ_p^v взема стойности $\gamma_p^v : \mathbb{R} \to N$ в N, то тя е N-геодезична.

Лема 14. (Лема I.14.3, [Helgason]) *Нека (M, g) е пълно Риманово многообразие, а $N \subset M$ е геодезично подмногообразие на M в точка $p \in N$. Тогава (N, g) е пълно Риманово многообразие.*

Идея за доказателство: Нека $\exp_p^M$ и $\exp_p^N$ са екпоненциалните изображения на M и N в точката p. Съгласно пълнотата на M, $\exp_p^M : T_p^{\mathbb{R}} M \to M$ е определено върху цялото допирателно пространство $T_p^{\mathbb{R}} M$ към M в p. Ограничението $\exp_p^M|_{T_p^{\mathbb{R}} N} = \exp_p^N$

на $\exp_p^M$ върху реалното допирателно пространство към N в p съвпада с екпоненциалното изображение на N в p. По Теорема 5 на Hopf-Rinow, N е пълно Риманово многообразие.
В останалата част на параграфа се концентрираме върху напълно геодезичните подмногообразия на хомогенни пространства G/H на реални линейни алгебрични групи G. Ако H е компактна подгрупа на G, то съществува Ad_H-инвариантна положително определена билинейна форма

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathbb{R}$$

върху алгебрата на Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}G$. Ортогоналното допълнение $\mathfrak{M}$ на $\mathrm{Lie}H$ относно тази билинейна форма е Ad_H-инвариантно допълнение на $\mathrm{Lie}H$ до $\mathfrak{g} = \mathfrak{M}\oplus\mathrm{Lie}H$. Произволен вектор $X\in\mathfrak{g}$ има еднозначно определено разлагане $X = X_1 + X_0$ в сума на $X_1\in\mathfrak{M}$ и $X_0\in\mathrm{Lie}H$. Сега $\mathbb{R}$-линейният изоморфизъм

$$\varphi : T_o^{\mathbb{R}}(G/H) = \mathrm{Lie}G/\mathrm{Lie}H \longrightarrow \mathfrak{M},$$

$$\varphi(X+\mathrm{Lie}H) = \varphi(X_1+X_0+\mathrm{Lie}H) = \varphi(X_1+\mathrm{Lie}H) = X_1$$

на допирателното пространство към G/H в началото $o = H\in G/H$ пренася Ad_H-инвариантната, положително определена билинейна форма $\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$ върху $T_o^{\mathbb{R}}(G/H)$. Използвайки действието $G\times G/H\to G/H$, $(a,bH)\mapsto abH$ на G върху G/H чрез леви транслации, продължаваме $\langle\ ,\ \rangle : T_o^{\mathbb{R}}(G/H)\times T_o^{\mathbb{R}}(G/H)\to\mathbb{R}$ до G-инвариантна Риманова метрика върху G/H и разглеждаме свързаността на Levi-Civita на G/H относно тази метрика. Отсега нататък ще казваме, че $\mathfrak{M}$ е каноничното повдигане на $T_o^{\mathbb{R}}(G/H)$ до Ad_H-инвариантно подпространство на $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}G$ и ще изучаваме напълно геодезичните подмногообразия $W\subset G/H$ относно свързаността на Levi-Civita на гореспоменатата ляво-инвариантна метрика върху G/H.
Произволна алгебра на Lie $\mathfrak{g}$ над полето $k=\mathbb{R}$ или $k=\mathbb{C}$ има присъединено представяне $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, което за $X,Y\in\mathfrak{g}$ се определя чрез скобката на Lie $\mathrm{ad}_X(Y) = [X,Y]$. Ако $\dim_k\mathfrak{g} = N$, то за $\forall X\in\mathfrak{g}$ можем да представим k-линейния оператор $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ чрез матрица $ad_X\in M_{N\times N}(k)$. Линейните оператори в $\mathfrak{g}$ се умножават чрез последователно прилагане. Формата на Killing на $\mathfrak{g}$ се определя като следата

$$B : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow k,$$

$$B(X,Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y)$$

на произведението $\mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y$ на $\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y\in M_{N\times N}(\mathbb{C})$.
Идеал I в алгебра на Lie $\mathfrak{g}$ над поле k е k-линейно подпространство, изпълняващо условието $[\mathfrak{g},I]\subseteq I$, т.е. за произволни $X\in\mathfrak{g}$ и $Y\in I$ е в сила $[X,Y]\in I$. Алгебра на Lie $\mathfrak{g}$ е проста, ако единствените и идеали са 0 и $\mathfrak{g}$. Директна сума на прости алгебри на Lie се нарича полупроста алгебра на Lie. Доказано е, че алгебра на Lie $\mathfrak{g}$ е полупроста тогава и само тогава, когато нейната форма на Killing $B:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to k$ е неизродена. Това означава, че за $\forall X\in\mathfrak{g}\setminus\{0\}$ съществува $Y\in\mathfrak{g}$ с $B(X,Y)\neq 0$.
Ако G е група на Lie, то нейното допирателно пространство $T_e^{\mathbb{R}}G$ в неутралния елемент $e\in G_{\mathbb{R}}$ е изоморфно (като $\mathbb{R}$-линейно пространство) на алгебрата на Lie на ляво-инвариантните гладки векторни полета върху G. Това задава структура на алгебра

на Lie върху $T^{\mathbb{R}}_e G$. Отсега нататък ще означаваме $T^{\mathbb{R}}_e G$ с Lie$G$ и ще наричаме Lie$G$ алгебрата на Lie на G. Ако $S = G/K$ е Риманово симетрично пространство, то можем да изберем G така, че алгебрата на Lie $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}G$ на G да е полупроста. Означаваме с $\mathfrak{k} := \mathrm{Lie}K$ алгебрата на Lie на K и разглеждаме ортогоналното допълнение $\mathfrak{p} := \mathfrak{k}^{\perp}$ на $\mathfrak{k}$ до $\mathfrak{g}$ относно неизродената форма на Killing B на $\mathfrak{g}$. Допирателното пространство към S в началото $\check{o} = K \in G/K = S$ има естествен $\mathbb{R}$-линеен изоморфизъм

$$T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} S = T^{\mathbb{R}}_e G / T^{\mathbb{R}}_e K = \mathrm{Lie}G/\mathrm{Lie}K \longrightarrow \mathfrak{p}$$

с $\mathbb{R}$-линейното подпространство $\mathfrak{p}$ на $\mathfrak{g}$. Всеки елемент $Y \in \mathfrak{k}$ задава $\mathbb{R}$-линейно изображение $\mathrm{ad}_Y : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$, $\mathrm{ad}_Y(X) = [Y, X]$ и всеки елемент $k_o \in K$ задава $\mathbb{R}$-линеен изоморфизъм $\mathrm{Ad}_{k_o} : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$, $\mathrm{Ad}_{k_o}(X) = k_o X k_o^{-1}$ за $\forall X \in \mathfrak{p}$. С други думи, подпространството $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ е инвариантно относно присъединеното представяне на $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}K$ и присъединеното представяне на K. Отсега нататък, $\mathfrak{p}$ се нарича стандартно повдигане на $T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} S$ до $\mathfrak{g}$.

Определение 15. *Линейно подпространство $\mathfrak{s}$ на алгебра на Lie $\mathfrak{g}$ е тройна система на Lie, ако за произволни $X, Y, Z \in \mathfrak{s}$ е в сила $[X, [Y, Z]] \in \mathfrak{s}$.*

В монографията [Helgason] на Helgason се доказва, че подмногообразие W на Риманово симетрично пространство $S = G/K$ през началото $\check{o} = K \in W$ е напълно геодезично тогава и само тогава, когато допирателното пространство $T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ към W в началото е тройна система на Lie. Този факт е необходим за изложението в четвъртия параграф на настоящата глава и затова даваме доказателството, разделяйки необходимостта и достатъчността в две отделни теореми. Причина за това е, че доказателството на достатъчността от [Helgason] установява по-общо твърдение, което ще използваме.

Теорема 16. (Theorem IV.7.2, [Helgason]) *Ако $W \subset S$ е напълно геодезично подмногообразие на Риманово симетрично пространство $S = G/K$, то допирателното пространство $T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W$ към W в началото $\check{o} \in W$ е тройна система на Lie.*

Доказателство. Подпространството $W \subset S$ е геодезично в началото $\check{o} \in W$, така че експоненциалното изображение $\exp_{\check{o}} : \mathfrak{p} = T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} S \to S$ на S в $\check{o} = K$ се ограничава до експоненциалното изображение $\exp^W_{\check{o}} = \exp_{\check{o}} : T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W \to W$ на W в $\check{o}$. За произволен допирателен вектор $Y \in T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W$ и произволно реално число $t \in \mathbb{R}$, да разгледаме диференциала

$$(d \exp_{\check{o}})_{tY} : T^{\mathbb{R}}_{tY}(T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W) = T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W \longrightarrow T^{\mathbb{R}}_{\exp_{\check{o}}(tY)} W.$$

Всеки вектор $X \in T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W$ се изобразява в допирателен вектор $(d \exp_{\check{o}})_{tY}(X) \in T^{\mathbb{R}}_{\exp_{\check{o}}(tY)} W$ към W в $\exp_{\check{o}}(tY) \in W$.

Да напомним, че действията на групата G върху множество Σ отговарят на хомоморфизмите на G в симетричната група $\mathrm{Sym}(\Sigma)$ на Σ, която се състои от взаимно еднозначните изображения $\Sigma \to \Sigma$. В частност, G действа върху $S = G/K$ чрез леви транслации $gK \mapsto agK$ за $\forall a \in G$. Нека

$$\Lambda : G \longrightarrow \mathrm{Sym}(G/K),$$

$$\Lambda(a)(gK) = agK \quad \text{за} \quad \forall a \in G, \ \ \forall gK \in G/K$$

е съответният хомоморфизъм и $\exp : \mathfrak{p} \to G$ е експоненциалното изображение на G. Тогава

$$\exp_{\check{o}} = \pi_K \exp : \mathfrak{p} \longrightarrow S \quad \text{и}$$

$$\Lambda(\exp(tY))K = \exp(tY)K = \pi_K \exp(tY) = \exp_{\check{o}}(tY),$$

така че диференциалът на $\Lambda(\exp(tY))$ в началото е $\mathbb{R}$-линейно изображение

$$(d\Lambda(\exp(tY)))_{\check{o}} : T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} S = \mathfrak{p} \longrightarrow T^{\mathbb{R}}_{\exp_{\check{o}}(tY)} S.$$

За произволни $X, Y \in T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} S$, да напомним, че $\mathrm{ad}_Y(X) := [Y, X]$. Съгласно Теорема IV.4.1 от [Helgason], диференциалът на $\exp_{\check{o}}$ в $tY \in T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W$ е равен на

$$(d \exp_{\check{o}})_{tY} = (d\Lambda(\exp(tY)))_{\check{o}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}^{2n}_{tY}}{(2n+1)!}$$

и

$$(d \exp_{\check{o}})_{tY}(X) = (d\Lambda(\exp(tY)))_{\check{o}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}^{2n}_{tY}(X)}{(2n+1)!} \in T^{\mathbb{R}}_{\exp_{\check{o}}(tY)} W \quad \text{за} \quad \forall X \in T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W.$$

Паралелно пренесеният вектор $(d\Lambda(\exp(tY)))_{\check{o}}$ относно свързаността на Levi-Civita на S е паралелно пренесен относно свързаността на Levi-Civita на напълно геодезичното подпространство W на S, така че

$$\Phi(X, Y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{ad}^{2n}_{tY}(X)}{(2n+1)!} \in T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W \quad \text{за} \quad \forall X, Y \in T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W, \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Сега от

$$\Phi(X, tY) = X + t^2 \frac{\mathrm{ad}^2_Y(X)}{3!} + \sum_{n=2}^{\infty} t^{2n} \frac{\mathrm{ad}^{2n}_Y(X)}{(2n+1)!} \in T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W \quad \text{за} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

следва, че

$$3 \frac{d^2 \Phi(X, tY)}{dt^2}\Big|_{t=0} = \mathrm{ad}^2_Y(X) \in T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W.$$

Да забележим, че

$$\mathrm{ad}^2_{(Y+Z)} = \mathrm{ad}^2_Y + \mathrm{ad}^2_Z + \mathrm{ad}_Y \mathrm{ad}_Z + \mathrm{ad}_Z \mathrm{ad}_Y.$$

По този начин, за произволни $X, Y, Z \in T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W$ имаме

$$\varphi(X, Y, Z) := \mathrm{ad}_Y \mathrm{ad}_Z(X) + \mathrm{ad}_Z \mathrm{ad}_Y(Z) = \mathrm{ad}^2_{(Y+Z)} - \mathrm{ad}^2_Y(X) - \mathrm{ad}^2_Z(X) \in T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W.$$

Събирайки почленно към тъждеството на Jacobi

$$0 = \mathrm{ad}_Y \mathrm{ad}_Z(X) + \mathrm{ad}_Z \mathrm{ad}_X(Y) + \mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y(Z) = \mathrm{ad}_Y \mathrm{ad}_Z(X) - \mathrm{ad}_Z \mathrm{ad}_Y(X) + \mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y(Z),$$

стигаме до извода, че

$$\varphi(X,Y,Z) = 2\mathrm{ad}_Y\mathrm{ad}_Z(X) + \mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y(Z) = 2[Y,[Z,X]] + [X,[Y,Z]] \in T_{\check{o}}^{\mathbb{R}}W.$$

Разменяйки X с Y забелязваме, че

$$\varphi(Y,X,Z) = 2[X,[Z,Y]] + [Y,[X,Z]] = -2[X,[Y,Z]] - [Y,[Z,X]] \in T_{\check{o}}^{\mathbb{R}}W$$

за $\forall X,Y,Z \in T_{\check{o}}^{\mathbb{R}}W$. Сега

$$-\frac{1}{3}\varphi(X,Y,Z) - \frac{2}{3}\varphi(Y,X,Z) = [X,[Y,Z]] \in T_{\check{o}}^{\mathbb{R}}W \quad \text{за} \quad \forall X,Y,Z \in T_{\check{o}}^{\mathbb{R}}W$$

и $T_{\check{o}}^{\mathbb{R}}W$ е тройна система на Lie на $\mathfrak{p}$.

$\square$

Доказателството на обратното твърдение на Теорема 16 от [Helgason] установява следната, малко по-обща

Теорема 17. (Theorem IV.7.2, [Helgason]) *Нека G е реална линейна алгебрична група, H е компактна подгрупа на G, а $\mathfrak{M} \subset \mathrm{Lie}G$ е каноничното повдигане на $T_o^{\mathbb{R}}(G/H) = \mathrm{Lie}G/\mathrm{Lie}H$. Ако $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{M}$ е тройна система на Lie с $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}] \subseteq \mathrm{Lie}H$, то съществува подгрупа на Lie $G(\mathfrak{s})$ на G с алгебра на Lie $\mathrm{Lie}G(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s} \oplus [\mathfrak{s},\mathfrak{s}]$, така че еквивариантно вложеното подпространство $U(\mathfrak{s}) := G(\mathfrak{s})H/H$ на G/H е напълно геодезично подмногообразие на G/H с допирателно пространство $T_o^{\mathbb{R}}U(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s}$ в началото $o = H \in U(\mathfrak{s})$.*

Доказателство. За произволни $X,Y,Z,T \in \mathfrak{s}$, от тъждеството на Jacobi

$$[[X,Y],[Z,T]] + [Z,[T,[X,Y]]] + [T,[[X,Y],Z]] = 0$$

следва, че

$$[[X,Y],[Z,T]] = -[Z,[T,[X,Y]]] + [T,[Z,[X,Y]]] \in [\mathfrak{s},\mathfrak{s}],$$

съгласно $[T,[X,Y]], [Z,[X,Y]] \in \mathfrak{s}$ за тройната система на Lie $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{g} := \mathrm{Lie}G$. Следователно $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}] \subseteq \mathrm{Lie}H$ е подалгебра на Lie на $\mathfrak{g}$ и на $\mathrm{Lie}H$. В резултат, $\mathbb{R}$-линейното подпространство $\mathfrak{g}(\mathfrak{s}) := \mathfrak{s} + [\mathfrak{s},\mathfrak{s}]$ на $\mathfrak{g}$ е подалгебра на Lie, защото

$$[\mathfrak{s} + [\mathfrak{s},\mathfrak{s}], \mathfrak{s} + [\mathfrak{s},\mathfrak{s}]] \subseteq [\mathfrak{s},\mathfrak{s}] + [\mathfrak{s},[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]] + [[\mathfrak{s},\mathfrak{s}],[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]] \subseteq [\mathfrak{s},\mathfrak{s}] + \mathfrak{s}.$$

От $\mathfrak{s} \cap [\mathfrak{s},\mathfrak{s}] \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathrm{Lie}H = 0$ получаваме, че сумата $\mathfrak{g}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s} \oplus [\mathfrak{s},\mathfrak{s}]$ е директна. Нека $G(\mathfrak{s})$ е свързаната подгрупа на Lie на G с алгебра на Lie $\mathrm{Lie}G(\mathfrak{s}) = \mathfrak{g}(\mathfrak{s})$. Тогава $G(\mathfrak{s}) \cap H$ е подгрупа на Lie на $G(\mathfrak{s})$ и $G(\mathfrak{s})$-орбитата $U(\mathfrak{s})$ на началото $o = H \in G/H$ е еквивариантно вложено подпространство $U(\mathfrak{s}) := G(\mathfrak{s})H/H$ на G/H. Хомогенното пространство $G(\mathfrak{s})/G(\mathfrak{s}) \cap H$ има естествена структура на гладко многообразие, наследена от диференцируемата структура на групата на Lie $G(\mathfrak{s})$. Взаимно еднозначното изображение

$$\psi : U(\mathfrak{s}) = G(\mathfrak{s})H/H \longrightarrow G(\mathfrak{s})/G(\mathfrak{s}) \cap H,$$

$$\psi(gH) = g(G(\mathfrak{s}) \cap H) \quad \text{за} \quad \forall g \in G(\mathfrak{s})$$

пренася тази структура върху $U(\mathfrak{s})$ и го превръща в подмногообразие на G/H. Да забележим, че допирателното пространство към подмногообразието

$$G(\mathfrak{s})H = \{gh \,|\, g \in G(\mathfrak{s}),\, h \in H\}$$

на G в неутралния елемент $e \in G(\mathfrak{s})H$ на G е

$$T_e^{\mathbb{R}}G(\mathfrak{s}) + T_e^{\mathbb{R}}H = \mathrm{Lie}G(\mathfrak{s}) + \mathrm{Lie}H = \mathfrak{g}(\mathfrak{s}) + \mathrm{Lie}H = \mathfrak{s} + [\mathfrak{s},\mathfrak{s}] + \mathrm{Lie}H = \mathfrak{s} + \mathrm{Lie}H,$$

съгласно предположението $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}] \subseteq \mathrm{Lie}H$. Следователно допирателното пространство

$$T_o^{\mathbb{R}}U(\mathfrak{s}) \simeq T_e^{\mathbb{R}}(G(\mathfrak{s})H)/\mathrm{Lie}H = \mathfrak{s} + \mathrm{Lie}H/\mathrm{Lie}H \simeq \mathfrak{s}$$

към $U(\mathfrak{s})$ в началото $o = H \in U(\mathfrak{s})$ има канонично повдигане $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{M}$. За произволен допирателен вектор $v \in T_o^{\mathbb{R}}U(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s}$ към $U(\mathfrak{s})$ в $o \in U(\mathfrak{s})$ забелязваме, че G/H-геодезичната $\gamma_o^v : \mathbb{R} \to G/H$ с начални условия

$$\gamma_o^v(0) = o = H \quad \text{и} \quad \frac{d\gamma_o^v(t)}{dt}\Big|_{t=0} = v$$

се разлага в произведение $\gamma_o^v(t) = \pi_H \exp(tv)$ на експонентата на матрица $\exp : \mathfrak{g} \to G$ и проекцията $\pi_H : G \to G/H$, $\pi_H(a) = aH$ за $\forall a \in G$. Съгласно $v \in \mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}(\mathfrak{s})$, имаме $\exp(tv) \in \exp \mathfrak{g}(\mathfrak{s}) = G(\mathfrak{s})$, така че

$$\gamma_o^v(t) = \pi_H \exp(tv) \in \pi_H G(\mathfrak{s}) = G(\mathfrak{s})H/H = U(\mathfrak{s}) \quad \text{за} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

По този начин, образът на $\gamma_o^v : \mathbb{R} \to U(\mathfrak{s})$ се съдържа в $U(\mathfrak{s})$ и γ_o^v е $U(\mathfrak{s})$-геодезична. Следователно, подпространството $U(\mathfrak{s}) \subseteq G/H$ е геодезично в $o \in U(\mathfrak{s})$ и $U(\mathfrak{s})$ е напълно геодезично подмногообразие на G/H, поради своята $G(\mathfrak{s})$-хомогенност.

□

2.3 Предварителни сведения за вариации на структури на Hodge

Ще започнем с кратко изложение на някои факти за вариации на структури на Hodge, които са взети от обзора на Cattani [Cattani].
Нека $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ е гладко проективно алгебрично многообразие.

Определение 18. *Структура на Hodge с тегло n върху крайно породена абелева група е разлагане* $H := H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus\limits_{p+q=n} H^{p,q}$ *на нейната комплексификация в директна сума на* $\mathbb{C}$*-линейни подпространства* $H^{p,q}$ *с комплексно спрегнати* $\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$.

Определение 19. *Поляризирана структура на Ходж наричаме структура на Ходж с неизродена билинейна форма* $Q(u,v)$*, изпълняваща билинейните съотношения на Hodge-Riemann:*
(i) $Q(u,v) = 0$*, ако* $u \in H^{p,q}$*,* $v \in H^{r,s}$ *и* $p \neq s$*;*
(ii) $i^{p-q}Q(u,\overline{u}) \geqslant 0$ *с равенство само при* $u = 0$.

Ако $\dim_{\mathbb{C}} X = n$, разглеждаме структурата на Ходж върху кохомологиите на X от степен n.
Нека $[\omega] \in H^{1,1}(X, \mathbb{C}) \cap H^2(X, \mathbb{Z})$ е кохомологичният клас на Келеровата форма ω на метриката на Fubini-Study върху проективното пространство $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, съдържащо X.

