Софийски Университет "св. Климент Охридски"
Факултет по Математика и Информатика

Магистърска Програма "Математика и Математична Физика"

ЛЮБИНКА НИКОЛОВА

Фактори на кълбото, покрити от абелеви повърхнини

Дипломна Работа
за получаване на степен
Магистър по Математика

Научен Ръководител: доц. Aзнив Каспарян

София
2 0 1 0

Увод

Настоящата дипломна работа конструира дискретни фактори $\mathbb{B}/\Gamma_H$ на двумерното кълбо $\mathbb{B}$ с крайни покрития на Галоа $\mathbb{B}/\Gamma$, които са бирационални на абелева повърхнина A. Решетката Γ е нормална подгрупа на Γ_H с фактор-група $H = \Gamma_H/\Gamma$. Типът на $\mathbb{B}/\Gamma_H$ относно класификацията на Кодаира-Енриквес съвпада с типа на A/H и се определя от фиксираните точки на H върху A, холоморфните $(1,0)$-форми $H^0(A, \Omega^1_A)$ и холоморфните $(2,0)$-форми $H^0(A, \Omega^2_A)$.

Дипломната работа се състои от седем глави.

В първата са събрани някои предварителни сведения за дискретни инварианти на проективни повърхнини. Описана е процедурата на Холцапфел за получаване на гладка компактификация на фактор на кълбото чрез раздуване на абелева повърхнина в особените точки на дивизор с елиптични неприводими компоненти. Обяснена е конструкцията на крайните групи H.

В останалата част на дипломната работа са изложени резултатите по задачата.

Втората глава изучава двете канонични разслоения на фактор A/H на приводима абелева повърхнина $A = E \times E$ по крайна група $H < \mathrm{Aut}(A)$ с абелева линейна част $\mathcal{L}(H) < \mathrm{End}^*(A)$. След едновременна диагонализация на $\mathcal{L}(h)$ за всички $h \in H$, базите и слоевете на тези разслоения се оказват елиптични или рационални криви, в зависимост от фиксираните точки на проекциите на групата в автоморфизмите на елиптичните компоненти.

Глава 3 характеризира A/H с размерност на Кодаира $\kappa(A/H) = -\infty$ чрез наличие на отражение в H. Установено е, че линейчата повърхнина $X \to C_g$ с база C_g от род g е бирационална на A/H само когато $g = 0$ или $g = 1$. Доказва се, че каноничните разслоения на A/H с абелева линейна част $\mathcal{L}(H)$ на H са едновременно елиптични само за $\kappa(A/H) = 0$. Това не изключва наличието на (неканонични) елиптични разслоения върху рационални A/H или линейчати A/H с елиптична база. Каноничните елиптични разслоения p_1, p_2 на A/H с $\kappa(A/H) = 0$ и абелева $\mathcal{L}(H)$ нямат кратни слоеве. Още повече, p_1 и p_2 нямат глабални холоморфни сечения за онези A/H, които не са абелеви повърхнини.

Четвъртата глава разпознава ирегулярните A/H чрез свойствата на H. По-точно, A/H е абелева или гладка с ирегулярност $q(A/H) = H^0\left(A/H, \Omega^1_{A/H}\right) = 2$ точно когато групата H се състои от транслации. Гладките модели на A/H имат ирегулярност 1 тогава и само тогава, когато $H = \mathcal{T}_H \langle h \rangle$ е произведение на транслационна група $\mathcal{T}_H$ с циклична група, чийто пораждащ h има линейна част $\mathcal{L}(h)$ с прост характеристичен корен 1. За пример на Холцапфел $A'_{-1} = \left(\mathbb{B}/\Gamma^{(6,8)}_{-1}\right)'$ с абелев минимален модел $A_{-1} = E_{-1} \times E_{-1}$, $E_{-1} = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i)$ са намерени всички подгрупи $H \leq \mathrm{Aut}(A'_{-1}, T')$, $T' = \left(\mathbb{B}/\Gamma^{(6,8)}_{-1}\right)' \setminus \left(\mathbb{B}/\Gamma^{(6,8)}_{-1}\right)$, за които $\mathbb{B}/\Gamma_H$ са бирационални на линейчати повърхнини с елиптични бази или на хиперелиптични повърхнини.

Глава 5 изучава факторите A/H, които са бирационални на K3 повърхнини. По-точно, нека $A = E \times E$ с $E = \mathbb{C}/\mathcal{O}_{-d}$ за пръстена на целите числа $\mathcal{O}_{-d}$ на имагинерно квадратично числово поле $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Тогава A/H има гладък модел от тип K3 точно когато групата H не е транслационна и H се съдържа в ядрото $K = \ker \det \mathcal{L}$ на

хомоморфизма $\det \mathcal{L} : \mathrm{Aut}(A) \to \mathcal{O}^*_{-d}$. Пресметнати са всички такива H, за които A_{-1}/H е бирационално на краен Галоа фактор на $\left(\mathbb{B}/\Gamma^{(6,8)}_{-1}\right)'$.
Шестата глава е посветена на онези A/H, които са бирационални на повърхнини на Енриквес. Цикличността на образа на $\det \mathcal{L} : H \to \det \mathcal{L}(H) \leq \mathcal{O}^*_{-d}$ позволява да представим като произведение $H = (H \cap K)\langle h \rangle$. Цикличното покритие $A/(H \cap K)$ на A/H е абелева повърхнина или нормален модел на K3 повърхнина. Когато $A/(H \cap K)$ е абелева повърхнина, факторът $A/\langle h \rangle$ е бирационален на повърхнина на Енриквес и покрива неразклонено A/H с група на Галоа $H \cap K$. Ако $A/(H \cap K)$ е бирационално на K3 повърхнина, то индексът $[H : (H \cap K)] = 2$ или 4. В случая $[H : (H \cap K)] = 2$, универсалната покриваща $\widetilde{Y}$ на минималното разрешение Y на особеностите на A/H е бирационална на $A/(H \cap K)$. При $[H : (H \cap K)] = 4$ съществува гладко двулистно покритие Z на Y, което е повърхнина на Енриквес с универсална покриваща $\widetilde{Z}$, бирационална на $A/(H \cap K)$. Главата завършва с описание на крайните фактори на Галоа $\mathbb{B}/\Gamma_H$ на $\mathbb{B}/\Gamma^{(6,8)}_{-1}$, които са бирационални на повърхнина на Енриквес.
Последната, седма глава проследява покриващите съотношения между построените повърхнини, след повдигане на произволен гладък модел през крайно покритие на Галоа.
Изказвам благодарност на научния си ръководител Азнив Каспарян за обсъжданията, съветите и моралната подкрепа в процеса на подготовка на настоящата дипломна работа.

Съдържание

Глава 1

Предварителни сведения

Да напомним, че родът g на гладка компактна комплексна крива C е размерността $g = g(C) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(C, \Omega^1_C)$ на пространството на холоморфните $(1,0)$-форми или броят на дръжките, които трябва да прикачим към 2-мерна реална сфера, за да моделираме топологически C. Всяка гладка компактна комплексна крива C от род $g \geq 2$ е неторзионен дискретен фактор Δ/Γ на единичния диск

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}.$$

Римановата сфера $\mathbb{P}^1$ е компактификация на дискретен фактор на Δ. Съществуват елиптични криви, компактифициращи Δ/Γ. По-точно, дискът Δ е бихоломорфен на горната полуравнина

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, Im(z) > 0\} = SL(2, \mathbb{R})/SO(2).$$

Нека $PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})/\{\pm I_2\}$ е проективната линейна група, която е фактор на специалната линейна група $SL(2, \mathbb{Z})$ по нейния център $\{\pm I_2\}$. За всяко естествено N имаме конгруенц подгрупа

$$\Gamma(N) = \ker[PSL(2, \mathbb{Z}) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{Z}_N)].$$

За просто N, отворената крива $X(N) = \mathbb{H}/\Gamma(N)$ има род

$$g(X(N)) = \frac{(N+2)(N-3)(N-5)}{24}.$$

В частност, $X(3)$ и $X(5)$ са криви от род 0 и се компактифицират от $\mathbb{P}^1$. Допълненията $D(N) = \mathbb{P}^1 \setminus X(N)$ за $N \in \{3, 5\}$ са крайни множества от точки.
Да разгледаме елиптична крива $E(N)$, която е двулистно покритие $f_N : E(N) \to \mathbb{P}^1$ на $\mathbb{P}^1$ с дивизор на разклонение $D(f_N) \subset D(N)$. Тогава (разклоненото в случая $N = 3$) покритие $U_N : \mathbb{H} \to X(N) = \mathbb{H}/\Gamma(N)$ се повдига до покритие

$$V_N : \mathbb{H} \to E(N) \setminus f_N^{-1}(D(N)),$$

затварящо комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H} \arrow[r, "V_N"] \arrow[d, "U_N"'] & E(N) \setminus f_N^{-1}(D(N)) \arrow[dl, "f_N"] \\ X(N) = \mathbb{P}^1 \setminus D(N) & \end{tikzcd},$$

защото $f_N : E(N) \setminus f_N^{-1}(D(N)) \to X(N)$ е неразклонено и $\pi_1(\mathbb{H}) = 1$. По този начин, $E(N)$ компактифицира дискретен фактор на горната полуравнина.

Непосредствените обобщения на кривите от род ≥ 2 са повърхнините X от общ тип. Тяхната сигнатура $\tau(X)$ и Ойлерова характеристика $e(X)$ са свързани с неравенството на Богомолов-Мияока-Яо $3\tau(X) \leq e(X)$. Гладките проективни фактори на кълбото $X_o = \mathbb{B}/\Gamma$ са точно онези повърхнини от общ тип, за които е изпълнено равенството $3\tau(X_o) = e(X_o)$. Съществуват гладки проективни повърхнини X, които не са бирационални на компактификации на дискретни фактори $\mathbb{B}/\Gamma$ на кълбото

$$\mathbb{B} = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,|\, |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}.$$

Холцапфел поставя задачата за описание на повърхнините, които са бирационални на дискретни фактори на кълбото или техни компактификации. От негов резултат следва, че проста абелева повърхнина A не е бирационална на неторзионен фактор $\mathbb{B}/\Gamma$ на кълбото. По-точно, всеки неторзионен фактор $\mathbb{B}/\Gamma$ с абелев бирационален модел е некомпактен, защото компактните неторзионни фактори на $\mathbb{B}$ са от общ тип. Свиването на (-1)-кривите върху гладката тороидална компактификация $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ изобразява елиптичните компоненти на $T' = (\mathbb{B}/\Gamma)' \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$ в елиптични или рационални криви върху A. Но абелева повърхнина A не съдържа рационални криви C, защото в противен случай десингуларизацията $\widehat{C} = \mathbb{P}^1$ на C се изобразява в компактна крива на универсалната покриваща $\widetilde{A} = \mathbb{C}^2$, което е невъзможно. По определение, простата абелева повърхнина A не съдържа елиптични криви, така че A не може да е минимален модел на неторзионен фактор на кълбото.

Дивизорите с гладки елиптични неприводими компоненти се наричат мулти-елиптични. Споменатата теорема на Холцапфел от [4] установява, че раздуването на абелева повърхнина в особените точки на мулти-елиптичен дивизор е гладка тороидална компактификация на неторзионен фактор на кълбото точно тогава, когато средната кратност на този дивизор относно особените му точки е 4. Използвайки този критерий, Холцапфел построява два примера над целите Гаусови числа и един пример над числата на Айзенщайн. С помощта на примера $\mathbb{B}/\Gamma_{-1}^{(6,8)}$ над $\mathbb{Z}[i]$, в [5] сме установили съществуването на фактор на кълбото във всеки от шестте типа проективни повърхнини с неположителна размерност на Кодаира. Настоящата дипломна работа описва всички фактори на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma_H$, които се покриват от $\mathbb{B}/\Gamma_{-1}^{(6,8)}$.

Да напомним понятията размерност на Кодаира, Ойлерова характеристика и сигнатура. Дивизорът K_X, отговарящ на линейното разслоение Ω_X^2 на холоморфните

$(2,0)$-форми върху X се нарича каноничен дивизор на X. За произволно естествено m множеството

$$\mathcal{L}(mK_X) = \{f \in \mathfrak{Mer}(X) \,|\, (f) + mK_X \geq 0\}$$

на ефективните дивизори, които са линейно еквивалентни с mK_X образува линейната система на mK_X. Всяко глобално мероморфно сечение σ на $\left(\Omega^2_X\right)^{\otimes m}$ задава $\mathbb{C}$-линеен изоморфизъм

$$\sigma \otimes_{\mathbb{C}} : \mathcal{L}(mK_X) \longrightarrow H^0\left(X, \left(\Omega^2_X\right)^{\otimes m}\right).$$

Размерността

$$p_m(X) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(mK_X) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, (\Omega^2_X)^{\otimes m})$$

се нарича m-ти плурирод на X. Размерността на Кодаира $\kappa(X)$ е размерността на образа на X под действие на естествения морфизъм

$$\varphi_{mK_X} : X \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{L}(mK_X)) = \mathbb{P}^{p_m(X)-1}$$

за достатъчно голямо $m \in \mathbb{N}$. По-подробно, ако $p_m(X) = 0$ за $\forall m \in \mathbb{N}$, то $\kappa(X) = -\infty$. Ако $p_m(X) \in \{0,1\}$ за $\forall m \in \mathbb{N}$ и съществува $m_0 \in \mathbb{N}$ с $p_{m_0}(X) = 1$, то $\kappa(X) = 0$. Когато редицата $\{p_m(X)\}_{m=1}^{\infty}$ е неограничена, но съществува константа c, така че $p_m(X) \leq cm$ за $\forall m \in \mathbb{N}$, то $\kappa(X) = 1$. Накрая, ако редицата $\left\{\frac{p_m(X)}{m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ е неограничена, то $\kappa(X) = 2$ и X е повърхнина от общ тип.

Триангулация на комплексна повърхнина X е представяне като обединение на краен брой клетки с размерности от 0 до 4. С точност до хомеоморфизъм, k-мерните клетки са реални k-мерни кълба. Алтернираната сума

$$e(X) = e_0 - e_1 + e_2 - e_3 + e_4$$

на броя e_j на j-мерните клетки за $0 \leq j \leq 4$ не зависи от триангулация и се нарича Ойлерова характеристика на X.

Нека $H^2(X, \mathbb{R})$ е втората кохомологична група на Де Рам, т.е. $H^2(X, \mathbb{R})$ е фактор-пространството на затворените 2-форми ω, $d\omega = 0$ по точните форми $\omega = d\tau$. Да означим с $[\omega]$ кохомологичния клас на ω и да разгледаме изображението

$$I : H^2(X, \mathbb{R}) \times H^2(X, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$I([\omega_1], [\omega_2]) = \int_X \omega_1 \wedge \omega_2.$$

От формулата на Стокс следва, че I не зависи от избора на представители ω_1, ω_2 на кохомологичните класове. Следователно I задава симетрична билинейна форма, наречена форма на пресичане. Сигнатурата на I се нарича сигнатура на X и се бележи с $\tau(X)$. Сигнатурата на гладко реално четиримерно многообразие е инвариантна относно хомотопична еквивалентност и представлява топологичен инвариант.

Равенството $3\tau(X_o) = e(X_o)$ в неравенството $3\tau(X) \leq e(X)$ на Богомолов-Мияока-Яо характеризира гладките компактни фактори на кълбото $X_o = \mathbb{B}/\Gamma$. Холцапфел обобщава този критерий за отворени повърхнини. По-точно, ако X е гладка повърхнина от общ тип, а $D \subset X$ е мулти-елиптичен дивизор с непресичащи се компоненти D_i и отрицателни самопресичания $D_i^2 < 0$, то $X \setminus D = \mathbb{B}/\Gamma$ е неторзионен фактор на кълбото тогава и само тогава, когато

$$e(X) - 3\tau(X) + D^2 = 0. \tag{1.1}$$

За да изведем необходимо и достатъчно условие повърхнина Y с размерност на Кодаира $\kappa(Y) < 2$ да е бирационална на компактификация на фактор на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma$, трябва да докажем съществуването на покритие от общ тип на произволен бирационален модел на Y. След това трябва да изразим условието (1.1) на езика на Y и образа T на компактифициращия дивизор. Построяването на повърхнини Y и дивизори $T \subset Y$, изпълняващи полученото числово условие е трудно. Затова решаваме да опишем всички $\mathbb{B}/\Gamma_H$, които се покриват от примера на Холцапфел $\mathbb{B}/\Gamma_{-1}^{(6,8)}$.
Родът $g(C) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(C, \Omega_C^1)$ на проективна крива C се обобщава естествено от иррегулярността $q(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega_X^1)$ и геометричния род $p_g(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega_X^2)$ на проективна повърхнина X. Тук Ω_X^1 е ко-допирателното разслоение, определено като дуалното на холоморфното допирателно разслоение $T^{1,0}X$. Да напомним, че функция f е анти-холоморфна, ако комплексно спрегнатата и $\overline{f}$ е холоморфна. Във всяка точка $x \in X$, холоморфното допирателно пространство $T^{1,0}X$ се състои от диференцирания на локални функции, които се анулират върху анти-холоморфните функции. Каноничното разслоение $\Omega_X^2 = \Omega_X^1 \wedge \Omega_X^1$ е втората външна степен или детерминантата на Ω_X^1. Факторите A/H на абелева повърхнина A под действие на крайна група на Галоа H се характеризират със своята размерност на Кодаира, иррегулярността и геометричния си род. От $\kappa(A) = 0$ следва, че $\kappa(A/H) \leq 0$, защото под действие на морфизъм на повърхнини $f : X \to Y$ размерността на Кодаира $\kappa(X) \geq \kappa(Y)$ не расте. Проективните повърхнини X с неположителна размерност на Кодаира $\kappa(X) \leq 0$ са шест типа. Повърхнините X с $\kappa(X) = -\infty$ са рационални или линейчати с база от род $g \geq 1$. При фиксирана размерност на Кодаира $\kappa(X) = -\infty$ рационалните повърхнини X се характеризират с иррегулярност $q(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega_X^1) = 0$, докато линейчатите X_g с база от род $g \geq 1$ имат иррегулярност $q(X_g) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X_g, \Omega_{X_g}^1) = g \geq 1$.
Нека X е проективна повърхнина с размерност на Кодаира $\kappa(X) = 0$. Тогава иррегулярността $q(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega_X^1)$ и геометричният род $p_g(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega_X^2)$ са достатъчни за класификацията на X като абелева, хиперелиптична, K3 или повърхнина на Енриквес. По-точно, X е абелева точно когато $q(X) = 2$. Повърхнината X е хиперелиптична тогава и само тогава, когато $\kappa(X) = 0$ и $q(X) = 1$. Бомбиери и Мамфорд установяват в [2], че всяка хиперелиптична повърхнина $X = (E_1 \times E_2)/H$ е фактор на Декартово произведение $E_1 \times E_2$ на елиптични криви E_j по крайна нетранслационна група $H < \mathrm{Aut}(E_1 \times E_2)$ без фиксирани точки върху $E_1 \times E_2$. Ако $\kappa(X) = 0$, $q(X) = 0$ и $p_g(X) = 1$, то X е K3 повърхнина. K3 повърхнините X имат тривиално канонично разслоение $\Omega_X^2 = \mathcal{O}_X$ и са едносвързани, $\pi_1(X) = 1$. Проективните повърхнини X с $\kappa(X) = 0$, $q(X) = 0$ и $p_g(X) = 0$ са повърхнини на Енриквес. Всяка от тях има универсална покриваща $\widetilde{X}$ от тип K3 и фундаментална група $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_2$. Всяка повърхнина на Енриквес е елиптично разслоение $X \to \mathbb{P}^1$ с рационална база и без сечение.

Всяка аритметична решетка $\Gamma \subset SU_{2,1}$ е съизмерима с групата $SU_{2,1}(\mathbb{Z})$. Граничната точка $p \in \partial\mathbb{B}$ е рационална, ако стабилизаторът и $\mathrm{Stab}_{SU_{2,1}}(p)$ е определен над $\mathbb{Q}$. Обединението $\partial_{\mathbb{Q}}\mathbb{B}$ на рационалните гранични точки е Γ-инвариантно и

$$\widehat{\mathbb{B}/\Gamma} = (\mathbb{B} \cup \partial_{\mathbb{Q}}\mathbb{B})\,/\Gamma$$

е нормално аналитично пространство, известно като компактификация на Бейли-Борел. Ако решетката Γ е неторзионна, то особеностите на $\widehat{\mathbb{B}/\Gamma}$ се наричат къспове и се покриват от рационалните гранични точки на $\mathbb{B}$. Разрешението на особеностите на $\widehat{\mathbb{B}/\Gamma}$ в късповете $\partial_{\mathbb{Q}}\mathbb{B}/\Gamma = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_h\}$ чрез гладки елиптични криви T'_i дава гладката тороидална компактификация $(\mathbb{B}/\Gamma)' = (\mathbb{B}/\Gamma) \cup T'$ с $T' = \sum\limits_{i=1}^{h} T'_i$.

Нека E е елиптична крива,

$$\xi : A' = (\mathbb{B}/\Gamma)' \longrightarrow A = E \times E$$

е свиването на (-1)-кривите, а $T = \xi(T')$ е образът на тороидалния компактифициращ дивизор T' върху абелевия минимален модел A. Съгласно [5], групите от автоморфизми

$$\mathrm{Aut}(A', T') = \mathrm{Aut}(A, T)$$

съвпадат, така че всяка подгрупа H на $G = \mathrm{Aut}(A, T)$ действа върху $\mathbb{B}/\Gamma$ и се повдига до решетка $\Gamma_H < SU_{2,1}$, благодарение на липсата на торзии в Γ. Решетката Γ_H съдържа Γ като нормална подгрупа с фактор-група $\Gamma_H/\Gamma = H$. Факторът на $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ под действие на $H = \Gamma_H/\Gamma$ е компактификация $\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}$ на $\mathbb{B}/\Gamma_H$ с (необезателно тороидален) дивизор $\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H} \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$, който се съсоти от елиптични или рационални криви. В сила е комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\zeta_H^A"'] & (\mathbb{B}/\Gamma)' \arrow[l, "\xi"'] \arrow[d, "\zeta_H"] \\ A/H & \overline{\mathbb{B}/\Gamma_H} \arrow[l, "\xi^H"'] \end{tikzcd},$$

където $\xi : (\mathbb{B}/\Gamma)' \to A$ е свиването на рационалните (-1)-криви върху $(\mathbb{B}/\Gamma)$', $\zeta_H^A : A \to A/H$ и $\zeta_H : (\mathbb{B}/\Gamma)' \to \overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}$ са H-Галоа покрития, а $\xi^H : \overline{\mathbb{B}/\Gamma_H} \to A/H$ е свиването на H-орбитите на изключителния дивизор $L = \xi^{-1}\left(T^{\mathrm{sing}}\right)$ на ξ. Поточно, H-инвариантността на T води до H-инвариантност на особените точки $T^{\mathrm{sing}} = \sum_{1 \leq i < j \leq h} T_i \cap T_j$ на $T = \sum_{i=1}^{h} T_i$ с гладки елиптични неприводими компоненти T_i. Оттук раздуването $L = \xi^{-1}(T^{\mathrm{sing}})$ на T^{sing} е H-инвариантно и ξ^H е свиването на неприводимите компоненти на L/H в точки. Ако стабилизаторът

$$\mathrm{Stab}_H(p_i) = \{h \in H \mid h(p_i) = p_i\}$$

на $p_i \in T^{\mathrm{sing}}$ е от ред $m_i \geq 2$, то H-орбитата на $\xi^{-1}(p_i)$ е с кратност m_i и представлява рационална крива с индекс на самопресичане $(-m_i)$.

В зависимост от фиксираните точки на H върху A, $H^0(A,\Omega^1_A)$ и $H^0(A,\Omega^2_A)$ определяме бирационалния тип на A/H съгласно класификацията на Кодаира-Енриквес.