Определение 20. *Определяме примитивните кохомологии на X от степен $n = \dim_{\mathbb{C}} X$ като ядрото на външното произведение с $[\omega]$,*

$$H^n_{pr}(X, \mathbb{Q}) := \ker[\wedge[\omega] : H^n(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^{n+2}(X, \mathbb{Q})].$$

Изборът на представители на Dolbeault на елементите на $H^n(X, \mathbb{C})$ задава разлагане на Hodge $H^n(X, \mathbb{C}) = \oplus_{p+q=n} H^{p,q}(X)$. Полагаме

$$H^{p,q}_{\mathrm{pr}}(X) := H^{p,q}(X) \cap H^n_{\mathrm{pr}}(X, \mathbb{C})$$

за $H^n_{\mathrm{pr}}(X, \mathbb{C}) = H^n_{\mathrm{pr}}(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, $p + q = n$. Определяме числата на Ходж

$$h^q(X) = h^{p,q}(X) := \dim H^{p,q}_{\mathrm{pr}}(X).$$

Ако $F^p(X) = \bigoplus\limits_{n-k \geq p} H^{n-k,k}(X)$, то разлаганията на Hodge на $H^n_{\mathrm{pr}}(X, \mathbb{C})$ са във взаимно еднозначно съответствие с филтрациите

$$F^n \subset F^{n-1} \subset ... \subset F^0,$$

изпълняващи условията

$$H^n(X, \mathbb{C}) = F^p(X) \oplus \overline{F^{n-p+1}(X)}, \quad H^{p,q}(X) = F^p(X) \cap \overline{F^{n-p}(X)}.$$

Означаваме $f^p(X) = \sum_{k=p}^n h^{n-k,k}(X)$. Първото билинейно съотношение на Hodge-Riemann $Q(H^{p,q}, H^{r,s}) = 0$ за $\forall (r, s) \neq (q, p)$ е еквивалентно на $Q(F^k, F^{n-k+1}) = 0$ за съответната филтрация на Hodge.
Решетката $H_{\mathbb{Z}} := H^n(X, \mathbb{Z}) \cap H^n_{\mathrm{pr}}(X, \mathbb{Q})$ има неизродена билинейна форма на пресичане

$$Q : H_{\mathbb{Z}} \times H_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z},$$

определена по формулата

$$Q([\varphi], [\psi]) := \int_X \varphi \wedge \psi$$

за произволни n-форми φ и ψ, представящи кохомологичните класове $[\varphi], [\psi] \in H_{\mathbb{Z}}$ по теоремата на Dolbeault. Тук използваме теоремата на Stokes, съгласно която интегралът на точна форма върху многообразие X без граница се анулира, за да твърдим независимостта на Q от избора на диференциални форми φ, ψ, представящи съответните кохомологични класове.
Класифициращото пространство D на структурите на Hodge $\{H^{n-j,j}\}_{j=0}^n$ с фиксирана решетка $H_{\mathbb{Z}}$, поляризация Q и числа на Hodge $h^{n-j,j} := \dim_{\mathbb{C}} H^{n-j,j}$ се нарича област

на периоди. Непосредствено се вижда, че D е хомогенно пространство на реалната линейна алгебрична група $G_{\mathbb{R}} = \mathrm{Aut}(H_{\mathbb{R}}, Q)$, $H_{\mathbb{R}} := H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. За нечетно тегло $n = 2m+1$, поляризацията Q е косо-симетрична $\mathbb{R}$-билинейна форма и групата $G_{\mathbb{R}} = \mathrm{Sp}(H_{\mathbb{R}}, Q)$ е симплектична. Ако теглото $n = 2m$ е четно, Q е симетрична (индефинитна) $\mathbb{R}$-билинейна форма и групата $G_{\mathbb{R}} = \mathrm{SO}(H_{\mathbb{R}}, Q)$ е ортогонална. Изотропната група V на $D = G_{\mathbb{R}}/V$ или стабилизаторът на стуктурата на Hodge $\{H_o^{n-j,j}\}_{j=0}^n$, отговаряща на началото $o = V \in D$ е компактна подгрупа на $G_{\mathbb{R}}$. За произволна максимална компактна подгрупа K на $G_{\mathbb{R}}$, съдържаща V, съществува еднозначно определена проекция

$$\pi : D = G_{\mathbb{R}}/V \longrightarrow G_{\mathbb{R}}/K = S$$

$$\pi(aV) = aK \quad \text{за} \quad \forall aV \in D$$

върху съответното Риманово симетрично пространство S от некомпактен тип с изотропна група K. Понеже S е пълно, свързано, едносвързано многообразие с неположителна секционна кривина, експоненциалното изображение $\exp_o : T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} S \to S$ в началото е глобален дифеоморфизъм по Теорема 9.
Множеството $\check{D}$ на филтрациите на Hodge $F^\bullet = \{F^0 \supset F^1 \supset \ldots \supset F^n\}$, на $F^0 = H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, изпълняващи първото съотношение на Riemann-Hodge $Q(F^k, F^{n-k+1}) = 0$ е хомогенно пространство $\check{D} = G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$ за комплексификацията

$$G_{\mathbb{C}} = \{g \in SL(H_{\mathbb{C}}) \,|\, Q(gu, gv) = Q(u, v)\}$$

на $G_{\mathbb{R}} = \mathrm{Aut}(H_{\mathbb{R}}, Q)$. Изотропната подгрупа $P_{\mathbb{C}}$ е стабилизаторът на филтрацията $F_o^\bullet = \{F_o^0 \supset F_o^1 \supset \ldots \supset F_o^n\}$, отговаряща на началото o. Комплексното многообразие $\check{D}$ е проективно алгебрично, а оттам и компактно. При това, $\check{D}$ съдържа областта на периодите D като отворено комплексно подмногообразие. Затова $\check{D}$ се нарича компактно дуално на D. Алгебрата на Lie на $G_{\mathbb{C}}$ е

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie} G_{\mathbb{C}} = \{X \in sl(H_{\mathbb{C}}) \,|\, Q(Xu, v) = -Q(u, Xv) \ \ \forall u, v \in H_{\mathbb{C}}\}.$$

Разлагането на Hodge $H_{\mathbb{C}} = \oplus_{j=0}^n H_o^{n-j,j}$ с тегло n в началото $o = P_{\mathbb{C}} \in G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}} = \check{D}$ индуцира разлагане на Hodge

$$\mathfrak{g} = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{-k,k}, \quad \mathfrak{g}^{-k,k} := \{X \in \mathfrak{g} \,|\, X(H_o^{n-j,j}) \subseteq H_o^{n-j-k,j+k} \quad \text{за} \quad \forall 0 \le j \le n\}$$

с тегло 0 върху алгебрата на Lie $\mathfrak{g}$ на $G_{\mathbb{C}}$. За да обясним това, избираме такива базиси $\phi_{i,1}, ..., \phi_{i,h^{n-i,i}}$ на $H_{pr}^{n-i,i}(X)$ за $0 \le i \le \left[\frac{n-1}{2}\right]$, които изпълняват условията

$$Q(\phi_{i,j}, \overline{\phi_{i,k}}) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{за } j = k, \\ 0 & \text{за } j \neq k. \end{cases}$$

Фиксираме базисите $\overline{\phi_{i,1}}, \ldots, \overline{\phi_{i,h^{n-i,i}}}$ на $H_{\mathrm{pr}}^{i,n-i}$ за $0 \le i \le \left[\frac{n}{2}\right]$. В случая $n = 2m+1$, това задава базис на $H_{\mathrm{pr}}^n(X, \mathbb{C})$. За $n = 2m$ и $h^{m,m} = 2q$ избираме базис $\phi_{m,1}, ..., \phi_{m,q}$ на максимално Q-изотропно подпространство на $H^{m,m}$ с $Q(\phi_{m,j}, \overline{\phi_{m,k}}) = \delta_{jk}$ и допълваме до базис на $H^{m,m}(X)$ чрез комплексно спрегнатите $\overline{\phi_{m,1}}, ..., \overline{\phi_{m,q}}$. Ако $n = 2m$

и числото на Hodge $h^{m,m} = 2q+1$ е нечетно, то избираме вектор $\phi_{m,2q+1} \in N^{m,m}$ с $\overline{\phi_{m,2q+1}} = \phi_{m,2q+1}$ и $Q(\phi_{m,2q+1}, \overline{\phi_{m,2q+1}}) = 1$. Ортогоналното допълнение V на $\phi_{m,2q+1}$ до $H^{m,m}$ относно Q е с резмерност $2q$. Избираме базис $\phi_{m,1}, \dots, \phi_{m,q}$ на максимално Q-изотропно подпространство на V с $Q(\phi_{m,j}, \overline{\phi_{m,k}}) = \delta_{jk}$ и допълваме до базис на V с $\overline{\phi_{m,1}}, ..., \overline{\phi_{m,q}}$. Това дава базис $\phi_{m,1}, \dots, \phi_{m,q}, \overline{\phi_{m,1}}, \dots, \overline{\phi_{m,q}}, \phi_{m,2q+1}$ на $H^{m,m}$.
Във всички случаи матриците $M_{N\times N}(\mathbb{C})$ с $N = \sum_{i=0}^{n} h^{n-i,i}$ се разбиват на блокове по следния начин

$$\begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & \dots & A_{0,n-1} & A_{0,n} \\ A_{1,0} & A_{1,1} & \dots & A_{1,n-1} & A_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{n-1,0} & A_{n-1,1} & \dots & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ A_{n,0} & A_{n,1} & \dots & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \Phi_i \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{0,i}\Phi_i \\ A_{1,i}\Phi_i \\ \vdots \\ A_{n-1,i}\Phi_i \\ A_{n,i}\Phi_i \end{pmatrix}$$

С други думи, блокът $A_{j,i}$ трансформира $\Phi_i \in H_{\mathrm{pr}}^{n-i,i}(X)$ в елемент на $H_{\mathrm{pr}}^{n-j,j}(X)$.
Ако всички ненулеви елементи на матрицата $A \in M_{N\times N}(\mathbb{C})$ се съдържат в (j,i)-тия блок и $k = i - j$, то A изобразява $H_{\mathrm{pr}}^{n-i,i}(X)$ в $H_{\mathrm{pr}}^{n-i+k,i-k}(X)$ и трансформира в 0 всички елементи на $H_{\mathrm{pr}}^{n-s,s}(X)$ с $s \neq i$. За удобство полагаме $H_{\mathrm{pr}}^{n-s,s}(X) = 0$ при $\forall s < 0$. Линейното пространство

$$M_{N\times N}^{k,-k}(\mathbb{C}) := \{A \in M_{N\times N}(\mathbb{C}) \,|\, AH_{\mathrm{pr}}^{n-i,i}(X) = H_{\mathrm{pr}}^{n-i+k,i-k}(X)\}$$

от линейни оператори в $H_{\mathrm{pr}}^{n}(X, \mathbb{C})$ се състои от матриците с ненулеви елементи само в блоковете, намиращи се върху правата, успоредна на главния диагонал и отместена с k единици от него. При $k > 0$, отместването е нагоре, докато при $k < 0$ то е надолу. Ясно е, че всички $N \times N$-матрици се разлагат в директна сума

$$M_{N\times N}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{k=-n}^{n} M_{N\times N}^{k,-k}(\mathbb{C})$$

на такива подпространства. Непосредствено се проверява, че

$$[M_{N\times N}^{k,-k}(\mathbb{C}), M_{N\times N}^{j,-j}(\mathbb{C})] \subset M_{N\times N}^{k+j,-k-j}(\mathbb{C})$$

за скобката на Ли [,].

Твърдение 21. *Комплексната алгебра на Ли* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}G_{\mathbb{C}}$ *се разлага на директна сума*

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{k=-n}^{n} \mathfrak{g}^{k,-k}$$

на своите подпространства $\mathfrak{g}^{k,-k} := \mathfrak{g} \cap M_{N\times N}^{k,-k}(\mathbb{C})$.

Доказателство. Алгебрата на Ли $\mathfrak{g}$ се съдържа в $\mathfrak{gl}(H_{\mathbb{C}}) = M_{N\times N}(\mathbb{C})$ и се състои от матриците $X \in M_{N\times N}(\mathbb{C})$, изпълняващи равенството $X^T Q + QX = 0$ за матрицата на поляризацията Q. Относво въведеното блочно разлагане имаме $Q_{i,j} = 0$ за индексите

$(i,j) \neq (k, n-k)$ извън вторичния диагонал. Блоковете върху вторичния диагонал са $Q_{k,n-k} = i^n(-1)^k I_{h^{n-k,k}}$, с изключение на $Q_{m,m}$ за четно тегло $n = 2m$. При четно число на Hodge $h^{m,m} = 2q$, централният блок е

$$Q_{m,m} = \begin{pmatrix} 0 & I_q \\ I_q & 0 \end{pmatrix},$$

докато за нечетно $h^{m,m} = 2q+1$, централният блок е

$$Q_{m,m} = \begin{pmatrix} 0 & I_q & 0 \\ I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нека $X_{i,j}$ е (i,j)-тият блок на матрицата X с размери $h^{n-i,i} \times h^{n-j,j}$. Дефиниционното тъждество

$$\begin{pmatrix} & & \\ X_{i,j}^T & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & Q_{i,n-i} & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & \\ & Q_{n-i,i} & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & X_{i,j} \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = 0$$

на алгебрата на Ли $\mathfrak{g}$ дава

$$X_{i,j}^T Q_{i,n-i} = -Q_{j,n-j} X_{n-j,n-i}.$$

Съгласно $k = j - i = (n-i) - (n-j)$, блоковете $X_{i,j}$ и $X_{n-j,n-i}$ се съдържат в едно и също подпространство $M_{N\times N}^{k,-k}(\mathbb{C})$ и матрицата $X = \sum\limits_{k=-n}^{n} X^{(k)} \in \oplus_{k=-n}^{n} M_{N\times N}^{k,-k}(\mathbb{C})$ с компоненти $X^{(k)} \in M_{N\times N}^{k,-k}(\mathbb{C})$ се съдържа в $\mathfrak{g}$ тогава и само тогава, когато $X^{(k)} \in \mathfrak{g} \cap M_{N\times N}^{k.-k}(\mathbb{C}) = \mathfrak{g}^{k,-k}$ за $\forall -n \leq k \leq n$. Това доказва, че директната сума $\oplus_{k=-n}^{n}\mathfrak{g}^{k,-k}$ изчерпва $\mathfrak{g}$.

$\square$

Подалгебрата на Lie на $P_{\mathbb{C}}$ е $\mathrm{Lie}P_{\mathbb{C}} = \oplus_{k\leq 0}\mathfrak{g}^{-k,k}$ и холоморфното допирателно пространство

$$T_o^{1,0}D = T_o^{1,0}\check{D} = \mathrm{Lie}G_{\mathbb{C}}/\mathrm{Lie}P_{\mathbb{C}} \simeq \oplus_{k\geq 1}\mathfrak{g}^{-k,k}$$

към D и $\check{D}$ в общото им начало има естествено отъждествяване с комплексно подпространство на $\mathfrak{g}$.

Нека $\varphi : \mathfrak{X} \longrightarrow S$ е собствено сюрективно холоморфно изображение на комплексни многообразия, със сюрективен диференциал. Тогава всеки слой $X_s := \varphi^{-1}(s)$, $s \in S$ е компактно комплексно подмногообразие на $\mathfrak{X}$ с размерност $\dim_{\mathbb{C}} X_s = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{X} - \dim_{\mathbb{C}} S$.

Теорема 22. (Ehresmann) *Нека $\varphi : \mathfrak{X} \longrightarrow S$ е собствено сюрективно холоморфно изображение на комплексни многообразия, със сюрективен диференциал. Ако S е свиваемо и $X_o := \varphi^{-1}(o)$ е слоят над $o \in S$, то за всяка точка $o \in S$ съществува дифеоморфизъм $T : \mathfrak{X} \longrightarrow X_o \times S$, затварящ кометативната диаграма*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi"'] & X_o \times S \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"] \\
S &
\end{tikzcd}$$

за проекцията $\mathrm{pr}_2 : X_o \times S \to S$ върху втория множител.

От тази теорема следва, че слоят $X_s = \varphi^{-1}(s)$ във всяка точка $s \in S$ е дифеоморфен на централния слой X_o.
Да обърнем внимание, че въпреки холоморфността на φ, локалната тривиализация на $\varphi : \mathfrak{X} \to S$ не е обезателно холоморфна. Voisin доказва в [Voisin], че слоевете на дифеоморфизма $T_o : \mathrm{pr}_1 T : \mathfrak{X} \to X_o$ са комплексни подмногообразия $T_o^{-1}(x)$ на $\mathfrak{X}$ за $\forall x \in X_o$. Подмногообразията $T_o^{-1}(x)$ зависят дифеоморфно, но не обезателно холоморфно от $x \in X_o$. Да забележим, че за достатъчно близки до $o \in S$ точки $s \in S$, комплексните подмногообразия $X_s := \varphi^{-1}(s)$ на $\mathfrak{X}$ пресичат комплексните подмногообразия $T_o^{-1}(x)$ в единствени точки $T_o^{-1}(x) \cap X_s = \{y(x,s)\} \subset \mathfrak{X}$. При локална промяна на $s \in S$, точката $y(x,s) \in T_o^{-1}(x)$ се движи в комплексното многообразие $T_o^{-1}(x)$ и затова $y(x,s)$ зависи холоморфно от s. Комплексната структура върху X_o, индуцирана от комплексната структура на X_s чрез ограничението

$$T_o|_{X_s} : X_s = \coprod_{x \in X_o} \{y(x,s)\} \longrightarrow X_o,$$

$$T_o(y(x,s)) = x$$

зависи холоморфно от s, защото $y(x,s)$ е холоморфна функция на s. Това дава възможност да разглеждаме S като холоморфно параматризиращо множество на комплексните структури, съгласувани с фиксираната гладка структура на X_o.
Холоморфните допирателни разслоения $T^{1,0}X_o$, $T^{1,0}\mathfrak{X}$ и холоморфното допирателно пространство $T_o^{1,0}S$ към S в $o \in S$ са свързани с точна редица

$$0 \longrightarrow T^{1,0}X_o \longrightarrow T^{1,0}\mathfrak{X}|_{X_o} \xrightarrow{d\varphi} X_o \times T_o^{1,0}S \longrightarrow 0 \ , \qquad (2.1)$$

защото за $\forall x \in X_o = \varphi^{-1}(o)$, ядрото на диференциала $(d\varphi)_x : T_x^{1,0}\mathfrak{X} \to T_o^{1,0}S$ е холоморфното допирателно пространство $T_x^{1,0}X_o$ към X_o в x. Късата точна редица (2.1) индуцира дълга точна кохомологична редица

$$0 \to H^0(X_o, \mathcal{O}_{X_o}(T^{1,0}X_o)) \to H^0(X_o, \mathcal{O}_{X_o}(T^{1,0}\mathfrak{X})) \to$$
$$\to H^0(X_o, \mathcal{O}_{X_o}(X_o \times T_o^{1,0}S)) \to H^1(X_o, \mathcal{O}_{X_o}(T^{1,0}X_i)) \to H^1(X_o, \mathcal{O}_{X_o}(T^{1,0}\mathfrak{X})) \to \dots$$

Единствените глобални холоморфни функции върху компактното комплексно многообразие X_o са постоянните, така че

$$H^0(X_o, \mathcal{O}_{X_o}(X_o \times T_o^{1,0}S)) \simeq T_o^{1,0}S.$$

По Теоремата на Dolbeault, съществува $\mathbb{C}$-линеен изоморфизъм

$$H^1(X_o, \mathcal{O}_{X_o}(T^{1,0}X_o)) \simeq H^{0,1}_{\overline{\partial}}(X_o, T^{1,0}X_o)$$

с пространството $H^{0,1}_{\overline{\partial}}(X_o, T^{1,0}X_o)$ на $\overline{\partial}$-затворените $(0,1)$-форми върху X_o със стойности от $T^{1,0}X_o$. Съответствието

$$\rho : T_o^{1,0}S \longrightarrow H^{0,1}_{\overline{\partial}}(X_o, T^{1,0}X_o)$$

се нарича изображение на Kodaira-Spencer на $\varphi : \mathfrak{X} \to S$ в $s = o \in S$.
За произволни хомогенни полиноми $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_N]$, множеството

$$Z(f_1, \ldots, f_m) = \{a = [a_0 : \ldots : a_N] \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \,|\, f_1(a) = \ldots = f_m(a) = 0\}$$

на общите им нули в N-мерното проективно пространство $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ се нарича проективно алгебрично многообразие. Квази-проективно многообразие е допълнение $Z \setminus Z_1$ на проективно алгебрично подмногообразие Z_1 към проективно алгебрично многообразие $Z \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Проективното пространство $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ има канонична $\mathrm{PSL}(N,\mathbb{C})$-инвариантна Келерова метрика, която носи името на Fubini-Study. Нека $\mathfrak{X} \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ е гладко квази-проективно многообразие и $[\omega] \in H^{1,1}(X, \mathbb{C})$ е кохомологичният клас на ограничението на Келеровата форма ω на метриката Fubini-Study върху $\mathfrak{X}$. Ако $\varphi : \mathfrak{X} \to S$ е собствено, сюрективно, холоморфно изображение върху квази-проективно многообразие S със сюрективен диференциал във всяка точка, то слоевете $X_s := \varphi^{-1}(s)$ над всички точки $s \in S$ са проективни алгебрични многообразия $X_s \hookrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Ограниченията на $[\omega]$ върху X_s са поляризации на X_s. Ако $n := \dim_{\mathbb{C}} X_s$, то кохомологиите на X_s с цели, а оттам и рационални коефициенти не зависят от $s \in S$. Примитивните кохомологии

$$H^n_{\mathrm{pr}}(X_s, \mathbb{Q}) := \ker[\wedge[\omega] : H^n(X_s, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^{n+2}(X_s, \mathbb{Q})]$$

съвпадат с $H^n_{\mathrm{pr}}(X_o, \mathbb{Q})$, $o \in S$. В резултат получаваме фиксирана решетка $H_{\mathbb{Z}} := H^n(X_o, \mathbb{Z}) \cap H^n_{\mathrm{pr}}(X_o, \mathbb{Q})$ на $H^n_{\mathrm{pr}}(X_s, \mathbb{C})$ за $\forall s \in S$. Формата на пресичане

$$Q : H_{\mathbb{Z}} \times H_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z},$$

$$Q([\omega_1], [\omega_2]) = \sqrt{-1}^{n(n-1)} \int_{X_s} \omega_1 \wedge \omega_2 \quad \text{за} \quad \forall [\omega_1], [\omega_2] \in H_{\mathbb{Z}}$$

е определена над $\mathbb{Z}$ и не зависи от $s \in S$, защото се индуцира от Келеровия клас $[\omega]$ на метриката на Fubini-Study върху $\mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \supset \mathfrak{X}$. Теоремата на Dolbeault за представяне на кохомологичните класове върху комплексно многообразие чрез диференциални (p,q)-форми задава разлагане на Hodge

$$H^n_{\mathrm{pr}}(X_s, \mathbb{C}) = \oplus_{j=0}^n H^{n-j,j}(X_s) \quad \text{за} \quad \forall s \in S.$$

Доказва се, че числата на Hodge $h^{n-j,j} := \dim_{\mathbb{C}} H^{n-j,j}(X_s)$ са едни и същи за всички $s \in S$. Примитивните кохомологии върху всяко $X_s = \varphi^{-1}(s)$ изпълняват двете билинейни съотношения на Hodge-Riemann. По този начин, вариацията на комплексната структура върху фиксирано гладко многообразие X_o с $\dim_{\mathbb{R}} X_o = 2n$, зададено с квази-проективна фамилия $\varphi : \mathfrak{X} \to S$ от проективни алгебрични многообразия $X_s = \varphi^{-1}(s)$ съответства на вариация $H^n_{\text{prim}}(X_s, \mathbb{C}) = \oplus_{j=0}^n H^{n-j,j}(X_s)$ на структурата на Hodge върху $H^n_{\text{prim}}(X_s, \mathbb{C})$ с фиксирана решетка $H_{\mathbb{Z}}$, поляризация Q и числа на Hodge $h^{n-j,j}$, $0 \leq j \leq n$. С други думи, за достатъчно малка гладка свиваема околност S_o на $s_o \in S$ върху S, получаваме изображение на периадите

$$\Psi : S_o \longrightarrow D$$

в класифициращото пространство D на структурите на Hodge с тегло n и фиксирани параметри $H_{\mathbb{Z}}$, Q, $\{h^{n-j,j}\}_{j=0}^n$. Да изберем началото на D в точката $\Psi(s_o) = o = V \in G_{\mathbb{R}}/V = D$. Доказано е, че диференциалът

$$(d\Psi)_{s_o} : T^{1,0}_{s_o} S_o \longrightarrow T^{\mathbb{C}}_o D$$

на Ψ в началото $s_o \in S_o$ съвпада с изображението на Kodaira-Spencer

$$\rho : T^{1,0}_{s_o} S_o \longrightarrow H^{0,1}_{\overline{\partial}}(X_{s_o}, \mathcal{O}_{X_{s_o}}(T^{1,0} X_{s_o})).$$

Следователно

$$(d\Psi)_{s_o}(T^{1,0}_{s_o} S_o) \subseteq \mathfrak{g}^{-1,1} = \{X \in \text{Lie} G_{\mathbb{C}} \,|\, X(H^{n-j,j}) \subseteq H^{n-j-k,j+k}, \forall j\} \subset \oplus_{k \geq 1} \mathfrak{g}^{-k,k} = T^{1,0} D$$

и изображението $\Psi : S_o \to D$ е холоморфно. Подпространството $\mathfrak{g}^{-1,1} \subset T^{1,0}_o D$ се нарича хоризонтално, както и ляво-инвариантното подразслоение $T^h D$ на холоморфното допирателно разслоение $T^{1,0} D$, породено от $\mathfrak{g}^{-1,1}$. Изложените разглеждания установяват, че образът $U := \Psi(S_o) \subset D$ на локално изображение на периодите $\Psi : S_o \to D$ е комплексно подмногообразие на D, което се допира до $T^h D$. Обобщавайки свойствата на изображението на периодите, Griffiths въвужда понятието вариация на структура на Hodge като комплексно подмногообразие $U \subset D$, което се допира до хоризонталното разпределение $T^h D \subset T^{1,0} D$.
За описание на напълно геодезичните вариации на структури на Hodge $U \subset D$ ще използваме следната

Лема 23. *Ако $U \subset D = G_{\mathbb{R}}/V$ е вариация на структура на Hodge през началото $o = V \in U \subset D$, то холоморфното допирателно пространство $\mathfrak{A} := T^{1,0}_o U \subset T^{1,0}_o D \subset$ $\text{Lie} G_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{g}$ към U в началото е абелева подалгебра на Lie на комплексификацията $\mathfrak{g}$ на $\text{Lie} G_{\mathbb{R}}$.*

По същество, за произволни $u, v \in \mathfrak{A} := T^{1,0}_o U \subseteq \mathfrak{g}^{-1,1} \subset \mathfrak{g}$ да разгледаме ляво-инвариантните холоморфни векторни полета U, V върху $G_{\mathbb{C}}$, получени от u, v. Подразслоението $T^{1,0} U \subset T^h D|_U$ на хоризонталното разпределение $T^h D \subset T^{1,0} D$ е интегруемо, а оттам и затворено относно скобката на Lie. В частност, $[U, V] \in T^{1,0} U$. Алгебрата на Lie $\mathfrak{g}$ е изоморфна на алгебрата на Lie на ляво-инвариантните векторни полета върху $G_{\mathbb{C}}$, така че $[u, v] \in T^{1,0}_o U \subseteq \mathfrak{g}^{-1,1}$. От $u, v \in \mathfrak{g}^{-1,1}$ следва $[u, v] \in [\mathfrak{g}^{-1,1}, \mathfrak{g}^{-1,1}] \subseteq \mathfrak{g}^{-2,2}$, откъдето $[u, v] \in \mathfrak{g}^{-1,1} \cap \mathfrak{g}^{-2,2} = 0$ и $\mathfrak{A} = T^{1,0}_o U \subset \mathfrak{g}$ е абелева подалгебра на $\text{Lie} G_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} = \text{Lie} G_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

2.4 Пълна геодезичност на вариации на структури на Hodge

За изучаване на напълно геодезичните вариации на структури на Hodge $U \subset D$ ни е нужна следната

Лема 24. *Ако U_1 и U_2 са геодезични в точка $o \in U_1 \cap U_2$ подмногообразия на пълно Риманово многообразие M със съвпадащи допирателни пространства $T_o^{\mathbb{R}} U_1 = T_o^{\mathbb{R}} U_2$ в тази точка, то $U_1 = U_2$ съвпадат.*

Доказателство. Съгласно Лема 14, от пълнотата на M следва пълнотата на подмногообразието U_1 на M, което е геодезично в $o \in U_1$. В резултат, за всяка точка $p \in U_1$ съществува U_1-геодезична $\gamma_{o,p} : \mathbb{R} \to U_1$ с $\gamma_{o,p}(0) = o$, $\gamma_{o,p}(1) = p$. От същата Лема 14, U_1-геодезичната $\gamma_{o,p} : \mathbb{R} \to U_1 \subset M$ е M-геодезична. Понеже U_2 е геодезично в $o \in U_2$, тази гладка крива е U_2-геодезична $\gamma_{o,p} : \mathbb{R} \to U_2$. В частност, $\gamma_{o,p}(1) = p \in U_2$ и $U_1 \subseteq U_2$. Разменяйки U_1 с U_2 получаваме $U_2 \subseteq U_1$ и $U_1 = U_2$.

□

Твърдение 25. *Нека $D = G_{\mathbb{R}}/V$ е област на периоди с проекция*

$$\pi : D = G_{\mathbb{R}}/V \longrightarrow G_{\mathbb{R}}/K = S$$

върху Риманово симетрично пространство S от некомпактен тип, $U \subset D$ е напълно геодезична вариация на структура на Hodge, а $W = \pi(U)$. Да означим с $\mathfrak{p}$ каноничното повдигане на $T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} S$, $\check{o} = K \in G_{\mathbb{R}}/K$ до $\mathfrak{g}_o = \mathrm{Lie} G_{\mathbb{R}}$, което е ортогонално на $\mathrm{Lie} K$ относно формата на Killing и да отъждествим $T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W$ с неговия образ в $\mathfrak{p}$. Тогава съществува подгупа на Lie $G(U)$ на $G_{\mathbb{R}}$ с алгебра на Lie $\mathrm{Lie} G(U) = T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W \oplus [T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W, T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W]$, така че $U = G(U)V/V$ е еквивариантно вложено в D ермитово симетрично пространство от некомпактен тип.

Доказателство. Първо ще проверим, че образът $W := \pi(U)$ на напълно геодезична вариация на структура на Hodge $U \subset D$ е напълно геодезично подмногообразие на Римановото симетрично пространство S. Избираме начало $o \in \pi^{-1}(\check{o}) \subset U$ на D. Достатъчно е да проверим, че $W \subset S$ е геодезично в $\check{o} \in W$, за да твърдим, че $W \subset S$ е напълно геодезично подпространство. Да означим $\mathfrak{g}_o := \mathrm{Lie} G_{\mathbb{R}}$ и да напомним, че $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie} G_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_o \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ има разлагане на Hodge $\mathfrak{g} = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{-k,k}$ с тегло 0 чрез $\mathbb{C}$-линейни подпространства

$$\mathfrak{g}^{-k,k} := \{X \in \mathfrak{g} \,|\, X(H^{n-j,j}) \subseteq H^{n-j-k,j+k} \quad \text{за} \quad \forall j\}.$$

Отъждествяваме $T_o^{\mathbb{R}} D = \left(\oplus_{k \neq 1} \mathfrak{g}^{-k,k}\right) \cap \mathfrak{g}_o$ и $T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} S = \left(\oplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{-2k-1,2k+1}\right) \cap \mathfrak{g}_o$ с $\mathbb{R}$-линейни подпространства на $\mathfrak{g}_o$ и забелязваме, че диференциалът

$$(d\pi)_o : T_o^{\mathbb{R}} D \longrightarrow T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W$$

е $\mathbb{R}$-линейна проекция с ядро $\ker(d\pi)_o := \left(\oplus_{k \neq 0} \mathfrak{g}^{-2k,2k}\right) \cap \mathfrak{g}_o$. Холоморфното допирателно пространство $T_o^{1,0} U$ към U в $o \in U$ е хоризонтално, т.е. $T_o^{1,0} U \subseteq \mathfrak{g}^{-1,1}$. Следователно реалното допирателно пространство $T_o^{\mathbb{R}} U \subseteq \left(\mathfrak{g}^{-1,1} \oplus \mathfrak{g}^{1,-1}\right) \cap \mathfrak{g}_o$ има нулево сечение $T_o^{\mathbb{R}}U \cap \ker(d\pi)_o = 0$ с ядрото на $(d\pi)_o$ и ограничението $(d\pi)_o : T_o^{\mathbb{R}}U \to T_{\check{o}}^{\mathbb{R}}W$ е $\mathbb{R}$-линеен изоморфизъм. При направения избор на повдигания на $T_o^{\mathbb{R}}U$ и $T_{\check{o}}^{\mathbb{R}}W$ до $\mathbb{R}$-линейни подпространства на $\mathfrak{g}_o$ имаме съвпадение $T_o^{\mathbb{R}}U = T_{\check{o}}^{\mathbb{R}}W$. За произволен допирателен вектор $v \in T_o^{\mathbb{R}}U = T_{\check{o}}^{\mathbb{R}}W$, образът на D-геодезичната $\gamma_o^v : \mathbb{R} \to D$ с начални условия

$$\gamma_o^v(0) = o, \quad \frac{d\gamma_o^v(t)}{dt}\Big|_{t=0} = v$$

се съдържа в U, съгласно геодезичността на $U \subset D$ в $o \in U$. Да напомним разлагането $\gamma_o^v(t) = \pi_V \exp(tv)$ като композиция на експонентата на матрица $\exp : \mathfrak{g}_o \to G_{\mathbb{R}}$ и проекцията $\pi_V : G_{\mathbb{R}} \to G_{\mathbb{R}}/V = D$. Аналогично, S-геодезичната $\widetilde{\gamma_{\check{o}}^v} : \mathbb{R} \to S$ с

$$\widetilde{\gamma_{\check{o}}^v}(0) = \check{o}, \quad \frac{d\widetilde{\gamma_{\check{o}}^v}(t)}{st}\Big|_{t=0} = v$$

се представя като $\widetilde{\gamma_{\check{o}}^v}(t) = \pi_K \exp(tv)$ чрез експонентата на матрица и проекцията $\pi_K : G_{\mathbb{R}} \to G_{\mathbb{R}}/K = S$, $\pi_K(a) = aK$. Пропускваме $\pi_K = \pi\pi_V$ през π_V и забелязваме, че S-геодезичната

$$\widetilde{\gamma_{\check{o}}^v}(t) = \pi\pi_V(\exp(tv) = \pi\gamma_o^v(t)$$

е образът на D-геодезичната под действие на π. Сега от $\gamma_o^v(t) \in U$ следва $\widetilde{\gamma_{\check{o}}^v}(t)\pi\pi(U) = W$ за $\forall t \in \mathbb{R}$ и това доказва геодезичността на $W \subset S$ в $\check{o} \in W$.
По Теорема 16, реалното допирателно пространство $T_{\check{o}}^{\mathbb{R}}W = T_i^{\mathbb{R}}U \subseteq \mathfrak{g}_o$ е тройна система на Lie. Да забележим, че хомогенното пространство $D = G_{\mathbb{R}}/V$ на реалната линейна алгебрична група $G_{\mathbb{R}}$ има компактна изотропна група V. Подпространството $\mathfrak{s} := T_o^{\mathbb{R}}U$ на реалното допирателно пространство $\mathfrak{M} := T_o^{\mathbb{R}}D = \left(\oplus_{k\neq 0}\mathfrak{g}^{-k,k}\right) \cap \mathfrak{g}_o$ е тройна система на Lie. Твърдим, че $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}] \subseteq \mathrm{Lie}V$. За целта използваме, че холоморфното допирателно пространство $\mathfrak{A} := T_o^{1,0}U \subseteq T_o^{1,0}D = \oplus_{k\geq 1}\mathfrak{g}^{-k,k}$ в началото е абелева подалгебра на Lie на $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}G_{\mathbb{C}}$, съгласно Лема 23. Произволен базис $X_1, \dots, X_N$ на $\mathfrak{A}$ над $\mathbb{C}$ дава базис $\{X_j \oplus \overline{X_j}, \sqrt{-1}(X_j - \overline{X_j}) \,|\, 1 \leq j \leq N\}$ на реалното допирателно пространство $\mathfrak{s} = T_o^{\mathbb{R}}U = (\mathfrak{A} \oplus \overline{\mathfrak{A}}) \cap \mathfrak{g}_o$. Непосредствено се вижда, че

$$[X_i + \overline{X_i}, X_j + \overline{X_j}] = [X_i, \overline{X_j}] + [\overline{X_i}, X_j] \in \mathfrak{g}^{0,0},$$

$$[X_i + \overline{X_i}, \sqrt{-1}(X_j - \overline{X_j})] = -\sqrt{-1}[X_i, \overline{X_j}] + \sqrt{-1}[\overline{X_i}, X_j] \in \mathfrak{g}^{0,0} \quad \text{и}$$

$$[\sqrt{-1}(X_i - \overline{X_i}), \sqrt{-1}(X_j - \overline{x_j})] = [X_i, \overline{X_j}] + [\overline{X_i}, X_j] \in \mathfrak{g}^{0,0} \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i,j \leq N,$$

съгласно $[X_i, X_j] = 0$, $[\overline{X_i}, \overline{X_j}] = \overline{[X_i, X_j]} = 0$. Това доказва, че $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}] \subseteq \mathfrak{g}^{0,0} \cap \mathfrak{g}_o = \mathrm{Lie}V$ и позволява прилагането на Теорема 17 към тройната система на Lie $\mathfrak{s}$. В резултат получаваме съществуването на свързана подгрупа на Lie $G(U)$ на $G_{\mathbb{R}}$ с алгебра на Lie $\mathrm{Lie}G(U) = \mathfrak{s} \oplus [\mathfrak{s},\mathfrak{s}]$, така че еквивариантно вложеното подпространство $U(\mathfrak{s}) := G(U)V/V$ на $D = G_{\mathbb{R}}/V$ е напълно геодезично подмногообразие на D с допирателно пространство $T_o^{\mathbb{R}}U(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s} = T_o^{\mathbb{R}}U$ в началото $o = V \in U(\mathfrak{s})$. Съгласно Лема 24, съвпадението на реалните допирателни пространства $T_o^{\mathbb{R}}U(\mathfrak{s}) = T_o^{\mathbb{R}}U$ на геодезичните в $o \in U(\mathfrak{s}) \cap U$ подмногообразия $U(\mathfrak{s})$ и U на пълното Риманово многообразие $D = G_{\mathbb{R}}/V$ е достатъчно за съвпадението $U = U(\mathfrak{s})$. Предположенията на Теорема 17 са изпълнени за реалната линейна алгебрична група $G_{\mathbb{R}}$, нейната максимална компактна подгрупа K, повдигането $\mathfrak{p}$ на $T^{\mathbb{R}}_{\check{o}}(G_{\mathbb{R}}/K) = \mathrm{Lie}G_{\mathbb{R}}/\mathrm{Lie}K$ до $\mathbb{R}$-линейно подпространство $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}_o = \mathrm{Lie}G_{\mathbb{R}}$ и тройната система на Lie

$$\mathfrak{s} = T^{\mathbb{R}}_o U = T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W \subseteq (\mathfrak{g}^{-1,1} \oplus \mathfrak{g}^{1,-1}) \cap \mathfrak{g}_o \subseteq \left(\oplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{-2k-1,2k+1}\right) \cap \mathfrak{g}_o = \mathfrak{p}$$

с $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subseteq \mathrm{Lie}V \subseteq \mathrm{Lie}K$. Свързаната подгрупа на Lie на $G_{\mathbb{R}}$ с алгебра на Lie $\mathfrak{s} \oplus [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ е $G(U)$, така че по Теорема 17 имаме еквивариантно вложено, напълно геодезично подпространство $W(\mathfrak{s}) := G(U)K/K$ на $S = G_{\mathbb{R}}/K$ с допирателно пространство $T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s} = T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W$. Прилагаме Лема 24 към пълното Риманово многообразие $S = G_{\mathbb{R}}/K$ и геодезичните в $\check{o} \in W \cap W(\mathfrak{s})$ подмногообразия W и $W(\mathfrak{s})$ с $T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W = T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W(\mathfrak{s})$ и получаваме съвпадението $W = W(\mathfrak{s})$. Да забележим, че

$$\mathrm{Lie}(G(U) \cap K) = \mathrm{Lie}G(U) \cap \mathrm{Lie}K = \mathrm{Lie}G(U) \cap \mathrm{Lie}V = \mathrm{Lie}(G(U) \cap K).$$

Включването $\mathrm{Lie}G(U) \cap \mathrm{Lie}V \subseteq \mathrm{Lie}G(U) \cap \mathrm{Lie}K$ е непосредствено следствие от $\mathrm{Lie}V \subseteq \mathrm{Lie}K$. Ако $X = X_1 + X_0 \in \mathrm{Lie}G(U) \cap \mathrm{Lie}K = (\mathfrak{s} \oplus [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]) \cap \mathrm{Lie}K$ с $X_1 \in \mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{p}$ и $X_0 \in [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subseteq \mathrm{Lie}V \subseteq \mathrm{Lie}K$, то $X_1 \in \mathrm{Lie}K$ и $X_1 = 0$, съгласно $\mathfrak{p} \cap \mathrm{Lie}K = 0$. Средователно $\mathrm{Lie}G(U) \cap \mathrm{Lie}K \subseteq [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subseteq \mathrm{Lie}V$ и $\mathrm{Lie}G(U) \cap \mathrm{Lie}K = \mathrm{Lie}G(U) \cap \mathrm{Lie}V$. От съвпадението на алгебрите на Lie $\mathrm{Lie}(G(U) \cap V) = \mathrm{Lie}(G(U) \cap K)$ следва съвпадението $G(U) \cap V = G(U) \cap K$ на съответните свързани групи на Lie. В резултат получаваме комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd}
U = G(U)V/V \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi_1"] & G(U)K/K = W \arrow[d, "\varphi_2"] \\
G(U)/G(U) \cap V \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & G(U)/G(U) \cap K
\end{tikzcd}$$

с канонични изоморфизми φ_1, φ_2, която доказма глобалната дифеоморфност на проекцията $\pi : U \to W = \pi(U)$.
От Теорема IV.7.2, [Helgason], напълно геодезичното, еквивариантно вложено хомогенно подпространство $W = G(U)K/K$ на Римановото симетрично пространство $S = G_{\mathbb{R}}/K$ е Риманово симетрично пространство, щом $T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W \subset \mathfrak{p}$ тройна система на Lie. За пълнотата на изложението даваме подробно доказателство на този факт. Да напомним, че експоненциалното изображение $\exp_{\check{o}} : \mathfrak{p} \to S$ на Римановото симетрично пространство $S = G_{\mathbb{R}}/K$ от некомпактен тип е глобален дифеоморфизъм, съгласно Следствие 12. Инволютивната изометрия на S, фиксираща началото, се индуцира от умножението с $(-1) \in \mathbb{R}$ върху допирателното пространство $T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} S = \mathfrak{p}$ може да се представи във вида

$$s_{\check{o}} : S \longrightarrow S,$$

$$s_{\check{o}}(x) = s_{\check{o}}(\exp_{\check{o}} \exp_{\check{o}}^{-1}(x)) = \exp_{\check{o}}(-\exp_{\check{o}}^{-1}(x)) \quad \text{за} \quad \forall x \in S.$$

Дифеоморфизмът $s_{\check{o}}$ е изометрия на S и принадлежи на $G_{\mathbb{R}}$. Той отговаря на аналитичния автоморфизъм

$$\sigma : G_{\mathbb{R}} \longrightarrow G_{\mathbb{R}},$$

$$\sigma(g) := s_{\check{o}} g s_{\check{o}} \quad \text{за} \quad \forall g \in G_{\mathbb{R}}$$

от ред 2. Множеството $\mathrm{Fix}(\sigma) := \{g \in G_{\mathbb{R}} \,|\, \sigma(g) = g\}$ на фиксираните точки съдържа K и свързаната компонента на единицата $\mathrm{Fix}(\sigma)_o$ на $\mathrm{Fix}(\sigma)$ се съдържа в K. Диференциалът

$$(d\sigma)_e : T_e^{\mathbb{R}} G_{\mathbb{R}} = \mathrm{Lie} G_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_o \longrightarrow \mathfrak{g}_o$$

на σ в неутралния елемент $e \in G_{\mathbb{R}}$ е инволюцията на Cartan на $\mathfrak{g}_o$ с

$$\mathrm{Lie}K = \{X \in \mathfrak{g}_o \;\;|\;\; (d\sigma)_e(X) = X\}, \;\; \mathfrak{p} = \{Y \in \mathfrak{g}_o \;\;|\;\; (d\sigma)_e(Y) = -Y\}.$$

Вземайки предвид $T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W \subseteq \mathfrak{p}$, $[T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W, T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W] \subseteq \mathrm{Lie}K$, забелязваме, че

$$(d\sigma)_e|_{T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W} = -\mathrm{Id}_{T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W}, \;\; (d\sigma)_e|_{[T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W, T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W]} = \mathrm{Id}_{[T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W, T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W]}$$

и стигаме до извода, че $T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W$ и $[T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W, T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W]$ са $(d\sigma)_e$-нвариантни. Следователно, алгебрата на Lie $\mathfrak{g}(U) := \mathrm{Lie} G(U)$ е $(d\sigma)_e$-инвариантна. Аналитичният автоморфизъм $\sigma : G_{\mathbb{R}} \to G_{\mathbb{R}}$ на $G_{\mathbb{R}}$ трансформира подгрупата на Lie $G(U) \leq G$ в подгрупа на Lie $\sigma(G(U))$. Алгебрата на Lie на $\sigma(G(U))$ е

$$\mathrm{Lie}\sigma(G(U)) = (d\sigma)_e(\mathrm{Lie} G(U)) = (d\sigma)_e(\mathfrak{g}(U)) = \mathfrak{g}(U),$$

така че $\sigma(G(U)) = G(U)$ и $\sigma : G(U) \to G(U)$ е аналитична инволюция на $G(U)$. Множеството на фиксираните точки на σ върху $G(U)$ е $\mathrm{Fix}_{G(U)}(\sigma) = \mathrm{Fix}(\sigma) \cap G(U)$ и неговата свързана компонента на единицата е $\mathrm{Fix}_{G(U)}(\sigma)_o = \mathrm{Fix}(\sigma)_o \cap G(U)$. Следователно, от $\mathrm{Fix}(\sigma)_o \subseteq K \subseteq \mathrm{Fix}(\sigma)$ следва $\mathrm{Fix}_{G(U)}(\sigma)_o \subseteq G(U) \cap K \subseteq \mathrm{Fix}_{G(U)}(\sigma)$. Още повече, образът $\mathrm{Ad}_{G_{\mathbb{R}}}(K)$ а K под действие на присъединеното представяне $\mathrm{Ad} : G_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Aut}(G_{\mathbb{R}})$ е компактна група, така че затворената подгрупа $\mathrm{Ad}_{G_{\mathbb{R}}}(G(U) \cap K)$ на $\mathrm{Ad}_{G_{\mathbb{R}}}(K)$ е също компактна група. Да забележим, че групата $G(U)$ е инвариантна под действие на спрягания с $g \in G(U) \cap K$ и ограничението

$$\mathrm{Ad}_{G_{\mathbb{R}}}(G(U) \cap K)|_{G(U)} = \mathrm{Ad}_{G(U)}(G(U) \cap K)$$

съвпада с образа на $G(U) \cap K$ под действие на присъединеното представяне $\mathrm{Ad} : G(U) \to \mathrm{Aut}(G(U))$. Подмножеството

$$\mathrm{Aut}_{G(U)}(G_{\mathbb{R}}) := \{\varphi \in \mathrm{Aut}(G_{\mathbb{R}}) \;\;|\;\; \varphi G(U) = G(U)\}$$

на групата на автоморфизмите на $G_{\mathbb{R}}$, запазващи $G(U)$ е подгрупа и ограничението

$$\rho : \mathrm{Aut}_{G(U)}(G_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G(U)),$$

$$\rho(\varphi) := \varphi|_{G(U)}$$

е хомоморфизъм на групи. Образът $\rho(\mathrm{Ad}_{G_{\mathbb{R}}}(G(U) \cap K)) = \mathrm{Ad}_{G(U)}(G(U) \cap K)$ на компактната група $G(U) \cap K$ е компактна група и $W = G(U)K/K$ е Риманово симетрично пространство. Понеже алгебрата на Lie $\mathfrak{g}(U) = T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W \oplus [T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W, T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W]$ има ненулево некомпактно подпространство $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}(U) = T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} W$ на $\mathfrak{g}_o = \mathrm{Lie} G_{\mathbb{R}}$, подгрупата $G(U)$ на $G_{\mathbb{R}}$,

действаща транзитивно върху W е некомпактна и Римановото симетрично пространство W е от некомпактен тип.
Дифеоморфизмът $\pi : U \to W$ задава структура на Риманово симетрично пространство от некомпактен тип върху U. За да докажем, че U е ермитово симетрично пространство, достатъчно е да проверим, че инволютивната изометрия $s_o : U \to U$, фиксираща началото $o \in U$ е холоморфна. С тази цел да напомним, че диференциалът $(ds_o)_o = -\mathrm{Id}_{T_o^{\mathbb{R}}U} : T_o^{\mathbb{R}}U \to T_o^{\mathbb{R}}U$ действа като умножение с $-1 \in \mathbb{R}$. Нека $\mathfrak{A} := T_o^{1,0}U$ е холоморфното допирателно пространство към U в началото, а $T_o^{0,1}U$ е анти-холоморфното допирателно пространство. Холоморфността на s_o се свежда към инвариантност $(ds_o)_o(T_o^{1,0}U) \subseteq T_o^{1,0}U$, $(ds_o)_o(T_o^{0,1}U) \subseteq T_o^{0,1}U$ на $T_o^{1,0}U$ и $T_o^{0,1}U$ под действие на диференциала $(ds_o)_o$. За да докажем това да изберем базис $X_1, \ldots, X_N$ на $\mathfrak{A}$ над $\mathbb{C}$. Тогава $\{X_j + \overline{X_j}, \sqrt{-1}(X_j - \overline{X_j}) \,|\, 1 \leq j \leq N\}$ е базис на $T_o^{\mathbb{R}}U$ над $\mathbb{R}$. В резултат, от

$$(ds_o)_o(X_j + \overline{X_j}) = -X_j - \overline{X_j}, \ \ (ds_o)_o(\sqrt{-1}(X_j - \overline{X_j})) = -\sqrt{-1}(X_j - \overline{X_j}) \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq j \leq N \tag{2.2}$$

следва

$$(ds_o)_o(X_j - \overline{X_j}) = -X_j + \overline{X_j}, \tag{2.3}$$

след продължение на диференциала $(ds_o)_o : T_o^{\mathbb{R}}U \to T_o^{\mathbb{R}}U$ до $\mathbb{C}$-линейно изображение $(ds_o)_o : T_o^{\mathbb{C}}U \to T_o^{\mathbb{C}}U$ на $T_o^{\mathbb{C}}U = T_o^{\mathbb{R}}U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. След събиране и изваждане на (2.2) и (2.3) получаваме, че $(ds_o)_o(X_j) = -X_j$, $(ds_o)_o(\overline{X_j}) = -\overline{X_j}$ за всички $1 \leq j \leq N$. Следователно $(ds_o)_o : T_o^{\mathbb{C}}U \to T_o^{\mathbb{C}}U$ се ограничава до умножение с $-1 \in \mathbb{R}$ върху $T_o^{1,0}U = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(X_j \,|\, 1 \leq j \leq N)$ и $T_o^{0,1}U = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\overline{X_j} \,|\, 1 \leq j \leq N)$. В частност, $(ds_o)_o(T_o^{1,0}U) \subseteq T_o^{1,0}U$, $(ds_o)_o(T_o^{0,1}U) \subseteq T_o^{0,1}U$ и инволюцията $s_o : U \to U$ е холоморфна. Горните разглеждания са приложими към всяка точка $o \in U$ и доказват, че Римановото симетрично пространство U е ермитово симетрично.