Теорема 1. (Холцапфел [4]) *Нека $A = E\times E$ е Декартов квадрат на елиптична крива E, а $T=\sum_{i=1}^{h} T_i$ е мулти-елиптичен дивизор върху A с особени точки $T^{\mathrm{sing}} = \sum_{1\leq i<j\leq h} T_i\cap T_j$. Раздуването A' на A в T^{sing} е гладка тороидална компактификация $A' = (\mathbb{B}/\Gamma)'$ на неторзионен фактор $\mathbb{B}/\Gamma$ на кълбото тогава и само тогава, когато*

$$\sum_{i=1}^{h}\mathrm{card}(T^{\mathrm{sing}}\cap T_i) = 4\mathrm{card}(T^{\mathrm{card}}).$$

Накратко за идеята на доказателство. Изогения на абелеви многообразия е сюрективен хомоморфизъм $\alpha: B\to A$ с крайно ядро. В частност, всяка изогения е неразклонено покритие от крайна степен $n\in\mathbb{N}$ и $\alpha^{-1}(T_i) = \sum_{j=1}^{n} T_{ij}$ са непресичащи се обединения на гладки елиптични криви за $\forall 1\leq i\leq h$. От друга страна, $\mathrm{card}\alpha^{-1}(T)^{\mathrm{sing}} = \mathrm{card}\alpha^{-1}(T^{\mathrm{sing}}) = ns$ за $s=\mathrm{card}(T^{\mathrm{sing}})$ и

$$T_{i_1j_1}\cap T_{i_2j_1} = T_{i_1}\cap T_{i_2},$$

$$T_{i_1j_1}\cap T_{i_2j_2} = 0 \quad \text{за } j_1\neq j_2.$$

В резултат, за $s_i = \mathrm{card}(T_i\cap T^{\mathrm{sing}})$ получаваме, че

$$\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{card}(T_{ij}\cap\alpha^{-1}(T)^{\mathrm{sing}}) = \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{n} s_i = n\left(\sum_{i=1}^{h} s_i\right) = ns = \mathrm{card}\alpha^{-1}(T)^{\mathrm{sing}}.$$

По този начин, численото условие върху (A,T) се повдига до същото числено условие върху $(B=\alpha^{-1}(A),\alpha^{-1}(T))$ за произволна изогения $\alpha: B\to A$. Праобразът $\alpha^{-1}(T_i) = \sum_{j=1}^{n} T_{ij}$ на елиптична крива $T_i\subset A$ под действие на изогения $\alpha: B\to A$ от степен n се състои от линейно еквивалентни елиптични криви, така че класът на линейна еквивалентност на $\alpha^{-1}(T)$ е n-делим. Нека B' е раздуването на B в $\alpha^{-1}(T)^{\mathrm{sing}}$, а D' е трансформацията на $\alpha^{-1}(T)$ под действие на това раздуване. Съгласно теорема на Ливн, това е достатъчно за съществуване на n-листно покритие $f: W'\to B'$, което е напълно разклонено по протежение на D'. Сега W' е гладка повърхнина от общ тип и $D'\subset W'$ е мулти-елиптичен дивизор с взаимно непресичащи се и отрицателно самопресичащи се неприводими компоненти. Абелевата повърхнина B има Ойлерова характеристика $e(B)=0$ и сигнатура $\tau(B)=0$. Понеже B' се получава от B чрез раздуване на ns точки, Ойлеровата характеристика $e(B')=ns$, а сигнатурата $\tau(B') = -ns$. Дивизорът на разклонение D' на $f: W'\to B'$ е мулти-елиптичен, така че Ойлеровата характеристика

$$e(W') = ne(B'\setminus D') + e(D') = ne(B') = n^2 s.$$

Сигнатурата $\tau(W') = n\tau(B') = -ns$, защото 2-циклите върху W' могат да се отместят от D'. По определение, $D' = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{n} D'_{ij}$ има две по две непресичащи се компоненти, така че

$$(D')^2 = n \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{n} (D'_{ij})^2 = n^2 \sum_{i=1}^{h} (T'_i)^2.$$

По формулата за присъединение,

$$0 = -e(T_i) = T_i^2 + T_i K_A = T_i^2,$$

защото каноничният дивизор $K_A = \mathcal{O}_A$ е тривиален. След раздуване на s_i точки върху T_i индексът на самопресичане $(T'_i)^2 = -s_i$. В резултат, $(D')^2 = -n^2 \sum_{i=1}^{h} s_i$. Сега $W' \setminus D'$ е неторзионен фактор на кълбото точно когато

$$e(W') - 3\tau(W') + (D')^2 = 4n^2 s - n^2 \sum_{i=1}^{h} s_i = 0, \text{ т.е. } \sum_{i=1}^{h} s_i = 4s.$$

Ограничението $f : W' \setminus D' \to B' \setminus D'$ е неразклонено, така че $W' \setminus D' = \mathbb{B}/\Gamma_1$ е дискретен фактор на кълбото тогава и само тогава, когато $B' \setminus D' = \mathbb{B}/\Gamma_2$ е дискретен фактор на кълбото. Изогенията $\alpha : B \to A$ индуцира n-листно неразклонено покритие $\alpha' : B' \to A'$ и $B' \setminus D' = \mathbb{B}/\Gamma_2$ тогава и само тогава, когато $A' \setminus T' = \mathbb{B}/\Gamma_3$ е дискретен фактор на кълбото.
Групата от автоморфизми $\mathrm{Aut}(A)$ на абелевата повърхнина $A = E \times E$ е полудиректно произведение на нормалната група $\mathcal{T}_A$ от транслации с групата $\mathrm{End}^*(A)$ на обратимите ендоморфизми на A. По определение, това означава, че всеки елемент g на $\mathrm{Aut}(A)$ има единствени представяния $g = \tau_{(P_0,Q_0)} g_o$ или $g = g_o \tau_{(P_1,Q_1)}$ с $\tau_{(P_0,Q_0)}, \tau_{(P_1,Q_1)} \in \mathcal{T}_A$ и $g_o \in \mathrm{End}^*(A)$. Записваме $\mathrm{Aut}(A) = \mathcal{T}_A \rtimes \mathrm{End}^*(A)$. Съществува естествен хомоморфизъм

$$\mathcal{L} : \mathrm{Aut}(A) \longrightarrow \mathrm{End}^*(A)$$

с ядро $\mathcal{T}_A$, който съпоставя на всеки автоморфизъм на A неговата линейна част. Умножението в $\mathrm{Aut}(A)$ се извършва по правилото

$$(\tau_{(P_2,Q_2)} h)(\tau_{(P_1,Q_1)} g) = \tau_{(P_2,Q_2)+h(P_1,Q_1)}(hg),$$

съгласно

$$(\tau_{(P_2,Q_2)} h)(\tau_{(P_1,Q_1)} g)(P,Q) =$$
$$(\tau_{(P_2,Q_2)} h)(g(P,Q) + (P_1,Q_1)) = hg(P,Q) + h(P_1,Q_1) + (P_2,Q_2)$$

за всички точки $(P,Q) \in A = E \times E$. Групата на обратимите ендоморфизми

$$\mathrm{End}^*(A) = \{\alpha \in Gl_2(A) \,|\, \alpha\pi_1(A) \subseteq \pi_1(A),\, \alpha^{-1}\pi_1(A) \subseteq \pi_1(A)\}$$

съвпада с

$$Gl_2(\mathcal{O}_{-d}) = \{\alpha \in (\mathcal{O}_{-d})_{2\times 2} \,|\, \det(\alpha) \in \mathcal{O}^*_{-d}\},$$

където $\mathcal{O}_{-d}^*$ е мултипликативната група на $\mathcal{O}_{-d}$. По-точно,

$$\mathcal{O}_{-d}^* = \langle -1 \rangle = \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}_2 \quad \text{за } d \neq 1, 3,$$

$$\mathcal{O}_{-1}^* = \mathbb{Z}[i]^* = \langle i \rangle = \{\pm i, \pm 1\} \simeq \mathbb{Z}_4 \quad \text{и}$$

$$\mathcal{O}_{-3}^* = \langle e^{\frac{2\pi i}{6}} \rangle \simeq \mathbb{Z}_6.$$

Да напомним, че

$$\pi_1(A) = \pi_1(E) \times \pi_1(E) = \mathcal{O}_{-d} \times \mathcal{O}_{-d} = \mathcal{O}_{-d} \times \{0\} + \{0\} \times \mathcal{O}_{-d},$$

така че

$$\alpha = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

изпълнява $\alpha\pi_1(A) \subseteq \pi_1(A)$ точно когато $p, q, r, s \in \mathcal{O}_{-d}$. Тук използваме, че $p\mathcal{O}_{-d} \subseteq \mathcal{O}_{-d}$ изисква $p = p.1 \in p\mathcal{O}_{-d} \subseteq \mathcal{O}_{-d}$ и $p \in \mathcal{O}_{-d}$ е достатъчно за $p\mathcal{O}_{-d} \subseteq \mathcal{O}_{-d}$. Ако $\Delta = \det(\alpha) = ps - qr$, то

$$\alpha = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in (\mathcal{O}_{-d})_{2\times 2} \quad \text{и} \quad \alpha^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix} \in (\mathcal{O}_{-d})_{2\times 2}$$

водят до $\det(\alpha^{-1}) = \frac{1}{\Delta} \in \mathcal{O}_{-d}$, което означава, че $\Delta \in \mathcal{O}_{-d}^*$. С това проверихме, че $\mathrm{End}^*(A) \subseteq Gl_2(\mathcal{O}_{-d})$. Обратно, ако $\alpha \in (\mathcal{O}_{-d})_{2\times 2}$ и $\det(\alpha) \in \mathcal{O}_{-d}^*$, то $\alpha^{-1} \in (\mathcal{O}_{-d})_{2\times 2}$. В резултат, $\alpha\pi_1(A) \subseteq \pi_1(A)$ и $\alpha^{-1}\pi_1(A) \subseteq \pi_1(A)$, така че $\alpha \in \mathrm{End}^*(A)$. Това дава, $Gl_2(\mathcal{O}_{-d}) \subseteq \mathrm{End}^*(A)$ и $\mathrm{End}^*(A) = Gl_2(\mathcal{O}_{-d})$. Неутралният елемент на $Gl_2(\mathcal{O}_{-d})$ е единичната матрица, която ще бележим с I_2.

В рамките на тези предварителни бележки да напомним, че $\mathcal{O}_{-d} = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, където

$$\tau = \begin{cases} \sqrt{-d} & \text{за } -d \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4), \\ \frac{-1+\sqrt{-d}}{2} & \text{за } -d \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4). \end{cases}$$

Нека $(\mathbb{B}/\Gamma)' = (\mathbb{B}/\Gamma) \cup T'$ е гладката тороидална компактификация на неторзионен фактор $\mathbb{B}/\Gamma$ на кълбото, $\xi : (\mathbb{B}/\Gamma)' \to A$ е свиването на (-1)-кривите до абелевия минимален модел A, а $T = \xi(T')$. Групите $G = Aut(A, T) = Aut\left((\mathbb{B}/\Gamma)', T'\right)$ съвпадат. Всяка подгрупа H на G е подгрупа на $Aut\left((\mathbb{B}/\Gamma)', T'\right)$ и се състои от автоморфизмите $h : \mathbb{B}/\Gamma \to \mathbb{B}/\Gamma$. Решетката Γ е неторзионна, така че покритието $\mathbb{B} \to \mathbb{B}/\Gamma$ е неразклонено и $\forall h \in Aut\,(\mathbb{B}/\Gamma)$ се повдига до автоморфизъм $\widetilde{h} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ на кълбото $\mathbb{B}$, $\widetilde{h} \in SU_{2,1}$. Множеството Γ_H на тези повдигания $\widetilde{h}$ образува дискретна подгрупа $\Gamma_H \leq SU_{2,1}$, съдържаща Γ като нормална подгрупа с фактор-група $\Gamma_H/\Gamma = H$.

Настоящата дипломна работа изучава част от факторите на кълбото $\mathbb{B}/\Gamma_H$, които се покриват от конкретен пример на Холцапфел $\mathbb{B}/\Gamma_{-1}^{(6,8)}$, публикуван в [4]. Нека $U_A : \widetilde{A} = \mathbb{C}^2 \to A$ и $U_{T_j} : \widetilde{T_j} = \mathbb{C} \to T_j$ са универсалните покриващи на абелева повърхнина $A = E \times E$ и елиптшчно крива $T_j \subset A$. През всяка точка $(u_o, v_o) \in U_A^{-1}(T_j) \subset \mathbb{C}^2$

съществува повдигане на T_j до права в $\widetilde{A}$. Това означава наличие на комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd} \widetilde{T_j} \arrow[r, "l(u_o,v_o)"] \arrow[d, "U_{T_j}"'] & \widetilde{A} \arrow[d, "U_A"'] \\ T_j \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & A \end{tikzcd} .$$

Обединявайки всички тези повдигания, представяме

$$T_j = \{(a_j t + u_o)(\mathrm{mod}\,\pi_1(E)), (b_j t + v_o)(\mathrm{mod}\,\pi_1(E)) \,|\, t \in \mathbb{C}\}.$$

Ако T_j е определена над имагинерно квадратично числово поле $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, то можем да считаме, че a_j и b_j са от пръстена на целите числа $\mathcal{O}_{-d}$ на $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. В такъв случай, $a_j(t + \pi_1(E)) = a_j t + \pi_1(E) \in E$ са коректно определени точки и можем да зададем

$$T_j = \{(a_j P, b_j P) + (u_o(\mathrm{mod}\,\pi_1(E)), v_o(\mathrm{mod}\,\pi_1(E))) \,|\, P \in E\}.$$

Ще бележим $T_j = E_{a_j,b_j} + (P_o, Q_o)$ за $P_o = u_o(\mathrm{mod}\,\pi_1(E))$, $Q_o = v_o(\mathrm{mod}\,\pi_1(E))$.

Теорема 2. (Холцапфел [4]) *Нека $A_{-1} = E_{-1} \times E_{-1}$ с $E_{-1} = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$,*

$$Q_0 = 0(\mathrm{mod}\,\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}),\ Q_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{mod}\,\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}),\ Q_2 = iQ_1,\ Q_3 = Q_1 + Q_2$$

са 2-торзионните точки на E_{-1} и

$$Q_{ij} = (Q_i, Q_j) \in A_{2-\mathrm{tor}} \subset A_{-1}.$$

Разглеждаме мулти-елиптичния дивизор $T_{-1}^{(6,8)} = \sum_{k=1}^{8} T_k$ с

$$T_k = E_{i^k,1} \ \text{за}\ 1 \leq k \leq 4,$$

$$T_{m+4} = Q_m \times E_{-1},\ T_{m+6} = E_{-1} \times Q_m \ \text{за}\ 1 \leq m \leq 2.$$

Раздуването на A_{-1} в шестте особени точки $(T_{-1}^{(6,8)})^{\mathrm{sing}} = Q_{00} + Q_{33} + \sum_{1 \leq i,j \leq 2} Q_{ij}$ на $T_{-1}^{(6,8)}$ е гладка тороидална компактификация на дискретен фактор $\mathbb{B}/\Gamma_{-1}^{(6,8)}$ на кълбото $\mathbb{B}$.

Да напомним от [5], че умноженията

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

с имагинерната единица $i \in \mathbb{Z}[i]$ върху елиптичните множители E_{-1} на A_{-1}, транспозицията

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

на тези множители и транслацията τ_{33} *с* Q_{33} *пораждат групата* $G_{-1} = \mathrm{Aut}(A_{-1}, T_{-1}^{(6,8)})$. *По-точно,*

$$G_{-1} = \{\tau_{33}^n I^k J^l \theta^m \,|\, 0 \leq k, l \leq 3,\ 0 \leq m, n \leq 1\}$$

е от ред 64 *и избраните пораждащи изпълняват съотношенията*

$$I^4 = J^4 = \mathrm{Id},\ \theta^2 = \tau_{33}^2 = \mathrm{Id},$$

$$xy = yx \ \text{ за различни } \ x, y \in \{I, J, \tau_{33}\},$$

$$\theta I = J\theta,\ \theta J = I\theta,\ \theta\tau_{33} = \tau_{33}\theta.$$

Глава 2

Елиптични и линейчати повърхнини

Лема 2.1. *Нека* $A = E \times E$ *с* $E = \mathbb{C}/\mathcal{O}_{-d}$ *за пръстена на целите числа* $\mathcal{O}_{-d}$ *на имагинерно квадратично числово поле* $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$*,* $d \in \mathbb{N}$*, а* H *е подгрупа на* $\mathrm{Aut}(A)$*. Тогава всяка неособена матрица* $S \in Gl_2(\mathbb{C})$ *индуцира комутативна диаграма*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\zeta_H"'] & B \arrow[d, "\zeta_{SHS^{-1}}"] \\ A/H \arrow[r, "\overline{S}"] & B/SHS^{-1} \end{tikzcd}$$

с изоморфизъм на абелеви многообразия $S : A \to B$*, покрития на Галоа* $\zeta_H : A \to A/H$*,* $\zeta_{SHS^{-1}} : B \to B/SHS^{-1}$ *и бирегулярно изображение* $\overline{S} : A/H \to B/SHS^{-1}$*.*
В частност, ако групата $\mathcal{L}(H)$ *на линейните части е абелева, то съществуват елиптични криви* F_1 *и* F_2*, изоморфни на* E*, така че действието на* H *върху* A *е еквивалентно на действието на подгрупа* H_o *на* $\mathrm{Aut}(F_1) \times \mathrm{Aut}(F_2) \subset \mathrm{Aut}(F_1 \times F_2)$ *и факторите* $A/H \simeq (F_1 \times F_2)/H_o$ *са бирегулярни.*

Доказателство: Всяко обратимо линейно изображение $S : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ индуцира епиморфизъм на $\mathbb{Z}$-модули $S : \pi_1(A) \to S\pi_1(A)$, чийто образ $S\pi_1(A)$ е свободен $\mathbb{Z}$-модул с ранг 4 и компактен фактор $B = \mathbb{C}^2/S\pi_1(A)$. По-точно, $\pi_1(A)$ е директна сума на $\mathbb{Z}$-модули $\pi_1(A) = ((1,0)\mathcal{O}_{-d}) \oplus ((0,1)\mathcal{O}_{-d})$. Ако

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{C}),$$

то

$$S((1,0)\mathcal{O}_{-d}) = \{(\alpha, \gamma)\lambda \,|\, \lambda \mathcal{O}_{-d}\} = (\alpha, \gamma)\mathcal{O}_{-d},$$

$$S((0,1)\mathcal{O}_{-d}) = (\beta, \delta)\mathcal{O}_{-d}.$$

От друга страна, универсалната покриваща $\widetilde{A} = \mathbb{C}^2$ на A е директна сума на комплексни прави $\mathbb{C}^2 = (1,0)\mathbb{C} \oplus (0,1)\mathbb{C}$ и

$$S((1,0)\mathbb{C}) = (\alpha,\gamma)\mathbb{C}, \quad S((0,1)\mathbb{C})(\beta,\delta)\mathbb{C}.$$

Следователно $S((1,0)\mathcal{O}_{-d})$ е $\mathbb{Z}$-подмодул на $S((1,0)\mathbb{C})$, чийто фактор

$$F_1 = S(E\times 0) = S\left((1,0)\mathbb{C}/(1,0)\mathcal{O}_{-d}\right) = S((1,0)\mathbb{C}/S((1,0)\mathcal{O}_{-d}) = (\alpha,\gamma)\mathbb{C}/(\alpha,\gamma)\mathcal{O}_{-d}$$

е елиптична крива, изоморфна на E. Аналогично,

$$F_2 = S(0\times E) = S\left((0,1)\mathbb{C}/(0,1)\mathcal{O}_{-d}\right) = S((0,1)\mathbb{C})/S((0,1)\mathcal{O}_{-d}) = (\beta,\delta)\mathbb{C}/(\beta,\delta)\mathcal{O}_{-d}$$

е елиптична крива, изоморфна на E и

$$B = S(A) = S(E\times 0)\times S(0\times E) = F_1\times F_2.$$

Изображението $S : A \to B$ е изоморфизъм на абелеви повърхнини, защото $S^{-1} \in Gl_2(\mathbb{C})$ трансформира $\pi_1(B) = S\pi_1(A)$ в $\pi_1(A)$ и индуцира морфизъм на абелеви повърхнини $S^{-1} : B \to A$.
Действието на H върху $A = E\times E$ индуцира действие на SHS^{-1} върху B, относно което $S : A \to B$ е еквивариантно. Това означава комутативност на диаграмите

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "S"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "ShS^{-1}"] \\ A \arrow[r, "S"] & B \end{tikzcd}$$

за $\forall h\in H$. По този начин, H-орбитите върху A се оказват във взаимно еднозначно съответствие с SHS^{-1}-орбитите върху B и S индуцира бирегулярно изображение $\overline{S} : A/H \to B/SHS^{-1}$.
Ако групата $\mathcal{L}(H) \leq \mathrm{End}^*(A) = Gl_2(\mathcal{O}_{-d})$ на линейните части е абелева, то съществува базис на $\mathbb{C}^2$, в който $\mathcal{L}(h)$ са диагонални за $\forall h \in H$. Нека S^{-1} е матрицата на прехода от първоначалния базис на $\mathbb{C}^2$ към базиса от собствени вектори за всички $\mathcal{L}(h)$ и $F_1 = S(E\times 0)$, $F_2 = S(0\times E)$. Тогава SHS^{-1} е подгрупа на $\mathrm{Aut}(F_1)\times\mathrm{Aut}(F_2)$ и A/H е бирегулярно на $(F_1\times F_2)/SHS^{-1}$. Да отбележим, че ако H е абелева подгрупа на $\mathrm{Aut}(A)$, то $\mathcal{L}(H)$ е абелева подгрупа на $Gl_2(\mathcal{O}_{-d})$, но съществуват неабелеви подгрупи H с абелева линейна част $\mathcal{L}(H)$, Q.E.D.
Нека V е алгебрично многообразие с холоморфно действие на група $\mathfrak{G}$. За произволна точка $v\in V$ да означим с $v_{\mathfrak{G}}$ съответната орбита, разгледана като елемент на $V/\mathfrak{G}$.

Лема 2.2. *Нека $B = F_1\times F_2$ е Декартово произведение на елиптични криви F_1, F_2, изоморфни на $E = \mathbb{C}/\mathcal{O}_{-d}$, H е подгрупа на* $\mathrm{Aut}(F_1)\times\mathrm{Aut}(F_2)$,

$$\mathrm{pr}_j : B = F_1\times F_2 \to F_j$$

са каноничните проекции върху множителите на B, *а* $q_j : H \to \mathrm{Aut}(F_j)$ *са съответните проекции на* H. *Тогава* pr_j *индуцират разслоения*

$$p_j : B/H \longrightarrow C_j = F_j/q_j(H)$$

с елиптични или рационални общи слоеве върху елиптични или рационални бази C_j. *По-точно, слоят на* p_j *над* $(R_j)_{q_j(H)} \in C_j$ *е изоморфен на*

$$F_{3-j}/q_{3-j}q_j^{-1}\mathrm{Stab}_{q_j(H)}(R_j).$$

В частност, p_j *е елиптично разслоение тогава и само тогава, когато* $q_{3-j}\ker(q_j) \leq \mathrm{Aut}(F_{3-j})$ *е транслационна група. Разслоението* p_j *задава линейчата структура точно когато* $q_{3-j}\ker(q_j)$ *има изолирани фиксирани точки.*
Базата $C_j = F_j/q_j(H)$ *е елиптична за* $q_j(H) \leq \mathcal{T}_{F_j}$ *и рационална за нетранслационна група* $q_j(H)$.