□

Следствие 26. *Нека D е област на периоди с проекция $\pi : D = G_{\mathbb{R}}/V \to G_{\mathbb{R}}/K = S$ върху Риманово симотрично пространство S от некомпактен тип, а $U \subset D$ е вариация на структура на Hodge. В такъв случай, U е напълно геодезично подпространство на D тогава и само тогава, когато $W = \pi(U)$ е напълно геодезично подпространство на S. Ако това условие е изпълнено, то ограничението $\pi : U \to W$ на π върху U е глобален дифеоморфизъм с W.*

Доказателство. От доказателството на Твърдение 25 знаем, че ако U е напълно геодезично подмногообразие на D, то $W = \pi(U)$ е напълно геодезично подмногообразие на S. Още повече, проверихме, че проекцията $\pi : D \to S$ се ограничава до глобален дифеоморфизъм върху напълно геодезична вариация на структура на Hodge $U \subset D$. Обратно, да предположим, че $W = \pi(U)$ е напълно геодезично подпространство на S през началото $\check{o} = K \in W$. В доказателството на Твърдение 25 установихме съвпадението $T_o^{\mathbb{R}}U = T_{\check{o}}^{\mathbb{R}}W$ на реалните допирателни пространства след каноничното им повдигане до подпространства на $\mathfrak{g}_o = \mathrm{Lie}G_{\mathbb{R}}$. Съгласно Теорема 16, $\mathfrak{s} := T_o^{\mathbb{R}}U = T_{\check{o}}^{\mathbb{R}}W$ е тройна система на Lie. В доказателството на Твърдение 25 проверихме, че $[T^{\mathbb{R}}_o U, T^{\mathbb{R}}_o U] \subseteq \mathrm{Lie}V$, защото холоморфното допирателно пространство $T^{1,0}_o U \subset \mathfrak{g}^{-1,1}$ е абелева подалгебра на Lie на $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}G_{\mathbb{C}}$. Прилагаме Теорема 17 към $D = G_{\mathbb{R}}/V$ е получаваме съществуването на подгрупа на Lie $G(W)$ на $G_{\mathbb{R}}$ с алгебра на Lie $\mathrm{Lie}G(W) = T^{\mathbb{R}}_{\breve{o}}W \oplus [T^{\mathbb{R}}_{\breve{o}}W, T^{\mathbb{R}}_{\breve{o}}W]$, така че еквивариантно вложеното подпространство $U(\mathfrak{s}) := G(W)V/V$ на $D = G_{\mathbb{R}}/V$ е напълно геодезично подмногообразие на D с допирателно пространство $T^{\mathbb{R}}_o U(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s} = T^{\mathbb{R}}_o U$. Вземайки предвид

$$\mathrm{Lie}G(W) \cap \mathrm{Lie}K = [T^{\mathbb{R}}_{\breve{o}}W, T^{\mathbb{R}}_{\breve{o}}W] = [T^{\mathbb{R}}_o U, T^{\mathbb{R}}_o U] \subseteq \mathrm{Lie}V,$$

получаваме съвпаденията $\mathrm{Lie}(G(W) \cap K) = \mathrm{Lie}(G(W) \cap V)$ и $G(W) \cap K = G(W) \cap V$. От наличието на комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd}
G(W)V/V \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Phi"] & G(W)K/K \arrow[d, "\Phi_o"] \\
G(W)/G(W) \cap V \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & G(W)/G(W) \cap K
\end{tikzcd}$$

с изоморфизми Φ и Φ_o следва, че $\pi : G(W)V/V \to G(W)K/K = W$ е изоморфизъм. Следователно $\pi^{-1}(W) = G(W)V/V$ е коректно определено подпространство на D, съдържащо U и $\pi^{-1}\pi : U \to \pi^{-1}(W) = G(W)V/V$ е сюрективно изображение. Оттук получаваме съвпадението $U = G(W)V/V$. Благодарение на хомогенността на U относно действието на $G(W)$, достътачно е да проверим геодезичността на $U \subset D$ в $o \in U$, за да получим пълната геодезичност на U в D. За произволен допирателен вектор $v \in T^{\mathbb{R}}_o U = T^{\mathbb{R}}_{\breve{o}}W \subset \mathfrak{g}(W)$, D-геодезичната $\gamma^v_o : \mathbb{R} \to D$ с $\gamma^v_o(0) = o$, $\left.\frac{d\gamma^v_o(t)}{dt}\right|_{t=0} = v$ е $\gamma^v_o(t) = \pi_V \exp(tv)$, където $\exp : \mathfrak{g}_o \to G_{\mathbb{R}}$ е екпонентата на матрица. Сега от $\exp(tv) \in \exp\mathfrak{g}(W) = G(W)$ следва $\gamma^v_o(t) \in \pi_V G(W) = G(W)V/V = U$ за $\forall t \in \mathbb{R}$ и $U \subset D$ е геодезично в $o \in U$.

$\square$

Глава 3

Леви квази-групови структури върху вариации на структури на Hodge

3.1 Предварителни сведения

Непразно множество G с бинарна операция

$$G \times G \longrightarrow G$$

е група, ако изпълнява следните три свойства:
(i) асоциативност: $\forall a, b, c \in G \ (ab)c = a(bc)$;
(ii) съществува неутрален елемент $e = e_G \in G$, така че $ae_G = e_G a = a$ за $\forall a \in G$;
(iii) произволен елемент $a \in G$ има обратен $a^{-1} \in G$, така че $aa^{-1} = a^{-1}a = e_G$.
Следващото твърдение характеризира групите измежду множествата с асоциативна бинарна операция.

Твърдение 27. *Нека G е непразно множество с асоциативна бинарна операция*

$$G \times G \to G.$$

В такъв случай, G е група тогава и само тогава, когато за произволни $a, b \in G$ уравненията $ax = b$ и $ya = b$ имат единствени решения x_o, съответно y_o от G.

Доказателство. Ако G е група, то $a^{-1}b \in G$ е решение на $ax = b$. За произволно друго решение $x_o \in G$ на на това уравнение, лявото почленно умножение на $ax_o = b$ с a^{-1} дава $x_o = a^{-1}b$, така че решението $a^{-1}b$ е единствено. Аналогично се доказва, че $ba^{-1} \in G$ е решение на $ya = b$ и всяко друго решение $y_o \in G$ на $ya = b$ съвпада с ba^{-1}. Да предположим, че за произволни $a, b \in G$ уравненията $ax = b$ и $ya = b$ имат единствени решения $x_o, y_o \in G$. Тогава за произволни $u, v_1, v_2 \in G$, от $uv_1 = uv_2$ следва $v_1 = v_2$, защото $v_1 \in G$ и $v_2 \in G$ са решения на уравнението $ux = uv_1$. Аналогично, от

$v_1u = v_2u$ за $u, v_1, v_2 \in G$ следва $v_1 = v_2$. С други думи, можем да съкращаваме леви или десни общи множители на думи от G.
За всеки елемент $a \in G$ разглеждаме единственото решение $r_a \in G$ на $ax = a$. От $ar_a = a$ става ясно, че r_a е десен неутрален елемент на a. Аналогично, произволен елемент $b \in G$ има ляв неутрален елемент $l_b \in G$, така че $l_b b = b$. Елементът l_b е единственото решение на $yb = b$ от G. Умножавайки почленно $ar_a = a$ и $l_b b = b$ получаваме

$$ar_a l_b b = ab.$$

Лявото съкрашение на a в това равенство дава

$$r_a l_b b = b. \tag{3.1}$$

От $l_b b = b$ следва $l_b^2 b = l_b b = b$ след почленно ляво умножение с l_b. Заместваме в (3.1) и получаваме

$$r_a l_b b = l_b^2 b.$$

Сега можем да съкратим отдясно $l_b b$ и да изведем

$$\forall a, b \in G \quad r_a = l_b.$$

По този начин, всички десни неутрални елементи r_a съвпадат с всички леви неутрални елементи l_b и представляват единствен универсален неутрален елемент $e_G \in G$ с $ae_G = a$ и $e_G b = b$ за $\forall a, b \in G$.
За всяко $a \in G$, единственото решение $a_r \in G$ на $ax = e_G$ е десен обратен на a. Аналогично, единственото решение $a_l \in G$ на $ya = e_G$ е ляв обратен елемент на a. Използвайки асоциативността на дадената бинарна операция, извеждаме

$$a_r = e_G a_r = (a_l a)a_r = a_l(aa_r) = a_l e_G = a_l.$$

Това доказва, че всеки елемент $a \in G$ има обратен елемент $a^{-1} := a_r = a_l \in G$, така че $aa^{-1} = a^{-1}a = e_G$. Следователно G е група относно разглежданата операция.

$\square$

Определение 28. (Moufang - 1935) *Непразно множество Q с бинарна операция*

$$Q \times Q \longrightarrow Q,$$

$$(a, b) \mapsto a.b$$

е квази-група, ако за произволни $a, b \in Q$ уравненията $a.x = b$, $y.a = b$ имат единствени решения x_o, съответно, y_o от Q.

Определение 29. *Непразното множество $\mathcal{L}$ с бинарна операция $\oplus : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ е лява квази група, ако за произволни $a, b \in G$ уравнението $ax = b$ има единствено решение $x_o \in G$.*
Казваме, че $e_r \in \mathcal{L}$ е десен неутрален елемент на лявата квази-група $(\mathcal{L}, \oplus)$, ако $a \oplus e_r = a$ за всички $a \in \mathcal{L}$.

Нека G е група, а H е подгрупа на G. Множеството $\{gH \,|\, g \in G\}$ на левите съседни класове на G относно H ще наричаме ляво хомогенно пространство на G относно H. В своята монография [Sabinin], Сабинин казва, че подмножество Q на G е трансверзала на G/H, ако за $\forall g \in G$ съществува единствен елемент $q(g) \in Q$ с $gH \cap Q = \{q(g)\}$ и $QH = G$ за

$$QH := \{qh \,|\, q \in Q,\, h \in H\}.$$

Лема 30. (Сабинин - Твърдение 2.16, Твърдение 2.17 [Sabinin]) *Ако Q е трансверзала на ляво хомогенно пространство G/H на група G относно подгрупа H, то всеки елемент $g \in G$ има единствено разлагане $g = q(g)h(g)$ в произведение на $q(g) \in Q$ и $h(g) \in H$. В резултат получаваме взаимно еднозначно изображение*

$$\begin{aligned} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : G \to Q \times H, \\ \varphi(g) = (\varphi_1(g), \varphi_2(g)) := (q(g), h(g)), \quad \forall g \in G \end{aligned} \tag{3.2}$$

в директното произведение на Q с H. Операцията

$$\triangle : Q \times Q \longrightarrow Q,$$

$$q_1 \triangle q_2 := \varphi_1(q_1 q_2) \quad \text{за} \quad \forall q_1, q_2 \in Q,$$

индуцирана от груповата операция в G и проекцията $\varphi_1 : G \to Q$ задава структура на лява квази-група с десен неутрален елемент $\varphi_1(e_G)$ върху Q, където e_G е неутралният елемент на G.

Доказателство. За всяко $g \in G$ съществува $q(g) \in Q$, така че $gH \cap Q = \{q(g)\}$. Ако $q(g) = gh_o$ за някое $h_o \in H$, то $g = q(g)h_o^{-1}$, така че съществува представяне $g = q(g)h(g)$ с $q(g) \in Q$ и $h(g) := h_o^{-1} \in H$. Ако $q(g)h(g) = q'h'$ са две такива представяния, то $q(g) = g'h'h(g)^{-1} \in q'H \cap Q$ и $q' \in q'H \cap Q$. По предположение, $q'H \cap Q$ се състои от единствен елемент, така че $q' = q(g)$ и $h' = h(g)$. С това доказахме, че произволен елемент $g \in G$ има единствено представяне $g = q(g)h(g)$ с $q(g) \in Q$, $h(g) \in H$ и изображението (3.2) е коректно зададено. Непосредствено се вижда, че

$$Q \times H \longrightarrow G,$$

$$(q, h) \mapsto qh$$

е обратно на φ и φ е взаимно еднозначно.
За произволни $a, b \in Q$ трябва да проверим, че уравнението $\varphi_1(ax) = b$ има единствено решение $x_o \in Q$. Равенството $\varphi_1(ax) = b$ е равносилно на $ax = bh$ за някое $h \in H$. Съгласно определението за трансверзала Q на G/H, съществува единствено $x = a^{-1}bh \in a^{-1}bH \cap Q$. Произволен елемент $q \in Q$ се представя като произведение $q = qe_G$ на $q \in Q$ и неутралния елемент e_G на G, който принадлежи на всяка подгрупа H. В резултат,

$$(\varphi_1(q), \varphi_2(q)) = \varphi(q) = \varphi(qe_G) = (q, e_G),$$

$$q \triangle \varphi_1(e_G) = \varphi_1(qe_G) = \varphi_1(q) = q$$

и $\varphi_1(e_G)$ е десен неутрален елемент на $(Q, \triangle)$.

□

Нека G е група, H е подгрупа на G и $\pi : G \to G/H$, $\pi(a) = aH$ за $\forall a \in G$ е естествената проекция на G върху лявото хомогенно пространство G/H на G относно H. Изображение $\sigma : G/H \to G$ е сечение на π, ако $\pi\sigma = \mathrm{Id}_{G/H}$. Съгласно $aH = \pi\sigma(aH) = \sigma(aH)H$, сечение $\sigma : G/H \to G$ на $\pi : G \to G/H$ е изображение, което избира представител на всеки ляв съседен клас на G относно H.

Лема 31. *Нека S е непразно множество с бинална операция*

$$\natural : S \times S \longrightarrow S,$$

а $\psi : S' \to S$ е изоморфизъм на множества. Тогава съществува еднозначно определена бинарна операция

$$\sharp : S' \times S' \longrightarrow S',$$

$$s_1' \sharp s_2' := \psi^{-1}(\psi(s_1')\psi(s_2')) \quad \text{за} \quad \forall s_1', s_2' \in S',$$

която превръща

$$\psi : (S', \sharp) \longrightarrow (S, \natural)$$

в изоморфизъм на алгебрични структури.

Доказателство. Взаимната еднозначност на $\psi : S' \to S$ гарантира коректността на определението на операцията $\sharp$. Достатъчно е да забележим, че

$$\psi(s_1' \sharp s_2') = \psi(s_1') \natural \psi(s_2'),$$

за да получим, че $\psi : (S', \sharp) \to (S, \natural)$ е хомоморфизъм, оттам и изоморфизъм на разглежданите алгебрични структури.

□

Следващата лема формулира Твърдение 2.16 и Твърдение 2.17 от [Sabinin] на езика на сечение $\sigma : G/H \to G$ на $\pi : G \to G/H$.

Лема 32. *Нека G е група, H е подгрупа на G, $\pi : G \to G/H$, $\pi(a) = aH$ за $\forall a \in G$ е естествената проекция на G върху лявото хомогенно пространство G/H на G относно H, а $\sigma : G/H \to G$ е сечение на π. Тогава:*
(i) образът $\sigma(G/H)$ е трансверзала на G/H;
(ii) всяка трансверзала Q на G/H задава взаимно еднозначно изображение

$$\tau : G/H \longrightarrow Q,$$

$$\tau(gH) := q(g) = \varphi_1(g) \quad \text{за} \quad gH \cap Q = \{q(g)\}. \;\; g \in G$$

с $\pi\tau = \mathrm{Id}_{G/H}$, т.е. сечение $\tau : G/H \to G$ на $\pi : G \to G/H$;
(iii) бинарната операция

$$\oplus_\sigma : G/H \times G/H \longrightarrow G/H,$$

$$aH \oplus_\sigma bH := \pi(\sigma(aH)\sigma(bH)) = \sigma(aH)bH \quad \text{за} \quad \forall aH, bH \in G/H$$

задава структура на лява квази-група $(G/H, \oplus_\sigma)$ върху G/H с десен неутрален елемент H.

Доказателство. (i) За $\forall g \in G$ съществува $\sigma(gH) \in gH \cap \sigma(G/H)$. Ако $g_o \in gH \cap \sigma(G/H)$, то съществува $a \in G$ с $\sigma(aH) = g_o$. В резултат,

$$aH = \pi\sigma(aH) = \sigma(aH)H = g_oH = gH$$

и $g_o = \sigma(aH) = \sigma(gH)$, така че $gH \cap \sigma(G/H) = \{\sigma(gH)\}$ се състои от единствен елемент. Произведението $\sigma(G/H)H := \{\sigma(aH)h \,|\, a \in G,\, h \in H\}$ покрива цялата група G, защото за $\forall g \in G$ е изпълнено $\sigma(gH) = \pi\sigma(gH) = H$ и $g = \sigma(gH)h \in \sigma(G/H)H$ за някое $h \in H$. Това доказва, че $Q \subseteq G$ е трансверзала на G/H.
(ii) Ако Q е трансверзала на G/H, то за $\forall gH \in G/H$ съществува единствен елемент $q(g) \in Q$ с $gH \cap Q = \{q(g)\}$. Това задава коректно определено изображение

$$\tau : G/H \longrightarrow Q,$$

$$\tau(gH) := q(g) = \varphi_1(g) \quad \text{за} \quad \forall g \in G.$$

За произволен елемент $q \in Q$ е изпълнено $q \in qH \cap Q$, откъдето $\tau(qH) = q$ и изображението τ е сюрективно. За инективността на τ да разгледаме леви съседни класове $aH, bH \in G/H$ с $aH \cap Q = \{a_o\}$, $bH \cap Q = \{b_o\}$. Предположението $a_o = \tau(aH) = \tau(bH) = b_o$ води до $a_o \in bH \cap Q$, откъдето $aH = a_oH = bH$. Това доказва взаимната еднозначност на $\tau : G/H \to Q$. Непосредствено се вижда, че от $gH \cap Q = \{q(g)\}$ следва $\pi\tau(gH) = \tau(gH)H = q(g)H = gH$ за $\forall g \in G$.
(iii) Образът $\sigma(G/H)$ на произволно сечение $\sigma : G/H \to G$ на $\pi : G \to G/H$ е трансверзала на G/H, съгласно (i). Прилагаме Лема 30 на Сабинин и получаваме, че $(\sigma(G/H), \triangle)$ с $\sigma(aH)\triangle\sigma(bH) := \varphi_1(\sigma(aH)\sigma(bH))$ за $\forall aH, bH \in G/H$ е лява квази-група с десен неутрален елемент $\varphi_1(e_G)$ за проекцията $\varphi_1 : G \to \sigma(G/H)$ върху трансверзалата $\sigma(G/H)$ на G/H. Сечението

$$\tau : G/H \longrightarrow \sigma(G/H),$$

$$\tau(gH) := q(g) \quad \text{с} \quad gH \cap \sigma(gH) = \{q(g)\},$$

отговарящо на трансверзалата $\sigma(G/H)$ на G/H съвпада със $\sigma : G/H \to \sigma(G/H)$, защото $\sigma(gH) \in gH \cap \sigma(G/H) = \{q(g)\}$. Условието $\pi\sigma = \mathrm{Id}_{G/H}$ гарантира взаимната еднозначност на изображението $\sigma : G/H \to \sigma(G/H)$ и разкрива, че обратното изображение $\sigma^{-1} = \pi : \sigma(G/H) \to G/H$ съвпада с ограничението $\pi|_{\sigma(G/H)}$ на проекцията $\pi : G \to G/H$ върху $\sigma(G/H)$. Прилагаме Лема 31 и получаваме изоморфима

$$\sigma : (G/H, \oplus_\sigma) \longrightarrow (\sigma(G/H), \triangle)$$

на леви квази-групи с десен неутрален елемент $\sigma^{-1}\varphi_1(e_G) = \varphi_1(e_G)H \in G/H$, съответно $\varphi_1(e_G) \in \sigma(G/H)$. По определение,

$$aH \oplus_\sigma bH := \sigma^{-1}|_{\sigma(G/H)}\varphi_1(\sigma(aH)\sigma(bH)) = \pi|_{\sigma(G/H)}\varphi_1(\sigma(aH)\sigma(bH)) =$$
$$\pi(\sigma(ah)\sigma(bH)) = \sigma(aH)\sigma(bH)H = \sigma(aH)bH \quad \text{за} \quad \forall aH, bH \in G/H,$$

защото от $\pi\sigma = \mathrm{Id}_{G/H}$ следва $\sigma^{-1}|_{\sigma(G/H)} = \pi|_{\sigma(G/H)}$ и $\pi\varphi_1(g) = \varphi_1(g)H = q(g)H = q(g)h(g)H = gH = \pi(g)$ за $\forall g \in G$. От $\varphi_1(e_G) = \sigma(e_GH) = \sigma(H) \in H \cap \sigma(G/H)$

следва, че $\sigma^{-1}\varphi_1(e_G) = \pi\varphi_1(e_G) = \varphi_1(e_G)H = \sigma(H)H = H$. Това извежда доказваното твърдение (iii) от Лема 30 на Сабинин.
Ето и пряко доказателство на (iii), без използване на Лема 30. За произволни $aH, bH \in G/H$, да забележим, че $\sigma(aH)^{-1}bH$ е решение на уравнението $aH \oplus_\sigma x = bH$ от G/H. Ако $bH = aH \oplus_\sigma cH = \sigma(aH)cH$, то $\sigma(aH)^{-1}bH = cH$, така че $\sigma(aH)^{-1}bH$ е единственото решение на $aH \oplus_\sigma x = bH$ от G/H.
Непосредствено се вижда, че $aH \oplus_\sigma H = \sigma(aH)H = aH$ за $\forall aH \in G/H$.

□

Ако сечение $\sigma : G/H \to G$ изобразява подгрупата H на G в неутралния елемент $e \in G$, то H се явява и ляв неутрален елемент на G/H, както се вижда от

$$H \oplus_\sigma (aH) = \sigma(H)(aH) = e(ah) = ah \quad \forall a \in G.$$

Ако H не е нормална подгрупа на G, то в общия случай, $(G/H, \oplus_\sigma)$ не е група. Например нека S_3 е симетричната група от степен 3, $H = \langle(1,2)\rangle$ да е цикличната група от ред 2, породена от транспозицията $(1,2)$. Тогава пространството на левите съседни класове на S_3, по подгрупата H е

$$S_3/H = \{H, (1,3)H = (1,2,3)H, (2,3)H = (1,3,2)H\}.$$

Да разгледаме сеченията $\sigma : S_3/H \to \{\varepsilon, (1,3), (2,3)\}$ and $\tau : S_3/H \to \{\varepsilon, (1,2,3), (1,3,2)\}$. Със $\sigma(H) = \tau(H) = \varepsilon$ подгрупата $H < S_3$ е двустранен неутрален елемент на $(S_3/H, \oplus_\sigma)$ and $(S_3/H, \oplus_\tau)$. Ако $(S_3/H, \oplus_\sigma)$ беше група, то умножавайки отдясно

$$((1,3)H) \oplus_\sigma ((2,3)H) = \sigma((1,3)H)(2,3)H = (1,3)(2,3)H = (1,3,2)H = (2,3)H$$

с $((2,3)H)^{-1}$ получаваме $(1,3)H = H$. Противоречието доказва, че $(S_3/H, \oplus_\sigma)$ не е група. Директна проверка на аксиомите показва, че $(S_3/H, \oplus_\tau)$ е група, защото $\tau(S_3/H) = \{\varepsilon, (1,2,3), (1,3,2)\} = A_3$ е алтернативната група от степен 3.

3.2 Всяка лява квази-група с десен неутрален елемент възниква от сечение на ляво хомогенно пространство

Сабинин показва в [Sabinin], че всяка лява квази-група $(\mathcal{L}, \oplus)$ с десен неутрален елемент $e_r \in \mathcal{L}$ се получава от лява квази-група $(Q, \triangle)$ с десен неутрален елемент $\varphi_1(e_G)$ за трансверзала Q на ляво хомогенно пространство G/H на група G спрямо подгрупа H. Той описва клас от подгрупи H на стабилизатора $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Sym}(\mathcal{L})}(e_r)$ на e_r в симетричната група $\mathrm{Sym}(\mathcal{L})$ of $\mathcal{L}$, които се продължават до групи $\mathcal{L} \times H$, съдържащи се в директното произведение на $\mathcal{L}$ и H и предоставят естествени трансверзали Q на $\mathcal{L} \times H/H$ изоморфни на $(\mathcal{L}, \oplus)$ относно операцията $\triangle$. Сабинин нарича тези групи H left transassociants of $(\mathcal{L}, \oplus, e_r)$, а ние ще ги наричаме ляво-свързани с $(\mathcal{L}, \oplus, e_r)$ групи H. За да ги дефинираме, нека обърнем внимание, че $\oplus$-транслациите

$$L_a : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L},$$

$$L_a(x) := a \oplus x \quad \forall x \in \mathcal{L}$$

са биективни изборажения, когато за всеки $a, b \in \mathcal{L}$, уравнението $a \oplus x = b$ притежава единствено решение $x_o \in \mathcal{L}$ т.е. $(\mathcal{L}, \oplus)$ е лява квази-група. Това ни дава изображение

$$L : \mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{Sym}(\mathcal{L}),$$

$$a \mapsto L_a$$

на $\mathcal{L}$ в нейната симетрична група $\mathrm{Sym}(\mathcal{L})$. Да означим с $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ подгрупата на $\mathrm{Sym}(\mathcal{L})$, породена от $L^{-1}_{a\oplus b} L_a L_b$ за всички $a, b \in \mathcal{L}$ и да забележим, че $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{L}}\}$ тогава и само тогава когато бинарната операция $\oplus : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ е асоциативна. Да разгледаме също изображението

$$m : \mathcal{L} \times \mathrm{Sym}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathrm{Sym}(\mathcal{L}),$$

$$m(a, \rho) := L^{-1}_{\rho(a)} \rho L_a \rho^{-1} \quad \forall a \in \mathcal{L}, \quad \forall \rho \in \mathrm{Sym}(\mathcal{L}).$$

Твърдим, че $\rho \in \mathrm{Sym}(\mathcal{L})$ е хомоморфизъм на $(\mathcal{L}, \oplus)$, точно когато $m(\mathcal{L}, \rho) = \{\mathrm{Id}_{\mathcal{L}}\}$. Наистина, $\rho L_a \rho^{-1} = L_{\rho(a)}$ за всяко $a \in \mathcal{L}$ е еквивалентно с

$$\rho(a \oplus b) = \rho L_a(b) = \rho L_a \rho^{-1}(\rho(b)) = L_{\rho(a)}(\rho(b)) = \rho(a) \oplus \rho(b) \quad \forall b \in \mathcal{L}.$$

Подгрупа $H \leq \mathrm{Stab}_{\mathrm{Sym}(\mathcal{L})}(e_r)$ е ляво-свързана с $(\mathcal{L}, \oplus)$ ако $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} \leq H$ и $m(\mathcal{L}, H) \subseteq H$ (виж Определение 2.1 от [Sabinin]). Според Твърдение 2.10 от монографията на Сабинин [Sabinin], директното произведение $\mathcal{L} \times H$ на лява квази-група $(\mathcal{L}, \oplus)$ с десен неутрален елемент $e_r \in \mathcal{L}$ с ляво-свързаната с $\mathcal{L}$ подгрупа $H \leq \mathrm{Sym}(\mathcal{L})$ е група относно операцията

$$(a, \rho) \circ (b, \tau) := (a \oplus \rho(b), L^{-1}_{a \oplus \rho(b)} L_a \rho L_b \tau)$$

с неутрален елемент $(e_r, L^{-1}_{e_r})$. Освен това,

$$i : H \longrightarrow \mathcal{L} \times H,$$

$$i(\rho) := (e_r, L^{-1}_{e_r} \rho) \quad \forall \rho \in H$$

е инективен хомоморфизъм на групи. Каноничното влагане

$$j : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} \times H,$$

$$\forall a \in \mathcal{L}, \quad j(a) := (a, \mathrm{Id}_{\mathcal{L}})$$

предоставя сечение $j(\mathcal{L})$ на лявото хомогенно пространство $\mathcal{L} \times H / i(\mathcal{L})$ (виж Твърдение 2.11 [Sabinin]). Да припомним, че групата $\mathfrak{G}$ има ефективно действие върху множество M, ако за всяко $g \in \mathfrak{G} \setminus \{e_{\mathfrak{G}}\}$ съществува $x \in M$, за което $gx \neq x$. С други думи, единствениеят елемент $g \in \mathfrak{G}$, който индуцира идентитета $g = \mathrm{Id}_M : M \to M$, $gx = x$ за всяко $x \in M$, е неутралният елемент $e_{\mathfrak{G}}$ of $\mathfrak{G}$. Според Твърдение 2.13 [Sabinin], групата $\mathcal{L} \times H$ действа транзитивно върху $\mathcal{L}$ по правилото

$$(\mathcal{L} \times H) \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L},$$

$$(a,\rho)(b) := L_a(\rho(b)) = a \oplus \rho(b) \quad \text{for} \quad \forall a,b \in \mathcal{L}, \quad \forall \rho \in H$$

и лявата квази-група $(j(\mathcal{L}), \triangle)$ с десен неутрален елемент $j\varphi_1(e_r, L_{e_r}^{-1}) = (e_r, \mathrm{Id}_{\mathcal{L}})$ е изоморфна на лявата квази-група $(\mathcal{L}, \oplus)$ с десен неутрален елемент $e_r \in \mathcal{L}$. В частност, минималната ляво-свързана с $(\mathcal{L}, \oplus, e_r)$ група $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ дава подгрупата $(\mathcal{L} \times \mathcal{A}_{\mathcal{L}}, \circ) = G_{\mathcal{L}}$ на $\mathrm{Sym}(\mathcal{L})$, породена от $L_a \in \mathrm{Sym}(\mathcal{L})$ чрез горната конструкция. Освен това, $L_a^{-1} \in \mathrm{Sym}(\mathcal{L})$ за $\forall a \in \mathcal{L}$. Сечението $(j(\mathcal{L}), \triangle, (e_r, \mathrm{Id}_{\mathcal{L}}))$ на $G_{\mathcal{L}}/i(\mathcal{A}_{\mathcal{L}})$ е изоморфно на $(\mathcal{L}, \oplus, e_r)$ като лява квази-група с десен неутрален елемент.
Ясно е, че групата $G_{\mathcal{L}} = \langle L_a, L_a^{-1} \,|\, a \in \mathcal{L} \rangle$ се поражда от $\{L_a \,|\, a \in \mathcal{L}\}$. Да забележим, че $(a,\rho) \in (\mathcal{L} \times \mathcal{A}_{\mathcal{L}}, \circ) = G_{\mathcal{L}}$ оставя e_r на място, тогава и само тогава когато

$$e_r = (a,\rho)(e_r) = a \oplus \rho(e_r) = a \oplus e_r = a,$$

заради това, че $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} \leq \mathrm{Stab}_{G_{\mathcal{L}}}(e_r)$. И следователно, $\mathrm{Stab}_{G_{\mathcal{L}}}(e_r) = \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$. Тъй като $j(a) \circ i(\mathcal{A}_{\mathcal{L}}) = (a, \mathcal{A}_{\mathcal{L}})$ за всяко $a \in \mathcal{L}$, сечението

$$[j(a) \circ i(\mathcal{A}_{\mathcal{L}})] \cap j(\mathcal{L}) = (a, \mathcal{A}_{\mathcal{L}}) \cap (\mathcal{L}, \mathrm{Id}_{\mathcal{L}}) = \{(a, \mathrm{Id}_{\mathcal{L}})\},$$

а сечението

$$\sigma_{\mathcal{L}} : G_{\mathcal{L}}/i(\mathcal{A}_{\mathcal{L}}) \longrightarrow j(\mathcal{L}) \subset G_{\mathcal{L}},$$

асоциирано със сечението $j(\mathcal{L})$ на $G_{\mathcal{L}}/i(\mathcal{A}_{\mathcal{L}})$ действа чрез

$$\sigma_{\mathcal{L}}(a, \mathcal{A}_{\mathcal{L}}) := (a, \mathrm{Id}_{\mathcal{L}}) = j(a) \quad \text{for} \quad \forall a \in \mathcal{L}.$$

Директно приложение на Лема 32 дава, че лявата квази-група $(j(\mathcal{L}), \triangle)$ е изоморфна на $(G_{\mathcal{L}}/i(\mathcal{A}_{\mathcal{L}}), \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}})$, където имаме

$$(a, \mathcal{A}_{\mathcal{L}}) \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}} (b, \mathcal{A}_{\mathcal{L}}) := (a, \mathrm{Id}_{\mathcal{L}}) \circ (b, \mathrm{Id}_{\mathcal{L}}) \circ (e_r, L_{e_r}^{-1}\mathcal{A}_{\mathcal{L}}) = (a \oplus b, \mathcal{A}_{\mathcal{L}})$$

за всеки $(a, \mathcal{A}_{\mathcal{L}}), (b, \mathcal{A}_{\mathcal{L}}) \in G_{\mathcal{L}}/i(\mathcal{A}_{\mathcal{L}})$, заради $L_{a \oplus b}^{-1} L_a L_b \mathcal{A}_{\mathcal{L}} = \mathcal{A}_{\mathcal{L}}$. Комбинирайки с Твърдение 2.13 от [Sabinin] виждаме, че лявата квази-група $(\mathcal{L}, \triangle, e_r)$ с десен неутрален елемент е изоморфна на $(G_{\mathcal{L}}/i(\mathcal{A}_{\mathcal{L}}), \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}}, i(\mathcal{A}_{\mathcal{L}}) = (e_r, \mathcal{A}_{\mathcal{L}}))$. Нашите разглеждания са по-слаби от тези на Sabinin в [Sabinin]. Следващото твърдение 33 ги доказва директно.

Твърдение 33. (следва от Твърдение 2.10, Твърдение 2.11 и Твърдение 2.13 от [Sabinin]) *Нека $(\mathcal{L}, \oplus)$ е лява квази-група с десен неутрален елемент e_r. Тогава изображението $L : \mathcal{L} \to \mathrm{Sym}(\mathcal{L})$, $a \mapsto L_a$, където $L_a(x) = a \oplus x$ за всяко $x \in \mathcal{L}$, е инективно и подгрупата $G_{\mathcal{L}}$ of $\mathrm{Sym}(\mathcal{L})$, породена от $L(\mathcal{L})$ е изоморфна на $L(\mathcal{L}) \times H_{\mathcal{L}}$ като множество за стабилизатора $H_{\mathcal{L}} := \mathrm{Stab}_{G_{\mathcal{L}}}(e_r)$ на десния неутрален елемент e_r на $\mathcal{L}$ в $G_{\mathcal{L}}$. Естествената проекция $\pi : G_{\mathcal{L}} \to G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}$ върху множеството от левите съседни класове на $G_{\mathcal{L}}$ по $H_{\mathcal{L}}$ има сечение*

$$\sigma_{\mathcal{L}} : G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}} \longrightarrow G_{\mathcal{L}},$$

$$\sigma_{\mathcal{L}}(L_a H_{\mathcal{L}}) = L_a \quad \textit{for} \quad \forall a \in \mathcal{L},$$

такова че

$$\pi L : (\mathcal{L}, \oplus) \longrightarrow (G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}, \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}}),$$
$$\pi L(a) = L_a H_{\mathcal{L}} \quad \textit{for} \quad \forall a \in \mathcal{L}$$

е изоморфизъм на леви квази-групи с десни неутрални елементи $e_r \in \mathcal{L}$, съответно $\pi L(e_r) = H_{\mathcal{L}}$.

Доказателство. Ако допуснем, че $L_a \equiv L_b : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, то имаме

$$a = a \oplus e_r = L_a(e_r) = L_b(e_r) = b \oplus e_r = b,$$

и следователно съответствието

$$L : \mathcal{L} \longrightarrow L(\mathcal{L}) \subset \mathrm{Sym}(\mathcal{L}),$$

$$a \mapsto L_a : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L},$$
$$L_a(x) = a \oplus x \quad \text{for} \quad \forall x \in \mathcal{L}$$

е инективно.
Ако $G_{\mathcal{L}}$ е подгрупата на $\mathrm{Sym}(\mathcal{L})$, породена от $\{L_a \in \mathrm{Sym}(\mathcal{L}) \mid a \in \mathcal{L}\}$, то стабилизаторът $H_{\mathcal{L}} := \mathrm{Stab}_{G_{\mathcal{L}}}(e_r)$ на десния неутрален елемент e_r на $\mathcal{L}$ в $G_{\mathcal{L}}$ е поодгрупа на $G_{\mathcal{L}}$ и на $\mathrm{Sym}(\mathcal{L})$. Твърдим, че

$$G_{\mathcal{L}} = L(\mathcal{L})H_{\mathcal{L}} := \{L_a h \mid a \in \mathcal{L}, \quad h \in H_{\mathcal{L}}\}.$$

Включването $L(\mathcal{L})H_{\mathcal{L}} \subseteq G_{\mathcal{L}}$ следва от $L(\mathcal{L}) \subseteq G_{\mathcal{L}}$, $H_{\mathcal{L}} \subseteq G_{\mathcal{L}}$, както и от факта че $G_{\mathcal{L}}$ е затворено спрямо груповата операция. За да видим и обратното включване, да забележим, че всяко $X \in G_{\mathcal{L}}$ изобразява неутралния елемент $e_r \in \mathcal{L}$ в някой елемент $X(e_r) = a \in \mathcal{L}$. По определение имаме $L_a(e_r) = a \oplus e_r = a$ и виждаме веднага, че $X(e_r) = L_a(e_r)$, където $L_a^{-1}X(e_r) = e_r$. По този начин получаваме $L_a^{-1}X \in H_{\mathcal{L}}$ и $X \in L_a H_{\mathcal{L}} \subset L(\mathcal{L})H_{\mathcal{L}}$, от което следва включването $G_{\mathcal{L}} \subseteq L(\mathcal{L})H_{\mathcal{L}}$ и равенството $G_{\mathcal{L}} = L(\mathcal{L})H_{\mathcal{L}}$.
Освен твърдим, че $G_{\mathcal{L}} = L(\mathcal{L})H_{\mathcal{L}}$ е изоморфно като множество на директното произведение $L(\mathcal{L}) \times H_{\mathcal{L}}$ на $L(\mathcal{L})$ и $H_{\mathcal{L}}$. С други думи, всеки елемент $L_a h \in G_{\mathcal{L}}$ има еднозначно определени множители $a \in \mathcal{L}$ и $h \in H_{\mathcal{L}}$. Наистина, ако $L_a h = L_b h'$ за някои $a, b \in \mathcal{L}$, $h, h' \in H_{\mathcal{L}}$,то $L_b^{-1}L_a = h'h^{-1} \in H_{\mathcal{L}} = \mathrm{Stab}_{G_{\mathcal{L}}}(e_r)$ и $L_b^{-1}L_a(e_r) = L_b^{-1}(a \oplus e_r) = L_b^{-1}(a) = e_r$. Оттук следва, че

$$b = b \oplus e_r = L_b(e_r) = L_b L_b^{-1}(a) = a$$

и $h'h^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}}$, или $h' = h$. С това получаваме, че изображението

$$G_{\mathcal{L}} \longrightarrow L(\mathcal{L}) \times H_{\mathcal{L}},$$

$$L_a h \mapsto (L_a, h)$$

е биекция, и съществува коректно определено изображение

$$\sigma_{\mathcal{L}} : G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}} \longrightarrow G_{\mathcal{L}},$$

$$\sigma_{\mathcal{L}}(L_a H_{\mathcal{L}}) = L_a \quad \text{за} \quad \forall a \in \mathcal{L}.$$

Нека $\pi : G_{\mathcal{L}} \to G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}$, $\pi(L_a h) = L_a H_{\mathcal{L}}$ е проекцията на групата $G_{\mathcal{L}}$ върху множеството $G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}$ от леви съседни класове на $G_{\mathcal{L}}$ по $H_{\mathcal{L}}$. Тогава $\pi\sigma_{\mathcal{L}}(L_a H_{\mathcal{L}}) = \pi(L_a) = L_a H_{\mathcal{L}}$, така че $\pi\sigma_{\mathcal{L}} = \mathrm{Id}_{G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}}$ и $\sigma_{\mathcal{L}}$ е сечение на π. Структурата на лявата квази-група с десен неутрален елемент $H_{\mathcal{L}}$, индуцирана от $\sigma_{\mathcal{L}}$ е

$$\oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}} : (G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}) \times (G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}) \longrightarrow (G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}),$$

$$(L_a H_{\mathcal{L}}) \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}} (L_b H_{\mathcal{L}}) = \pi(\sigma_{\mathcal{L}}(L_a H_{\mathcal{L}})\sigma_{\mathcal{L}}(L_b H_{\mathcal{L}})) = \pi(L_a L_b) = L_a L_b H_{\mathcal{L}}.$$

Изображението

$$\pi L : \mathcal{L} \longrightarrow G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}},$$

$$\forall a \in \mathcal{L} \quad \pi L(a) = L_a H_{\mathcal{L}}$$

очевидно е сюрективно. Допускането, че $L_a H_{\mathcal{L}} = \pi(a) = \pi L(b) = L_b H_{\mathcal{L}}$, води до $L_b^{-1} L_a \in H_{\mathcal{L}} = \mathrm{Stab}_{G_{\mathcal{L}}}(e_r)$, и в крайна сметка $a = b$. Това доказва сюрективността и от там биективността на πL. Твърдим, че πL е хомоморфизъм на леви квази-групи $\pi : (\mathcal{L}, \oplus) \longrightarrow (G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}, \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}})$. За да го докажем, трябва да проверим равенството между $\pi L(a \oplus b) = L_{a\oplus b} H_{\mathcal{L}}$ и $\pi L(a) \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}} \pi L(b) = (L_a H_{\mathcal{L}}) \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}} (L_b H_{\mathcal{L}}) = L_a L_b H_{\mathcal{L}}$ за всички $a, b \in \mathcal{L}$. То е изпълнено, тогава и само тогава когато $L_{a\oplus b}^{-1} L_a L_b \in H_{\mathcal{L}} = \mathrm{Stab}_{G_{\mathcal{L}}}(e_r)$ и се свежда до $L_{a\oplus b}^{-1} L_a L_b(e_r) = e_r$. Заради биективността на $L_{a\oplus b}$, то следва от $L_a L_b(e_r) = L_a(b \oplus e_r) = L_a(b) = a \oplus b = (a \oplus b) \oplus e_r = L_{a\oplus b}(e_r)$. Накрая да отбележим, че от

$$\pi L(a) = \pi L(a \oplus e_r) = \pi L(a) \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}} \pi L(e_r)$$

следва, че $\pi L(e_r)$ е десният неутрален елемент на $(G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}, \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}})$. Вземайки предвид единствеността на десния неутрален елемент $H_{\mathcal{L}}$ на $(G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}, \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}})$, получаваме, че $\pi L(e_r) = H_{\mathcal{L}}$.

□

Нека G be a group, H е подгрупа на G и $\sigma : G/H \to G$ е сечение на естествената проекция $\pi_H : G \to G/H$, $\pi_H(a) = aH$ на G върху лявото хомогенно пространство G/H. Като директно следствие от Твърдение 33 имаме изоморфизъм

$$\pi_{H_{\mathcal{L}}} L : (G/H, \oplus_\sigma) \longrightarrow (G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}, \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}}),$$

$$\pi_{H_{\mathcal{L}}} L(aH) = L_{aH} H_{\mathcal{L}} \quad \text{for} \quad \forall aH \in G/H$$

на леви квази-групи с десни неутрални елементи H, съответно $H_{\mathcal{L}} := \mathrm{Stab}_{G_{\mathcal{L}}}(H)$. По определение, левите $\oplus_\sigma$-транслации

$$L_{aH} : G/H \longrightarrow G/H,$$

$$L_{aH}(bH) = aH \oplus_\sigma bH = \sigma(aH)bH \quad \text{за} \quad \forall bH \in G/H,$$

с aH се свеждат до леви умножения с $\sigma(aH)$ относно груповата операция в G. За да формулираме по-точно, да означим с

$$\Lambda : G \longrightarrow \mathrm{Sym}(G/H),$$

$$\Lambda(a) : G/H \longrightarrow G/H,$$
$$\Lambda(a)(bH) = abH \quad \text{for} \quad \forall a \in G, \ \forall bH \in G/H$$

груповия хомоморфизъм, отговарящ на действието

$$\begin{aligned} G \times G/H \longrightarrow G/H, \\ \forall g \in G, \ \forall bH \in G/H \quad (g, bH) \mapsto gbH \end{aligned} \tag{3.3}$$

на G върху G/H чрез леви транслации относно груповата операция в G. Тогава $L_{aH} = \Lambda\sigma(aH)$ за всяко $aH \in G/H$ позвлоява да разлагането на изображението L в композиция

$$L = \Lambda\sigma : G/H \longrightarrow \mathrm{Sym}(G/H).$$

Изоморфизмът

$$\pi_{H_{\mathcal{L}}} L = \pi_{H_{\mathcal{L}}} \Lambda\sigma : (G/H, \oplus_\sigma) \longrightarrow (G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}, \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}})$$

се пропусква през сечението $\sigma : G/H \to \sigma(G/H) \subseteq G$. Нека $\widetilde{G_{\mathcal{L}}} := \langle \sigma(G/H) \rangle \leq G$ е подгрупата на G, породена от образа $\sigma(G/H)$ на σ. Следващото Следствие 34 доказва, че $G/H = \widetilde{G_{\mathcal{L}}}/\widetilde{H_{\mathcal{L}}}$ е ляво хомогенно пространство на $\widetilde{G_{\mathcal{L}}}$ и групите $G_{\mathcal{L}}$, съответно, $H_{\mathcal{L}}$, са образите на $\widetilde{G_{\mathcal{L}}}$, съответно, $\widetilde{G_{\mathcal{L}}} \cap H$ под действие на представянето Λ.

Следствие 34. *Нека G е група, H е подгрупа на G, $\sigma : G/H \to G$ е сечение на $\pi : G \to G/H$, $\pi(a) = aH$ за $aH \in G/H$ и $(\mathcal{L}, \oplus) := (G/H, \oplus_\sigma)$ е лявата квази-група с десен неутрален елемент $H \in G/H$, индуцирана от σ, т.е.,*

$$aH \oplus_\sigma bH = \sigma(aH)bH \quad \text{за} \quad \forall aH, bH \in G/H.$$

Да означим с $\widetilde{G_{\mathcal{L}}}$ подгрупата на G, породена от образа $\sigma(G/H)$ на сечението σ, а с $G_{\mathcal{L}}$ - подгрупата $\mathrm{Sym}(G/H)$, породена от левите $\oplus_\sigma$-транслации

$$\forall aH, bH \in G/H \quad L_{aH} : G/H \longrightarrow G/H, \quad L_{aH}(bH) = aH \oplus_\sigma bH = \sigma(aH)bH.$$

Тогава:
(i) $\widetilde{G_{\mathcal{L}}}$ действа транзитивно върху G/H чрез леви транслации относно груповата операция на G и $G/H = \widetilde{G_{\mathcal{L}}}/\widetilde{G_{\mathcal{L}}} \cap H$;
(ii) групата $G_{\mathcal{L}} = \Lambda(\widetilde{G_{\mathcal{L}}})$ е Λ-образът на $\widetilde{G_{\mathcal{L}}}$;
(iii) подгрупата $H_{\mathcal{L}} := \mathrm{Stab}_{G_{\mathcal{L}}}(H)$ на $G_{\mathcal{L}}$ е Λ-образът $\Lambda(\widetilde{G_{\mathcal{L}}} \cap H)$ на $\widetilde{G_{\mathcal{L}}} \cap H$.