Доказателство: Понеже H е подгрупа на $\mathrm{Aut}(F_1) \times \mathrm{Aut}(F_2)$, каноничните проекции $\mathrm{pr}_j : B = F_1 \times F_2 \to F_j$ са H-еквивариантни и участват в комутативни диаграми

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\mathrm{pr}_j"] \arrow[d, "h"'] & F_j \arrow[d, "q_j(h)"] \\ B \arrow[r, "\mathrm{pr}_j"] & F_j \end{tikzcd}$$

за всички $h \in H$. Произволна H- орбита върху B се изобразява от pr_j в $q_j(H)$-орбита върху F_j. По този начин се получава комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} B = F_1 \times F_2 \arrow[r, "\mathrm{pr}_j"] \arrow[d, "\zeta_H"'] & F_j \arrow[d, "\zeta_{q_j(H)}"] \\ B/H \arrow[r, "p_j"] & C_j = F_j/q_j(H) \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

с $p_j((R_1, R_2)_H) = (R_j)_{q_j(H)}$. Факторът $C_j = F_j/q_j(H)$ на елиптичната крива F_j е елиптична крива тогава и само тогава, когато $q_j(H) \leq \mathcal{F}_{F_j}$ е транслационна група. Кривата $C_j = F_j/q_j(H)$ е рационална точно когато $\{1\} \neq \mathcal{L}(q_j(H)) \leq \mathcal{O}^*_{-d}$. Да отбележим, че подгрупа на $\mathrm{Aut}(F_j) = \mathcal{T}_{F_j} \rtimes \mathcal{O}^*_{-d}$ е транслационна тогава и само тогава, когато няма фиксирани точки върху F_j. Еквивалентно, нетранслационните подгрупи на $\mathrm{Aut}(F_j)$ са онези, които имат краен брой изолирани фиксирани точки върху F_j.
Остава да характеризираме слоя $p_2^{-1}((R_2)_{q_2(H)})$ над произволна точка $(R_2)_{q_2(H)} \in C_2$. За произволно алгебрично многообразие V с холоморфно действие на група $\mathfrak{G}$, да означим с $\mathrm{Orb}_{\mathfrak{G}}(v) = \{g(v) \,|\, g \in \mathfrak{G}\} \subset V$ орбитата на $v \in V$, разгледана като подмножество на V. Комутативната диаграма (2.1) се ограничава до комутативна

диаграма

$$\begin{tikzcd} F_1 \times \mathrm{Orb}_{q_2(H)}(R_2) \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\zeta_H"'] & \mathrm{Orb}_{q_2(H)}(R_2) \arrow[d, "\zeta_{q_2(H)}"] \\ p_2^{-1}((R_2)_{q_2(H)}) \arrow[r, "p_2"] & (R_2)_{q_2(H)} \end{tikzcd} . \qquad (2.2)$$

Трябва да опишем слоя $\zeta_H(F_1 \times \mathrm{Orb}_{q_2(H)}(R_2)) = p_2^{-1}((R_2)_{q_2(H)})$ на p_2 с точност до бирегулярност. Твърдим, че

$$F_1 \times \mathrm{Orb}_{q_2(H)}(R_2) = \mathrm{Orb}_H(F_1 \times R_2).$$

От една страна, за всяка точка $(R_1, q_2(h)R_2) \in B = F_1 \times F_2$ с $R_1 \in F_1$ и $h \in H$ съществува точка $R_1' = q_1(h)^{-1}R_1 \in F_1$, така че $h(R_1', R_2) = (q_1(h)R_1', q_2(h)R_2) = (R_1, q_2(h)R_2)$. Обратно, за произволна точка $R_1 \in F_1$ и произволен елемент $h \in H$ е в сила $h(R_1, R_2) = (q_1(h)R_1, q_2(h)R_2) \in F_1 \times \mathrm{Orb}_{q_2(H)}(R_2)$. Сега забелязваме, че

$$\zeta_H \mathrm{Orb}_H(F_1 \times R_2) \simeq \zeta_{q_2^{-1}\mathrm{Stab}_{q_2(H)}R_2}(F_1 \times R_2) \simeq \zeta_{q_1 q_2^{-1}\mathrm{Stab}_{q_2(H)}(R_2)}(F_1) \times R_2$$

са бирегулярни. Следователно слоят

$$p_2^{-1}((R_2)_{q_2(H)}) \simeq \zeta_{q_1 q_2^{-1}\mathrm{Stab}_{q_2(H)}(R_2)}(F_1)$$

е елиптична крива точно когато $q_1 q_2^{-1}\mathrm{Stab}_{q_2(H)}(R_2) \leq \mathrm{Aut}(F_1)$ е транслационна група. Ако групата $q_1 q_2^{-1}\mathrm{Stab}_{q_2(H)}(R_2)$ има фиксирани точки, то $p_2^{-1}((R_2)_{q_2(H)})$ е рационална крива. В обща точка $(R_2)_{q_2(H)} \in C_2 = F_2/q_2(H)$ стабилизаторът $\mathrm{Stab}_{q_2(H)}(R_2) = 1$ и $q_2^{-1}\mathrm{Stab}_{q_2(H)}(R_2) = \ker(q_2)$. Затова $p_2 : B/H \to C_2$ е елиптично разслоение точно когато $q_1 \ker(q_2) \leq \mathrm{Aut}(F_1)$ е транслационна група. Ако групата $q_1 \ker(q_2)$ не е транслационна, то общите слоеве на $p_2 : B/H \to C_2$ са рационални криви, Q.E.D.

Определение 2.3. *Нека*

$$\begin{tikzcd} A = E \times E \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\zeta_H"'] & B = F_1 \times F_2 \arrow[d, "\zeta_{SHS^{-1}}"] \\ A/H \arrow[r, "\overline{S}"] & B/SHS^{-1} \end{tikzcd} \qquad (2.3)$$

е едновременна диагонализация на действието на крайна група H с абелева линейна част $\mathcal{L}(H) < Gl_2(\mathcal{O}_{-d})$ върху абелева повърхнина $A = E \times E$ с $E = \mathbb{C}/\mathcal{O}_{-d}$, а $q_j : SHS^{-1} \to \mathrm{Aut}(F_j)$ са проекциите върху автоморфизмите на множителите. Изображенията

$$p_j : B/SHS^{-1} \longrightarrow C_j = F_j/q_j(SHS^{-1}),$$

индуцирани от каноничните проекции $\mathrm{pr} : F_1 \times F_2 \to F_j$ се наричат канонични разслоения на фиксираната диагонализация.

Да обърнем внимание, че каноничните разслоения на диагонализация на H индуцират разслоения $p_j\overline{S} : A/H \to C_j$ със същите слоеве като $p_j : B/SHS^{-1} \to C_j$. За произволно разрешение $\rho : Y \to A/H$ на изолираните фактор-особености на A/H получаваме получаваме разслоения $p_j\overline{S}\rho : Y \to C_j$, $1 \leq j \leq 2$ със същите общи слоеве като p_j.

Глава 3

Определяне на размерността на Кодаира

Лема 3.1. *Нека $A = E \times E$ е Декартов квадрат на елиптична крива E, $H_1 < H_2$ са крайни подгрупи на $\mathrm{Aut}(A)$, а Y_j са минималните разрешения на особеностите на A/H_j за $1 \leq j \leq 2$. Тогава съществува комутативна диаграма*

$$\begin{tikzcd} A/H_1 \arrow[d, "\zeta^A"'] & Y_1 \arrow[l, "\rho_1"'] \arrow[d, "\zeta^1"'] & Z_1 \arrow[l, "\eta_1"'] \arrow[d, "\zeta_2"'] \\ A/H_2 & X_2 \arrow[l, "\nu_2"'] & Y_2 \arrow[l, "\mu_2"'] \end{tikzcd},$$

в която $Z_1 = Y_1 \times_{X_2} Y_2$ е гладка повърхнина, ζ^A, ζ^1 ζ_2 са крайни (необезателно регулярни) покрития от степен $[H_2 : H_1] = \frac{|H_2|}{|H_1|}$, а ρ_1, η_1, ν_2, μ_2 са бирационални изображения, чиито изключителни дивизори са съставени от рационални неприводими компоненти.

Доказателство: Преди всичко, изключителният дивизор $E(\rho_1)$ на минималното разрешение $\rho_1 : Y_1 \to A/H_1$ на изолираните фактор-особености на A/H_1 се състои от рационални неприводими компоненти E_i със самопресичане $E_i^2 \leq -2$. Достатъчно е да докажем това за неприводимите компоненти на $\rho_1^{-1}(p)$ за фиксирана особена точка $p \in (A/H_1)^{\mathrm{sing}}$. Особеността на A/H_1 в $p = \mathrm{Orb}_{H_1}(\widetilde{p})$ е същата както в $\overline{p} = \mathrm{Orb}_{\mathrm{Stab}_{H_1}(\widetilde{p})}(\widetilde{p}) \in A/\mathrm{Stab}_{H_1}(\widetilde{p})$. Ако групата $\mathrm{Stab}_{H_1}(\widetilde{p})$ е циклична, то особеността в $\overline{p}$ се разрешава с верига на Хирцебрух-Юнг, съставена от рационални криви със самопресичане ≤ -2. За всяка подгрупа H_1' на $\mathrm{Stab}_{H_1}(\widetilde{p})$ изключителният дивизор E' на разрешението на особеността в $p' = \mathrm{Orb}_{H_1'}(\widetilde{p})$ се изобразява върху изключителния дивизор $E(\overline{p})$ на разрешението на особеността в $\overline{p}$, защото достатъчно малка инвариантна пробита околност на p' покрива пробита околност на $\overline{p}$. Покриващото изображение е локално ограничено и се продължава до покритие на $E(\overline{p})$ чрез E'. С индукция по броя на пораждащите на $\mathrm{Stab}_{H_1}(\widetilde{p})$, оттук следва, че $E(\overline{p})$ е обединение на рационални криви.

Определяме $\nu_2 : X_2 \to A/H_2$ като минималното разрешение на онези особености $\mathrm{Orb}_{H_2}(\widetilde{p}) \in (A/H_2)^{\mathrm{sing}}$, които се повдигат до особени точки $\mathrm{Orb}_{H_1}(\widetilde{p}) \in (A/H_1)^{\mathrm{sing}}$. Повтаряйки горното разсъждение, продължаваме (необезателно регулярното) покритие $\zeta^A : A/H_1 \to A/H_2$ до покритие $\zeta^1 : Y_1 \to X_2$ от степен $[H_2 : H_1]$. Изключителният дивизор $E(\rho_1)$ на ρ_1 покрива изключителния дивизор $E(\nu_2)$ на ν_2 под действие на ζ^1, така че $E(\nu_2)$ се състои от рационални неприводими компоненти.
По-нататъшното минимално разрешение $\mu_2 : Y_2 \to X_2$ на изолираните фактор-особености

$$X_2^{\mathrm{sing}} = \{\mathrm{Orb}_{H_2}(\widetilde{p}) \in (A/H_2)^{\mathrm{sing}} \,|\, \mathrm{Orb}_{H_1}(\widetilde{p}) \in (A/H_1)^{\mathrm{smooth}}\}$$

има изключителен дивизор $E(\mu_2)$ с рационални неприводими компоненти, защото композицията $\rho_2 = \nu_2\mu_2 : Y_2 \to A/H_2$ е минималното разрешение на особеностите на A/H_2 с изключителен дивизор $E(\rho_2) = \mu_2^{-1}E(\nu_2) \cup E(\mu_2)$.
Определяме $Z_1 = Y_1 \times_{X_2} Y_2$ като разслоено произведение,

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[d, "\zeta^1"'] & Z_1 = Y_1 \times_{X_2} Y_2 \arrow[l, "\eta_1"'] \arrow[d, "\zeta_2"] \\
X_2 & Y_2 \arrow[l, "\mu_2"']
\end{tikzcd} .$$

Тогава ζ_2 е крайно покритие от степен $[H_2 : H_1]$. Слоевете

$$\eta_1^{-1}(y_1) = \{(y_1, y_2) \,|\, \mu_2(y_2) = \zeta^1(y_1)\} \simeq \mu_2^{-1}(\zeta^1(y_1))$$

съвпадат, така че изключителният дивизор $E(\eta_1)$ на η_1 се състои от рационални неприводими компоненти.
Остава да докажем гладкостта на Z_1. Да допуснем противното и да изберем особена точка $z_1 \in Z_1^{\mathrm{sing}}$. Допирателното пространство на Зариски $T_{z_1}Z_1$ е с размерност $\dim_{\mathbb{C}} T_{z_1}Z_1 \geq 3$. Образът $\zeta_2(z_1) = y_2 \in Y_2$ е гладка точка, така че $\dim_{\mathbb{C}} T_{y_2}Y_2 = 2$. Следователно диференциалът

$$(d\zeta_2)_{z_1} : T_{z_1}Z_1 \longrightarrow T_{y_2}Y_2$$

има нетривиално ядро. Това изисква ζ_2 да е постоянно върху подмногообразие с положителна размерност. Но ζ_2 е покритие и има дискретни слоеве. Противоречието доказва гладкостта на Z_1, Q.E.D.

Лема 3.2. *Нека A е абелевият минимален модел на гладка аритметична тороидална компактификация $(\mathbb{B}/\Gamma)'$, $T \subset A$ е образът на тороидалния компактифициращ дивизор $T' = (\mathbb{B}/\Gamma)' \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$ при свиване на (-1)-кривите върху $(\mathbb{B}/\Gamma)'$, а H е подгрупа на $G = \mathrm{Aut}(A, T)$. Тогава минималният модел X на произволно разрешение на изолираните фактор-особености на A/H е проективна повърхнина, бирационална на някоя от следните:*
(i) рационална повърхнина;
(ii) линейчата повърхнина с елиптична база;

(iii) абелева повърхнина;

(iv) хиперелиптична повърхнина;

(v)K3 повърхнина;

(vi) повърхнина на Енриквес.

Доказателство: Преди всичко, повърхнината A/H е проективна, защото е бирационална на компактификацията на Baily-Borel $\widehat{\mathbb{B}/\Gamma_H}$ на аритметичния фактор $\mathbb{B}/\Gamma_H$ на кълбото $\mathbb{B}$. По-точно, свиването на гладките елиптични неприводими компоненти T'_i на $T' = (\mathbb{B}/\Gamma)' \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$ в точки дава $\widehat{\mathbb{B}/\Gamma}$. Подгрупата H на $G = \mathrm{Aut}(A, T)$ действа върху T' и факторът T'/H компактифицира $\mathbb{B}/\Gamma_H$. Свиването $\eta^H : \overline{\mathbb{B}/\Gamma_H} \to \widehat{\mathbb{B}/\Gamma_H}$ на неприводимите (елиптични или рационални) компоненти на T'/H дава компактификацията на Baily-Borel $\widehat{\mathbb{B}/\Gamma_H}$ на $\mathbb{B}/\Gamma_H$. По този начин получаваме комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\zeta_H^A"'] & (\mathbb{B}/\Gamma)' \arrow[l, "\xi"'] \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\zeta'_H"'] & \widehat{\mathbb{B}/\Gamma} \arrow[d, "\widehat{\zeta_H}"'] \\
A/H & \overline{\mathbb{B}/\Gamma_H} \arrow[l, "\xi^H"'] \arrow[r, "\eta^H"] & \widehat{\mathbb{B}/\Gamma_H}
\end{tikzcd} ,$$

в която хоризонталните морфизми са бирационални, а всички вертикални морфизми са H-Галоа покрития. По предположение, Γ е аритметична, т.е. съизмерима с $SU_{2,1}(\mathcal{O}_{-d})$ за някакво естествено d. Доколкото Γ е нормална подгрупа на Γ_H с краен индекс $[\Gamma_H : \Gamma] = |H|$, решетката Γ_H е също аритметична. Класически резултат на Baily-Borel установява, че $\widehat{\mathbb{B}/\Gamma_H}$ е нормална проективна повърхнина, за произволна аритметична решетка $\Gamma_H \leq SU_{2,1}$. Като бирационална на $\widehat{\mathbb{B}/\Gamma_H}$, повърхнината A/H, минималното разрешение Y на изолираните фактор-особености на A/H и произволен гладък модел X на Y са проективни повърхнини.

Размерността на Кодаира κ не нараства по протежение на $\zeta_H^A : A \to A/H$ и $\kappa(A) = 0$, така че A/H е проективна повърхнина с $\kappa(A/H) = 0$ или $-\infty$. Достатъчно е да докажем, че повърхнина A/H не може да е бирационална на линейчата повърхнина X с база C_g от род $g \geq 2$, за да завършим доказателството на лемата. Нека $\rho : Y \to A/H$ е минималното разрешение на изолираните фактор-особености на A/H, а

$$\begin{tikzcd}
Y & Z \arrow[l, "\sigma_1"'] \arrow[r, "\sigma_2"] & X
\end{tikzcd}$$

са раздуванията, осъществяващи бирационалния морфизъм между Y и X. Да означим с $f : X \to C_g$ линейчатата структура върху X, т.е. разслоението с рационални слоеве.

В комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\zeta_H^A"'] & & & \\ A/H & Y \arrow[l, "\rho"'] & Z \arrow[l, "\sigma_1"'] \arrow[r, "\sigma_2"] & X \arrow[d, "f"] \\ & & & C_g \end{tikzcd}$$

твърдим, че разслоението $f\sigma_2 : Z \to C_g$ се пропуска до $f_0 : A/H \to C_g$. За целта е достатъчно да установим, че регулярното изображение $f\sigma_2$ е постоянно върху неприводимите компоненти на изключителния дивизор на $\rho\sigma_1$. Еквивалентно, всяка неприводима рационална компонента C_0 на $\sigma_1^{-1}\rho^{-1}\left(A/H\right)^{\text{sing}}$ се изобразява в точка $f\sigma_2(C_0)$. При допускане на противното, $f\sigma(C_0)$ е неприводима рационална крива, съдържаща се в C_g. Следователно $f\sigma_2(C_0) = C_g$, което е невъзможно съгласно $g \geq 1$. Оттук съществува разслоение $f_0 : A/H \to C_g$. Композирайки с $\zeta_H^A : A \to A/H$, получаваме сюрективно регулярно изображение $f_1 : A \to C_g$. Факторизацията на Щайн

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_2"] \arrow[dr, "f_1"'] & C_{g_o} \arrow[d, "f_3"] \\ & C_g \end{tikzcd}$$

на f_1 се състои от сюрективно регулярно изображение $f_2 : A \to C_{g_o}$ със свързани слоеве и крайно регулярно изображение $f_3 : C_{g_o} \to C_g$. Кривата C_{g_o} е от род $g_o \geq g \geq 2$. Свързаността на слоевете на $f_2 : A \to C_{g_o}$ води до сюрективност на индуцираното изображение $(f_2)_* : \pi_1(A) \to \pi_1(C_{g_o})$ на фундаменталните групи. От една страна, $\pi_1(A) \simeq \mathbb{Z}^4$ е абелева, така че образът и $\pi_1(C_{g_o}) = (f_2)_*\pi_1(A)$ също трябва да е абелева група. От друга страна, фундаменталната група $\pi_1(C_{g_o})$ не е абелева за род $g_o \geq 2$. Противоречието доказва, че повърхнината A/H не може да е бирационална на линейчата с база от род ≥ 2, Q.E.D.

Определение 3.3. *Автоморфизмът*

$$\tau_{(P_1,Q_1)}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_A \rtimes Gl_2(\mathcal{O}_{-d})$$

се нарича отражение, ако фиксира елиптична крива върху $A = E \times E$.
Множеството на отраженията в група $G \leq Aut(A)$ *ще бележим с* $R(G)$.

Следващото твърдение установява, че наличието на отражение $h \in H$ е необходимо и достатъчно условие за $\kappa(A/H) = -\infty$. За произволно крайно регулярно изображение $f : X \to Y$ на гладки повърхнини, което е разклонено върху дивизора

$B \subset X$, каноничният дивизор $K_X = f^*K_Y \otimes B$. Затова колкото по-обилен е дивизорът B, толкова "по-отдалечени"са проективните повърхнини X и Y в класификацията на Кодаира-Енриквес. В конкретния случай, размерността на Кодаира $\kappa(A/H) = \kappa(A) = 0$ се запазва точно когато B се състои от краен брой точки и намалява $-\infty = \kappa(A/H) < \kappa(A) = 0$ за B с коразмерност 1.

Твърдение 3.4. *Нека $(\mathbb{B}/\Gamma)'$ е гладка аритметична тороидална компактификация, $\xi : (\mathbb{B}/\Gamma)' \to A$ е свиването на рационалните (-1)-криви до абелева повърхнина $A = E \times E$ с $E = \mathbb{C}/\mathcal{O}_{-d}$, $T' = (\mathbb{B}/\Gamma)' \setminus (\mathbb{B}/\Gamma)$, $T = \xi(T')$ и H е подгрупа на $G = \mathrm{Aut}(A, T)$. Факторът A/H е с размерност на Кодаира $\kappa\,(A/H) = -\infty$ тогава и само тогава, когато H съдържа отражение.*

Доказателство: Ако $h \in H$ е отражение, то след преместване на началото на A върху фиксираната от h елиптична крива, представяме

$$h = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathcal{O}_{-d})$$

като линейна трансформация. Характеристичните корени на h са $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 \neq 1$. От $\lambda_1\lambda_2 = \det(h) \in \mathcal{O}^*_{-d}$ следва, че $\lambda_2 \in \mathcal{O}^*_{-d} \setminus \{1\}$. По-точно, за $d \neq 1$ и 3 трябва $\lambda_2 = -1$. Ако $d = 1$, то $\lambda_2 \in \{-1, \pm i\}$. За $d = 6$ имаме $\lambda_2 \in \{e^{\frac{2\pi i k}{6}} \,|\, 1 \leq k \leq 5\}$. Елементът $h \in Gl_2(\mathcal{O}_{-d})$ е от краен ред и затова се диагонализира. Нека матрицата $S^{-1} \in Gl_2(\mathbb{C})$ е съставена по стълбове от собствените вектори на h, отговарящи на $\lambda_1 = 1$ и на $\lambda_2 \neq 1$. Съгласно Лема 2.1, линейният автоморфизъм

$$ShS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

се диагонализира върху абелевата повърхнина $B = S^{-1}(A)$. По Лема 2.2, $h \in \ker(q_1)$ и $1 \neq \lambda_2 = q_2(h) \in q_2 \ker(q_1)$. Следователно

$$p_1 : B/\langle ShS^{-1}\rangle \longrightarrow C_1 = F_1$$

е разслоение чрез рационални криви или $B/\langle ShS^{-1}\rangle$ е линейчата повърхнина. Това е достатъчно за $\kappa(B/\langle ShS^{-1}\rangle) = -\infty$. Повърхнината $A/\langle h\rangle$ е бирегулярна на $B/\langle ShS^{-1}\rangle$, така че и $\kappa(A/\langle h\rangle) = -\infty$. Подгрупата $\langle h\rangle$ на H отговаря на крайно регулярно изображение $A/\langle h\rangle \to A/H$, което не е обезателно покритие на Галоа, защото цикличната група $\langle h\rangle$ не винаги е нормална в H. Размерността на Кодаира не расте по протежение на морфизъм, така че $-\infty = \kappa(A/\langle h\rangle) \geq \kappa(A/H)$, а оттам и $\kappa(A/H) = -\infty$.

Обратно, проективната повърхнина A/H с размерност на Кодаира $\kappa(A/H) = -\infty$ е бирационална на линейчата повърхнина. Допускаме, че групата H не съдържа отражения. Тогава покритието на Галоа $\zeta^A_H : A \to A/H$ има най-много краен брой изолирани точки на разклонение. Нека $\rho_o : Y_o \to A/H$ е минималното разрешение на особеностите на A/H, а $f : X \to B$ е линейчата повърхнина с база B, бирационална на A/H. Тогава X е бирационална на Y_o, така че съществува повърхнина Y_1 и раздувания $\sigma_o : Y_1 \to Y_o$, $\sigma : Y_1 \to X$, участващи в комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} A/H & Y_o \arrow[l, "\rho_o"'] & Y_1 \arrow[l, "\sigma_o"'] \arrow[r, "\sigma"] & X \arrow[d, "f"'] \\ & & & B \end{tikzcd} .$$

Нека $M_1 \subset A/H$ е множеството от точки $x \in A/H$, за които слоят $F_x = (\rho_o\sigma_o)^{-1}(x)$ на $\rho_o\sigma_o : Y_1 \to A/H$ е нетривиален и се изобразява от $f\sigma : Y \to B$ върху $f\sigma(F_x) = B$. Ако $M_1 \neq \emptyset$ е непразно множество, то рационалността на F_x изисква рационалност на базата B. Бирационалното изображение $\rho_o\sigma_o : Y_1 \to A/H$ е биективно в обща точка, така че M_1 е дивизор върху A/H. Допълнението $Z_1 = (A/H) \setminus M_1$ е отворена повърхнина, върху която $f\sigma : Y_1 \to B$ индуцира морфизъм $f_1 : Z_1 \to B$ с рационални слоеве, който не е обезателно сюрективен. Покритието на Галоа $\zeta_H^A : A \to A/H$ има краен брой точки на разклонение. След премахване на онези от тях, които са от Z_1 получаваме отворена повърхнина $Z_0 \subset Z_1$ с неразклонено покритие $\zeta_H^A : \left(\zeta_H^A\right)^{-1}(Z_0) \to Z_0$, което издърпва всеки слой $F_y = f_1^{-1}(y)$, $y \in f_1(Z_0)$ до рационална крива върху A. Това е противоречие, защото абелевата повърхнина A не съдържа рационални криви. Следователно дивизорът на разклонение на $\zeta_H^A : A \to A/H$ трябва да пресича всяка рационална крива върху Z_1 от слоя на f_1. Последното е възможно само когато H съдържа отражение, Q.E.D.

Лема 3.5. *Нека (2.3) е едновременна диагонализация на крайна подгрупа $H < \mathrm{Aut}(A)$ с абелева линейна част $\mathcal{L}(H)$, а $q_j : SHS^{-1} \to \mathrm{Aut}(F_j)$ са проекциите върху автоморфизмите на множителите. Двете канонични разслоения*

$$p_j : B/SHS^{-1} \longrightarrow C_j = F_j/q_j(SHS^{-1}),\ 1 \leq j \leq 2$$

на диагонализацията SHS^{-1} на H са елиптични разслоения тогава и само тогава, когато факторът A/H е с размерност на Кодаира $\kappa\,(A/H) = 0$.

Доказателство: Да допуснем, че $p_j : B/SHS^{-1} \to C_j$ са елиптични разслоения за $j = 1$ и $j = 2$, но $\kappa\,(A/H) = -\infty$. Съгласно Лема 2.1, факторът B/SHS^{-1} е бирегулярен, а оттам и бирационален на A/H. Следователно $\kappa\left(B/SHS^{-1}\right) = -\infty$ и от Твърдение 3.4 следва съществуването на отражение $ShS^{-1} \in SHS^{-1}$. Диагонализираното отражение $ShS^{-1} = (q_1(ShS^{-1}), q_2(ShS^{-1}))$ има тривиална компонента $q_j(ShS^{-1}) = 1$ и компонента $q_{3-j}(ShS^{-1})$ с нетривиална линейна част $\mathcal{L}(q_{3-j}(ShS^{-1})) = \lambda \neq 1$. Следователно $ShS^{-1} \in \ker(q_j)$ и $q_{3-j}\ker(q_j) \ni q_{3-j}(ShS^{-1})$ е нетранслационна подгрупа на $\mathrm{Aut}(F_{3-j})$. Прилагаме Лема 2.2 и получаваме, че $p_j : B/SHS^{-1} \to C_j$ задава линейчата структура, противно на предположението. С това доказахме, че $p_1 : B/SHS^{-1} \to C_1$ и $p_2 : B/SHS^{-1} \to C_2$ са елиптични разслоения само когато A/H е с размерност на Кодаира $\kappa\,(A/H) = 0$.

Обратно, ако $\kappa\left(B/SHS^{-1}\right) = \kappa\,(A/H) = 0$, то SHS^{-1} не съдържа отражение съгласно Твърдение 3.4. С други думи, всяко $h \in \ker(q_j)$ има $\mathcal{L}(q_{3-j}(h)) = 1$ и $q_{3-j}(h) \in \mathcal{T}_{F_{3-j}}$ е

транслация. Следователно $q_{3-j}\ker(q_j)$ е транслационна група и $p_j : B/SHS^{-1} \to C_j$ е елиптично разслоение по Лема 2.2, Q.E.D.
Да отбележим, че съществуват рационални повърхнини X и линейчати повърхнини X с елиптична база, които са елиптични разслоения $f : X \to B$. Например, раздуването на $\mathbb{P}^2$ в деветте пресечни точки на две кубични проективни криви в общо положение е елиптично разслоение с база $\mathbb{P}^1$ и без кратни слоеве.

Следствие 3.6. *Нека 2.3 е едновременна диагонализация на крайна подгрупа H на $Aut(A)$ с абелева линейна част $\mathcal{L}(H)$, $q_j : SHS^{-1} \to \mathrm{Aut}(F_j)$ са проекциите върху автоморфизмите на множителите, $p_j : B/SHS^{-1} \to C_j = F_j/q_j(H)$, $1 \leq j \leq 2$ са каноничните разслоения на тази диагонализация, а A/H е с размерност на Кодаира $\kappa(A/H) = 0$. Тогава:*
(i) p_1 и p_2 нямат кратни слоеве;
(ii) p_1 и p_2 нямат глобални сечения, ако A/H не е абелева повърхнина.

Доказателство: (i) Съгласно Лема 2.2, слоят над $(R_j)_{q_j(H)} \in C_j$ е

$$p_j^{-1}((R_j)_{q_j(H)}) = F_{3-j}/q_{3-j}q_j^{-1}\mathrm{Stab}_{q_j(SHS^{-1})}(R_j).$$

Да допуснем, че съществува кратен слой $p_j^{-1}((R_j)_{q_j(SHS^{-1})})$. Тогава за всяка точка $P \in F_{3-j}$ съществува $\delta(P) \in q_j^{-1}\mathrm{Stab}_{q_j(SHS^{-1})}(R_j)$ с $1 \neq q_{3-j}(\delta(P)) \in \mathrm{Stab}_{q_{3-j}(SHS^{-1})}(P)$. С други думи, $\delta(P) \in SHS^{-1}$ стабилизира (P, R_2) или, съответно, (R_1, P). По този начин, множеството на фиксираните точки на SHS^{-1} върху $B = F_1 \times F_2$ съдържа елиптична крива $F_1 \times R_2$ или, съответно, $R_1 \times F_2$. Оттук SHS^{-1} съдържа отражение и $\kappa(A/H) = -\infty$, противно на допускането. Следователно каноничните елиптични разслоения $p_j : B/SHS^{-1} \to C_j$ нямат кратни слоеве.
(ii) Известно е, че всяко елиптично разслоение върху гладка проективна неабелева повърхнина X с $\kappa(X) = 0$ има рационална база. Ако $\rho : Y \to B/SHS^{-1}$ е минималното разрешение на изолираните фактор-особености на B/SHS^{-1}, то композициите $p_j\rho : Y \to C_j$ са елиптични разслоения върху гладката проективна повърхнина Y. Следователно C_1 и C_2 са рационални. Да допуснем, че съществува глобално холоморфно сечение $\sigma_j : C_j \to B/SHS^{-1}$ на $p_j : B/SHS^{-1} \to C_j$. Да означим с IF крайното множество на изолираните фиксирани точки на SHS^{-1} върху $B = F_1 \times F_2$ и да положим $Br = IF/SHS^{-1}$. Тогава покритието на Галоа $\zeta_{SHS^{-1}} : B \setminus IF \to \left(B/SHS^{-1}\right) \setminus Br$ е неразклонено. Твърдим, че ограничението $\sigma_j : C_j \setminus \sigma_j^{-1}(Br) \to \left(B/SHS^{-1}\right) \setminus Br$ се повдига до холоморфно влагане

$$\Sigma_j : C_j \setminus \sigma_j^{-1}(Br) \longrightarrow B \setminus IF.$$

Съгласно линейната свързаност и локалната едносвързаност на $C_j \setminus \sigma_j^{-1}(Br)$, достатъчно е да проверим, че $(\sigma_j)_*\pi_1(C_j \setminus \sigma_j^{-1}(Br)) \subset (\zeta_{SHS^{-1}})_*\pi_1(B \setminus IF)$ за индуцираните изображения

$$(\sigma_j)_* : \pi_1(C_j \setminus \sigma_j^{-1}(Br)) \to \pi_1\left(\left(B/SHS^{-1}\right) \setminus Br\right)$$

и

$$(\zeta_{SHS^{-1}})_* : \pi_1(B \setminus IF) \to \pi_1\left(\left(B/SHS^{-1}\right) \setminus Br\right).$$

на фундаменталните групи. Рационалната крива C_j е едносвързана. Ако $Br = \{p_1, \ldots, p_k\}$ и $\sigma_j(C_j) \cap Br = \{p_1, \ldots, p_m\}$ за някое $m \leq k$, то

$$\sigma_j^{-1}(Br) = \{q_1 = \sigma_j^{-1}(p_1), \ldots, q_m = \sigma_j^{-1}(p_m)\}.$$

Фундаменталната група $\pi_1(C_j \setminus \{q_1, \ldots, q_m\}) = \mathbb{F}_m$ е свободна група от ранг m, породена от достатъчно малки примки $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \subset C_j$ около $q_1, \ldots, q_m$. Достатъчно е да докажем, че $(\sigma_j)_*(\gamma_s) = 1$ за $\forall 1 \leq s \leq m$, за да получим, че $(\sigma_j)_*\pi_1(C_j \setminus \sigma_j^{-1}(Br)) = \{1\} \subset (\zeta_H)_*\pi_1(B \setminus IF)$ и съществува комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd} & B \setminus IF \arrow[d, "\zeta_H"] \\ C_j \setminus \sigma_j^{-1}(Br) \arrow[ur, "\Sigma_j"] \arrow[r, "\sigma_j"] & (B/H) \setminus Br \end{tikzcd}$$

от холоморфни изображения. За целта разглеждаме достатъчно малка околност U_s на q_s върху C_j, която съдържа γ_s. Следователно $\sigma_j(U_s)$ съдържа $\sigma_j(\gamma_s)$ и съществува околност V_s на $\sigma_j(q_j) = p_s$ върху B/SHS^{-1}, която съдържа $\sigma_j(U_s)$. Пробитата околност $V_s \setminus p_s$ е едносвързана, защото реалната и размерност е по-голяма от 1. Следователно $(\sigma_j)_*(\gamma_s) = \sigma_j(\gamma_s)$ се свива в V_s и

$$(\sigma_j)_* : \pi_1(C_j \setminus \sigma_j^{-1}(Br)) \longrightarrow \pi_1((B/SHS^{-1}) \setminus Br)$$

има тривиален образ. Понеже $\sigma_j : C_j \setminus \sigma_j^{-1}(Br) \to (B/SHS^{-1}) \setminus Br$ е влагане и покритието $\zeta_{SHS^{-1}} : B \setminus IF \to (B/SHS^{-1}) \setminus Br$ е неразклонено, повдигането

$$\Sigma_j : C_j \setminus \sigma_j^{-1}(Br) \longrightarrow B \setminus IF$$

през фиксирана точка на B е влагане. Това се дължи на локалната бихоломорфност на ζ_H над $B \setminus IF$. По-нататък, Σ_j има холоморфно продължение $\Sigma_j : C_j \to B$ по Теоремата на Риман. (Изображението Σ_j е локално ограничено, защото взема стойности в комплексната абелева повърхнина $B = F_1 \times F_2$.) Сега $\Sigma_j(C_j)$ е рационална крива в абелевата повърхнина B. Това е противоречие, установяващо несъществуването на сечение на каноничното елиптично разслоение $p_j : B/H \to C_j$ на диагонализацията на H, Q.E.D.

Да споменем обзора [6] за елиптични разслоения $X \to B$ със сечение и с неположителна размерност на Кодаира $\kappa(X) \leq 0$. Такива X са рационални или K3 повърхнини. От друга страна, всяка повърхнина на Енриквес Y е елиптично разслоение $Y \to \mathbb{P}^1$ над проективната права $\mathbb{P}^1$ без глобално сечение. В Твърдение 6.3 са изброени всички подгрупи H на G_{-1}, за които A_{-1}/H е бирационално на повърхнина на Енриквес. Първите седем серии от тях са абелеви и съответните фактори A_{-1}/H имат по две канонични елиптични разслоения. Последната серия се състои от неабелеви, изоморфни помежду си групи, за които каноничните разслоения не са определени.

Определение 3.7. *Елементът $g \in \mathrm{Aut}(A,T)$ е потенциално отражение, ако съществува естествено k, така че $g^k \neq \mathrm{Id}$ е отражение.*
Да означим с $PR(\mathrm{Aut}(A,T))$ множеството на потенциалните отражения от групата $\mathrm{Aut}(A,T)$.

Съгласно Твърдение 3.4, факторът A/H е с размерност на Кодаира $\kappa(A/H) = -\infty$ тогава и само тогава, когато подгрупата H на $G = \mathrm{Aut}(A,T)$ съдържа потенциално отражение.

Твърдение 3.8. *Нека $A_{-1} = E_{-1} \times E_{-1}$ с $E_{-1} = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ и H е погрупа на*

$$G_{-1} = \{\tau_{33}^n I^k J^l \theta^m \,|\, 0 \leq k,l \leq 3,\, 0 \leq m,n \leq 1\}.$$

Факторът A_{-1}/H има размерност на Кодаира $\kappa(A_{-1}/H) = -\infty$ тогава и само тогава, когато H пресича множеството на потенциалните отражения

$$PR(G_{-1}) = R(G_{-1}) \cup \{\tau_{33} I^{2m+1},\, \tau_{33} J^{2m+1},\, \tau_{33}^n I^{2m+1} J^2,\, \tau_{33}^n I^2 J^{2m+1} \,|\, 0 \leq m,n \leq 1\},$$

където отраженията

$$R(G_{-1}) = \{I^k,\, J^k,\, \tau_{33}^n(I^l J^{-l}\theta) \,|\, 1 \leq k \leq 3,\, 0 \leq l \leq 3,\, 0 \leq n \leq 1\}.$$

Доказателство: Да означим с $L_1(G_{-1})$ множеството на онези $\tau_{33}^n(I^k J^l \theta^m) \in G_{-1}$, чиито линейни части $\mathcal{L}(\tau_{33}^n I^k J^l \theta^m) = I^k J^l \theta^m$ имат характеристични корени $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 \neq 1$. Подмножеството

$$G'_{-1} = \{\tau_{33}^n I^k J^l \,|\, 0 \leq n \leq 1,\, 0 \leq k,l \leq 3\} \subset G_{-1}$$

е абелева подгрупа на G_{-1} от ред 32. Понеже $\mathcal{L}(\tau_{33}^n I^k J^l) = I^k J^l$ има характеристични корени i^k и i^l, сечението

$$G'_{-1} \cap L_1(G_{-1}) = \{\tau_{33}^n I^k,\, \tau_{33}^n J^k \,|\, 1 \leq k \leq 3,\, 0 \leq n \leq 1\}.$$

Елементите от вида $g = \tau_{33}^n(I^k J^l \theta) \in G_{-1}$ имат характеристичен полином $f_g = \lambda^2 - i^{k+l}$. Числото 1 е негов корен точно когато $0 = f_g(1) = 1 - i^{k+l}$ или $l \equiv -k (\mathrm{mod}\, 4)$. В такъв случай, вторият корен на $f_g(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$ е $\lambda_2 = -1$, така че

$$(G_{-1} \setminus G'_{-1}) \cap L_1(G_{-1}) = \{\tau_{33}^n(I^l J^{-l}\theta) \,|\, 0 \leq l \leq 3,\, 0 \leq n \leq 1\}.$$

Окончателно,

$$L_1(G_{-1}) = \{\tau_{33}^n I^k,\, \tau_{33}^n J^k,\, \tau_{33}^n(I^l J^{-l}\theta) \,|\, 1 \leq k \leq 3,\, 0 \leq l \leq 3,\, 0 \leq n \leq 1\}.$$

Автоморфизмът $g_o \in L_1(G_{-1})$ е отражение точно когато има фиксирана точка. Непосредствено се вижда, че $I^k = \begin{pmatrix} i^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ с $1 \leq k \leq 3$ фиксира елиптичната крива

$\check{o}_{E_{-1}} \times E_{-1}$ и е отражение. Аналогично, $J^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i^k \end{pmatrix}$ с $1 \leq k \leq 3$ фиксира елиптичната крива $E_{-1} \times \check{o}_{E_{-1}}$ и е отражение. Ако допуснем, че $\tau_{33} I^k$ има фиксирана точка $(P, Q) \in A_{-1}$, то

$$\left| \begin{array}{c} i^k P + Q_3 = P \\ Q + Q_3 = Q \end{array} \right. ,$$

откъдето $Q_3 = Q_0 = \check{o}_{E_{-1}}$. Противоречието доказва, че $\tau_{33} I^k$ с $1 \leq k \leq 3$ няма фиксирани точки и не е отражение. Подобни разглеждания установяват, че $\tau_{33} J^k$ с $1 \leq k \leq 3$ не са отражения.

Фиксираните точки $(P, Q) \in A_{-1}$ на $g = \tau_{33}^n (I^l J^{-l} \theta)$ се характеризират с уравненията

$$\left| \begin{array}{c} i^l Q + nQ_3 = P \\ i^{-l} P + nQ_3 = Q \end{array} \right. . \tag{3.1}$$

За произволна точка $P \in E_{-1}$ избираме $Q = i^{-l} P + nQ_3$ и проверяваме, че $i^l (i^{-l} P + nQ_3) + nQ_3 = P$. Следователно решенията на (3.1) образуват елиптичната крива

$$C_g = \{(P, i^{-l} P + nQ_3) \,|\, P \in E_{-1}\}$$

и $g = \tau_{33}^n (I^l J^{-l} \theta)$ е отражение. По този начин доказахме, че отраженията от G_{-1} образуват множеството

$$R(G_{-1}) = \{I^k,\, J^k,\, \tau_{33}^n (I^l J^{-l} \theta) \,|\, 1 \leq k \leq 3,\, 0 \leq l \leq 3,\, 0 \leq n \leq 1\}.$$

Ако $h = \tau_{33}^n I^k J^l \theta^m \in G_{-1}$ е потенциално отражение, то характеристичните корени $\lambda_1(\mathcal{L}(h))$ и $\lambda_2(\mathcal{L}(h))$ на линейната част $\mathcal{L}(h)$ на h са от различен ред $r_1 < r_2$. Причина за това е, че $h^j \in R(G_{-1})$ е отражение за някакво естествено j, така че $\lambda_1(\mathcal{L}(h))^j = 1$, $\lambda_2(\mathcal{L}(h))^j \neq 1$. Оттук r_1 дели j, но r_2 не дели j. При подходяща номерация можем да считаме, че $r_1 < r_2$. Автоморфизмите $\tau_{33}^n I^k J^l \in G_{-1}$ имат характеристични корени i^k и i^l. Ако $\tau_{33}^n J^l \in PR(G_{-1}) \setminus R(G_{-1})$, то $l \neq 0$ и $l \neq 2$, защото $J^2 \in R(G_{-1})$, а $\tau_{33} J^2 \in L_1(G_{-1})$ е от ред 2. Автоморфизмите τ_{33}^{2m+1} с $0 \leq m \leq 1$ да потенциални отражения, но не и отражения, защото $(\tau_{33} J^{2m+1})^2 = J^2 \in R(G_{-1})$. Елементите $\tau_{33}^n I^{2m+1} J^l \in PR(G_{-1}) \setminus R(G_{-1})$ с $0 \leq m \leq 1$ са $\tau_{33} I^{2m+1}$ и $\tau_{33}^n I^{2m+1} J^2$. Всички $\tau_{33}^n I^2 J^{2m+1}$ с $0 \leq m, n \leq 1$ са потенциални отражения, но не и отражения. Следователно

$$G'_{-1} \cap [PR(G_{-1}) \setminus G(G_{-1})] = \{\tau_{33} I^{2m+1},\, \tau_{33} J^{2m+1},\, \tau_{33}^n I^{2m+1} J^2,\, \tau_{33}^n I^2 J^{2m+1} \,|0 \leq m, n \leq 1\}.$$

Да напомним, че характеристичните корени $\lambda_s(\mathcal{L}(h))$ на линейната част на $g = \tau_{33}^n I^k J^l \theta$ са корените на полинома $\lambda^2 = i^{k+l}$. Вече видяхме, че $\tau_{33}^n I^k J^{-k} \theta \in R(G_{-1})$ за $\forall 0 \leq n \leq 1$, $\forall 0 \leq k \leq 3$. Характеристичните корени $e^{\frac{2\pi i}{8}} = e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-e^{\frac{2\pi i}{8}} = -e^{\frac{pii}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ на линейните части на $\tau_{33}^n I^k J^{1-k} \theta \in G_{-1} \setminus G'_{-1}$ са от един и същи ред 8, така че тези елементи не са потенциални отражения. Автоморфизмите $\tau_{33}^n I^k J^{2-k} \theta \in G_{-1} \setminus G'_{-1}$ имат линейни части $I^k J^{2-k} \theta$ с характеристични корени $\pm i$, така че не са потенциални отражения. Накрая, $\tau_{33}^n I^k J^{3-k} \theta \in G_{-1} \setminus G'_{-1}$ имат линейни части с характеристични корени $\left(e^{\frac{2\pi i}{8}}\right)^3 = e^{\frac{3\pi i}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\left(e^{\frac{2\pi i}{8}}\right)^3 = -e^{\frac{3\pi i}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$, така че не попадат в множеството на потенциалните отражения. С това получихме, че $(G_{-1} \setminus G'_{-1}) \cap [PR(G_{-1}) \setminus R(G_{-1})] = \emptyset$ и

$$PR(G_{-1}) = R(G_{-1}) \cup \{\tau_{33} I^{2m+1},\, \tau_{33} J^{2m+1},\, \tau_{33}^n I^{2m+1} J^2,\, \tau_{33}^n I^2 J^{2m+1}\, |0 \le m, n \le 1\},$$

Q.E.D.

Глава 4

Ирегулярни повърхнини

За изследване на ирегулярността и геометричния род на едно, а оттам и на всяко едно разрешение на особеностите на A/H ще използваме следната

Лема 4.1. *Нека $\zeta_H^A : A \to A/H$ е покритие на Галоа с трансформационна група H, $\rho : Y \to A/H$ е минималното разрешение на изолираните фактор-особености на A/H, а*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\zeta_H^A"'] & Z = A \times_{(A/H)} Y \arrow[l, "\rho_A"'] \arrow[d, "\zeta_H"] \\ A/H & Y \arrow[l, "\rho"'] \end{tikzcd}$$

е тяхното разслоено произведение. Тогава Z е гладка повърхнина и кохомологичните групи

$$H^0(Y, \Omega_Y^1) \simeq \zeta_H^* H^0(Y, \Omega_Y^1) = H^0(Z, \Omega_Z^1)^H \simeq H^0(A, \Omega_A^1)^H,$$
$$H^0(Y, \Omega_Y^2) \simeq \zeta_H^* H^0(Y, \Omega_Y^2) = H^0(Z, \Omega_Z^2)^H \simeq H^0(A, \Omega_A^2)^H$$

съвпадат с H-инвариантите на съответните кохомологични групи на A.

Доказателство: Ако в Лема 3.1 изберем $H_1 = \{\mathrm{Id}\}$, $H_2 = H$, то $Y_1 = A$ и $X_2 = A/H$. Следователно $Z = A \times_{(A/H)} Y$ е гладка повърхнина. Това позволява определянето на кохомологичните групи $H^0(Z, \Omega_Z^i)$ за $1 \leq i \leq 2$ и разглеждането на индуцираното $\mathbb{C}$-линейно изображение

$$\zeta_H^* : H^0(Y, \Omega_Y^i) \longrightarrow H^0(Z, \Omega_Z^i).$$

От сюрективността на $\zeta_H : Z \to Y$ следва инективността на

$$\zeta_H^* : H^0(Y, \Omega_Y^i) \to H^0(Z, \Omega_Z^i).$$

Образът $\zeta_H^* H^0(Y, \Omega_Y^i)$ се съдържа в пространството $H^0(Z, \Omega_Z^i)^H$ на H-инвариантите, защото елементите му са постоянни по протежение на H-орбитите. Обратно, всеки елемент на $H^0(Z,\Omega^i_Z)^H$ има една и съща стойност върху точките от фиксирана H-орбита и индуцира кохомологичен клас върху $Y = Z/H$. Следователно

$$\zeta_H^* H^0(Y,\Omega^1_Y) = H^0(Z,\Omega^1_Z)^H.$$

Накрая, бирационалното изображение $\rho_A : Z \to A$ индуцира $\mathbb{C}$-линеен изоморфизъм $\rho_A^* : H^0(A,\Omega^i_A) \to H^0(Z,\Omega^i_Z)$. Дефиниционната комутативна диаграма на разслоеното произведение гарантира H-еквивариантността на ρ_A, а оттам и на ρ_A^*. Това води до $\mathbb{C}$-линеен изоморфизъм

$$\rho_A^* : H^0(A,\Omega^i_A)^H \to H^0(Z,\Omega^1_Z)^H,$$

Q.E.D.
Иррегулярността $q(Y) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(Y,\Omega^1_Y)$ и геометричният род $p_g(Y) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(Y,\Omega^2_Y)$ на гладка повърхнина Y са бирационални инварианти. Това означава, че ако гладка повърхнина Y_1 е бирационална на Y, то $q(Y_1) = q(Y)$ и $p_g(Y_1) = p_g(Y)$. В частност, ако Y и Y_1 са произволни разрешения на особеностите на A/H, то $q(Y_1) = q(Y)$ и $p_g(Y_1) = p_g(Y)$. Това дава възможност да определим ирегулярността и геометричния род на A/H като съответните инварианти на кое и да е разрешение на особеностите на A/H.

Следствие 4.2. *Факторът A/H е абелева повърхнина тогава и само тогава, когато групата $H \leq \mathcal{T}_A \cap \mathrm{Aut}(A,T)$ е транслационна.*

Доказателство: Съгласно класификацията на Енриквес, проективната повърхнина A/H е абелева тогава и само тогава, когато едно, а оттам и всяко едно разрешение на особеностите Y на A/H има ирегулярност $q(Y) = 2$. На езика на Лема 4.1, това означава H-инвариантност на $H^0(A,\Omega^1_A)$. Ако $(u,v) \in \mathbb{C}^2 = \widetilde{A}$ са глобални холоморфни координати върху универсалната покриваща $\widetilde{A} = \mathbb{C}^2$ на A, то

$$H^0(A,\Omega^1_A) = \{adu + bdv \,|\, a,b \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}^2.$$

Произволен автоморфизъм

$$h = \tau_{(P_1,Q_1)} \left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array} \right) \in H$$

се състои от две компоненти,

$$h(P,Q) = (h_1(P,Q), h_2(P,Q)) \text{ за } \forall (P,Q) \in A.$$

Ако $P = u(\bmod\, \mathcal{O}_{-d})$ и $Q = v(\bmod\, \mathcal{O}_{-d})$, то

$$h^*(adu + bdv) = adh_1(u(\bmod\, \mathcal{O}_{-d}), v(\bmod\, \mathcal{O}_{-d})) + bdh_2(u(\bmod\, \mathcal{O}_{-d}), v(\bmod\, \mathcal{O}_{-d})) =$$

$$ad[(\alpha u + \beta v)(\bmod\, \mathcal{O}_{-d}) + P_1] + bd[(\gamma u + \delta v)(\bmod\, \mathcal{O}_{-d}) + Q_1] =$$

$$a(\alpha du + \beta dv) + b(\gamma du + \delta dv)$$

или

$$h^*(adu + bdv) = (\alpha a + \gamma b)du + (\beta a + \delta b)dv. \tag{4.1}$$

Условието $h^*(adu + bdv) = adu + bdv$ е еквивалентно на системата уравнения

$$\left| \begin{array}{l} (\alpha - 1)a + \gamma b = 0 \\ \beta a + (\delta - 1)b = 0 \end{array} \right. . \tag{4.2}$$

Ако

$$\mathcal{L}(h) = \left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array} \right) \in Gl_2(\mathcal{O}_{-d}$$

е линейната част на h спрямо фиксирано начало $\check{o}_A$. Това означава, че $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(A)}(\check{o}_A) = \mathrm{End}(A)$. За $A = E \times E$ с $E = \mathbb{C}/\mathcal{O}_{-d}$ отъждествяваме $\mathrm{End}(A) = Gl_2(\mathcal{O}_{-d})$. Системата (4.2) е еквивалентна на равенството

$$(\mathcal{L}(h)^t - I_2) \left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right). \tag{4.3}$$

Множеството от решения $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ на тази хомогенна линейна система съвпада с цялото пространство $\mathbb{C}^2$ тогава и само тогава, когато $\mathcal{L}(h)^t = I_2$ или $\mathcal{L}(h) = I_2$. Това е еквивалентно на $h = \tau_{(P_1,Q_1)} \in \mathcal{T}_A$, Q.E.D.