Доказателство. (i) Действието

$$G \times G/H \longrightarrow G/H,$$

$$(a, bH) \mapsto abH \quad \text{for} \quad \forall a \in G, \ \forall bH \in G/H$$

на G върху G/H се ограничава до действие

$$\widetilde{G_{\mathcal{L}}} \times G/H \longrightarrow G/H,$$

$$(a, bH) \mapsto abH \quad \text{for} \quad \forall a \in \widetilde{G_\mathcal{L}}, \ \ \forall bH \in G/H$$

на $\widetilde{G_\mathcal{L}}$ върху G/H. За произволно $gH \in G/H$ имаме $\sigma(gH) \in \sigma(G/H) \subset \widetilde{G_\mathcal{L}}$ и $gH = \sigma(gH)H$, така че цялото ляво хомогенно пространство G/Hсе съдържа в $\widetilde{G_\mathcal{L}}$-орбитата на $H \in G/H$. Следователно $\widetilde{G_\mathcal{L}}$-действието върху G/H е транзитивно. Стабилизаторът на H в $\widetilde{G_\mathcal{L}}$ е

$$\mathrm{Stab}_{\widetilde{G_\mathcal{L}}}(H) := \{a \in \widetilde{G_\mathcal{L}} \,|\, aH = H\} = \widetilde{G_\mathcal{L}} \cap H$$

и G/H може да се отъждестви с лявото хомогенно пространство $\widetilde{G_\mathcal{L}}/\widetilde{G_\mathcal{L}} \cap H$.
(ii) Да забележим, че

$$\widetilde{G_\mathcal{L}} := \{\sigma(a_k H)^{\varepsilon_k} \dots \sigma(a_1 H)^{\varepsilon_1} \ \ | \ \ k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, \ \ \varepsilon_i = \pm 1, \ \ a_i \in G\}$$

и

$$G_\mathcal{L} := \{L^{\varepsilon_k}_{a_k H} \dots L^{\varepsilon_1}_{a_1 H} \ \ | \ \ k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, \ \ \varepsilon_i = \pm 1, \ \ a_i \in G\}.$$

Твърдим, че е в сила равенството

$$\Lambda(\sigma(a_k H)^{\varepsilon_k} \dots \sigma(a_1 H)^{\varepsilon_1}) = L^{\varepsilon_k}_{a_k H} \dots L^{\varepsilon_1}_{a_1 H} \tag{3.4}$$

на елементи на $\mathrm{Sym}(G/H)$. За $k = 1$, имаме директно

$$L_{a_1 H}(bH) = a_1 H \oplus_\sigma bH = \sigma(a_1 H) bH = \Lambda(\sigma(a_1 H)) bH \quad \text{за всяко} \quad bH \in G/H,$$

което дава $L_{a_1 H} = \Lambda(\sigma(a_1 H))$. Освен това,

$$\begin{aligned} L_{a_1 H}\Lambda(\sigma(a_1 H)^{-1})(bH) = L_{a_1 H}(\sigma(a_1 H)^{-1} bH) = a_1 H \oplus_\sigma (\sigma(a_1 H)^{-1} bH) = \\ \sigma(a_1 H)[\sigma(a_1 H)^{-1} bH] = bH \quad \text{for} \quad \forall bH \in G/H \end{aligned}$$

показва, че $L_{a_1 H}\Lambda(\sigma(a_1 H)^{-1}) = \mathrm{Id}_{G/H}$, където $\Lambda(\sigma(a_1 H)^{-1}) = L^{-1}_{a_1 H}$. Това доказва твърдението за $k = 1$. За произволно $k \in \mathbb{N}$, ще използваме, че $\Lambda : G \to \mathrm{Sym}(G/H)$ е хомоморфизъм на групи, за да получим

$$\Lambda(\sigma(a_k H)^{\varepsilon_k} \dots \sigma(a_1 H)^{\varepsilon_1}) = \Lambda(\sigma(a_k H)^{\varepsilon_k}) \dots \Lambda(\sigma(a_1 H)^{\varepsilon_1}) = L^{\varepsilon_k}_{a_k H} \dots L^{\varepsilon_1}_{a_1 H},$$

и да докажем (3.4). Тъй като всеки елемент на $G_\mathcal{L}$ е от вида $L^{\varepsilon_k}_{a_k H} \dots L^{\varepsilon_1}_{a_1 H}$ за някои $k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $a_i \in G$, това доказва сюрективността на груповия хомоморфизъм $\Lambda : \widetilde{G_\mathcal{L}} \to G_\mathcal{L}$, което е еквивалентно на $\Lambda(\widetilde{G_\mathcal{L}}) = G_\mathcal{L}$.
(iii) Да забележим, че $G_\mathcal{L} = \Lambda(\widetilde{G_\mathcal{L}})$ е подгрупа на $\Lambda(G) \leq \mathrm{Sym}(G/H)$, така че

$$H_\mathcal{L} := \mathrm{Stab}_{G_\mathcal{L}}(H) = G_\mathcal{L} \cap \mathrm{Stab}_{\Lambda(G)}(H).$$

Но $\Lambda(a)H = aH = H$ за $a \in G$ е изпълнено тогава и само тогава, когато $a \in H$ и $\mathrm{Stab}_{\Lambda(G)}(H) = \Lambda(H)$. Остава да се провери само, че

$$G_\mathcal{L} \cap \Lambda(H) = \Lambda(\widetilde{G_\mathcal{L}} \cap H).$$

От една страна, $\widetilde{G_{\mathcal{L}}} \cap H$ е подгрупа на $\widetilde{G_{\mathcal{L}}}$ и H, така че $\Lambda(\widetilde{G_{\mathcal{L}}} \cap H)$ е подгрупа на $\Lambda(\widetilde{G_{\mathcal{L}}}) = G_{\mathcal{L}}$ и $\Lambda(H)$. Това доказва включването $\Lambda(\widetilde{G_{\mathcal{L}}} \cap H) \subseteq G_{\mathcal{L}} \cap \Lambda(H)$. За произволни $a, b \in G$ имаме $\Lambda(a^{-1}b) = \Lambda(a)^{-1}\Lambda(b)$, тъй като $\Lambda : G \to \mathrm{Sym}(G/H)$ е хомоморфизъм на групи. Допускането $\Lambda(a) = \Lambda(h)$ за някои $a \in \widetilde{G_{\mathcal{L}}}$ и $h \in H$, води до

$$\mathrm{Id}_{G/H} = \Lambda(a)^{-1}\Lambda(h) = \Lambda(a^{-1}h).$$

Следователно

$$\begin{aligned} a^{-1}h \in \ker \Lambda := \{g \in G \mid \forall bH \in G/H \ \ \Lambda(g)bH = gbH = bH\} = \\ \{g \in G \mid \forall b \in G \ \ b^{-1}gb \in H\} = \\ \{g \in G \mid \forall b \in G \ \ g \in bHb^{-1}\} = \cap_{b \in G}(bHb^{-1}) =: N(H), \end{aligned}$$

за максималната нормална подгрупа $N(H)$ на G, съдържаща се в H и $a \in N(H)h \subset H$. По този начин установихме $a \in \widetilde{G_{\mathcal{L}}} \cap H$ и $G_{\mathcal{L}} \cap \Lambda(H) = \Lambda(\widetilde{G_{\mathcal{L}}}) \cap \Lambda(H) \subseteq \Lambda(\widetilde{G_{\mathcal{L}}} \cap H)$. От тук следва, че $G_{\mathcal{L}} \cap \Lambda(H) = \Lambda(\widetilde{G_{\mathcal{L}}} \cap H)$ и $H_{\mathcal{L}} = G_{\mathcal{L}} \cap \Lambda(H) = \Lambda(\widetilde{G_{\mathcal{L}}} \cap H)$.

$\square$

3.3 Леви квази-подгрупи

За да определим лява квази-подгрупа $(\mathcal{L}_1, \oplus)$ на лява квази-група $(\mathcal{L}, \oplus)$, да напомним, че непразно подмножество H на група G е подгрупа, точно когато за произволни елементи $h_1, h_2 \in H$ е вярно, че $h_1h_2, h_1^{-1}h_2 \in H$. По аналогия с тази ситуация даваме следното

Определение 35. *Непразно подмножество $\mathcal{L}_1$ на лява квази-група $(\mathcal{L}, \oplus)$ е лява квази-подгрупа на $(\mathcal{L}, \oplus)$, ако за всички $a, b \in \mathcal{L}_1$ е в сила $a \oplus b, x_o(a, b) \in \mathcal{L}_1$, където $x_o(a, b)$ е единственото решение на $a \oplus x = b$ от $\mathcal{L}$.*

Ясно е, че всяка лява квази-подгрупа $\mathcal{L}_1$ на лява квази-група $(\mathcal{L}, \oplus)$ сама по себе си е лява квази-група с наследената операция $\oplus : \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1$. Още повече, ако e_r е десният неутрален елемент на $(\mathcal{L}, \oplus)$, то $e_r \in \mathcal{L}_1$ и e_r е десният неутрален елемент на $(\mathcal{L}_1, \oplus)$. Това се вижда лесно, тъй като за всяко $a \in \mathcal{L}_1$ уравнението $a \oplus x = a$ има единствено решение в $\mathcal{L}_1$, което е точно единственото решение в $\mathcal{L}$. Понеже $e_r \in \mathcal{L}$ е решение на $a \oplus x = a$, ясно е, че $e_r \in \mathcal{L}_1$ и $a \oplus e_r = a$ за всяко $a \in \mathcal{L}_1$.

Следствие 36. *(i) Нека $(\mathcal{L}, \oplus)$ е лява квази-група с десен неутрален елемент и $(\mathcal{L}_1, \oplus)$ е лява квази-подгрупа на $(\mathcal{L}, \oplus)$. Тогава групата $G_{\mathcal{L}_1} = \langle L(\mathcal{L}_1) \rangle \leq \mathrm{Sym}(\mathcal{L}_1)$ е подгрупа на $G_{\mathcal{L}} = \langle L(\mathcal{L}) \rangle \leq \mathrm{Sym}(\mathcal{L})$, $H_{\mathcal{L}_1} = H_{\mathcal{L}} \cap G_{\mathcal{L}_1}$, $G_{\mathcal{L}_1}/H_{\mathcal{L}_1}$ е подмножество на $G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}$, сечението $\sigma_{\mathcal{L}_1} = \sigma_{\mathcal{L}}|_{G_{\mathcal{L}_1}/H_{\mathcal{L}_1}} : G_{\mathcal{L}_1}/H_{\mathcal{L}_1} \longrightarrow G_{\mathcal{L}_1}$ е ограничение на сечението $\sigma_{\mathcal{L}} : G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}} \to G_{\mathcal{L}}$. И в следствие операциите $\oplus_{\sigma_{\mathcal{L}_1}} = \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}}|_{\mathcal{L}_1}$ съвпадат върху $\mathcal{L}_1$ и $(G_{\mathcal{L}_1}/H_{\mathcal{L}_1}, \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}})$ е лява квази-подгрупа на $(G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}, \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}})$ с десен неутрален елемент $H_{\mathcal{L}}$.*
(ii) Нека G е група, H е подгрупа на G, $\sigma : G/H \to G$ е сечение на $\pi : G \to G/H$, $(G/H, \oplus_\sigma)$ е лявата квази-група с десен неутрален елемент H, индуцирана от σ, а

$(\mathcal{L}_1, \oplus_\sigma)$ е лява квази-подгрупа $(G/H, \oplus_\sigma)$. Тогава подгрупата $\widetilde{G_{\mathcal{L}_1}} = \langle \sigma(\mathcal{L}_1) \rangle$ на G, породена от $\sigma(\mathcal{L}_1) \subset G$ действа транзитивно върху $\mathcal{L}_1 \simeq \widetilde{G_{\mathcal{L}_1}}/\widetilde{G_{\mathcal{L}_1}} \cap H$ и съществува комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{L}_1, \oplus_\sigma, \widetilde{G_{\mathcal{L}_1}} \cap H) \arrow[r, "\pi_{H_{\mathcal{L}_1}} \Lambda\sigma"] \arrow[d] & (G_{\mathcal{L}_1}/H_{\mathcal{L}_1}, \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}}, H_{\mathcal{L}_1}) \arrow[d] \\
(G/H, \oplus_\sigma, H) \arrow[r, "\pi_{H_{\mathcal{L}}} \Lambda\sigma"] & (G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}, \oplus_{\sigma_{\mathcal{L}}}, H_{\mathcal{L}})
\end{tikzcd}$$

от инективни хомоморфизми на леви квази-групи с десен неутрален елемент. Още повече, хоризонталните хомоморфизми са сюрективни, сюрективни, а оттам и изоморфизми. (С $\Lambda : G \to \mathrm{Sym}(G/H)$ сме означили хомоморфизма, отговарящ на действието $(a, bH) \mapsto abH$ на G върху G/H чрез леви транслации относно груповата операция.)

Доказателство. (i) Тъй като $\mathcal{L}_1$ е подмножество на $\mathcal{L}$, произволно биективно изображение $\varphi_1 : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1$ се продължава до биективно изображение $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, което съвпада с идентитета върху допълнението $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_1$. Това ни позволява да разглеждаме множеството

$$L(\mathcal{L}_1) := \{L_a : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1 \,|\, a \in \mathcal{L}_1\} \subset \mathrm{Sym}(\mathcal{L}_1)$$

като подмножество на $L(\mathcal{L}) := \{L_b : \mathcal{L} \to \mathcal{L} \,|\, b \in \mathcal{L}\} \subset \mathrm{Sym}(\mathcal{L})$ и групата $G_{\mathcal{L}_1} = \langle L(\mathcal{L}_1) \rangle$, като подгрупа на $G_{\mathcal{L}} = \langle L(\mathcal{L}) \rangle$. По определение,

$$H_{\mathcal{L}_1} := \mathrm{Stab}_{G_{\mathcal{L}_1}}(e_r) = \mathrm{Stab}_{G_{\mathcal{L}}}(e_r) \cap G_{\mathcal{L}_1} = H_{\mathcal{L}} \cap G_{\mathcal{L}_1}.$$

Да отбележим също, че

$$\psi : G_{\mathcal{L}_1}/H_{\mathcal{L}_1} \longrightarrow G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}},$$
$$\psi : (aH_{\mathcal{L}_1}) = aH_{\mathcal{L}}$$

е коректно определено и инективно за всяко $a \in G_{\mathcal{L}_1}$, тъй като $aH_{\mathcal{L}_1} = bH_{\mathcal{L}_1}$ за произволни $a, b \in G_{\mathcal{L}_1}$ е еквивалентно на $a^{-1}b \in H_{\mathcal{L}_1} = G_{\mathcal{L}_1} \cap H_{\mathcal{L}}$. Това е изпълнено тогава и само тогава, когато $a^{-1}b \in H_{\mathcal{L}}$, от което следва, че $aH_{\mathcal{L}} = bH_{\mathcal{L}}$. Вземайки предвид изображението ψ, разглеждаме $G_{\mathcal{L}_1}/H_{\mathcal{L}_1}$ като подмножество на $G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}}$. Сечението

$$\sigma_{\mathcal{L}_1} : G_{\mathcal{L}_1}/H_{\mathcal{L}_1} \longrightarrow G_{\mathcal{L}_1},$$
$$\forall a \in \mathcal{L}_1, \quad \sigma_{\mathcal{L}_1}(L_a H_{\mathcal{L}_1}) = L_a$$

е ограничението на

$$\sigma_{\mathcal{L}} : G_{\mathcal{L}}/H_{\mathcal{L}} \longrightarrow G_{\mathcal{L}},$$
$$\forall b \in \mathcal{L}, \quad \sigma_{\mathcal{L}}(L_b H_{\mathcal{L}}) = L_b$$

с гореспоменатото влагане на $G_{\mathcal{L}_1}$ в $G_{\mathcal{L}}$. Следователно $\sigma_{\mathcal{L}_1} = \sigma_{\mathcal{L}}|_{G_{\mathcal{L}_1}/H_{\mathcal{L}_1}}$.

(ii) Да отбележим, че за всички $aH, bH \in \mathcal{L}_1$, имаме $aH \oplus_\sigma bH = \sigma(aH)bH$ и единственото решение $\sigma(aH)^{-1}bH \in G/H$ на $aH \oplus_\sigma x = bH$ принадлежи на лявата квази-подгрупа $(\mathcal{L}_1, \oplus)$. Произволен елемент $g \in \widetilde{G_{\mathcal{L}_1}}$ е от вида $g = \sigma(a_k H)^{\varepsilon_k} \dots \sigma(a_1 H)^{\varepsilon_1}$ за някои $k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $a_i H \in \mathcal{L}_1$. Така за всяко $bH \in \mathcal{L}_1$ имаме, че $gbH \in \mathcal{L}_1$ и

$$\widetilde{G_{\mathcal{L}_1}} \times \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1,$$

$$(g, bH) \mapsto gbH$$

е действие на $\widetilde{G_{\mathcal{L}}}$ върху $\mathcal{L}_1$. Неутралният елемент H на $(G/H, \oplus_\sigma)$ принадлежи на лявата квази-подгрупа $\mathcal{L}_1$ и произволно $aH \in \mathcal{L}_1$ принадлежи на $\widetilde{G_{\mathcal{L}}}$-орбитата на H в $\mathcal{L}_1$, тъй като $aH = \sigma(aH)H$ за $\sigma(aH) \in \widetilde{G_{\mathcal{L}}}$. С други думи, $\widetilde{G_{\mathcal{L}}}$ действа транзитивно върху $\mathcal{L}_1$ със $\mathrm{Stab}_{\widetilde{G_{\mathcal{L}}}}(H) := \{g \in \widetilde{G_{\mathcal{L}}} \,|\, gH = H\} = \widetilde{G_{\mathcal{L}}} \cap H$ и $\mathcal{L}_1 \simeq \widetilde{G_{\mathcal{L}_1}} / \widetilde{G_{\mathcal{L}_1}} \cap H$. Комутативната диаграма е директно следствие от Следствие 34 и Лема 36 (i).

□

Теорема 37. *Нека $\pi : D = G_{\mathbb{R}}/V \to G_{\mathbb{R}}/K = S$ е проекция на област на периоди D върху Риманово симетрично пространство S от некомпактен тип, а $U \subset D$ е вариация на структура на Hodge през началото $o \in D$ със затворен образ $W := \pi(U)$ в S. В такъв случай, U е напълно геодезично подпространство на D тогава и само тогава, когато съществува аналитично сечение $\sigma : S \to G_{\mathbb{R}}$ на $\pi_K : G_{\mathbb{R}} \to G_{\mathbb{R}}/K = S$ с $\sigma(\check{o}) = \sigma(K) = e \in G_{\mathbb{R}}$, така че $(W, \oplus_\sigma)$ е лява квази-подгрупа на лявата квази-група $(S, \oplus_\sigma)$, индуцирана от σ.*

Доказателство. Нека $\mathfrak{p}_o$ е Killing ортогоналното допълнение на алгебрата на Lie $\mathfrak{k}_o := \mathrm{Lie}K$ до алгебрата на Lie $\mathfrak{g}_o := \mathrm{Lie}G_{\mathbb{R}}$,

$$\exp : \mathfrak{p}_o \longrightarrow \exp(\mathfrak{p}_o) \subset G_{\mathbb{R}}$$

е ограничението на експоненциалното изображение $\exp : \mathfrak{g}_o \to G_{\mathbb{R}}$ върху $\mathfrak{p}_o$, а

$$\exp_{\check{o}} = \pi_K \exp : T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} S = \mathfrak{p}_o \longrightarrow \exp_{\check{o}}(\mathfrak{p}_o) = S$$

е експоненциалното изображение на $S = G_{\mathbb{R}}/K$ в началото $\check{o} \in S$. Тогава $\exp_{\check{o}}$ и $\exp$ са дифеоморфизми върху своите образи и

$$\sigma := \exp \exp_{\check{o}}^{-1} : S \longrightarrow \exp(\mathfrak{p}_o) \subset G_{\mathbb{R}}$$

е аналитично сечение на $\pi_K : G_{\mathbb{R}} \to G_{\mathbb{R}}/K = S$ с $\sigma(\check{o}) = \exp(0) = e \in G_{\mathbb{R}}$.
Ако $U \subset D$ е напълно геодезична вариация на структура на Hodge, то $W = \pi(U)$ е напълно геодезично подпространство на S по Следствие 26. Прилагаме Теорема 17 и получаваме съществуването на подгрупа на Lie $G(W)$ на $G_{\mathbb{R}}$ с $\mathrm{Lie}G(W) = T^{\mathbb{R}}_o W \oplus [T^{\mathbb{R}}_o W, T^{\mathbb{R}}_o W]$, така че $W = G(W)K/K$ е еквивариантно вложено в $S = G_{\mathbb{R}}/K$ Риманово симетрично подпространство от некомпактен тип. Аналитичното сечение $\sigma = \exp \exp_{\check{o}}^{-1} : S \to G_{\mathbb{R}}$ се ограничава до аналитично сечение $\sigma : W \to G(W)$, защото $\exp_{\check{o}}^{-1}(W) = T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W$ и $\exp(T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W) \subset \mathrm{Lie}G(W) = G(W)$. Да забележим, че $\exp_{\check{o}} : T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} S = \mathfrak{p}_o \to S$ се ограничава до дифеоморфизъм $\exp_{\check{o}} : T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W \to W$, така че за

всяка точка $p \in W$ съществува еднозначно определен допирателен вектор $\alpha \in T^{\mathbb{R}}_{\check{o}}W$ с $\exp_{\check{o}}(\alpha) = p$. За произволни $\exp_{\check{o}}(\alpha), \exp_{\check{o}}(\beta)$ с $\alpha, \beta \in T^{\mathbb{R}}_{\check{o}}W$ да отбележим, че

$$\exp_{\check{o}}(\alpha) \oplus_\sigma \exp_{\check{o}}(\beta) = \sigma(\exp_{\check{o}}(\alpha)) \exp_{\check{o}}(\beta) = \exp(\alpha) \exp_{\check{o}}(\beta) \in G(W)K/K = W,$$

защото $\exp(\alpha) \in G(W)$ и $\exp_{\check{o}}(\beta) \in G(W)K/K = W$. Аналогично, за $\exp_{\check{o}}(\alpha), \exp_{\check{o}}(\beta) \in W$ с $\alpha, \beta \in T^{\mathbb{R}}_{o}W$, елементът $\exp(\alpha) \in G(W)$ принадлежи на групата $G(W)$, заедно със своя обратен $\exp(\alpha)^{-1} \in G(W)$, така че $x_o := \exp(\alpha)^{-1} \exp_{\check{o}}(\beta) \in W$. Съгласно

$$\exp_{\check{o}}(\alpha) \oplus_\sigma x_o = \exp(\alpha) x_o = \exp_{\check{o}}(\beta),$$

x_o е решение на $\exp_{\check{o}}(\alpha) \oplus_\sigma x = \exp_{\check{o}}(\beta)$. Това уравнение има единствено решение в лявата квази-група $(S, \oplus_\sigma)$ и това решение x_o принадлежи на W. Следователно $(W, \oplus_\sigma)$ е лява квази-подгрупа на $(S, \oplus_\sigma)$.
Обратно, за предположим, че $\sigma : S = G_{\mathbb{R}}/K \to G_{\mathbb{R}}$ е аналитично сечение на $\pi_K : G_{\mathbb{R}} \to G_{\mathbb{R}}/K = S$ с $\sigma(\check{o}) = \sigma(K) = e \in G_{\mathbb{R}}$. Такова сечение винаги съществува, защото например $\sigma := \exp \exp_{\check{o}}^{-1} : S \to \sigma(S) \subset G_{\mathbb{R}}$ е такова сечение. Да допуснем, че $(W, \oplus_\sigma)$ е лява квази-подгрупа на $(S, \oplus_\sigma)$. Съгласно Лема 36 (ii), $W = \widetilde{G_o}K/K \simeq \widetilde{G_o}/\widetilde{G_o} \cap K$ е ляво хомогенно пространство на подгрупата $\widetilde{G_o}$ на $G_{\mathbb{R}}$, породена от $\sigma(W)$. Да забележим, че $\sigma(W) \subset G_{\mathbb{R}}$ е затворено подмножество, защото W е затворено подмногообразие на S и дифеоморфизмът $\sigma : W \to \sigma(W)$ е затворено изображение. Понеже $\widetilde{G_o} \cap K$ е компактна подгрупа на $G_{\mathbb{R}}$, произведението

$$\sigma(W)(\widetilde{G_o} \cap K) := \{\sigma(p)k \,|\, p \in W,\, k \in \widetilde{G_o} \cap K\}$$

е затворено подмногообразие на $G_{\mathbb{R}}$. Достатъчно е да докажем съвпадението на множества $\widetilde{G_o} = \sigma(W)(\widetilde{W} \cap K)$, за да получим, че $\widetilde{G_o}$ е затворена, а оттам и подгрупа на Lie на $G_{\mathbb{R}}$. Включването $\sigma(W)(\widetilde{G_o} \cap K) \subseteq \widetilde{G_o}$ е ясно. За обратното включване да забележим, че за всяко $a \in \widetilde{G_o}$ е в сила $\pi_K(a) = aK = \sigma(aK)K \in \widetilde{G_o}K/K = W$. Следователно $a = \sigma(aK)k_o$ за някое $k_o = \sigma(aK)^{-1}a \in \widetilde{G_o} \cap K$ и $\widetilde{G_o} \subseteq \sigma(W)(\widetilde{G_o} \cap K)$. По този начин, $\widetilde{G_o} = \sigma(W)(\widetilde{G_o} \cap K)$ е затворена, а оттам и подгрупа на Lie на $G_{\mathbb{R}}$ и $W = \widetilde{G_o}K/K$ е еквивариантно вложено реално аналитично хомогенно подпространство на $S = G_{\mathbb{R}}/K$. Следващата Лема 38 доказва, че W е напълно геодезично подпространство на S. Прилагаме Следствие 26 и получаваме, че U е напълно геодезично подпространство на D.