Твърдение 4.3. *Нека $A = E \times E$ с $E = \mathbb{C}/\mathcal{O}_{-d}$ за някое $d \in \mathbb{N}$, H е подгрупа на $G = \mathrm{Aut}(A, T)$ и Y е минималното разрешение на изолираните фактор-особености на A/H. Ирегулярността $q(Y) = 1$ тогава и само тогава, когато*

$$H = \mathcal{T}_H \langle h \rangle$$

е произведение на транслационна група $\mathcal{T}_H$ с циклична група $\langle h \rangle$, чийто пораждащ

$$h \in L_1(G) = \{h \in G \,|\, \lambda_1(\mathcal{L}(h)) = 1,\ \lambda_2(\mathcal{L}(h)) \in \mathcal{O}^*_{-d} \setminus \{1\}\}$$

има линейна част с точно един характеристичен корен, равен на 1.

Доказателство: Нека Y е произволно разрешение на евентуалните изолирани циклични особености на A/H. В доказателството на Следствие 4.2 установихме, че $0 \neq \omega = adu + bdv \in H^0(A, \Omega^1_A)^H \simeq H^0(Y, \Omega^1_Y)$ точно когато векторът $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ е решение на хомогенната линейна система

$$(\mathcal{L}(h)^t - I_2) \left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) \quad \text{за всички } h \in H. \tag{4.4}$$

Да направим линейна смяна на координатите върху $\mathbb{C}^2 = \widetilde{A}$ с матрица $S^{-1} \in Gl_2(\mathbb{C})$, така че първият координатен вектор да се трансформира в общото ненулево решение (a, b) на (4.4) за $\forall h \in H$. За втори координатен вектор избираме произволен вектор

$(a_1, b_1) \in \mathbb{C}^2$, линейно независим с (a, b). Съгласно Лема 2.1 съществува комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\zeta_H"'] & B \arrow[d, "\zeta_\Sigma"] \\ A/H \arrow[r, "\overline{S}"] & B/\Sigma \end{tikzcd},$$

където $\Sigma = SHS^{-1}$, S и $\overline{S}$ са бирегулярни, а ζ_H и ζ_Σ са покрития на Галоа. Условието $q(B/\Sigma) = 1$ е равносилно на

$$(\mathcal{L}(\sigma)^t - I_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{за } \forall \sigma \in \Sigma.$$

Следователно линейната част

$$\mathcal{L}(\sigma) = \begin{pmatrix} \alpha_\sigma & \beta_\sigma \\ \gamma_\sigma & \delta_\sigma \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{C}),$$

на $\forall \sigma \in \Sigma$ изпълнява равенството

$$\begin{pmatrix} \alpha_\sigma - 1 & \gamma_\sigma \\ \beta_\sigma & \delta_\sigma - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\mathcal{L}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_\sigma & \delta_\sigma \end{pmatrix}.$$

Ако $\delta_\sigma = 1$ за $\forall \sigma \in \Sigma$, то Σ е транслационна група и $B/\Sigma \simeq A/H$ е абелева повърхнина. По този начин получихме, че $q(B/\Sigma) = 1$ тогава и само тогава, когато Σ се състои от

$$\sigma = \tau_{(P_o, Q_o)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \tau_{(P_o, Q_o)}(ShS^{-1})$$

с $(P_o, Q_o) \in B$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in S(\mathcal{O}_{-d})_{2\times 2} S^{-1},$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \det(h) \in \mathcal{O}_{-d}^*,$$

и поне едно $\sigma_o \in \Sigma$ има $\delta_o \neq 1$.
Съпоставянето на линейна част

$$\mathcal{L} : \Sigma \longrightarrow S[Gl_2(\mathcal{O}_{-d})]S^{-1}$$

и детерминантата

$$\det : S[Gl_2(\mathcal{O}_{-d})]S^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_{-d}^*$$

са хомоморфизми на групи. Следователно композицията им

$$\det \mathcal{L} : \Sigma \longrightarrow \mathcal{O}^*_{-d}$$

е хомоморфизъм на групи. Образът $\mathrm{im}(\det \mathcal{L}) = \det \mathcal{L}(\Sigma)$ е подгрупа на цикличната група $\mathcal{O}^*_{-d} = \langle \omega_o \rangle$, така че

$$\mathrm{im}(\det \mathcal{L}) = \det \mathcal{L}(\Sigma) = \langle \omega_o^{k_o} \rangle$$

е също циклична група. Съгласно

$$\det \mathcal{L}(\sigma_o) = \det \mathcal{L}\left(\tau_{(P_o,Q_o)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_o & \delta_o \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_o & \delta_o \end{pmatrix} = \delta_o \in \langle \omega_o^{k_o} \rangle,$$

пораждащият $\omega = \omega_o^{k_o} \neq 1$. Твърдим, че групата на линейните части $\mathcal{L}(\Sigma)$ е циклична. За целта да изберем

$$l_\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_\omega & \omega \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\Sigma) \cap \overset{-1}{\det}(\omega).$$

За произволно

$$l = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\Sigma)$$

съществува естествено m, така че $\delta = \omega^m$. Причина за това е, че $\det(l) = \delta \in \det \mathcal{L}(\Sigma) = \langle \omega \rangle$. Пресмятаме непосредствено, че

$$l_\omega^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^{-1}\gamma_\omega & \omega^{-1} \end{pmatrix}.$$

С индукция по $m \in \mathbb{N}$ получаваме

$$l_\omega^{-m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \omega^{-i}\right)\gamma_\omega & \omega^{-m} \end{pmatrix}.$$

Оттук

$$l_\omega^{-m} l = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega^{-m}\gamma - \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \omega^{-i}\right)\gamma_\omega & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\Sigma).$$

Съгласно [5], подгрупата $H \leq G = \mathrm{Aut}(A, T)$ е крайна. Следователно $\Sigma = SHS^{-1}$ и $\mathcal{L}(\Sigma)$ са крайни групи. В резултат, елементът $l_\omega^{-m} l \in Gl_2(\mathbb{C})$ е от краен ред $r \in \mathbb{N}$. Полагаме $\gamma_m = \omega^{-m}\gamma - \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \omega^{-i}\right)\gamma_\omega$ и пресмятаме

$$(l_\omega^{-m} l)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\gamma_m & 1 \end{pmatrix}$$

с индукция по $n \in \mathbb{N}$. В частност,

$$(l_\omega^{-m} l)^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r\gamma_m & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

дава $\gamma_m = 0$, така че $l_\omega^{-m} l = \mathrm{I}_2$. С други думи, $l = l_\omega^m$ и $\mathcal{L}(\Sigma) = \langle l_\omega \rangle$.
Сега ще проверим, че $\langle l_\omega \rangle \simeq \langle \omega \rangle$. Ако $\omega \in \mathcal{O}_{-d}^*$ е от ред s, а $l_\omega \in Gl_2(\mathbb{C})$ е от ред s_1, то $l_\omega^{s_1} = \mathrm{I}_2$ изисква $\omega^{s_1} = 1$, така че s дели s_1. Обратно, от $\omega^s = 1$ следва

$$l_\omega^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(\sum\limits_{i=0}^{s-1} \omega^i \right) \gamma_\omega & 1 \end{pmatrix}.$$

Ако положим $\lambda_\omega = \left(\sum\limits_{i=0}^{s-1} \omega^i \right) \gamma_\omega$, то

$$\mathrm{I}_2 = (l_\omega^{s_1})^s = (l_\omega^s)^{s_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_1 \lambda_\omega & 1 \end{pmatrix}$$

показва, че $\lambda_\omega = 0$ и $l_\omega^s = \mathrm{I}_2$. Оттук s_1 дели s и $s = s_1$.
Нека $\sigma_\omega \in \mathcal{L}^{-1}(l_\omega)$ и $\mathcal{T}_\Sigma = \ker(\mathcal{L}) \cap \Sigma$. Тогава $\mathcal{T}_\Sigma$ е нормална подгрупа на Σ, така че произведението $\Sigma' = \mathcal{T}_\Sigma \langle \sigma_\omega \rangle$ с цикличната подгрупа $\langle \sigma_\omega \rangle$ на Σ е подгрупа на Σ. Произволен елемент $\sigma \in \Sigma$ има линейна част $\mathcal{L}(\sigma) = l_\omega^k$ за някое $0 \leq k \leq s-1$. Следователно $\mathcal{L}(\sigma\sigma_\omega^{-k}) = \mathrm{Id}$ и $\sigma\sigma_\omega^{-k} = \tau \in \mathcal{T}_\Sigma = \ker(\mathcal{L}) \cap \Sigma$. Оттук $\sigma = \tau\sigma_\omega^k \in \mathcal{T}_\Sigma \langle \sigma_\omega \rangle = \Sigma'$ и $\Sigma = \Sigma' = \mathcal{T}_\Sigma \langle \sigma_\omega \rangle$. По този начин получаваме $H = S^{-1}\Sigma S = (S^{-1}\mathcal{T}_\Sigma S)\langle S^{-1}\sigma_\omega S \rangle$, където $S^{-1}\mathcal{T}_\Sigma S = \ker(\mathcal{L}) \cap H = \mathcal{T}_H$ е транслационна подгрупа, а $h = S^{-1}\sigma_\omega S$ има линейна част $\mathcal{L}(h)$ с характеристични корени 1 и $\omega \in \mathcal{O}_{-d}^* \setminus \{1\}$, Q.E.D.
Комбинирайки Следствие 4.2 с Твърдение 4.3 получаваме следното

Следствие 4.4. *Факторът A/H на $A = E \times E$ с $E = \mathbb{C}/\mathcal{O}_{-d}$ притежава ирегулярен гладък бирационален модел точно когато $H = \mathcal{T}_H$ е транслационна група или $H = \mathcal{T}_H \langle h \rangle$ е произведение на транслационна група $\mathcal{T}_H$ и циклична група, чийто пораждащ има линейна част $\mathcal{L}(h)$ с прост характеристичен корен 1.*

Следствие 4.5. *Нека $A = E \times E$ с $E = \mathbb{C}/\mathcal{O}_{-d}$ и $H = \mathcal{T}_H \langle h \rangle$ с $h \in L_1(\mathrm{Aut}(A))$. В такъв случай, A/H е линейчата повърхнина с елиптична база тогава и само тогава, когато $h \in PR(\mathrm{Aut}(A))$ е потенциално отражение или $h = \tau_{(P_1,P_2)} \mathcal{L}(h) \notin PR(\mathrm{Aut}(A))$ с $\sum\limits_{s=0}^{i} \mathcal{L}(h)^s (P_1, P_2) \in \mathcal{T}_H$ за някое $0 \leq i \leq r-2$, където r е редът на h.*

Доказателство: Съгласно Твърдение 4.3, повърхнината A/H има ирегулярност $q(A/H) = 1$. В такъв случай, A/H е линейчата повърхнина с елиптична база точно когато $H = \mathcal{T}_H \langle h \rangle$ съдържа потенциално отражение или отражение. С индукция по $0 \leq i \leq r-2$ ще проверим, че $h^{i+1} = \tau_{\sum\limits_{s=0}^{i} \mathcal{L}(h)^s (P_1, P_2)} \mathcal{L}(h)^{i+1}$. Наистина, ако

$$h^j = \tau_{\sum\limits_{s=0}^{j-1} \mathcal{L}(h)^s (P_1, P_2)} \mathcal{L}(h)^j,$$

то

$$h^{j+1}(P,Q) = \tau_{(P_1,P_2)}\mathcal{L}(h)\left(\tau_{\sum\limits_{s=0}^{j-1}\mathcal{L}(h)^s(P_1,P_2)}\mathcal{L}(h)^j(P,Q)\right) =$$

$$\tau_{(P_1,P_2)}\tau_{\sum\limits_{s=0}^{j-1}\mathcal{L}(h)^{s+1}(P_1,P_2)}\mathcal{L}(h)^{j+1}(P,Q) = \tau_{\sum\limits_{s=0}^{j}\mathcal{L}(h)^s(P_1,P_2)}\mathcal{L}(h)^{j+1}(P,Q).$$

По този начин, $\tau_{(Q_1,Q_2)}h^{i+1} \in L(\mathrm{Aut}(A))$ е отражение точно когато

$$(Q_1,Q_2) + \sum_{s=0}^{i}\mathcal{L}(h)^s(P_1,P_2) = \check{o}_A$$

или $\sum\limits_{s=0}^{i}\mathcal{L}(h)^s(P_1,P_2) \in \mathcal{T}_H$, Q.E.D.

Следствие 4.6. *Нека $A_{-1} = E_{-1} \times E_{-1}$ с $E_{-1} = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$, а H е подгрупа на*

$$G_{-1} = \{\tau_{33}^n I^k J^l \theta^m \,|\, 0 \le k,l \le 3,\ 0 \le m,n \le 1\},$$

с отражения

$$R(G_{-1}) = \{I^k, J^k, \tau_{33}^n I^l J^{-l}\theta \,|\, 1 \le k \le 3,\ 0 \le l \le 3,\ 0 \le n \le 1\} \ \text{ и}$$

$$L_1(G_{-1}) \cap PR(G_{-1}) = R(G_{-1}) \cup \{\tau_{33}I^{2m+1}, \tau_{33}J^{2m+1} \,|\, 0 \le m \le 1\},$$

$$L_1(G_{-1}) \setminus PR(G_{-1}) = \{\tau_{33}I^2, \tau_{33}J^2\}.$$

В такъв случай, A_{-1}/H е линейчата повърхнина с елиптична база тогава и само тогава, когато $H = \langle h\rangle$ с $h \in L_1(G_{-1}) \cap PR(G_{-1})$ или $H = \langle \tau_{33}, h\rangle$ с $h \in L_1(G_{-1})$.

Доказателство: Повърхнината A_{-1}/H има ирегулярност $q(A_{-1}/H) = 1$ точно тогава, когато $H = \mathcal{T}_H\langle h\rangle$ с $h \in L_1(G_{-1})$. Подгрупите $\mathcal{T}_H$ на $\mathcal{T}_{G_{-1}} = \langle\tau_{33}\rangle$ са $\mathcal{T}_H = \{\mathrm{Id}\}$ и $\mathcal{T}_H = \langle\tau_{33}\rangle$. Цикличната група $\langle h\rangle$ съдържа отражение точно когато $h \in PR(G_{-1})$ е потенциално отражение. Групата $H = \langle\tau_{33}, h\rangle$ съдържа отражение за $h \in PR(G_{-1})$. Ако $h \in L_1(G_{-1}) \setminus PR(G_{-1})$, то h е от ред 2 и транслационната част τ_{33} на $h \in \{\tau_{33}I^2, \tau_{33}J^2\}$ принадлежи на $\mathcal{T}_H = \langle\tau_{33}\rangle$. Съгласно Следствие 4.5, това е достатъчно за наличие на отражение в $H = \langle\tau_{33}, h\rangle$ с $h \in L_1(G_{-1}) \setminus PR(G_{-1})$, Q.E.D.
От Следствие 4.5 и Следствие 4.6 получаваме следното

Следствие 4.7. *Нека $A = E \times E$ с $E = \mathbb{C}/\mathcal{O}_{-d}$, H е крайна подгрупа на $\mathrm{Aut}(A)$. В такъв случай, A/H е хиперелиптична повърхнина тогава и само тогава, когато $H = \mathcal{T}_H\langle h\rangle$ с $h = \tau_{(P_1,P_2)}\mathcal{L}(h) \in L_1(\mathrm{Aut}(A)) \setminus PR(\mathrm{Aut}(A))$ и $\sum\limits_{s=0}^{i}\mathcal{L}(h)^s(P_1,P_2) \notin \mathcal{T}_H$ за всички $0 \le i \le r-2$, където r е редът на h.*
В частност, за $A_{-1} = E_{-1} \times E_{-1}$ с $E_{-1} = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и подгрупа H на

$$G_{-1} = \{\tau_{33}^n I^k J^l \theta^m \,|\, 0 \le k,l \le 3,\ 0 \le m,n \le\}$$

факторът A_{-1}/H е хиперелиптична повърхнина точно когато

$$H = \langle\tau_{33}I^2\rangle \ \text{ или } \ H = \langle\tau_{33}J^2\rangle.$$

Бомбиери и Мамфорд са доказали в [2], всяка хиперелиптична повърхнина X е фактор $X = (E_1 \times E_2)/H$ на Декартово произведение $E_1 \times E_2$ на елиптични криви E_j под действието на крайна абелева група H без фиксирани точки върху $E_1 \times E_2$. По-точно, $H = \langle h_1 \rangle$ или $\langle h_1, h_2 \rangle$ с $h_1 \in L_1(\mathrm{Aut}(E_1 \times E_2))$, $h_2 \in \mathcal{T}_{E_1 \times E_2}$. Следствие 4.7 установява, че хиперелиптичните фактори $X = (E \times E)/H$ на Декартов квадрат $E \times E$ на елиптична крива E се получават при факторизация с произведение $H = \mathcal{T}_H \langle h \rangle$ на крайна транслационна група $\mathcal{T}_H$ с циклична група $\langle h \rangle$, породена от $h \in L_1(\mathrm{Aut}(E \times E))$. Това е частен случай от резултата на Бомбиери-Мамфорд, защото абелевата повърхнина $A_o = (E \times E)/\mathcal{T}_H$ не е проста и се представя като Декартово произведение $A_o = E_1 \times E_2$ на елиптични криви E_j. Оттук $X = (E_1 \times E_2)/\langle h \rangle$ с $h \in L_1(\mathrm{Aut}(E_1 \times E_2))$. Относно приводимостта на A_o, да разгледаме нормализатора N на $E \times \check{o}_E$ в $\mathcal{T}_H$. Тогава $(E \times \check{o}_E)/N$ е елиптична крива върху A_o и повърхнината A_o се разлага в Декартово произведение на елиптични криви..
Следващата лема характеризира групите от вида $H = \mathcal{T}_H \langle h \rangle$ чрез техните линейни части.

Лема 4.8. *Нека H е подгрупа на група G от автоморфизми на абелева повърхнина A. В такъв случай:*
(i) $H = \mathcal{T}_H \langle h \rangle$ тогава и само тогава, когато линейната част $\mathcal{L}(H) = \langle \mathcal{L}(h) \rangle$ е циклична;
(ii) $H = \mathcal{T}_H \langle h \rangle$ с $h \in L_1(G)$ точно когато линейната част $\mathcal{L}(H) = \langle \mathcal{L}(h) \rangle$ е циклична, породена от отражение $\mathcal{L}(h) \in R(G)$.

Доказателство: (i) От $H = \mathcal{T}_H \langle h \rangle$ следва $\mathcal{L}(H) = \langle \mathcal{L}(h) \rangle$ съгласно $\mathcal{T}_H = \ker \mathcal{L}$. Обратно, ако $\mathcal{L}(H) = \langle \mathcal{L}(h) \rangle$ за $h \in H$, то подгрупата $H_o = \mathcal{T}_H \langle h \rangle$ на H има линейна част $\mathcal{L}(H_o) = \langle \mathcal{L}(h) \rangle = \mathcal{L}(H)$. От дурта страна, транслационните части

$$\ker \mathcal{L} \cap H_o = \mathcal{T}_H = \ker \mathcal{L} \cap H$$

са равни, така че $H = H_o = \mathcal{T}_H \langle h \rangle$.
(ii) Ако $H = \mathcal{T}_H \langle h \rangle$ с $h \in L_1(G)$, то $\mathcal{L}(h) \in L_1(G)$ и $\mathcal{L}(h)$ фиксира поне една точка - началото $\check{o}_A$. Следователно $\mathcal{L}(h) \in R(G)$ е отражение. Обратно, ако $\mathcal{L}(h) \in R(G)$ е отражение, то $\mathcal{L}(h) \in L_1(G)$. Понеже $\mathcal{L}(h)$ и h имат едни и същи характеристични корени, $h \in L_1(G)$, Q.E.D.
Сега ще характеризираме групите H с рационални A/H чрез техните линейни части.

Следствие 4.9. *Нека H е подгрупа на $G < \mathrm{Aut}(A)$, която съдържа отражение. Тогава факторът A/H е рационална повърхнина тогава и само тогава, когато линейната част $\mathcal{L}(H)$ не е циклична или линейната част $\mathcal{L}(H) = \langle \mathcal{L}(h) \rangle$ е циклична с $\mathcal{L}(h) \in PR(G) \setminus R(G)$.*

Доказателство: Ако $H \cap R(G) \neq \emptyset$, то повърхнината A/H е рационална точно когато не е линейчата с елиптична база. Знаем, че $H \neq \mathcal{T}_H \langle h \rangle$ с $h \in L_1(G)$ точно когато $\mathcal{L}(H) \neq \langle \mathcal{L}(h) \rangle$ с $\mathcal{L}(h) \in R(G)$. Последното условие означава, че $\mathcal{L}(H)$ не е циклична или $\mathcal{L}(H) = \langle \mathcal{L}(h) \rangle$ е циклична с $\mathcal{L}(h) \notin R(G)$. Ако $h_o \in H \cap R(G)$ и $\mathcal{L}(H) = \langle \mathcal{L}(h) \rangle$

за някое $h \in H$, то $\mathcal{L}(h_o) = \mathcal{L}(h)^k$ за подходящо $k \in \mathbb{N}$. Лиенйната част $\mathcal{L}(h_o)$ на отражение h_o е също отражение. Следователно $\mathcal{L}(h)$ е потенциално отражение, Q.E.D. Например, групата

$$G_{-1} = \{\tau_{33}^n I^k J^l \theta^m \,|\, 0 \leq k, l \leq, 0 \leq m, n \leq 1\}$$

има рационален фактор A/G_{-1}, защото съдържа отражение I и линейната част $\mathcal{L}(G_{-1}) = \langle I, J, \theta \rangle$ не е циклична.

Глава 5

K3 повърхнини

Факторите A/H с геометричен род $p_g(A/H) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(Y, \Omega_Y^2) = 1$ за кое и да е разрешение на особеностите Y на A/H са точно абелевите повърхнини и K3 повърхнините. Съгласно Лема 4.1, $H^0(Y, \Omega_Y^2) \simeq H^0(A, \Omega_A^2)^H$. Да напомним, че

$$H^0(A, \Omega_A^2) = \{adu \wedge dv \,|\, a \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}.$$

За произволен елемент

$$h = \tau_{(P_0,Q_0)} \left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{array} \right) \in \mathcal{T}_A \rtimes Gl_2(\mathcal{O}_{-d})$$

с $h(u(\mathrm{mod}\,\mathcal{O}_{-d}), v(\mathrm{mod}\,\mathcal{O}_{-d}) = (h_1(u(\mathrm{mod}\,\mathcal{O}_{-d}), v(\mathrm{mod}\,\mathcal{O}_{-d})), h_2u(\mathrm{mod}\,\mathcal{O}_{-d}), v(\mathrm{mod}\,\mathcal{O}_{-d})) = (h_1(u,v)(\mathrm{mod}\,\mathcal{O}_{-d}), h_2(u,v)(\mathrm{mod}\,\mathcal{O}_{-d}))$ и $P_0 = p_0(\mathrm{mod}\,\mathcal{O}_{-d})$, $Q_0 = q_0(\mathrm{mod}\,\mathcal{O}_{-d})$ имаме

$$h^*(du \wedge dv) = dh_1(u,v) \wedge dh_2(u,v) = d(\alpha u + \beta v + p_0) \wedge d(\gamma u + \delta v + q_0) =$$

$$(\alpha du + \beta dv) \wedge (\gamma du + \delta dv) = (\alpha\delta - \beta\gamma) du \wedge dv = \det \mathcal{L}(h)(du \wedge dv).$$

Следователно $H^0(A, \Omega_A^2)^H = H^0(A, \Omega_A^2) \simeq \mathbb{C}$ тогава и само тогава, когато H е подгрупа на ядрото K на хомоморфизма

$$\det \mathcal{L} : G = Aut(A, T) \longrightarrow \mathcal{O}_{-d}^*.$$

Да отбележим, че K не съдържа потенциални отражения от $G = \mathrm{Aut}(A, T)$. В противен случай, G съдържа отражение h. Линейната част $\mathcal{L}(h)$ на h има характеристични корени $\lambda_1(\mathcal{L}(h)) = 1$ и $\lambda_2(\mathcal{L}(h)) \neq 1$. Следователно

$$\det \mathcal{L}(h) = \lambda_1(\mathcal{L}(h))\lambda_2(\mathcal{L}(h)) = \lambda_2(\mathcal{L}(h)) \neq 1,$$

противно на $h \in K = \ker \det \mathcal{L}$.

Твърдение 5.1. *Факторът A/H е бирационален на K3 повърхнина тогва и само тогава, когато H е нетранслационна подгрупа на $K = \ker \det \mathcal{L}$.*

В частност, ако съществува елемент $h_1 = \tau_{(P_1,Q_1)}(-I_2) \in G$, то $h_1 \in \ker \det \mathcal{L}$ и факторът $A/\langle h_1 \rangle$ е бирационален на Кумеровата повърхнина на A.

Следствие 5.2. *Факторът A_{-1}/H на $A_{-1} = (\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)\times(\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ по подгрупа H на*

$$G_{-1} = \{\tau_{33}^n I^k J^l \theta^m \,|\, 0 \leq k,l \leq 3,\, 0 \leq m,n \leq 1\}$$

е бирационален на К3 повърхнина тогава и само тогава, когато H е някоя от следните групи:

$$K_1(n) = \langle \tau_{33}^n I^2 J^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \ \text{за}\ 0 \leq n \leq 1,$$
$$K_1^+ = \langle I^2J^2,\, \tau_{33}\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,$$
$$K_2(n) = \langle \tau_{33}^n I J^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \ \text{за}\ 0 \leq n \leq 1,$$
$$K_2^+ = \langle IJ^{-1},\, \tau_{33}\rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2,$$
$$K_3(n) = \langle \tau_{33}^n IJ\theta \rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \ \text{за}\ 0 \leq n \leq 1,$$
$$K_3^+ = \langle IJ\theta,\, \tau_{33}\rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2,$$
$$K_4(n) = \langle \tau_{33}^n I^2\theta \rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \ \text{за}\ 0 \leq n \leq 1,$$
$$K_4^+ = \langle I^2\theta,\, \tau_{33}\rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2,$$
$$K_5(m,n) = \langle \tau_{33}^m IJ^{-1},\, \tau_{33}^n IJ\theta \rangle \simeq \mathbb{Q}_8 \ \text{за}\ 0 \leq m,n \leq 1,$$
$$K_5^+ = K = \ker\det\mathcal{L} = \langle IJ^{-1},\, IJ\theta,\, \tau_{33}\rangle \simeq \mathbb{Q}_8 \times \mathbb{Z}_2.$$

Доказателство: Вземайки предвид $\det(I) = \det(J) = i$ и $\det(\theta) = -1$, пресмятаме че

$$\det\mathcal{L}(\tau_{33}^n I^k J^l \theta^m) = \det(I^k J^l \theta^m) = (-1)^m i^{k+l} = 1$$

тогава и само тогава, когато $m = 0$, $k + l \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ или $m = 1$, $k + l \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$. С други думи,

$$K = \ker\det\mathcal{L} = \{\tau_{33}^n I^k J^{-k},\, \tau_{33}^n I^k J^{2-k}\theta \,|\, 0 \leq k \leq 3,\, 0 \leq n \leq 1\}.$$

Непосредствено се проверява, че τ_{33} е в центъра на G_{-1}, така че $K = K_o \times \langle \tau_{33}\rangle$ за

$$K_o = \{I^k J^{-k},\, I^k J^{2-k}\theta \,|\, 0 \leq k \leq 3\}.$$

Групата K_o не е абелева, къгласно

$$(I^kJ^{-k})(I^lJ^{2-l}\theta) = I^{k+l}J^{2-k-l}\theta \neq I^{l-k}J^{2-l+k}\theta = (I^lJ^{2-l}\theta)(I^kJ^{-k})$$

за $k = l = 1$. Следователно K_o е изоморфна на диедралната група D_4 или на групата на кватернионите $\mathbb{Q}_8$. Равенствата $(I^kJ^{-k})^2 = I^2J^2 = -\mathrm{Id}$ за $k \in \{1,3\}$ и $(I^lJ^{2-l}\theta)^2 = I^2J^2 = -\mathrm{Id}$ за $\forall 0 \leq l \leq 3$ уточняват, че K_o има 6 елемента от ред 4 и единствен елемент I^2J^2 от ред 2. Следователно групата K_o е изоморфна на групата на кватернионите $\mathbb{Q}_8$. В частност, K_o се поражда от произволни два некомутиращи елемента от ред 4, например $K_o = \langle IJ^{-1},\, IJ\theta\rangle$.

Да напомним, че група $H \leq \mathrm{Aut}(A_{-1})$ е транслационна точно когато съпоставянето на линейната част $\mathcal{L} : H \to Gl_2(\mathbb{Z}[i])$ изобразява H в тривиалната подгрупа $\mathcal{L}(H) = \{\mathrm{Id}\}$. Търсим онези подгрупи H на K, които се изобразяват в подгрупа на $\mathcal{L}(K) = K_o \simeq \mathbb{Q}_8$, различна от $\{\mathrm{Id}\}$. Можем да имаме

$$\mathcal{L}(H) = \langle I^2 J^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2,$$

$$\mathcal{L}(H) = \langle IJ^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}_4,$$

$$\mathcal{L}(H) = \langle IJ\theta \rangle \simeq \mathbb{Z}_4,$$

$$\mathcal{L}(H) = \langle I^2\theta \rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \text{ или}$$

$$\mathcal{L}(H) = \langle IJ^{-1},\, IJ\theta \rangle = K_o.$$

Всеки елемент $h \in \mathcal{L}(H) \leq \mathcal{L}(G_{-1})$ се повдига до $\tau_{33}^n h \in G_{-1}$ за някакво $0 \leq n \leq 1$. По Теоремата за хомоморфизмите на групи,

$$H/(\mathcal{T}_A \cap H) = H/(\ker(\mathcal{L}) \cap H) \simeq \mathcal{L}(H).$$

Ако $\mathcal{L}(H) = \langle \mathcal{L}(h_1), \ldots, \mathcal{L}(h_s) \rangle$ за подходящи $h_1, \ldots, h_s \in H$, то

$$H = \langle h_1, \ldots, h_s \rangle (\ker(\mathcal{L}) \cap H)$$

е произведение на $\langle h_1, \ldots, h_s \rangle$ с ядрото на $\mathcal{L} : H \to \mathcal{L}(H)$, защото всеки съседен клас на H по модул $\ker(\mathcal{L}) \cap H$ има представител в $\langle h_1, \ldots, h_s \rangle$ и подгрупата $\ker(\mathcal{L}) \cap H$ е нормална в H. Сечението $\ker(\mathcal{L}) \cap H = \{\mathrm{Id}\}$ или $\ker(\mathcal{L}) \cap H = \langle \tau_{33} \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$. По този начин получаваме $H = K_1(n)$ с $0 \leq n \leq 1$ или $H = K_1^+$ за $\mathcal{L}(H) = \langle I^2 J^2 \rangle$. Ако $\mathcal{L}(H) = \langle IJ^{-1} \rangle$, то $H = K_2(n)$ с $0 \leq n \leq 1$ или $H = K_2^+$. В случая $\mathcal{L}(H) = \langle IJ\theta \rangle$ имаме $H = K_3(n)$ с $0 \leq n \leq 1$ или $H = K_3^+$. За $\mathcal{L}(H) = \langle I^2\theta \rangle$ следва $H = K_4(n)$ с $0 \leq n \leq 1$ или $H = K_4^+$. Накрая, повдиганията на пораждащите на $\mathcal{L}(H) = \langle IJ^{-1},\, IJ\theta \rangle = K_o$ се избират по $2^2 = 4$ начина и $H = K_5(m, n)$ за някакви $0 \leq m, n \leq 1$ или $H = K_5^+ = K$, Q.E.D.

Глава 6

Повърхнини на Енриквес

Факторът A/H е бирационален на повърхнина на Енриквес тогава и само тогава, когато когато H не съдържа отражение, не се съдържа в $K = \ker \det \mathcal{L}$ и A/H не е хиперелиптична.
Да означим с $N(G) = G \setminus PR(G)$ множеството на елементите на G, които не са потенциални отражения. Да напомним, че хомоморфизмът

$$\det \mathcal{L} : H \longrightarrow \mathcal{O}_{-d}^*$$

взема стойности в цикличната група $\mathcal{O}_{-d}^*$ на единиците в пръстена на целите числа $\mathcal{O}_{-d}$ на имагинерното квадратично числово поле $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Следователно образът $\operatorname{im} \det \mathcal{L} = \det \mathcal{L}(H) = \langle \omega \rangle$ е циклична група с пораждащ ω от ред $m \in \{2, 3, 4, 6\}$. (Тук предполагаме, че $\det \mathcal{L}(H) \neq \langle 1 \rangle$ съгласно $H \not\subseteq K = \ker \det \mathcal{L}$.) За произволен елемент $\alpha \in \mathcal{O}_{-d}^*$ означаваме

$$N_\alpha = \{h \in N(G) \,|\, \det \mathcal{L}(h) = \alpha\}.$$

По Теоремата за хомоморфизмите, фактор-групата

$$H/H \cap K \simeq \det \mathcal{L}(H) = \langle \omega \rangle \simeq \mathbb{Z}_m$$

е циклична или съществува $h_\omega \in H \setminus K$, така че

$$H = \cup_{i=0}^{m-1} h_\omega^i (H \cap K).$$

Това дава възможност да представим $H = (H \cap K)\langle h \rangle$ като произведение на $H \cap K$ с цикличната група $\langle h \rangle$. Ако $H \cap K = \mathcal{T}_H$ е транслационна, то факторът $A/(H \cap K)$ е абелева повърхнина. В противен случай, $A/(H \cap K)$ е K3 повърхнина. Следващите две твърдения обсъждат поотделно тези две възможности.

Твърдение 6.1. *Нека H е такава крайна подгрупа на $\operatorname{Aut}(A)$, че минималният модел Y_H на A/H е повърхнина на Енриквес, $A/(H \cap K)$ е абелева повърхнина и $H = (H \cap K)\langle h \rangle$. Тогава:*
(i) редът r на h съвпада с реда r_o на $\det \mathcal{L}(h) \in \mathcal{O}_{-d}^*$;
(ii) произведението $H = (H \cap K) \times \langle h \rangle$ е директно, т.е. $(H \cap K) \cap \langle h \rangle = \{\mathrm{Id}\}$;

(iii) съществуват гладка повърхнина на Енриквес $Z_{\langle h\rangle}$, бирационална на $A/\langle h\rangle$ и неразклонено $(H\cap K)$-Галоа покритие

$$\zeta_{H\cap K} : Z_{\langle h\rangle} \longrightarrow Y_H,$$

което се повдига до крайно неразклонено покритие

$$\widetilde{Z_{\langle h\rangle}} \longrightarrow \widetilde{Y_H}$$

на съответните универсални покриващи от тип К3,

$$\begin{tikzcd}
A/\langle h\rangle \arrow[d, "\zeta^A_{H\cap K}"] & Z_{\langle h\rangle} \arrow[l, "\sigma_h"'] \arrow[d, "\zeta_{H\cap K}"] & \widetilde{Z_{\langle h\rangle}} \arrow[l, "U_{\langle h\rangle}"'] \arrow[d, "\widetilde{\zeta_{H\cap K}}"] \\
A/H & Y_H \arrow[l, "\rho_H"'] & \widetilde{Y_H} \arrow[l, "U_H"']
\end{tikzcd}$$

Доказателство: Ако $A/(H\cap K)$ е абелева повърхнина, то $H\cap K = \mathcal{T}_H$ е транслационна група. Щом $A/\mathcal{T}_H\langle h\rangle$ е бирационално на повърхнина на Енриквес, то $h \notin L_1(G)$. Понеже $h \notin \mathcal{T}_H \subset K$, линейната част $\mathcal{L}(h)$ има характеристични корени $\lambda(\mathcal{L}(h)) \neq 1$ и $\lambda(\mathcal{L}(h)) \neq 1$. С други думи, h има изолирани фиксирани точки. Преместваме началото $\check{o}_A$ в една от тях, така че $h = \mathcal{L}(h)$ да се представи с линейна трансформация. Диагонализираме h чрез изоморфизъм на абелеви многообразия и получаваме

$$h = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Нека $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$ е елемент от ред r_j. Тогава h е от ред $r = (r_1, r_2)$. Наистина, от

$$\mathrm{Id} = h^r = \begin{pmatrix} \lambda_1^r & 0 \\ 0 & \lambda_2^r \end{pmatrix}$$

следва $\lambda_j^r = 1$ за $1 \leq j \leq 2$. В резултат, r_j дели r или (r_1, r_2) дели r. Обратно,

$$h^{(r_1,r_2)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(r_1,r_2)} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(r_1,r_2)} \end{pmatrix} = \mathrm{Id}$$

показва, че r дели (r_1, r_2), откъдето $r = (r_1, r_2)$. Нека $\det \mathcal{L}(h) = \det(h) = \lambda_1\lambda_2 \in \mathcal{O}^*_{-d}$ е от ред r_o. Съгласно $(\lambda_1\lambda_2)^r = \det(h)^r \det(h^r) = \det(\mathrm{Id}) = 1$, естественото число r_o дели r. От друга страна, $1 = (\lambda_1\lambda_2)^{r_o} = \det(h)^{r_o} = [\det \mathcal{L}(h)]^{r_o} = \det \mathcal{L}(h^{r_o})$ показва, че $h^{r_o} \in H\cap K$. Но $H\cap K$ е абелева, така че линейната трансформация $h^{r_o} = \mathrm{Id}$ или $\lambda_1^{r_o} = \lambda_2^{r_o} = 1$. По този начин, r_o е общо кратно на r_1 и r_2, така че $r = (r_1, r_2)$ дели r_o и $r = r_o$.
(ii) Елементите $k = h^i \in (H\cap K)\cap\langle h\rangle$ имат $\det \mathcal{L}(h^i) = \det \mathcal{L}(h)^i = 1$. Следователно общият ред $r_o = r$ на $\det \mathcal{L}(h)$ и h дели i и $h^i = \mathrm{Id}$.

(iii) Съгласно разлагането $h = (H \cap K) \times \langle h \rangle$ в директно произведение, подгрупата $\langle h \rangle$ на H е нормална с фактор-група $H/\langle h \rangle = H \cap K = \mathcal{T}_H$. Прилагането на Лема 3.1 дава комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd} A/\langle h \rangle \arrow[d, "\zeta^A_{H\cap K}"'] & Y_{\langle h \rangle} \arrow[l, "\rho_1"'] \arrow[d, "\zeta'_{H\cap K}"'] & Z_{\langle h \rangle} \arrow[l, "\eta_1"'] \arrow[d, "\zeta_{H\cap K}"'] \\ A/H & X_H \arrow[l, "\nu_2"'] & Y_H \arrow[l, "\mu_2"'] \end{tikzcd}$$

с гладка повърхнина $Z_{\langle h \rangle}$, бирационални ρ_1, η_1 и $(H \cap K)$-Галоа покритие $\zeta_{H\cap K}$. По предположение, Y_H е повърхнина на Енриквес, така че H не съдържа отражения. Оттук и подгрупата $\langle h \rangle$ на H не съдържа отражения и размерността на Кодаира $\kappa(Z_{\langle h \rangle}) = 0$. По-нататък, $h \notin K$ гарантира, че $Z_{\langle h \rangle}$ не е нито абелева, нито К3 повърхнина. Ако $Z_{\langle h \rangle}$ е хиперелиптична, то иррегулярността $q(Z_{\langle h \rangle}) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(Z_{\langle h \rangle}, \Omega^1_{Z_{\langle h \rangle}}) = 1$ и $\langle h \rangle = \mathcal{T}_H \langle h_1 \rangle$ за подходящо $h_1 \in L_1(G)$. Следователно $h = \tau_h h_1^i$ има линейна част $\mathcal{L}(h) = \mathcal{L}(h_1)^i$ с поне един характеристичен корен $\lambda_1(\mathcal{L}(h)) = 1$. Ако $\lambda_2(\mathcal{L}(h)) = 1$, то $h \in \mathcal{T}_H = H \cap K$, противно на избора на $h \notin H \cap K$. В случая $\lambda_2(\mathcal{L}(h)) \neq 1$ имаме $h \in L_1(G)$, така че $A/H = A/\mathcal{T}_H \langle h \rangle$ е хиперелиптична повърхнина. Това опровергава допускането за хиперелиптичност на $Z_{\langle h \rangle}$ и доказва, че $Z_{\langle h \rangle}$ е повърхнина на Енриквес. Нека $U_{\langle h \rangle} : \widetilde{Z_{\langle h \rangle}} \to Z_{\langle h \rangle}$ и $U_H : \widetilde{Y_H} \to Y_H$ са съответните универсални покриващи изображения с К3 повърхнини $\widetilde{Z_{\langle h \rangle}}$, $\widetilde{Y_H}$. Композицията $\zeta_{H\cap K} U_{\langle h \rangle} : \widetilde{Z_{\langle h \rangle}} \to Y_H$ изобразява тривиалната фундаментална група $\pi_1(\widetilde{Z_{\langle h \rangle}}) = 1$ в $(\zeta_{H\cap K} U_{\langle h \rangle})_* \pi_1(\widetilde{Z_{\langle h \rangle}}) = \{\mathrm{Id}_{\pi_1(Y_H)}\}$. Тази подгрупа на $\pi_1(Y_H)$ се съдържа в $(U_H)_* \pi_1(\widetilde{Y_H}) = (U_H)_*\{1\} = \{\mathrm{Id}_{\pi_1(Y_H)}\}$ и покритието $U_H : \widetilde{Y_H} \to Y_H$ е неразклонено.

Следователно $\zeta_{H\cap K} U_{\langle h \rangle} : \widetilde{Z_{\langle h \rangle}} \to Y_H$ се повдига до холоморфно изображение $\widetilde{\zeta_{H\cap K}} : \widetilde{Z_{\langle h \rangle}} \to \widetilde{Y_H}$, затварящо комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Z_{\langle h \rangle}} \arrow[r, "\widetilde{\zeta_{H\cap K}}"] \arrow[d, "U_{\langle h \rangle}"'] & \widetilde{Y_H} \arrow[d, "U_H"'] \\ Z_{\langle h \rangle} \arrow[r, "\zeta_{H\cap K}"] & Y_H \end{tikzcd} .$$

Понеже $U_{\langle h \rangle}$ и $\zeta_{H\cap K}$ са покрития (т.е. имат дискретни слоеве), изображението $\widetilde{\zeta_{H\cap K}}$ е покритие от степен $\deg \widetilde{\zeta_{H\cap K}} = \deg \zeta_{H\cap K} = \mathrm{card}(H \cap K)$, Q.E.D.

Твърдение 6.2. *Нека $H = (H \cap K)\langle h \rangle$ е крайна подгрупа на $\mathrm{Aut}(A)$, така че минималното разрешение Y_H на особеностите на A/H е повърхнина на Енриквес, а $A/(H \cap K)$ е бирационално на К3 повърхнина. Тогава индексът*

$$[H : (H \cap K)] = 2 \ \textit{или}\ 4.$$

(а) Ако $[H(H\cap K)]=2$, то универсалната покриваща $\widetilde{Y_H}$ на Y_H от тип K3 е бирационална на $A/(H\cap K)$.
(б) Ако $[H(H\cap K)]=4$, то A има комплексно умножение с $\mathbb{Q}(i)$ и съществува гладка повърхнина на Енриквес Z, така че
(i) Z е бирационална на $A/[(H\cap K)\langle h^2\rangle]$;
(ii) Z е двулистно покритие на Y_H и
(iii) универсалната покриваща $\widetilde{Z}$ на Z от тип K3 е бирационална на $A/(H\cap K)$.

Доказателство: Да напомним, че

$$H/(H\cap K)=(H\cap K)\langle h\rangle/(H\cap K)\simeq\langle\det\mathcal{L}(h)\rangle$$

е подгрупа на мултипликативната група $\mathcal{O}_{-d}^*$. За $d=1,3$ имаме $\mathcal{O}_{-d}^*=\langle -1\rangle\simeq\mathbb{Z}_2$. Целите Гаусови числа $\mathcal{O}_{-1}=\mathbb{Z}[i]$ са с мултипликативна група $\mathbb{Z}[i]^*=\langle i\rangle\simeq\mathbb{Z}_4$, а целите числа на Айзенщайн $\mathcal{O}_{-3}$ са с $\mathcal{O}_{-3}^*=\langle e^{\frac{2\pi i}{6}}\rangle\simeq\mathbb{Z}_6$. Следователно индексът $[H:(H\cap K)]=2,3,4$ или 6.
За произволно разлагане $[H:(H\cap K)]=mn$ с $m,n\in\mathbb{N}$, $m>1$, полагаме $F=(H\cap K)\langle h^n\rangle$ и забелязваме, че $H\cap K\subsetneq F\subseteq H$ с $[H:F]=n$, $[F:(H\cap K)]=m$. Съгласно Лема 3.1 съществува комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd} A/(H\cap K) \arrow[d, "\zeta^A_{H\cap K}"'] & Z_{H\cap K} \arrow[l, "\nu_{H\cap K}"'] \arrow[d, "\zeta'_{H\cap K}"'] \\ A/F & Y_F \arrow[l, "\rho_F"'] \end{tikzcd},$$

в която Y_F е минималното разрешение на особеностите на A/F, $Z_{H\cap K}$ е гладка повърхнина, $\zeta^A_{H\cap K}$, $\zeta'_{H\cap K}$ са покрития на Галоа с трансформационна група $F/(H\cap K)\simeq\mathbb{Z}_m$, а $\nu_{H\cap K}$, ρ_F са бирационални изображения. Повторното приложение на Лема 3.1 към $H_1=F$ и $H_2=H$ продължава тази диаграма до

$$\begin{tikzcd} A/(H\cap K) \arrow[d, "\zeta^A_{H\cap K}"'] & Z_{H\cap K} \arrow[l, "\nu_{H\cap K}"'] \arrow[d, "\zeta'_{H\cap K}"'] & \\ A/F \arrow[d, "\zeta^A_F"'] & Y_F \arrow[l, "\rho_F"'] \arrow[d, "\zeta'_F"'] & Z_F \arrow[l, "\eta_F"'] \arrow[d, "\zeta_F"'] \\ A/H & X_H \arrow[l, "\nu_H"'] & Y_H \arrow[l, "\mu_H"'] \end{tikzcd},$$

където Z_F е гладка повърхнина, ζ^A_F, ζ'_F, ζ_F са покрития на Галоа с трансформационна група $F/H\simeq\mathbb{Z}_n$, а η_F, ν_H, μ_H са бирационални изображения. Както в доказателството на Лема 3.1, определяме $V_{H\cap K}=Z_{H\cap K}\times_{Y_F}Z_F$ като разслоено произведение. Наличието на покритие $\zeta_{H\cap K}:V_{H\cap K}\to Z_F$ над гладката повъхртнина Z_F гарантира гладкостта на $V_{H\cap H}$. Повърхнината $Y_{H\cap K}$ е от тип K3, защото е бирационална на $Z_{H\cap K}$. В частност, $V_{H\cap K}$ е едносвързана. От друга страна, групата $F = (H\cap K)\langle h^n\rangle$ не съдържа отражения, така че $\kappa(A/F) = \kappa(Z_F) = 0$. Условието $h^n \notin H\cap K$ не позволява Z_F да е K3 или абелева повърхнина. Ако допуснем, че Z_F е хиперелиптична, то $F = (H\cap K)\langle h^n\rangle$ няма фиксирани точки върху A. Но $A/(H\cap K)$ е бирационално на K3 повърхнина, така че $H\cap K$ има изолирани фиксирани точки върху A, а оттам и F има фиксирани точки върху A. Противоречието доказва, че Z_F е повърхнина на Енриквес. В резултат, универсалната покриваща $\widetilde{Z_F}$ е K3 повърхнина. Покритието $\zeta_{H\cap K} : V_{H\cap K} \to Z_F$ изобразява тривиалната фундаментална група на $V_{H\cap K}$ в тривиалната подгрупа на $\pi_1(Z_F)$, $(\zeta_{H\cap K})_*\pi_1(V_{H\cap K}) = 1_{\pi_1(Z_F)}$. Универсалното покритие $U_F : \widetilde{Z_F} \to Z_F$ трансформира $\pi_1(\widetilde{Z_F}) = 1$ в $(U_F)_*\pi_1(\widetilde{Z_F}) = 1_{\pi_1(Z_F)}$. Поради неразклонеността на $U_F : \widetilde{Z_F} \to Z_F$, покритието $\zeta_{H\cap K} : V_{H\cap K} \to Z_F$ се повдига до покритие $\widetilde{\zeta_{H\cap K}} : V_{H\cap K} \to \widetilde{Z_F}$, затварящо комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} V_{H\cap K} \arrow[r, "\widetilde{\zeta_{H\cap K}}"] \arrow[dr, "\zeta_{H\cap K}"'] & \widetilde{Z_F} \arrow[d, "U_F"] \\ & Z_F \end{tikzcd}$$