$\square$

Лема 38. *Нека $S = G/K$ е Риманово симетрично пространство от некомпактен тип, а $\sigma : S \to G$ е аналитично сечение на $\pi_K : G \to G/K$, $\pi_K(g) = gK$ с $\sigma(\check{o}) = e \in G_{\mathbb{R}}$ за началото $\check{o} = K \in G/K$. Да предположим, че $W = G(W)K/K$ е еквивариантно вложено реално аналитично хомогенно подпространство на S през $\check{o}$ за подгрупата на Lie $G(W) = \sigma(W)[G(W) \cap K]$ на G. Тогава W е напълно геодезично подпространство на S.*

Доказателство. Благодарение на хомогенността на W, достатъчно е да проверим, че W е геодезично в $\check{o} \in W$, за да твърдим, че W е напълно геодезично подмногообразие на S. За тази цел да забележим, че σ е дифеоморфизъм $\sigma : S \to \sigma(S)$ върху образа си и индуцира $\mathbb{R}$-линеен изоморфизъм $(d\sigma)_{\check{o}} : T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} S \to T^{\mathbb{R}}_{e}\sigma(S)$ върху подпространството $T^{\mathbb{R}}_{e}\sigma(S)$ на $T^{\mathbb{R}}_{e}G = \mathrm{Lie}G$. За трансверзалата $\sigma(S)$ на G/K имаме $\sigma(S)\cap K = \{\sigma(K) = e\}$ и $T^{\mathbb{R}}_{e}\sigma(S)\cap T^{\mathbb{R}}_{e}K = T^{\mathbb{R}}_{e}\sigma(S)\cap \mathrm{Lie}K = \{0\}$. Следователно $T^{\mathbb{R}}_{e}\sigma(S)\oplus \mathrm{Lie}K = \mathrm{Lie}G$ и можем да представим фактор-пространството $T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} S \simeq \mathrm{Lie}G/\mathrm{Lie}K$ чрез $T^{\mathbb{R}}_{e}\sigma(S)$. Ако $\sigma(aK) \in \sigma(W) \cap [G(W) \cap K]$ за някое $aK \in W$, то $\sigma(aK) \in K$, така че $aK = \sigma(aK)K = K$ и $\sigma(aK) = \sigma(K) = \sigma(\check{o}) = e$. По този начин, групата на Lie $G(W)$ се оказва изоморфна като гладко многообразие на директното произведение $\sigma(W) \times [G(W) \cap K]$ и $\sigma(W)$ може да се разглежда като подмногообразие на $G(W)$. В резултат, $T^{\mathbb{R}}_{e}\sigma(W)$ е подпространство на $T^{\mathbb{R}}_{e}G(W) = \mathrm{Lie}G(W)$. Ограничението $\sigma : W \to \sigma(W)$ на σ индуцира $\mathbb{R}$-линеен изоморфизъм $(d\sigma)_{\check{o}} : T^{\mathbb{R}}_{\check{o}} W \to T^{\mathbb{R}}_{e}\sigma(W)$ върху подпространството $T^{\mathbb{R}}_{e}\sigma(W)$ на $T^{\mathbb{R}}_{e}\sigma(S) \cap T^{\mathbb{R}}_{e}G(W) = T^{\mathbb{R}}_{e}\sigma(S) \cap \mathrm{Lie}G(W)$. Произволен допирателен вектор към W в $\check{o} \in W$ се представя с $v \in T^{\mathbb{R}}_{e}\sigma(W) \subset T^{\mathbb{R}}_{e}\sigma(S) \cap \mathrm{Lie}G(W)$ и S-геодезичната $\gamma^{v}_{\check{o}} : \mathbb{R} \to S$ с начални условия

$$\gamma^{v}_{\check{o}}(0) = \check{o}, \quad \left.\frac{d\gamma^{v}_{\check{o}}(t)}{dt}\right|_{t=0} = v$$

се разлага в произведение $\gamma^{v}_{\check{o}}(t) = \pi_K \exp(tv)$ на ограничението $\exp : T^{\mathbb{R}}_{e}\sigma(S) \to G$ на експоненциалното изображение $\exp : \mathrm{Lie}G \to G$ на G и на проекцията $\pi_K : G \to S = G/K$. Но, за произволен вектор $v \in \mathrm{Lie}G(W)$ имаме $\exp(tw) \in G(W)$, откъдето

$$\gamma^{v}_{\check{o}}(t) = \pi_K \exp(tv) \in \pi_K G(W) = G(W)K/K = W$$

и $\gamma^{v}_{\check{o}} : \mathbb{R} \to W$ взема стойности в W. Следователно $\gamma^{v}_{\check{o}} : \mathbb{R} \to W$ е W-геодезична и W е напълно геодезично в $\check{o} \in W$.

□

Глава 4

Симетрични и ермитово-симетрични структури на Loos от некомпактен тип върху вариации на структури на Hodge

4.1 Предварителни сведения за симетрични структури на Loos

Риманово симетрично пространство S е Риманово многообразие, чиито точки $x \in S$ са изолирани фиксирани точки на инволютивни изометрии $s_x : S \to S$. В [Loos] Loos забелязва, че някои свойства на s_x характеризират римановите симетрични пространства S.

Твърдение 39. (Loos [Loos]) *Нека $S = G/K$ е Риманово симетрично пространство, $s_x : S \to S$ е инволютивната изометрия на S с фиксирана точка $x \in S$ и*

$$S \times S \longrightarrow S,$$

$$(x, y) \mapsto x.y := s_x(y) \quad \text{за} \quad \forall x, y \in S$$

е бинарната операция в S, индуцирана от изображенията s_x. Тогава:
(i) $\forall x \in S, \quad x.x = x;$
(ii) $\forall x, y \in S, \quad x.(x.y) = y;$
(iii) $\forall x, y, z \in S, \quad x.(y.z) = (x.y).(x.z);$
(iv) за всяка точка $x \in S$ съществува такава околност U на S, че единствената точка $y \in U$ с $x.y = y$ е $y = x$.

Доказателство. Твърдение (i) изразява факта, че $x = s_x(x) = x.x$ е фиксирана точка на s_x за всяко $x \in S$.
След това, (ii) е точно тъждеството $s_x^2 = \mathrm{Id}_S$, от което следва $x.(x.y) = s_x(s_x(y)) = y$ за всички $x, y \in S$.

За да докажем (iii), да забележим, че S е пълно и за произволни точки $y, z \in S$ съществува (необезателно единствена) геодезична, с минимална дължина между тях $\gamma : \mathbb{R} \to S$, за която $\gamma(0) = y$ и $\gamma(1) = z$. Геодезичната симетрия $s_y : S \to S$ изпраща $z = \gamma(1)$ в $s_y(z) = s_{\gamma(0)}(\gamma(1)) = \gamma(-1)$, а диференциалът $(ds_y)_y : T_y^{\mathbb{R}} S \to T_y^{\mathbb{R}} S$ в y е умножение с $-1 \in \mathbb{R}$. Изометрията $s_x : S \to S$ трансформира геодезичната γ в геодезичната с минимална дължина $\gamma' = s_x \gamma : \mathbb{R} \to S$ и равенството $s_{\gamma'(0)}(\gamma'(1)) = \gamma'(-1)$ е точно равенството $s_{s_x(y)}(s_x(z)) = s_x(s_y(z))$.
По отношение на (iv), всяка точка x от Риманово симетрично пространство $S = G/K$ е изолирана точка на $s_x : S \to S$. Затова съществува такава околност U на x в S, че от $x.y = s_x(y) = y$ за някое $y \in U$ следва $y = x$.

□

Гореописаните разсъждения водят Loos до следното

Определение 40. *Симетрично пространство на Loos или Loos-симетрично пространство $(S, .)$ е пълно диференцируемо многообразие S с диференцируема операция*

$$S \times S \longrightarrow S,$$

$$(x, y) \mapsto x.y,$$

която удовлетворява на следните условия
(i) $\forall x \in S, \quad x.x = x$;
(ii) $\forall x, y \in S, \quad x.(x.y) = y$;
(iii) $\forall x, y, z \in S, \quad x.(y.z) = (x.y).(x.z)$;
(iv) всяка точка $x \in S$ има такав околност U в S, че единствената точка $y \in U$ с $x.y = y$ е $y = x$.

Теорема 41. ([Loos], [NagyStrambach]) *Ако $(S, .)$ е Loos-симетрично пространство, то $S = G/K$ е Риманово симетрично пространство и операцията $(x, y) \mapsto x.y$ се индуцира от геодезичните симетрии върху S.*

Идея за доказателство: Всяка точка $x \in S$ има околност U_o в S, в която x е единствената фиксирана точка на $s_x : S \to S$ и съществува хомеоморфизъм $h : U_o \to h(U_o)$ върху околност $h(U_o) \subseteq \mathbb{R}^n$ на началото $0^n \in \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Заменяйки U_o с $U := U_o \cap s_x(U_o)$, получаваме s_x-инвариантна околност на x.
Твърдим, че диференциалът на инволюцията $s_x : U \to U$ с единствена фиксирана точка $x \in U$ е умножението с $-1 \in \mathbb{R}$ в реалното допирателно пространство $T_x^{\mathbb{R}} U$ на U в x. За да го проверим, нека $n := \dim_{\mathbb{R}} S$ и да изберем базис $e_1, \dots, e_n$ of $T_x^{\mathbb{R}} U$. Тогава $(ds_x)_x(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$ за някои $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Използвайки

$$\mathrm{Id}_{T_x^{\mathbb{R}} U} = d(\mathrm{Id}_U) = d(s_x^2) = (ds_x)_x (ds_x)_x,$$

получаваме

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (ds_x)_x(e_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} e_k \right) \quad \text{за всяко естествено} \quad 1 \leq i \leq n.$$

С други думи,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{jk} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{за } 1 \leq i = k \leq n, \\ 0 & \text{когато } 1 \leq i \neq k \leq n, \end{cases}$$

и квадратът на матрицата $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ е точно $A^2 = I_n$, където с $I_n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ означаваме единичната матрица. Тъй като $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ е от краен ред, всички жорданови блокове на A са с размер 1, т.е., A е диагонализируема. Нека

$$A = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} B^{-1} \quad \text{за някоя} \quad B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),$$

Тогава от $A^2 = I_n$ следва, че $\lambda_i^2 = 1$ за всяко $1 \leq i \leq n$, и следователно $\lambda_i = 1$ или -1. Ако съществува $\lambda_{i_o} = 1$, то s_x оставя на място цяла крива в S, което е в противоречие с избора на околност U с единствена фиксирана точка $x \in U$ под действието на s_x. Следователно $\lambda_i = -1$ за всички $1 \leq i \leq n$ и $A = -I_n$. Това доказва, че диференциалът $(ds_x)_x : T_x^{\mathbb{R}}U \to T_x^{\mathbb{R}}U$ действа като умножение с $-1 \in \mathbb{R}$.
С известна неточност предполагаме, че координатният хомоморфизъм $h : U \to \mathbb{R}^n \equiv T_x^{\mathbb{R}}U$ взема стойности в допирателното пространство към U в x. Тогава $h(U)$ е околност на $0 \in T_x^{\mathbb{R}}U$ върху $T_x^{\mathbb{R}}U$ и за достатъчно малки $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ кълбото

$$B(0,\varepsilon) := \left\{ v = (v_1,\dots,v_n) \in T_x^{\mathbb{R}}U \;\middle|\; ||v||^2 = \sum_{j=1}^{n} v_j^2 < \varepsilon \right\}$$

се съдържа в $h(U)$. За всяко $v \in B(0,\varepsilon) \subset T_x^{\mathbb{R}}U$ съществува дифеоморфизъм

$$\gamma_x^v : (-1,1) \longrightarrow U,$$
$$\gamma_x^v(t) := h^{-1}(tv),$$

който ще разглеждаме като локална геодезична на S през $x \in S$. За всеки две точки $p = \gamma_x^v(s)$, $q = \gamma_x^v(t)$ от някоя локална геодезична $\gamma_x^v : (-1,1) \to U \subset S$, съществува паралелен пренос

$$\Pi_q^p : T_p^{\mathbb{R}}S \longrightarrow T_q^{\mathbb{R}}S,$$

който се определя , като единственото $\mathbb{R}$-линейно изображение, запазващо евклидовата дължина на допирателнте вектори и ориентираните им ъгли с допирателните вектори на γ_x^v в p и q. Паралелният пренос върху произволна гладка крива върху S се дефинира чрез приближаване на кривата с локални геодезични, използвайки паралелния пренос по коя да е от локалните геодезични и граничен преход върху получените вектори. Известно е, че изборът на паралелен пренос по гладки криви в S е еквивалентен на задаване на афинна свързаност ∇ върху S. По определение , дифеоморфизмите $s_x : S \to S$ са геодезични симетрии, т.е., за допирателни вектри $u \in T_x^{\mathbb{R}}S$ с достатъчно малка дължина имаме, че $s_x \exp_x(u) = \exp_x(-u)$. Оказва се, че ∇ е симетрична свързаност, чийто тензор на кривина R е инвариантен относно паралелен пренос, т.е. $\nabla R = 0$. Това е достатъчно за да твърдим, че S е риманово симетрично пространство.

4.2 Loos-симетрични подпространства на симетрични пространства на Loos от некомпактен тип

Да забележим, че ако $S = G/K$ е риманово симетрично пространство от некомпактен тип то за произволни $x, y \in S$, геодезичната симетрия

$$s_x : S = G/K \longrightarrow G/K = S,$$

$$\forall v \in T_x^{\mathbb{R}} S, \quad s_x(\exp_x(v)) = \exp_x(-v)$$

има единствена фиксирана точка x върху цялото S. Причина за това е, че S е пълно, едносвързано многообразие с неположителна секционна кривина, така че експоненциалното изображение

$$\exp_x : T_x^{\mathbb{R}} S \longrightarrow S$$

е глобален дифеоморфизъм. В резултат, равенството $\exp_x(v) = \exp_x(-v)$ for $v \in T_x^{\mathbb{R}} S$ е еквивалентно на $v = -v$, което очевидно е вярно само за $v = 0_{T_x^{\mathbb{R}} S}$ и $\exp_x(v) = \exp_x(0_{T_x^{\mathbb{R}} S}) = x$. Използвайки това наблюдение, формулираме следното определение.

Определение 42. *Loos-симетрично пространство $(S, .)$ от некомпактен тип е Loos-симетрично пространство, в което за произволни е $x, y \in S$ равенството $x.y = y$ е изпълнено точно когато $x = y$.*

За да определим понятието Loos-симетрично подпространство, доказваме лявата и дясна обратимост на операцията на Loos.

Твърдение 43. *Ако $(S, .)$ е Loos-симетрично пространство от некомпактен тип, то $S = G/K$ е Риманово симетрично пространство от некомпактен тип и $(S, .)$ е квази-група без ляв или десен неутрален елемент относно операцията на Loos.*

Доказателство. Най-напред трябва да покажем, че ако x е единствената фиксирана точка на геодезичната симетрия $s_x : S \to S$ върху Римановото симетрично пространство $S = G/K$, то S е от некомпактен тип. Да допуснем противното и да изберем начало $\check{o} \in S$. Съгласно Твърдение VII.10.2 от книгата на Helgason [Helgason], всяко компактно Риманово глобално симетрично пространство S има затворена геодезична. $\gamma : \mathbb{R} \to S$. Нека $t_o \in \mathbb{R}^{>0}$ е най-малкото реално положително число, за което $\gamma(t + t_o) = \gamma(t)$ за всяко $t \in \mathbb{R}$, т.е., $t_o \in \mathbb{R}^{>0}$ е период на γ. Избираме начало $\gamma(0) = \check{o}$ и означаваме

$$v := \frac{d\gamma(t)}{dt}\Big|_{t=0} \in T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} S \subset \mathrm{Lie} G,$$

за да означим $\gamma = \gamma_{\check{o}}^v$. Геодезичната $\gamma_{\check{o}}^v = \pi_K \widetilde{\gamma_{\check{o}}^v}$ е композиция на еднопараметрична подгрупа $\widetilde{\gamma_{\check{o}}^v} : \mathbb{R} \to G$ на G с естествената проекция $\pi_K : G \to G/K$, $\pi_K(g) = gK$. Експоненциалното изображение $\exp_{\check{o}} : T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} S \to S = G/K$ в началото $\check{o} \in S$ се пропусква през експоненциалното изображение $\exp : \mathrm{Lie} G \to G$ на G, т.е., $\exp_{\check{o}} = \pi_K \exp$. С други думи,

$$\forall v \in T_{\check{o}}^{\mathbb{R}} S, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \gamma_{\check{o}}^v(t) = \widetilde{\gamma_{\check{o}}^v}(t) K = \exp(tv) K = \exp_{\check{o}}(tv). \tag{4.1}$$

Следователно периодичността на геодезичната $\gamma_{\breve{o}}^{v}\left(-\frac{t_o}{2}\right) = \gamma_{\breve{o}}^{v}\left(t_o - \frac{t_o}{2}\right) = \gamma_{\breve{o}}^{v}\left(\frac{t_o}{2}\right)$ е еквивалентна на $\exp_{\breve{o}}\left(-\frac{t_o}{2}v\right) = \exp_{\breve{o}}\left(\frac{t_o}{2}v\right)$ и геодезичната симетрия

$$s_{\breve{o}} : S \longrightarrow S,$$

$$s_{\breve{o}}(\exp_{\breve{o}}(w)) = \exp_{\breve{o}}(-w) \quad \text{за} \quad \forall w \in T_{\breve{o}}^{\mathbb{R}}S$$

фиксира точката $\exp_{\breve{o}}\left(\frac{t_o}{2}v\right)$. От определението на Loos-симетрично пространство от некомпактен тип следва, че $\gamma_{\breve{o}}^{v}\left(\frac{t_o}{2}\right) = \exp_{\breve{o}}\left(\frac{t_o}{2}v\right) = \breve{o} = K$. Сега,

$$\gamma_{\breve{o}}^{v}\left(t + \frac{t_o}{2}\right) = \widetilde{\gamma_{\breve{o}}^{v}}\left(t + \frac{t_o}{2}\right)K = \widetilde{\gamma_{\breve{o}}^{v}}(t)\widetilde{\gamma_{\breve{o}}^{v}}\left(\frac{t_o}{2}\right)K = \widetilde{\gamma_{\breve{o}}^{v}}(t)\gamma_{\breve{o}}^{v}\left(\frac{t_o}{2}\right) = \widetilde{\gamma_{\breve{o}}^{v}}(t)K = \gamma_{\breve{o}}^{v}(t)$$

за всяко $t \in \mathbb{R}$. Това противоречи на избора на $t_o \in \mathbb{R}^{>0}$, като минимален период на $\gamma_{\breve{o}}^{v} : \mathbb{R} \to S$, и показва, че Римановото симетрично пространство $S = G/K$ е от некомпактен тип.

Вземайки предвид $a.(a.b) = b$ за всички $a, b \in (S, .)$ забелязваме, че $a.b \in S$ е решение на $a.x = b$. Нека $x_o \in S$ е решение на $a.x = b$. Експоненциалното изображение $\exp_a : T_a^{\mathbb{R}}S \to S$ на Римановото симетрично пространство от некомпактен тип S е глобален дифеоморфизъм. Следователно допирателният вектор $v := \exp_a^{-1}(x_o) \in T_a^{\mathbb{R}}S$ е определен коректно и $a.x_o = s_a(\exp_a(v)) = \exp_a(-v) = b$ е еквивалентно на $-v = \exp_a^{-1}(b)$. Съгласно $s_a(\exp_a(w)) = \exp_a(-w)$ за всяко $w \in T_a^{\mathbb{R}}S$, проверяваме непосредствено, че

$$x_o = \exp_a(-\exp_a^{-1}(b)) = s_a(\exp_a \exp_a^{-1}(b)) = s_a(b) = a.b.$$

Това доказва единствеността на решението на уравнение от тип $a.x = b$ в S.

Твърдим, че уравнение от вида $y.a = s_y(a) = b$ също има единствено решение $y_o \in S$ за всички $a, b \in S$. Ако $a = b$, тогава $y = a$ е решение и е единствено съгласно Определение 42 за Loos-симетрично пространство от некомпактен тип. Нека $a, b \in S$ са различни точки. Тъй като пространството S е пълно и секционната кривина е неположителна, съществува единствена геодезична $\gamma : \mathbb{R} \to S$, за която $\gamma(0) = 1$ и $\gamma(1) = b$. Нека $\gamma_a^{\exp_a^{-1}(b)} : \mathbb{R} \to S$ е геодезичната, за която

$$\gamma_a^{\exp_a^{-1}(b)}(0) = a \quad \text{и} \quad \left.\frac{d\gamma_a^{\exp_a^{-1}(b)}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \exp_a^{-1}(b).$$

От (4.1) следва $\gamma_a^{\exp_a^{-1}(b)}(1) = \exp_a(\exp_a^{-1}(b)) = b$, и получаваме, че

$$\gamma \equiv \gamma_a^{\exp_a^{-1}(b)} : \mathbb{R} \longrightarrow S$$

съвпадат. Точката

$$c := \gamma_a^{\exp_a^{-1}(b)}\left(\frac{1}{2}\right) = \exp_a\left(\frac{\exp_a^{-1}(b)}{2}\right) = \gamma_a^{\frac{\exp_a^{-1}(b)}{2}}(1)$$

е средата на геодезичната отсечка между a и b, така че $s_c(a) = b$ и $c \in S$ е решение на $y.a = b$.

За произволно решение $d \in S$ на $y.a = s_y(a) = b$, да разгледаме геодезичната $\gamma_d^{\exp_d^{-1}(a)} : \mathbb{R} \to S$ с

$$\gamma_d^{\exp_d^{-1}(a)}(0) = d \quad \text{и} \quad \frac{d\gamma_d^{\exp_d^{-1}(a)}(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \exp_d^{-1}(a).$$

Тогава $\gamma_d^{\exp_d^{-1}(a)}(1) = a$ и

$$b = s_d(a) = s_d(\exp_d \exp_d^{-1}(a)) = \exp_d(-\exp_d^{-1}(a)) = \gamma_d^{\exp_d^{-1}(a)}(-1),$$

според (4.1) и определението на s_d. Следователно a и b принадлежат на образа на геодезичната $\gamma_d^{\exp_d^{-1}(a)} : \mathbb{R} \to S$ и $\gamma_a^{\exp_a^{-1}(b)}(\mathbb{R}) = \gamma_d^{\exp_d^{-1}(a)}(\mathbb{R})$ съвпадат като подмножества на S. В частност $c = \gamma_d^{\exp_d^{-1}(a)}(\tau) \in \gamma_d^{\exp_d^{-1}(a)}(\mathbb{R})$ за някое $\tau \in \mathbb{R}$. Като приложим s_c върху $s_c(a) = b = s_d(a)$ получаваме, че $s_c s_d(a) = a$. Лема 6.3.2 от книгата на Jost [Jost] дава

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad s_c s_d \gamma_d^{\exp_d^{-1}(a)}(t) = \gamma_d^{\exp_d^{-1}(a)}(t + 2\tau) \quad d = \gamma_d^{\exp_a^{-1}(a)}(0) \quad \text{и} \quad c = \gamma_d^{\exp_d^{-1}(a)}(\tau).$$

В частност,

$$\gamma_d^{\exp_d^{-1}(a)}(1) = a = s_c s_d(\gamma_d^{\exp_d^{-1}(a)}(1)) = \gamma_d^{\exp_d^{-1}(a)}(1 + 2\tau).$$

Понеже геодезичната $\gamma_d^{\exp_d^{-1}(a)} : \mathbb{R} \to S$ върху Риманово симетрично пространство от некомпактен тип S е глобален дифеоморфизъм, оттук следва че $1 = 1 + 2\tau$ и $\tau = 0$. Това доказва, че $c = \gamma_d^{\exp_d^{-1}(a)}(0) = d$ е единственото решение на $y.a = b$ от S.
Да допуснем, че $e_r \in S$ е десен неутрален елемент, т.е. $x.e_r = x$ за $\forall x \in S$. Използвайки аксиомите (i) и (ii) от Определение 40 получаваме

$$e_r = x.(x.e_r) = x.x = x \quad \text{за} \quad \forall x \in S.$$

Това противоречи на съществуването на безбройно много точки върху Римановото симетрично пространство S от некомпектен тип и доказва несъществуването на десен неутрален елемент на $(S, .)$.
Ако $e_l \in S$ е ляв неутрален елемент на $(S, .)$, то $e_l.x = x$ за $\forall x \in S$. Съгласно Определение 42 за Loos-симетрично пространство от некомпактен тип, оттук следва $x = e_l$. Противоречието установява несъществуването на ляв неутрален елемент на $(S, .)$.

□

Определение 44. *Нека $(S, .)$ е Loos-симетрично пространство от некомпактен тип. За произволни $a, b \in S$ да означим с $x_o(a, b) \in S$ единственото решение на уравнението $a.x = b$, а с $y_o(a, b) \in S$ - единственото решение на $y.a = b$. Подмногообразие S_1 на S ще наричаме Loos-симетрично подпространство $(S_1, .)$ на $(S, .)$ ако за произволни $a, b \in S_1$ е в сила $a.b, x_o(a, b), y_o(a, b) \in S_1$.*

Теорема 45. *Нека $S = G/K$ е Риманово симетрично пространство от некомпактен тип и $W \subset S$ е подмногообразие на S. Тогава W е напълно геодезично подпространство на S, тогава и само тогава когато $(W, .)$ е Loos-симетрично подпространство на$(S, .)$.*
В частност, ако $D = G_{\mathbb{R}}/V$ е област на периоди и $\pi : D = G_{\mathbb{R}}/V \to S = G_{\mathbb{R}}/K$ проекцията на D върху Риманово симетрично пространство $S = G_{\mathbb{R}}/K$ от некомпактен тип, то $U \subset D$ е напълно геодезична вариация на структура на Hodge тогава и само тогава когато $(\pi(U), .)$ е Loos-симетрично подпространство на $(S, .)$.