От $\zeta_{H\cap K} = U_F\widetilde{\zeta_{H\cap K}}$ следва, че степента

$$m = \deg \zeta_{H\cap K} = \deg(U_F\widetilde{\zeta_{H\cap K}}) = \deg U_F \deg \widetilde{\zeta_{H\cap K}} = 2\deg \widetilde{\zeta_{H\cap K}}.$$

Ако редът mn на цикличната група $H/(H\cap K) \simeq \mathbb{Z}_m$ има нечетен прост делител p, то изборът на $m = p$ води до противоречие. Следователно $[H : (H\cap K)] = 2$ или 4.
В случая $H/(H\cap K) \simeq \mathbb{Z}_2$ имаме единствена възможност $m = 2$, $n = 1$. За нея $\deg \widetilde{\zeta_{H\cap K}} = 1$, така че универсалната покриваща $\widetilde{Z_F} = V_{H\cap K}$ е бирационална на $A/(H\cap K)$. Аналогично, $\zeta'_{H\cap K} : Z_{H\cap K} \to Y_F$ индуцира хомоморфизъм на фундаменталните групи $(\zeta'_{H\cap K})_*\pi_1(Z_{H\cap K}) = 1 \to \pi_1(Y_F) \simeq \mathbb{Z}_2$ с $(\zeta'_{H\cap K})_*\pi_1(Z_{H\cap K}) = \{1_{\pi_1(Y_F)}\} = (U'_F)_*\pi_1(\widetilde{Y_F})$ за универсалната покриваща $U'_F : \widetilde{Y_F} \to Y_F$. Следователно $\zeta'_{H\cap K}$ има холоморфно повдигане $\widetilde{\zeta'_{H\cap K}} : Z_{H\cap K} \to \widetilde{Y_F}$, затварящо комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} Z_{H\cap K} \arrow[r, "\widetilde{\zeta'_{H\cap K}}"] \arrow[dr, "\zeta'_{H\cap K}"'] & \widetilde{Y_F} \arrow[d, "U'_F"] \\ & Y_F \end{tikzcd}$$

Степента

$$\deg \widetilde{\zeta'_{H\cap K}} = \frac{\deg(U'_F\widetilde{\zeta'_{H\cap K}})}{\deg U'_F} = \frac{\deg \zeta_{H\cap K}}{2} = 1,$$

така че универсалната покриваща $\widetilde{Y_F} = \widetilde{Y_H}$ на $Y_F = Y_H$ е бирационална на $A/(H \cap K)$. В случая, $[H : (H \cap K)] = 4$ избираме $m = n = 2$. Това е възможно само когато $E_{-1} = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ и $A_{-1} = E_{-1} \times E_{-1}$ имат комплексно умножение с полето $\mathbb{Q}(i)$ на Гаусовите числа. Повърхнината на Енриквес $Z = Z_F$ е бирационална ан $A/F = A/[(H \cap K)\langle h^2 \rangle]$. Универсалната и покриваща $\widetilde{Z} = \widetilde{Z_F}$ е бирационална на $A/(H \cap K)$ и $\zeta_F : Z \to Y_H$ е двулистно покритие, Q.E.D.
Да напомним, че всяка повърхнина на Енриквес Y_H е елиптично разслоение

$$g : Y_H \to C$$

с рационална база. Твърдим, че ако линейната част $\mathcal{L}(H)$ на H е абелева, то каноничните разслоения на A/H индуцират две елиптични разслоения $f_j : Y_H \to C_j$ с рационални бази C_j. За целта избираме матрица $S \in Gl_2(\mathbb{C})$, която диагонализира едновременно $\mathcal{L}(H)$. Съгласно Лема 3.5, каноничните разслоения

$$p_j : S(A)/(SHS^{-1}) \longrightarrow C_j = F_j/(SHS^{-1})$$

имат елиптични общи слоеве. Те индуцират елиптични разслоения

$$p'_j = p_j \overline{S} : A/H \to C_j.$$

Композирайки с минималното разрешение $\rho : Y_H \to A/H$ на изолираните фактор-особености на A/H, получаваме елиптични разслоения $f_j = p'_j \rho_H : Y_H \to C_j$. Ако допуснем, че $q_j(SHS^{-1})$ е транслационна група за някое $1 \leq j \leq 2$, то $C_j = F_j/q_j(SHS^{-1})$ е гладка елиптична крива и $H^0(C_j, \Omega^1_{C_j}) \simeq \mathbb{C}$. Разслоението f_j индуцира $\mathbb{C}$-линейно влагане $f_j^* : H^0(C_j, \Omega^1_{C_j}) \to H^0(Y_H, \Omega^1_{Y_h})$, така че иррегулярността

$$q(Y_H) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(Y_H, \Omega^1_{Y_H}) \geq 1.$$

Повърхнината на Енриквес Y_H има $q(Y_H) = 0$ и това и противоречие, доказващо наличието на $q_j(SHS^{-1})$-фиксирана точка върху F_j В резултат, кривата $C_j = F_j/q_j(SHS^{-1})$ е рационална и елиптичните разслоения $f_j : Y_H \to C_j$ имат рационални бази.
Да изложим накратко един алгоритъм за определяне на подгрупите $H \leq G$, за които A/H е повърхнина на Енриквес. Нека $N(G) = G \setminus PR(G)$ е допълнението на потенциалните отражения на G. Търсим подгрупите $H = \cup_{j=0}^{m-1} h_\omega^j (H \cap K)$ на G, съдържащи се в $N(G)$. Това изисква $h_\omega^j (H \cap K) \subseteq N_{\omega^j}$ за всички $0 \leq j \leq m-1$. В частност, за $j = 0$ условието $H \cap K \subseteq K \equiv N_1$ е тривиално изпълнено. Подгрупата $H \cap K$ на K трябва да има $h_\omega^{-j}(H \cap K) \subseteq N_{\omega^{-j}}$ за $\forall 1 \leq j \leq m-1$. Следователно

$$H \cap K \subseteq \cap_{j=1}^{m-1} h_\omega^j N_{\omega^{-j}}.$$

Това ни кара да определим множествата

$$M(h) = \cap_{j=1}^{m-1} h^j N_{(\det h)^{-j}}$$

за произволни $h \in N(G) \setminus K$. За всяко фиксирано $h \in N(G) \setminus K$ намираме подгрупите $K(h)$ на K, които се съдържат в $M(h)$. Тогава множествата $H = K(h)\langle h \rangle$

се съдържат в $N(G)$. Произведенията $H = K(h)\langle h\rangle$ са подгрупи на G точно когато $K(h)\langle h\rangle = \langle h\rangle K(h)$. Условията $K(h)h^i \subset \langle h\rangle K(h)$, $h^iK(h) \subset K(h)\langle h\rangle$ следват от $K(h)h \subset \langle h\rangle K(h)$, $hK(h) \subset K(h)\langle h\rangle$ с индукция по $i \in \mathbb{N}$. Ако $k_1h = h^ik_2 \in K(h)h \cap \langle h\rangle K(h)$ за $0 \leq i \leq m-1$, то $\det\mathcal{L}(h) = \det\mathcal{L}(k_1h) = \det\mathcal{L}(h^ik_2) = \det\mathcal{L}(h)^i$ изисква $i = 1$, защото $\det\mathcal{L}(h) \in \mathcal{O}^*_{-d}$ е от ред m. По този начин, $H = K(h)\langle h\rangle$ е подгрупа на G точно когато $K(h)h \subset hK(h) \subset K(h)h$ или $h^{-1}K(h)h \subseteq K(h)$. Ако $H = K(h)h \subset N(G)$ има поне една фиксирана точка върху A, то факторът A/H е бирационален на повърхнина на Енриквес. Да обърнем внимание, че $K(h)$ се съдържа в $H \cap K = K(h)\langle h\rangle \cap K$, но може да не съвпада. От друга страна, ако индексът $[H : (H \cap K)] = m$, то $h^m \in H \cap K$, то редът на h може да е по-голям от m. Това се случва само когато $H \cap K$ е нетранслационна група и $K(h) \cap \langle h\rangle \neq \{\mathrm{Id}\}$. Тогава произведението $H = K(h)\langle h\rangle$ не е директно и подгрупата $\langle h\rangle$ не е обезателно нормална.

Твърдение 6.3. *Нека $A_{-1} = E_{-1} \times E_{-1}$ с $E_{-1} = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$, H е подгрупа на*

$$G_{-1} = \{\tau_{33}^n I^k J^l \theta^m \,|\, 0 \leq k, l \leq 3,\ 0 \leq m, n \leq 1\}, \quad a$$

$$K_1(n) = \langle \tau_{33}^n I^2 J^2\rangle,\ K_1^+ = \langle I^2J^2, \tau_{33}\rangle,\ K_2(n) = \langle \tau_{33}^n IJ^{-1}\rangle$$

са групите от Твърдение 5.1. Тогава минималното разрешение Y_H на особеностите на A/H е повърхнина на Енриквес за следните 8 серии от подгрупи на G_{-1}:

(i) Ако $H_1 = K_1(0)\langle\tau_{33}I^2\rangle = \langle I^2J^2, \tau_{33}I^2\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, то Y_{H_1} е повърхнина на Енриквес с универсална покриваща $\widetilde{Y_{H_1}}$, бирационална на $A_{-1}/K_1(0)$.

(ii) Ако $H_2(n) = K_2(n)\langle\tau_{33}I^2\rangle = \langle\tau_{33}^n IJ^{-1}, \tau_{33}I^2\rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, то $Y_{H_2(n)}$ е повърхнина на Енриквес, чиято универсална покриваща $\widetilde{Y_{H_2(n)}}$ е бирационална на $A_{-1}/K_2(n)$.

(iii) Ако $H_3(n) = K_1(0)\langle\tau_{33}^n IJ\rangle = \langle\tau_{33}^n IJ\rangle \simeq \mathbb{Z}_4$, то $Y_{H_3(n)}$ е повърхнина на Енриквес, чиято универсална покриваща $\widetilde{Y_{H_3(n)}}$ е бирационална на $A_{-1}/K_1(0)$.

(iv) Ако $H_3^+ = K_1^+\langle\tau_{33}^n IJ\rangle = \langle IJ, \tau_{33}\rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, то $Y_{H_3^+}$ е повърхнина на Енриквес с универсална покриваща $\widetilde{Y_{H_3^+}}$, бирационална на A_{-1}/K_1^+.

(v) Ако $H_4(n) = K_2(n+1)\langle\tau_{33}^n IJ\rangle = \langle\tau_{33}^n IJ, \tau_{33}I^2\rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, то $Y_{H_4(n)}$ е повърхнина на Енриквес с универсална покриваща $\widetilde{Y_{H_4(n)}}$, бирационална на $A_{-1}/K_2(n+1)$.

(vi) Ако $H_5(n,k) = K_1(0)\langle\tau_{33}^n I^k J^{3-k}\theta\rangle = \langle\tau_{33}^n I^k J^{3-k}\theta\rangle \simeq \mathbb{Z}_8$, то съществува гладък модел $Z_{H_3(0)}$ на $Y_{H_3(0)}$, който е двулистно покритие на $Y_{H_5(n,k)}$.

(vii) Ако $H_5^+(k) = K_1^+\langle\tau_{33}^n I^k J^{3-k}\theta\rangle = \langle I^k J^{3-k}\theta, \tau_{33}\rangle \simeq \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$ за $0 \leq k \leq 1$, то $Y_{H_5^+(k)}$ е повърхнина на Енриквес, която се покрива двулистно от гладък модел на $Y_{H_3^+}$.

(viii) Ако $H_6(n,k) = K_2(1)\langle\tau_{33}^n I^k J^{3-k}\theta\rangle = \langle\tau_{33}^n I^k J^{3-k}\theta, \tau_{33}IJ^{-1}\rangle$ за $0 \leq n, k \leq 1$, то $Y_{H_6(n,k)}$ е повърхнина на Енриквес с двулистно покритие $Z_{H_4(0)}$, бирационално на $Y_{H_4(0)}$. Неабелевата група $H_6(n,k)$ се задава с пораждащи $\nu(n,k) = \tau_{33}^n I^k J^{3-k}\theta$ от ред 8 и $\mu = \tau_{33}J^2$ от ред 2, изпълняващи съотношението $\nu(n,k)\mu = \mu\nu(n,k)^5$. Тя е известна като модулярна група от ред 16 или като група на Ивасава.

Доказателство: Допълнението $N(G_{-1}) = G_{-1} \setminus PR(G_{-1})$ на потенциалните отражения $PR(G_{-1})$ се разбива в непресичащо се обединение

$$N(G_{-1}) = K \cup N_{-1} \cup N_i \cup N_{-i}$$

на

$$K = \ker\det\mathcal{L} = \{\tau_{33}^n I^k J^{-k},\ \tau_{33}^n I^k J^{2-k}\theta \,|\, 0 \leq k \leq 3,\ 0 \leq n \leq 1\},$$
$$N_{-1} = \{\tau_{33} I^{2m} J^{2-2m},\ \tau_{33}^n I^{2m+1} J^{2m+1} \,|\, 0 \leq m, n \leq 1\},$$
$$N_i = \{\tau_{33}^n I^k J^{3-k}\theta \,|\, 0 \leq k \leq 3,\ 0 \leq n \leq 1\},$$
$$N_{-i} = \{\tau_{33}^n I^k J^{1-k}\theta \,|\, 0 \leq k \leq 3,\ 0 \leq n \leq 1\}.$$

Непосредствено пресмятаме, че

$$M(\tau_{33} I^{2m} J^{2-2m}) = \tau_{33} I^{2m} J^{2-2m} N_{-1} = \{\mathrm{Id}, I^2 J^2, \tau_{33}^n I^{2m+1} J^{2m-1} \,|\, 0 \leq m, n \leq 1\}.$$

Ако подгрупа K_i на G_{-1} се съдържа в $M(\tau_{33} I^{2m} J^{2-2m})$, то редът на K_i е $2^{s_i} < 6$, т.е. $\mathrm{card}(K_i) = 1, 2$ или 4. Множеството $M(\tau_{33} I^{2m} J^{2-2m})$ съдържа неутралния елемент Id, един елемент от ред 2 и четири елемента от ред 4. Следователно $M(\tau_{33} I^{2m} J^{2-2m})$ съдържа само циклични групи от ред 1, 2 или 4. Вземайки предвид, че

$$\langle \tau_{33}^n I^{2m+1} J^{2m-1} \rangle = \langle (\tau_{33}^n I^{2m+1} J^{2m-1})^3 \rangle = \langle \tau_{33}^n I^{2m-1} J^{2m+1} \rangle,$$

стигаме до извода, че подгрупите на K, съдържащи се в $M(\tau_{33} I^{2m} J^{2-2m})$ са $K_0 = \{\mathrm{Id}\}$, $K_1(0) = \langle I^2 J^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$ и

$$K_2(n) = \langle \tau_{33}^n I J^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \ \text{ за } \ 0 \leq n \leq 1.$$

Да отбележим, че множеството N_{-1} се съдържа в абелевата подгрупа

$$G'_{-1} = \{\tau_{33}^n I^k J^l \,|\, 0 \leq k, l \leq 3,\ 0 \leq n \leq 1\} = \langle I, J, \tau_{33} \rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$$

на $G_{-1} = \langle I, J, \theta, \tau_{33} \rangle$. Следователно

$$K(\tau_{33} I^{2m} J^{2-2m}) \tau_{33} I^{2m} J^{2-2m} = \tau_{33} I^{2m} J^{2-2m} K(\tau_{33} I^{2m} J^{2-2m})$$

за всяко подгрупа $K(\tau_{33} I^{2m} J^{2-2m})$ на K, съдържаща се в $M(\tau_{33} I^{2m} J^{2-2m})$ и

$$H = K(\tau_{33} I^{2m} J^{2-2m}) \langle \tau_{33} I^{2m} J^{2-2m} \rangle$$

са подгрупи на G_{-1}, съдържащи се в $N(G_{-1})$. По-точно, $K_0 \langle \tau_{33} I^{2m} J^{2-2m} \rangle = \langle \tau_{33} J^2 \rangle$ или $\langle \tau_{33} I^2 \rangle$ имат хиперелиптични фактори, съгласно Следствие 4.7. Вземайки предвид, че $(I^2 J^2)(\tau_{33} I^2) = \tau_{33} J^2$, разпознаваме подгрупата

$$H_1 = K_1(0) \langle \tau_{33} J^2 \rangle = K_1(0) \langle \tau_{33} I^2 \rangle = \langle I^2 J^2, \tau_{33} I^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

с $H_1 \cap K = \langle I^2 J^2 \rangle = K_1(0)$ и $[H_1 : (H_1 \cap K)] = 2$. Въз основа на $(\tau_{33}^n I J^{-1})^2 (\tau_{33} I^{2m} J^{2-2m}) = \tau_{33} I^{2(m+1)} J^{2-2(m+2)}$ забелязваме независимостта на

$$K_2(n) \langle \tau_{33} I^{2m} J^{2-2m} \rangle = K_2(n) \langle \tau_{33} I^{2(m+1)} J^{2-2(m+1)} \rangle$$

от $0 \leq m \leq 1$ и означаваме

$$H_2(n) = K_2(n) \langle \tau_{33} I^2 \rangle = \langle \tau_{33}^n I J^{-1}, \tau_{33} I^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$$

с $H_2(n) \cap K = \langle \tau_{33}^n I J^{-1} \rangle = K_2(n)$, $[H_2(n) : (H_2(n) \cap K)] = 2$.
По-нататък,

$$M(\tau_{33}^n I^{2m+1} J^{2m+1}) = \tau_{33}^n I^{2m+1} J^{2m+1} N_{-1} = \{\tau_{33}^l, \tau_{33}^l I^2 J^2, \tau_{33}^{n+1} I^{2l+1} J^{2l-1} \,|\, 0 \leq l \leq 1\}$$

съдържа неутралния елемент $\tau_{33}^0 = \mathrm{Id}$, три елемента от ред 2 и два елемента от ред 4. Подгрупите на K, съдържащи се в $M(\tau_{33}^n I^{2m+1} J^{2m+1})$ се изчерпват с $K_0(l) = \langle \tau_{33}^l \rangle$, $K_1(l) = \langle \tau_{33}^l I^2 J^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$, $K_1^+ = \langle I^2 J^2, \tau_{33} \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ и $K_2(n+1) = \langle \tau_{33}^{n+1} I J^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$, защото $\langle \tau_{33}^{n+1} I^{-1} J \rangle = \langle \tau_{33} I J^{-1} \rangle$. Всички тези групи се съдържат в G'_{-1}, заедно с $h(m,n) = \tau_{33}^n I^{2m+1} J^{2m+1}$ и пораждат подгрупи $H(m,n) = K(h(m,n)) \langle h(m,n) \rangle$ на G_{-1}. Съгласно $(\tau_{33}^n IJ)^3 = \tau_{33}^n I^{-1} J^{-1}$ и $(\tau_{33}^n I^{-1} J^{-1})^3 = \tau_{33}^n IJ$, групите $H(m,n)$ не зависят от $0 \leq m \leq 1$. По-точно, това са

$$H_3(n) = K_0(0) \langle \tau_{33}^n IJ \rangle = K_1(0) \langle \tau_{33}^n IJ \rangle = \langle \tau_{33}^n IJ \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$$

с $H_3(n) \cap K = K_1(0)$, $[H_3(n) : (H_3(n) \cap K)] = 2$,

$$H_3^+ = K_o(1) \langle \tau_{33}^n IJ \rangle = K_1(1) \langle \tau_{33}^n IJ \rangle = K_1^+ \langle \tau_{33}^n IJ \rangle = \langle \tau_{33}, IJ \rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$$

с $H_3^+ \cap K = K_1^+$, $[H_3^+ : (H_3^+ \cap K)] = 2$,

$$H_4(n) = K_2(n+1) \langle \tau_{33}^n IJ \rangle = \langle \tau_{33}^n IJ, \tau_{33} I^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$$

с $H_4(n) \cap K = K_2(n+1)$, $[H_4(n) : (H_4(n) \cap K)] = 2$.
Остава да класифицираме $H = (H \cap K) \langle h \rangle$ с $h \in N_i$. В конкретната група G_{-1}, всеки елемент $h_{-i} \in N_{-i}$ е от ред 8, така че $h_{-i} = (h_{-i}^3)^3$ и $(H \cap K) \langle h_{-i} \rangle = (H \cap K) \langle h_{-i}^3 \rangle$ с $h_{-i}^3 \in N_i$.
Да означим $\nu(n_o, k_o) = \tau_{33}^{n_o} I^{k_o} J^{3-k_o} \theta \in N_i$ и да отбележим, че

$$M(\nu(n_o,k_o)) = \nu(n_o,k_o) N_{-i} \cap \nu(n_o,k_o)^2 N_{-1} \cap \nu(n_o,k_o)^3 N_i =$$

$$= \{h \in I^{-1} J^{-1} N_{-1} \,|\, \nu(n_o,k_o)^{-1} h \in N_{-i},\ \nu(n_o,k_o)^{-3} h \in N_i\}.$$

Следователно $M(\nu(n_o,k_o))$ се състои от $h = \tau_{33} I^{2m-1} J^{2m+1}$ или $h = \tau_{33}^n I^{2m} J^{2m}$, така че $\tau_{33}^{n_o} I^{k_o+1} J^{-k_o} \theta h \in N_{-i}$ и $\tau_{33}^{n_o} I^{k_o+2} J^{1-k_o} \theta h \in N_i$ за $0 \leq m, n \leq 1$. Оттук

$$M(\nu(n_o,k_o)) = \{\tau_{33} I^{2m-1} J^{2m+1}, \tau_{33}^n I^{2m} J^{2m} \,|\, 0 \leq m, n \leq 1\}.$$

Множествата $M(\nu(n_o,k_o))$ не зависят от $0 \leq n_o \leq 1$, $0 \leq k_o \leq 3$ и съдържат неутралния елемент Id, три елемента от ред 2 и два елемента от ред 4. Подгрупите на K, съдържащи се в $M(\nu(n_o,k_o))$ са $K_0(n) = \langle \tau_{33}^n \rangle$, $K_1(n) = \langle \tau_{33}^n I^2 J^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$, $K_1^+ = \langle I^2 J^2, \tau_{33} \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ и $K_2(1) = \langle \tau_{33} I J^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$, съгласно $(\tau_{33} I^{-1} J)^3 = \tau_{33} I J^{-1}$. В този случай, $\nu(n_o,k_o) = \tau_{33}^{n_o} I^{k_o} J^{3-k_o} \theta \not\in G'_{-1}$, така че не може да се използва комутативността на G'_{-1} за проверка на $\nu(n_o,k_o)^{-1} K_j \nu(n_o,k_o) \subseteq K_j$. Вместо това, да отбележим, че IJ и τ_{33} се съдържат в центъра $Z(G_{-1})$ на G_{-1}, защото принадлежат на абелевата група $G'_{-1} = \langle I, J, \tau_{33} \rangle$ и $(IJ)\theta = \theta(IJ)$, $\theta \tau_{33} = \tau_{33} \theta$. Следователно $K_0(n)$,

$K_1(n)$, K_1^+ са подгрупи на $Z(G_{-1})$ и произведенията им с $\langle \nu(n_o, k_o) \rangle$ са подгрупи на G_{-1}. Непосредствено пресмятаме, че

$$\nu(n_o, k_o)^{-1} K_2(1) \nu(n_o, k_o) = \langle (\tau_{33}^{n_o} I^{k_o} J^{3-k_o} \theta)^{-1} \tau_{33} I J^{-1} (\tau_{33}^{n_o} I^{k_o} J^{3-k_o} \theta) \rangle =$$

$$= \langle \tau_{33} I^{-1} J \rangle = \langle \tau_{33} I J^{-1} \rangle = K_2(1).$$

От $\nu(n_o, 0)^5 = \nu(n_o, 2)$ и $\nu(n_o, 2)^5 = \nu(n_o, 0)$ следва, че $\langle \nu(n_o, 0) \rangle = \langle \nu(n_o, 2) \rangle$. Аналогично, $\nu(n_o, 1)^5 = \nu(n_o, 3)$, $\nu(n_o, 3)^5 = \nu(n_o, 1)$, $\nu(n_o, 1)^5 = \nu(n_o, 3)$, $\nu(n_o, 3)^5 = \nu(n_o, 1)$ гарантират $\langle \nu(n_o, 1) \rangle = \langle \nu(n_o, 3) \rangle$, така че в $\nu(n_o, k_o)$ можем да ограничим стойностите на k_o до $0 \leq k_o \leq 1$. По този начин получаваме групите

$$H_5(n_o, k_o) = K_0(0) \langle \tau_{33}^{n_o} I^{k_o} J^{3-k_o} \theta \rangle = K_1(0) \langle \tau_{33}^{n_o} I^{k_o} J^{3-k_o} \theta \rangle = \langle \tau_{33}^{n_o} I^{k_o} J^{3-k_o} \theta \rangle \simeq \mathbb{Z}_8$$

с $H_5(n_o, k_o) \cap K = K_1(0)$, $[H_5(n_o, k_o) : (H_5(n_o, k_o) \cap K)] = 4$, $K_1(0) \langle \nu(n_o, k_o)^2 \rangle = \langle I^{-1} J^{-1} \rangle = \langle IJ \rangle \simeq H_3(0)$,

$$H_5^+(k_o) = K_0(1) \langle \tau_{33}^{n_o} I^{k_o} J^{3-k_o} \theta \rangle = K_1(1) \langle \tau_{33}^{n_o} I^{k_o} J^{3-k_o} \theta \rangle =$$

$$= K_1^+ \langle \tau_{33}^{n_o} I^{k_o} J^{3-k_o} \theta \rangle = \langle I^{k_o} J^{3-k_o} \theta, \tau_{33} \rangle \simeq \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$$

с $H_5^+(k_o) \cap K = K_1^+$, $[H_5^+(k_o) : [H_5^+(k_o) \cap K)] = 4$, $K_1^+ \langle \nu(n_o, k_o)^2 \rangle = \langle IJ, \tau_{33} \rangle = H_3^+$,

$$H_6(n_o, k_o) = K_2(1) \langle \tau_{33}^{n_o} I^{k_o} J^{3-k_o} \theta \rangle = \langle \tau_{33}^{n_o} I^{k_o} J^{3-k_o} \theta, \tau_{33} I J^{-1} \rangle \text{ за } 0 \leq n_o, k_o \leq 1.$$

За да разпознаем неабелевите групи $H_6(n_o, k_o)$ с пораждащи $\nu(n_o, k_o) = \tau_{33}^{n_o} I^{k_o} J^{3-k_o} \theta$ от ред 8 и $\sigma = \tau_{33} I J^{-1}$ от ред 4 забелязваме, че

$$H_6(n_o, k_o) = \langle \nu(n_o, k_o), \sigma \rangle = \langle \nu(n_o, k_o), \mu = \nu(n_o, k_o)^2 \sigma = \tau_{33} J^2 \rangle.$$

Сега $\mu = \tau_{33} J^2$ е от ред 2 и $\mu \nu(n_o, k_o)^5 = \tau_{33}^{n_o+1} I^{k_o+2} J^{3-k_o} \theta = \nu(n_o, k_o) \mu$, така че всяка от групите $H_6(n_o, k_o)$ е изоморфна на неабелевата група

$$M_{16} = \langle s, t \,|\, s^8 = 1,\ t^2 = 1,\ st = ts^5 \rangle$$

модулна група от ред 16 или групата на Ивасава. Сеченията $H_6(n_o, k_o) \cap K = \langle \tau_{33} I J^{-1} \rangle = K_2(1)$ са с индекс $[H_6(n_o, k_o) : (H_6(n_o, k_o) \cap K)] = 4$ и произведението $K_2(1) \langle \nu(n_o, k_o)^2 \rangle = \langle \tau_{33} I J^{-1}, I^{-1} J^{-1} \rangle = \langle \tau_{33} I^2, IJ \rangle = H_4(0)$, Q.E.D.

Глава 7

Покриващи съотношения между построените повърхнини

Твърдение 7.1. *Нека раздуването на $A = E \times E$ в особените точки $T^{\rm sing}$ на мулти-елиптичен дивизор $T = \sum\limits_{i=1}^{h} T_i$ е гладка тороидална компактификация $A' = (\mathbb{B}/\Gamma)' = (\mathbb{B}/\Gamma) \cup T'$ на фактор на кълбото. За произволни подгрупи $H_1 < H_2$ на $G = \mathrm{Aut}(A, T)$ да разгледаме повдиганията им Γ_{H_j} до решетки на $SU_{2,1}$ и компактификациите $\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_j}} = \left(\mathbb{B}/\Gamma_{H_j}\right) \cup (T'/H_j)$ на съответните фактори на кълбото. Тогава за всеки гладък бирационален модел X_{H_2} на $\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}}$ съществува комутативна диаграма*

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}} \arrow[r, "\xi^{H_1}"] \arrow[d, "\overline{\zeta_{H_2/H_1}}"'] & A/H_1 \arrow[d, "\zeta^A_{H_2/H_1}"'] & Z_{H_1} \arrow[l, "\mu_1"'] \arrow[d, "\zeta^\rho_{H_2/H_1}"'] & V_{H_1} \arrow[l, "\sigma_1"'] \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "\zeta^\sigma_{H_2/H_1}"'] & X_{H_1} \arrow[d, "\zeta_{H_2/H_1}"'] \\
\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}} \arrow[r, "\xi^{H_2}"] & A/H_2 & Y_{H_2} \arrow[l, "\rho_2"'] & Z_{H_2} \arrow[l, "\sigma_2"'] \arrow[r, "s_2"] & X_{H_2}
\end{tikzcd}, \tag{7.1}$$

в която хоризонталните изображения са бирационални, вертикалните изображения са покрития и всички повърхнини освен $\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_j}}$, A/H_j са гладки. Ще казваме, че двойката $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}}, X_{H_1}\right)$ покрива двойката $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}}, X_{H_2}\right)$.

Доказателство: Нека $\xi : A' = (\mathbb{B}/\Gamma)' \to A$ е свиването на (-1)-кривите до абелевия минимален модел A. Покритието $\zeta^A_{H_2/H_1} : A/H_1 \to A/H_2$ се ограничава до

$$\zeta^A_{H_2/H_1} : [A' \setminus \xi^{-1}(T^{\rm sing})]/H_1 = (A \setminus T^{\rm sing})/H_1 \longrightarrow (A \setminus T^{\rm sing})/H_2 = [A' \setminus \xi^{-1}(T^{\rm sing})]/H_2,$$

възоснова на G-инвариантността на $T^{\rm sing}$ и $\xi^{-1}(T^{\rm sing})$. То се продължава до покритие

$$\overline{\zeta_{H_2/H_1}} : \overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}} \longrightarrow \overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}},$$

което е съгласувано със свиванията ξ^{H_j} на $\xi^{-1}(T^{\rm sing})/H_j$ до $T^{\rm sing}/H_j$. Това дава комутативността на най-левия квадрат $\zeta^A_{H_2/H_1}\xi^{H_1} = \xi^{H_2}\overline{\zeta_{H_2/H_1}}$ на (7.1).

Съгласно Лема 3.1, минималното разрешение $\rho_2 : Y_{H_2} \to A/H_2$ на изолираните фактор-особености на A/H_2 има (необезателно регулярно) покритие

$$\zeta^{\rho}_{H_2/H_1} : Z_{H_1} \longrightarrow Y_{H_2}$$

от степен $[H_2 : H_1]$ с регулярно бирационално изображение $\mu_1 : Z_{H_1} \to A/H_1$, образуващо комутативния квадрат $\zeta^{A}_{H_2/H_1}\mu_1 = \rho_2\zeta^{\rho}_{H_2/H_1}$. Повърхнината Z_{H_1} е гладка по Лема 3.1.

Бирационалният морфизъм между гладките повърхнини Y_{H_2} и X_{H_2} се състои от две раздувания

$$Y_{H_2} \xleftarrow{\sigma_2} Z_{H_2} \xrightarrow{s_2} X_{H_2}$$

до гладък модел Z_{H_2}. Определяме $V_{H_1} = Z_{H_1} \times_{Y_{H_2}} Z_{H_2}$ като разслоено произведение, за да получим комутативния квадрат

$$\begin{tikzcd} Z_{H_1} V_{H_1} = Z_{H_1} \times_{Y_{H_2}} Z_{H_2} \arrow[d, "\zeta^{\rho}_{H_2/H_1}"'] & \arrow[d, "\zeta^{\sigma}_{H_2/H_1}"'] \\ Y_{H_2} & Z_{H_2} \arrow[l, "\sigma_2"'] \end{tikzcd}$$

с бирационални σ_1, σ_2 и покрития $\zeta^{\rho}_{H_2/H_1}$, $\zeta^{\sigma}_{H_2/H_1}$. Както в Лема 3.1, повърхнината V_{H_1} е гладка.

Слоевете на $s_2\zeta^{\sigma}_{H_2/H_1} : V_{H_1} \to X_{H_2}$ са крайни обединения на гладки рационални (-1)-криви. Ако

$$V_{H_1} \xrightarrow{\rho_1} X_{H_1} \xrightarrow{\zeta_{H_2/H_1}} X_{H_2}$$

е факторизацията на Щайн на $s_2\zeta^{\sigma}_{H_2/H_1}$, то ρ_1 е бирационално, а ζ_{H_2/H_1} е покритие от степен $[H_2 : H_1]$. Още повече, ρ_1 е раздуване, така че X_{H_1} е гладка повърхнина, Q.E.D.

За да опишем покриващите отношения $\left(\overline{\zeta_{H_2/H_1}}, \zeta_{H_2/H_1}\right) : \left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}}, X_{H_1}\right) \to \left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}}, X_{H_2}\right)$, ще използваме, че регулярните изображения $\zeta_{H_2/H_1} : X_{H_1} \to X_{H_2}$ индуцират $\mathbb{C}$-линейни влагания

$$\zeta^{*}_{H_2/H_1} : H^0(X_{H_2}, \Omega^1_{X_{H_2}}) \longrightarrow H^0(X_{H_1}, \Omega^1_{X_{H_1}}),$$

$$\zeta^{*}_{H_2/H_1} : H^0(X_{H_2}, \Omega^2_{X_{H_2}}) \longrightarrow H^0(X_{H_1}, \Omega^2_{X_{H_1}}).$$

Следователно ирегулярността и геометричният род изпълняват неравенствата

$$q(X_{H_2}) \leq q(X_{H_1}), \quad p_g(X_{H_2}) \leq p_g(X_{H_1}).$$

Освен това, размерността на Кодаира

$$\kappa(X_{H_2}) \leq \kappa(X_{H_1}).$$

Всички покрития $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}}, X_{H_1}\right)$ на абелева двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H}}, X_{H}\right)$ са абелеви. Причина за това е, че ирегулярността $q(X_{H_1}) \geq q(X_H) \geq 2$ и размерността на Кодаира $\kappa(X_{H_1}) \leq 0$, защото повърхнината X_{H_1} е бирационална на A/H_1.

Следствие 7.2. *(i) Покритията* $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}}, X_{H_1}\right)$ *на хиперелиптична двойка* $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ *са абелеви или хиперелиптични.*

(ii) Хиперелиптична двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ *може да покрива хиперелиптична, Енриквес, рационална или линейчата двойка* $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}}, X_{H_2}\right)$ *с елиптична база.*

(iii) Хиперелиптичните двойки $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{HE(m)}}, X_{HE(m)}\right)$ *с* $HE(m) = \langle \tau_{33} I^{2m} J^{2-2m} \rangle$ *за* $0 \leq m \leq 1$ *покриват повърхнините на Енриквес*

$$\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}}, X_{H_1}\right) \ \text{ с } \ H_1 = \langle I^2 J^2, \tau_{33} I^2 \rangle,$$

$$\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2(n)}}, X_{H_2(n)}\right) \ \text{ с } \ H_2(n) = \langle \tau_{33}^n I J^{-1}, \tau_{33} I^2 \rangle, \ 0 \leq n \leq 1,$$

$$\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_4(n)}}, X_{H_4(n)}\right) \ \text{ с } \ H_4(n) = \langle \tau_{33}^n I J, \tau_{33} I^2 \rangle, \ 0 \leq n \leq 1, \ \text{ и}$$

$$\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_6(n,k)}}, X_{H_6(n,k)}\right) \ \text{ с } \ H_6(n,k) = \langle \tau_{33}^n I^k J^{3-k} \theta, \tau_{33} J^2 \rangle, \ 0 \leq n \leq 1, \ 0 \leq k \leq 3.$$

(iv) Линейчатите двойки с елиптична база, които се покриват от хиперелиптична $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{HE(m)}}, X_{HE(m)}\right)$ *са*

$$\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{RE(m)}}, X_{RE(m)}\right) \ \text{ с } \ RE(m) = \langle \tau_{33}, HE(m) \rangle \ \text{ и}$$

$$\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{RE(m,l)}}, X_{RE(m,l)}\right) \ \text{ с } \ RE(m,l) = \langle \tau_{33}, \tau_{33}^n I^{m(2l+1)} J^{(1-m)(2l+1)} \rangle \ 0 \leq l \leq 1.$$

Доказателство: (i) Ако $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}}, X_{H_1}\right)$ покрива хиперелиптична двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$, то размерността на Кодаира $0 \geq \kappa(X_{H_1}) \geq \kappa(X_H) \geq 0$ и ирегулярността $q(X_{H_1}) \geq q(X_H) = 1$. Следователно двойката $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}}, X_{H_1}\right)$ е абелева или хиперелиптична.

(ii) Ако допъснем, че хиперелиптична двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ покрива абелева или К3 двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}}, X_{H_2}\right)$, то геометричният род $p_g(X_H) \geq p_g(X_{H_2}) = 1$. Това противоречи на $p_g(X_H) = 0$.

(iii) В означенията от Твърдение 6.3, елементите $\tau_{33} I^{2m} J^{2-2m}$ с $0 \leq m \leq 1$ принадлежат на групите H_1, $H_2(n)$, $H_4(n)$, $H_6(n,k)$ с $0 \leq n \leq 1$, $0 \leq k \leq 3$ и не принадлежат на групите $H_3(n)$, H_3^+, $H_5(n,k)$, $H_5^+(k)$ с $0 \leq n \leq 1$, $0 \leq k \leq 3$.

(iv) Подгрупа $RE < G_{-1}$ определя линейчата двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{RE}}, X_{RE}\right)$ с елиптична база точно когато $RE = \langle h \rangle$ с $h \in L_1(G_{-1}) \cap PR(G_{-1})$ или $H = \langle \tau_{33}, h \rangle$ с $h \in L_1(G_{-1})$. Двойката $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{HE(m)}}, X_{HE(m)}\right)$ покрива двойката $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{RE}}, X_{RE}\right)$ тогава и само тогава, когато $HE(m) = \langle \tau_{33} I^{2m} J^{2-2m} \rangle$ е подгрупа на RE. Непосредствено се вижда, че $\tau_{33} I^{2m} J^{2-2m} \notin \langle h \rangle$ за $h \in L_1(G_{-1}) \cap PR(G_{-1})$. Условието $\tau_{33} I^{2m} J^{2-2m} \in \langle \tau_{33}, h \rangle$ е еквивалентно на $I^{2m} J^{2-2m} \in \langle \tau_{33}, h \rangle$ и е изпълнено за $\tau_{33}^n I^k, \tau_{33}^n J^k$ с $0 \leq n \leq 1$, $1 \leq k \leq 3$, Q.E.D.

Следствие 7.3. *(i) Всяко покритие* $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}}, X_{H_1}\right)$ *на K3 двойка* $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ *се състои от абелеви или K3 повърхнини.*
В частност, $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ *с* $\Gamma_H \rhd \Gamma_{-1}^{(6,8)}$ *има абелево покритие* $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{\langle\tau_{33}\rangle}}, X_{\langle\tau_{33}\rangle}\right)$ *за* $H = K_1^+ = \langle I^2J^2, \tau_{33}\rangle$, $K_2^+ = \langle IJ^{-1}, \tau_{33}\rangle$, $K_3^+ = \langle IJ\theta, \tau_{33}\rangle$, $K_4^+ = \langle I^2\theta, \tau_{33}\rangle$ *или* $K_5^+ = \ker\det\mathcal{L} = \langle IJ^{-1}, IJ\theta, \tau_{33}\rangle$.
(ii) Двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ *от тип K3 може да покрива K3, Енриквес или рационална двойка* $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}}, X_{H_2}\right)$.
В частност, ако $\Gamma_H \rhd \Gamma_{-1}^{(6,8)}$*, то в означенията от Твърдение 6.3 покриващите съотношения*

$$\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right) \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}}, X_{H_2}\right) \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_3}}, X_{H_3}\right)$$

на K3 двойки $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ *и повърхнини на Енриквес* $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}}, X_{H_2}\right)$, $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_3}}, X_{H_3}\right)$ *са*

$$\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{K_1(0)}}, X_{K_1(0)}\right) \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}}, X_{H_1}\right),$$

$$\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{K_2(n)}}, X_{K_2(n)}\right) \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2(n)}}, X_{H_2(n)}\right)$$

$$\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{K_1(0)}}, X_{K_1(0)}\right) \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_3(0)}}, X_{H_3(0)}\right) \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_5(n,k)}}, X_{H_5(n,k)}\right),$$

$$\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{K_1(0)}}, X_{K_1(0)}\right) \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_3(1)}}, X_{H_3(1)}\right),$$

$$\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{K_1^+}}, X_{K_1^+}\right) \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_3^+}}, X_{H_3^+}\right) \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_5^+(k)}}, X_{H_5^+(k)}\right),$$

$$\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{K_2(n+1)}}, X_{K_2(n+1)}\right) \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_4(0)}}, X_{H_4(0)}\right) \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_6(n,k)}}, X_{H_6(n,k)}\right),$$

$$\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{K_2(n+1)}}, X_{K_2(n+1)}\right) \longrightarrow \left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_4(1)}}, X_{H_4(1)}\right).$$

Доказателство: (i) Ако $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}}, X_{H_1}\right)$ покрива K3 двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$, то геометричният род $p_g(X_{H_1}) \geq p_g(X_H) = 1$ и размерността на Кодаира $0 \geq \kappa(X_{H_1}) \geq \kappa(X_H) = 0$. Следователно $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}}, X_{H_1}\right)$ се състои от абелеви или K3 повърхнини.
Конкретно, $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ с $\Gamma_H \rhd \Gamma_{-1}^{(6,8)}$ има абелево покритие $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_1}, X_{H_1}\right)$ точно когато $H_1 = \langle\tau_{33}\rangle$ и $\tau_{33} \in H$. Чрез Следствие 5.2 определяме подгрупите H на G_{-1}, които съдържат τ_{33} и отговарят на K3 двойки $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$.
(ii) Ако K3 двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ покрива $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}}, X_{H_2}\right)$, то $0 = \kappa(X_H) \geq \kappa(X_{H_2})$. От друга страна, ирегулярността $0 = q(X_H) \geq q(X_{H_2})$, така че $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}}, X_{H_2}\right)$ не може да е абелева, хиперелиптична или линейчата с елиптична база. Следователно K3 двойка може да покрива K3, Енриквес или рационална двойка.
В частния случай $\Gamma_H \rhd \Gamma_{-1}^{(6,8)}$, покриващите съотношения между K3 и Енриквес двойки са непосредствено следствие от Твърдение 6.3, Q.E.D.

Следствие 7.4. *(i) Ако* $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}}, X_{H_1}\right)$ *покрива двойка* $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ *от повърхнини на Енриквес, то* $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}}, X_{H_1}\right)$ *се състои от абелеви, хиперелиптични, К3 или повърхнини на Енриквес.*
В случая $\Gamma_H \rhd \Gamma_{-1}^{(6,8)}$, *двойката* $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ *от повърхнини на Енриквес има абелево покритие* $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{\langle\tau_{33}\rangle}}, X_{\langle\tau_{33}\rangle}\right)$ *за* $H = H_3^+ = \langle IJ, \tau_{33}\rangle$ *или* $H_5^+(k) = \langle I^k J^{3-k}\theta, \tau_{33}\rangle$.
(ii) Двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ *от повърхнини на Енриквес може да покрива Енриквес или рационална двойка* $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}}, X_{H_2}\right)$.

Доказателство: (i) Ако $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}}, X_{H_1}\right)$ покрива двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ от повърхнини на Енриквес, то размерността на Кодаира $0 \geq \kappa(X_{H_1}) \geq \kappa(X_H) = 0$. Следователно $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}}, X_{H_1}\right)$ се състои от абелеви, хиперелиптични, К3 или повърхнини на Енриквес.
За $\Gamma_H \rhd \Gamma_{-1}^{(6,8)}$ имаме единствена нетривиална абелева двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{\langle\tau_{33}\rangle}}, X_{\langle\tau_{33}\rangle}\right)$, която покрива двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ от повърхнини на Енриквес точно когато H е от списъка на Твърдение 6.3 и $\tau_{33} \in H$.
(ii) Ако двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ от повърхнини на Енриквес покрива $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}}, X_{H_2}\right)$, то ирегулярността $0 = q(X_H) \geq q(X_{H_2})$ и геометричният род $0 \geq p_g(X_H) \geq p_g(X_{H_2})$. Следователно $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}}, X_{H_2}\right)$ не е абелева, хиперелиптична, К3 или линейчата с елиптична база. Остава $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}}, X_{H_2}\right)$ да е съставена от повърхнини на Енриквес или рационални повърхнини, Q.E.D.

Следствие 7.5. *(i) Ако* $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}}, X_{H_1}\right)$ *покрива двойка* $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ *от линейчати повърхнини с елиптична база, то* $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}}, X_{H_1}\right)$ *е съставена от абелеви, хиперелиптични или линейчати повърхнини с елиптична база.*
(ii) Двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ *от линейчати повърхнини с елиптична база може да покрива двойка* $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}}, X_{H_2}\right)$ *от рационални или линейчати повърхнини с елиптична база.*

Доказателство: (i) Ако $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}}, X_{H_1}\right)$ покрива двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ от линейчати повърхнини с елиптична база, то ирегуляността $q(X_{H_1}) \geq q(X_H) = 1$. Следователно $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_1}}, X_{H_1}\right)$ се състои от абелеви, хиперелиптични или линейчати повърхнини с елиптична база.
(ii) Ако двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ от линейчати повърхнини с елиптична база покрива $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}}, X_{H_2}\right)$, то размерността на Кодаира $-\infty = \kappa(X_H) \geq \kappa(X_{H_2})$. Следователно $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}}, X_{H_2}\right)$ са рационални или линейчати с елиптична база, Q.E.D.

Следствие 7.6. *(i) Всяка рационална двойка* $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ *има линейчато покритие с елиптична база.*
(ii) Рационална двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ *може да покрива само рационални* $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}}, X_{H_2}\right)$.

Доказателство: (i) Рационалната двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ има размерност на Кодаира $\kappa(X_H) = -\infty$. Следователно подгрупата $H < \mathrm{Aut}(A)$ съдържа отражение $h \in H$. Ако $\mathcal{T}_H = H \cap \ker \mathcal{L}$ е подгрупата на транслациите от H, то съгласно Следствие 4.5, подгрупата $RE = \mathcal{T}_H \langle h \rangle$ на H има линейчат фактор A/RE с елиптична база. Съответната двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{RE}}, X_{RE}\right)$ покрива $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$.

(ii) Ако рационална двойка $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_H}, X_H\right)$ покрива $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}}, X_{H_2}\right)$, то размерността на Кодаира $\kappa(X_{H_2}) \leq \kappa(X_H) = -\infty$ и ирегулярността $q(X_{H_2}) \leq q(X_H) = 0$. Следователно $\left(\overline{\mathbb{B}/\Gamma_{H_2}}, X_{H_2}\right)$ е рационална двойка, Q.E.D.

Библиография

[1] Barth W., C. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Springer, 1984.

[2] Bombieri E., D. Mumford, Enriques classification of surfaces in char p, in *Complex Analysis and Algebraic Geometry*, Iwanami-Shoten, Tokyo, (1977), 23-42.

[3] Griffiths Ph., J. Harris, *Principles of Algebraic Grometry*, Wiley IntScience 1878.

[4] Holzapfel R.-P., Complex hyperbolic surfaces of abelian type, Serdica Math. Jour. **30** (2004), 207-238.

[5] Kasparian A., B. Kotzev, Weak form of Holzapfel's Conjecture, Journal of Geometry and Symmetry in Physics, (2010), 29-42.

[6] Schütt M., T. Shioda, Elliptic surfaces, arXiv : 0907.0298v1.