Доказателство. Ако W е напълно геодезично подмногообразие на S през началото $\check{o} = K \in W$ тогава по Теорема 17 допирателното пространство $T^{\mathbb{R}}_{\check{o}}W \subset T^{\mathbb{R}}_{\check{o}}S = \mathfrak{p}_o$ е тройна система на Lie и съществува подгрупа на Lie $G(W)$ на $G_{\mathbb{R}}$ с алгебра на Lie е $LieG(W) = T^{\mathbb{R}}_{\check{o}}W \oplus [T^{\mathbb{R}}_{\check{o}}W, T^{\mathbb{R}}_{\check{o}}W]$, така че $W = G(W)K/K$ е еквивариантно вложено в S Риманово симетрично подпространство от некомпактен тип. Във всяка точка $a \in W$ експоненциалното изображение

$$\exp^W_a = \pi^W_a \exp : T^{\mathbb{R}}_a W \longrightarrow W$$

е композиция на експонентата на матрица $\exp : T^{\mathbb{R}}_a W \to G(W)_{\mathbb{R}}$ и проекцията $\pi^W_a : G(W)_{\mathbb{R}} \to G(W)_{\mathbb{R}}/\mathrm{Stab}_{G(W)_{\mathbb{R}}}(a)$ по модул стабилизатора на a в $G(W)_{\mathbb{R}}$. Аналогично,

$$\exp^S_a = \pi^S_a \exp : T^{\mathbb{R}}_a W \longrightarrow S$$

за $\pi^S_a : G_{\mathbb{R}} \to G_{\mathbb{R}}/\mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{R}}}(a)$. Подпространството $W \subset S$ е напълно геодезично тогава и само тогава когато

$$\exp^S_a \Big|_{T^{\mathbb{R}}_a W} = \exp^W_a \,. \tag{4.2}$$

Следователно, за всички $a, b \in W$ с $v := (\exp^S_a)^{-1}(b) \in T^{\mathbb{R}}_o S$, $v_o := (\exp^W_a)^{-1}(b) \in T^{\mathbb{R}}_a W$ имаме равенството $\exp^S_a(v) = b = \exp^W_a(v_o) = \exp^S_a(v_o)$, откъдето $v = v_o$, предвид обратимостта на $\exp^S_a : T^{\mathbb{R}}_a S \to S$. За всяко $a \in W$ да означим с $s_a : S \to S$ геодезичната симетрия на S с фиксирана точка a и нека $s^W_a : W \to W$ е геодезичната симетрия на W с фиксирана точка a. Тогава

$$a.b = s_a(b) = s_a(\exp^S_a(v)) = \exp^S_a(-v) =$$
$$= \exp^W_a(-v) = s^W_a(\exp^W_a(v)) = s^W_a(\exp^S_a(v)) = s^W_a(b) \in W.$$

Според Лема 43 единственото решение на $a.x = b$ в S е $x_o(a, b) = a.b$. В случай, че $a, b \in W$, от горните разсъждения следва $x_o(a, b) \in W$.
За произволни $a, b \in W$, от Лема 43 получаваме, че единственото решение на $y.a = b$ в S е

$$y^S_o = \exp^S_a \left(\frac{(\exp^S_a)^{-1}(b)}{2} \right).$$

Сега от (4.2) извеждаме, че

$$y^S_o = \exp^W_a \left(\frac{(\exp^W_a)^{-1}(b)}{2} \right) \in W$$

е единственото решение на $y.a = b$ от W и $(W, .)$ е Loos-симетрично подпространство на$(S, .)$.
Нека $(W, .)$ е Loos-симетрично подпространство на Loos-симетрично пространство $(S, .)$ от некомпактен тип. Тогава $(W, .)$ е Loos-симетрично пространство от некомпактен тип, а оттам и Риманово симетрично пространство от некомпактен тип $W = G(W)_{\mathbb{R}}/K(W)_{\mathbb{R}}$. Твърдим, че $G(W)$ е подгрупа на $G_{\mathbb{R}}$. За целта, да отбележим, че за произволно $a \in W$, геодезичната симетрия $s_a : S \to S$ на $S = G_{\mathbb{R}}/K$ се ограничава до изображение $s_a : W \to W$. За произволно $b \in W$, единственото решение $x_o(a, b)$ на $s_a(x) = a.x = b$ от S принадлежи на W. Това доказва обратимостта на $s_a : W \to W$. Тъй като $s_a(a) = a$ и $(ds_a)_a = -\mathrm{Id}_{T_a^{\mathbb{R}} W}$, инволюцията $s_a : W \to W$ съвпада с геодезичната симетрия $s_a^W : W \to W$ на W, асоциирана с $a \in W$. Всички $s_a^W \in G(W)$ са изометрии на Римановото симетрично пространство $W = G(W)/K(W)$ и групата на Lie $G(W)$ се поражда от $s_a^W = s_a|_W$ с $a \in W$. Това позволява разглеждането на $G(W)$ като подгрупа на $G_{\mathbb{R}}$.
Групата на Lie $G(W)$ действа транзитивно върху подпространството W на S. Затова $W = G(W)K/K$ е $G(W)$-орбитата на началото $\check{o} = K \in W$ и $W \simeq G(W)/G(W) \cap K$. В частност, $K(W) = \mathrm{Stab}_{G(W)}(\check{o}) = G(W) \cap \mathrm{Stab}_{G_{\mathbb{R}}}(\check{o}) = G(W) \cap K$.
За всяка точка $a \in S = G_{\mathbb{R}}/K$, геодезичната симетрия $s_a : S \to S$ съответства на инволютивен автоморфизъм

$$\sigma_a : G_{\mathbb{R}} \longrightarrow G_{\mathbb{R}},$$

$$\sigma_a(g) = s_a g s_a \quad \text{for} \quad \forall g \in G_{\mathbb{R}}$$

на групата $G_{\mathbb{R}}$ (виж Теорема IV.3.3 от [Helgason]). В частност, за началото $\check{o} = K \in G_{\mathbb{R}}/K$, диференциалът $(d\sigma_{\check{o}})_e : \mathrm{Lie}G_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Lie}G_{\mathbb{R}}$ на $\sigma_{\check{o}}$ в неутралния елемент $e \in G_{\mathbb{R}}$ съвпада с Картановата инволюция на $\mathfrak{g}_o = \mathrm{Lie}G_{\mathbb{R}}$ с фиксирани точки $\mathrm{Lie}K$ и собствено пространство $\mathfrak{p}_o$, отговарящо на собствената стойност(-1). Да означим с $s_a^W = s_a|_W$ инволютивните автоморфизми

$$\sigma_a^W : G(W) \longrightarrow G(W),$$

$$\forall g \in G(W), \quad \sigma_a^W(g) = s_a^W g s_a^W = s_a g s_a,$$

реализиращи ограниченията на $\sigma : G_{\mathbb{R}} \to G_{\mathbb{R}}$ върху $G(W)$ за всички $a \in W$. Следователно, Картановата инволюция $(d\sigma_{\check{o}})_e : \mathrm{Lie}G_{\mathbb{R}} \to \mathrm{Lie}G_{\mathbb{R}}$ на $\mathrm{Lie}G_{\mathbb{R}}$ се ограничава до Картановата инволюция

$$(d\sigma_{\check{o}}^W)_e = (d\sigma_{\check{o}})_e : \mathrm{Lie}G(W) \longrightarrow \mathrm{Lie}G(W)$$

на $\mathfrak{g}(W) = \mathrm{Lie}G(W)$ и $\mathfrak{g}(W)$ е $(d\sigma_{\check{o}})_e$-инвариантно. Това позволява да представим $\mathfrak{g}(W) = \mathfrak{g}(W)^{(1)} \oplus \mathfrak{g}(W)^{(-1)}$ като директна сума на собствените подпространства $\mathfrak{g}(W)^{(\varepsilon)}$, отговарящи на собствените стойности $\varepsilon = \pm 1$ на изображението $(d\sigma_o)_e$. Тъй като $\mathfrak{g}(W)$ е подпространство на $\mathfrak{g}_o = \mathrm{Lie}G_{\mathbb{R}}$, имаме $\mathfrak{g}(W)^{(\varepsilon)} = \mathfrak{g}(W) \cap \mathfrak{g}_o^{(\varepsilon)}$ за съответните собствени подпространства $\mathfrak{g}_o^{(\varepsilon)}$ на $(d\sigma_o)_e$ в $\mathfrak{g}_o$. Сега от $\mathfrak{g}_o^{(1)} = \mathrm{Lie}K$ и $\mathfrak{g}_o^{(-1)} = \mathfrak{p}_o$ следва, че

$$\mathfrak{g}(W) = [\mathfrak{g}(W) \cap \mathrm{Lie}K]] \oplus [\mathfrak{g}(W) \cap \mathfrak{p}_o].$$

По този начин получаваме, че допирателното пространство кам W в началото $\check{o} \in W$ се отъждествява естествено с

$$T^{\mathbb{R}}_{\check{o}}W = T^{\mathbb{R}}_{\check{o}}(G(W)/G(W) \cap K) = \mathfrak{g}(W)/\mathfrak{g}(W) \cap \mathrm{Lie}K = \mathfrak{g}(W) \cap \mathfrak{p}_o.$$

За да докажем, че подмногообразието $W \subset S$ е геодезично в $\check{o} \in W$ да забележим, че S-геодезичната, допираща се до $v \in T^{\mathbb{R}}_{\check{o}}W = \mathfrak{g}(W) \cap \mathfrak{p}_o$ в $\check{o} \in W$ е $\gamma^v_{\check{o}} : \mathbb{R} \to S$, $\gamma^v_{\check{o}}(t) = \pi_K \exp(tv)$ за всяко $t \in \mathbb{R}$. Предвид $\exp(tv) \in \exp \mathfrak{g}(W) = G(W)$, става ясно че

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \gamma^v_{\check{o}}(t) \in \pi_K G(W) = G(W)K/K = W.$$

Следователно $\gamma^v_{\check{o}} : \mathbb{R} \to W$ е W-геодезична и $W \subset S$ е геодезично в $\check{o} \in W$. Поради хомогенността на $W \simeq G(W)/G(W) \cap K$, това е достатъчно за пълната геодезичност на W в S.
Последният извод от твърдението се получава директно от Следствие 26, в което установяваме че вариация на структура на Hodge U е напълно геодезично подпространство на D тогава и само тогава когато проекцията и $\pi(U)$ е напълно геодезично подмногообразие на S.

$\square$

4.3 Loos-ермитови симетрични пространства от некомпактен тип

Да припомним, че Риманово симетрично пространство от некомпактен тип G/K е ермитово симетрично, тогава и само тогава когато максималната компактна подгрупа K на G има нетривиален център Z_K, изоморфен на окръжност S^1 (виж Теорема VIII.6.1 от [Helgason]). В тази ситуация, като разгледаме присъединеното действие на $\mathfrak{g}_o = \mathrm{Lie}G_{\mathbb{R}}$ върху себе си, ограничено до алгебрата на Ли $\mathrm{Lie}Z_K$ на Z_K, тя действа с умножение с чисто имагинерно комплексно число $\sqrt{-1}r \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$. В частност, комплексната структура $J_{\check{o}} : T^{\mathbb{R}}_{\check{o}}G/K \to T^{\mathbb{R}}_{\check{o}}G/K$ в началото $\check{o} \in G/K$ принадлежи на $\mathrm{Lie}Z_K$. Използвайки глобално дифеоморфното експоненциално изображение $\exp_{\check{o}} = \pi_K \exp : T^{\mathbb{R}}_{\check{o}}G/K \to G/K$, определяме дифеоморфизма

$$j_{\check{o}} : G/K \longrightarrow G/K,$$

$$\forall u \in T^{\mathbb{R}}_{\check{o}}G/K = \mathfrak{p}_o, \quad j_{\check{o}}(\exp_{\check{o}}(u)) := \exp_{\check{o}}(J_{\check{o}}u).$$

Ако $s_{\check{o}} : G/K \to G/K$, $s_{\check{o}}(\exp_{\check{o}}(u)) := \exp_{\check{o}}(-u)$ за всяко $u \in T^{\mathbb{R}}_{\check{o}}G/K = \mathfrak{p}_o$ е геодезичната симетрия на G/K в $\check{o} \in G/K$ то $j^2_{\check{o}} = s_{\check{o}}$, тъй като

$$\forall u \in \mathfrak{p}_o, \quad j^2_{\check{o}}(\exp_{\check{o}}(u)) = \exp_{\check{o}}(J^2_{\check{o}}(u)) = \exp_{\check{o}}(-u).$$

Определение 46. *Loos-ермитово симетрично пространство от некомпактен тип е диференцируемо многообразие S с гладка бинарна операция*

$$S \times S \longrightarrow S,$$

$$(x, y) \mapsto x * y,$$

която изпълнява следните условия
(i) $\forall x \in S, \quad x * x = x;$
(ii) $\forall x, y \in S, \quad x * \{x * [x * (x * y)]\} = y;$
(iii) $\forall x, y, z \in S, \quad x * (y * z) = (x * y) * (x * z);$
(iv) ако $x * (x * y) = y$ *за някои* $x, y \in S$, *то* $x = y$.

Твърдение 47. *Всяко ермитово симетрично пространство от некомпактен тип* $S = G/K$ *е Loos-ермитово симетрично пространство от некомпактен тип* $(S, *)$ *с бинарна операция*

$$S \times S \longrightarrow S,$$
$$\forall x, y \in S, \quad (x, y) \mapsto x * y = j_x(y) := \exp_x J_x \exp_x^{-1}(y),$$

където $\exp_x : T_x^{\mathbb{R}} G/K \to G/K$ *е експоненциалното изображение на* G/K *в* $x \in G/K$ *и* $J_x : T_x^{\mathbb{R}} G/K \to T_x^{\mathbb{R}} G/K$ *е комплексната структура в* x.

Доказателство. Трябва да се проверят аксиомите за Loos-ермитово симетрично пространство от некомпактен тип. Първо да забележим, че от $\exp_x^{-1}(x) = 0 \in T_x^{\mathbb{R}} G/K$ веднага следва, че

$$\forall x \in G/K, \quad x * x = j_x(x) = \exp_x J_x \exp_x^{-1}(x) = \exp_x J_x(0) = \exp_x(0) = x.$$

След това имаме $j_x^s = (\exp_x J_x \exp_x^{-1})^s = \exp_x J_x^s \exp_x^{-1}$ за всички $s \in \mathbb{N}$, $x \in S$. В частност, за $s = 4$ получаваме $j_x^4 = \mathrm{Id}_S$ и прилагаме към $y \in S$, за да докажем (ii).
За да докажем третата аксиома на Loos-ермитово симетрично пространство от некомпактен тип да обърнем внимание, че $j_x : G/K \to G/K$, $j_x(y) := \exp_x J_x \exp_x^{-1}(y)$ са холоморфни изометрии за G-инвариантната метрика. Наистина, за произволни $y, z \in G/K$ разстоянието

$$d(j_x(y), j_x(z)) = d(\exp_x J_x \exp_x^{-1}(y), \exp_x J_x \exp_x^{-1}(z)) =$$
$$= d(\exp_x \exp_x^{-1}(y), \exp_x \exp_x^{-1}(z)) = d(y, z),$$

се запазва, тъй като комплексната структура $J_x \in \mathrm{Lie} Z_K \subset \mathrm{Lie} K \subset \mathrm{Lie} G$ е диференциал на изометрия. Имайки предвид, че G и следователно K се състоят от холоморфни изометрии на G/K, правим заключението, че $j_x : G/K \to G/K$ е холоморфно изображение.
Твърдим, че диаграмата е комутативна

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "j_x"] \arrow[d, "j_y"] & S \arrow[d, "j_{j_x(y)}"] \\ S \arrow[r, "j_x"] & S \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

за произволни $x, y \in S$. Ако $v \in T_y^{\mathbb{R}} S$ е допирателен вектор към S в y, да означим с $\gamma_y^v : \mathbb{R} \to S$ геодезичната, през $y = \gamma_y^v(0)$, с допирателен вектор

$$\left. \frac{d\gamma_y^v(t)}{dt} \right|_{t=0} = v \quad \text{в} \quad y.$$

В доказателството на Лема 43 установихме, че за произволни различни точки $y, z \in S$ векторът $\exp_y^{-1}(z) \in T_y^{\mathbb{R}} S$ е ненулев и кривата

$$\gamma_y^{\exp_y^{-1}(z)}(t) : \mathbb{R} \longrightarrow S$$

е единствената геодезична с $\gamma_y^{\exp_y^{-1}(z)}(0) = y$ и $\gamma_y^{\exp_y^{-1}(z)}(1) = z$. Следователно

$$S = \bigcup_{v \in T_y S \setminus \{0\}} [\gamma_y^v(\mathbb{R})]$$

се покрива от обединението на образите на $\gamma_y^v : \mathbb{R} \to S$ за всички ненулеви вектори $v \in T_y^{\mathbb{R}} S$. Всъщност, достатъчно е да вземем по един ненулев вектор v от всяка реална права $T_y^{\mathbb{R}} S$ през началото $0 \in T_y^{\mathbb{R}} S$, за да покрием S. Комутативността на диаграмата (4.3) ще се изведе с доказване на съвпадението

$$j_{j_x(y)} j_x \gamma_y^v(t) = j_x j_y \gamma_y^v(t) : \mathbb{R} \longrightarrow S \tag{4.4}$$

на гладки криви в S. Използвайки (4.1) забелязваме, че геодезичните върху S са проекции на 1-параметрични подгрупи на G, така че $\gamma_y^v(t) = \gamma_y^{tv}(1) = \exp_y(tv)$. Следователно за произволни $v \in T_y^{\mathbb{R}} S$, $t \in \mathbb{R}$ имаме

$$j_y \gamma_y^v(t) = j_y \exp_y(tv) = \exp_y J_y(tv) = \exp_y(t J_y(v)) = \gamma_y^{J_y(v)}(t). \tag{4.5}$$

Изометрията $j_x : S \to S$ трансформира геодезичната $\gamma_y^v(t)$ с

$$\gamma_y^v(0) = y, \quad \frac{d\gamma_y^v(t)}{dt}\Big|_{t=0} = v$$

в геодезичната $j_x \gamma_y^v : \mathbb{R} \to S$ с $j_x \gamma_y^v(0) = j_x(y)$. Заради

$$\frac{d j_x \gamma_y^v(t)}{dt}\Big|_{t=0} = (dj_x)_y \frac{d\gamma_y^v(t)}{dt}\Big|_{t=0} = (dj_x)_y v,$$

това е геодезичната

$$\gamma_{j_x(y)}^{(dj_x)_y v}(t) = j_x \gamma_y^v(t) : \mathbb{R} \longrightarrow S, \tag{4.6}$$

с допирателен вектор $(dj_x)_y v$ в $j_x(y)$. Аналогично, геодезичната

$$j_y \gamma_y^v(t) = \gamma_y^{J_y(v)}(t) : \mathbb{R} \longrightarrow S$$

от (4.5) се изобразява в геодезичната

$$j_x j_y \gamma_y^v(t) = j_x \gamma_y^{J_y(v)}(t) = \gamma_{j_x(y)}^{(dj_x)_y J_y(v)}(t) : \mathbb{R} \longrightarrow S.$$

Холоморфността на $j_x : S \to S$ е еквивалентна на комутирането $(dj_x)_y J_y = J_{j_x(y)} (dj_x)_y$ на диференциала на j_x в y със съответната комплексна структура, така че получаваме

$$j_x j_y \gamma_y^v(t) = \gamma_{j_x(y)}^{J_{j_x(y)} (dj_x)_y (v)}(t) = j_{j_x(y)} \gamma_{j_x(y)}^{(dj_x)_y (v)}(t) = j_{j_x(y)} j_x \gamma_y^v(t),$$

след като сме приложили (4.5) and (4.6). Това доказва (4.4) и (4.3). В частност, за всяка точка $z = \gamma_y^v(t)$ имаме

$$x * (y * z) = j_x j_y(z) = j_{j_x(y)} j_x(z) = (x * y) * (x * z),$$

което е третета аксиома за Loos-ермитово симетрично пространство от некомпактен тип.
Накрая, ако точката $x*(x*y) = \exp_x J_x^2 \exp_x^{-1}(y) = \exp_x(-\exp_x^{-1}(y))$ съвпада с точката $y = \exp_x(\exp_x^{-1}(y))$, то $-\exp_x^{-1}(y) = \exp_x^{-1}(y)$, тъй като $\exp_x : T_x^{\mathbb{R}} G/K \to G/K$ е глобален дифеоморфизъм. Сега от $\exp_x^{-1}(y) = 0 \in T_x^{\mathbb{R}} G/K$ следва $y = \exp_x \exp_x^{-1}(y) = \exp_x(0) = x$, което доказва аксиома (iv) за Loos-ермотово симетрично пространство от некомпактен тип.

□

За да установим, че всяко Loos-ермитово симетрично пространство от некомпактен тип $(S, *)$ е ермитово симетрично пространство от некомпактен тип G/K, ще докажем следната лема.

Лема 48. *Нека $(S, *)$ е Loos-ермитово симетрично пространство от некомпактен тип. Тогава $(S, .)$ е Loos-симетрично пространство от некомапактен тип с операцията*

$$\forall x, y \in S, \quad x.y := x * (x * y).$$

Доказателство. От определението на $x.y$ имаме:

$$x.y = x * (x * y) = exp_x(-exp_x^{-1}(y)).$$

Следователно $x.y = s_x(y)$, където $s_x : S \to S$ е геодезичната симетрия на Loos-ермитовото симетрично пространство S от некомпактен тип. Според Твърдение 39 и забележката преди Определение 42, двойката $(S, .)$ е Loos-симетрично пространство от некомпактен тип.

□

Твърдение 49. *Всяко Loos-ермитово симетрично пространство от некомпактен тип $(S, *)$ е ермитово симетрично пространство от некомпактен тип $S = G/K$, чиято комплексна структура в произволна точка*

$$J_x : T_x^{\mathbb{R}} G/K \longrightarrow T_x^{\mathbb{R}} G/K$$

се задава с

$$\forall u \in T_x^{\mathbb{R}} G/K, \quad J_x(u) := \exp_x^{-1}(x * \exp_x(u)).$$

Доказателство. От Лема 48 имаме, че $(S, .)$ е Loos-симетрично пространство от некомпактен тип с операцията $x.y := x * (x * y)$ за всички $x, y \in S$. Тогава от Лема 43 следва, че $S = G/K$ е риманово симетрично пространство от некомпактен тип. За всяка точка $x \in S$, съществува дифеоморфизъм $j_x : S \to S$ от ред 4, тъй като $j_x^4 = \mathrm{Id}_S$ и $s_x = j_x^2 \neq \mathrm{Id}_S$. От $j_x = \exp_x J_x \exp_x^{-1}$ следва $J_x = \exp_x^{-1} j_x \exp_x$, откъдето

$$\forall u \in T_x^{\mathbb{R}} G/K, \quad J_x(u) = \exp_x^{-1} j_x \exp_x(u) = \exp_x^{-1}(x * \exp_x(u)).$$

□

Комбинирайки Следствие 25, Теорема 45 и Твърдение 47, получаваме следното

Следствие 50. *Нека $D = G_{\mathbb{R}}/V$ е област на периоди, $\pi : D \to S = G_{\mathbb{R}}/K$ е проекция върху Риманово симетрично пространство от некомпактен тип S и $(S, .)$ е структурата на Loos-симетрично пространство, зададена с геодезичните изометрии*

$$x.y = s_x(y) = s_x(\exp_x \exp_x^{-1}(y)) = \exp_x(-\exp_x^{-1}(y)) \quad \text{за} \quad \forall x, y \in S.$$

Вариация на структура на Hodge $U \subset D$ е напълно геодезична тогава и само тогава когато $\pi(U) \subset S = G_{\mathbb{R}}/K$ допуска структура $(\pi(U), *)$ на Loos-ермитово симетрично пространство от некомпактен тип, чието асоциирано Loos-симетрично пространство от некомпактен тип $(\pi(U), *^2)$ с операцията $x *^2 y := x * (x * y)$ е Loos-симетрично подпространство на $(S, .)$.

Библиография

[Cattani] Cattani E., Introduction to variations of Hodge structure, in *Hodge Theory,* Edt. by Cattani E., Zein F., Griffiths Ph., Trang L.D, Princeton University Press, 2013.

[FriedmanLaza] Friedman R., Laza R, Semi-algebraic horizontal subvarieties of Calabi-Yau type, arXiv:1109.5632v4 [mathAG], 25 Feb 2013.

[Helgason] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Geoups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1978.

[Jost] Jost J., *Riemannian Geometry and Geometric Analysis,* University Texts, Springer, 2002.

[LiuShen] Liu K., Shen Y., Boundedness of the images of period maps and applications, arxiv:1507.01860v1 [mathAG], 30 Jun 2015.

[LiuYin] Liu K., Yin Ch., Quantum correction and the moduli spaces of Calabi-Yau manifolds, zrXiv:1411.0069v1[mathDG], 1 Nov 2014.

[Loos] Loos O., *Symmetric spaces* , Benjamin, vol.1 - 1969, vol. 2 - 1970.

[NagyStrambach] Nagy P., Strambach K., *Loops in Groups Theory and Lie Theory* , de Gruyter Expositions in Mathematics 35, Walter de Gruyter, 2002.

[Robles] Robles C., Classification of horizontal SL(2)s, arXiv:1405.3163v3[mathAG], 31 Jul 2015.

[Sabinin] Sabinin L., *Smooth Quasigroups and Loops,* Kluwer Academic Publishers, 1999.

[Schmid] Schmid W., Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping, Inventiones Mathematicae 22 (1973), 211-319.

[Voisin] Voisin C., *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry - I*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 76, Cambridge University Press, 2002.