Софийски Университет “Св. Климент Охридски”
Факултет по Математика и Информатика

Недялко Димов Ненов

ЕКСТРЕМАЛНИ ЗАДАЧИ ЗА ОЦВЕТЯВАНЕ НА ГРАФИ

ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на научната степен
"Доктор на математическите науки”
по научната специалност
01.01.02 “Алгебра и теория на числата”

СОФИЯ, 2005 г.

УВОД

Разглеждат се само крайни и неориентирани графи, без кратни ребра и примки. С $V(G)$ и $E(G)$ означаваме съответно множеството на върховете и множеството на ребрата на графа G. Допълнителният граф на графа G ще бележим с $\overline{G}$. Множеството от p върха на графа G се нарича p-клика, ако всеки два от тях са съседни. Най-голямото естествено число p, за което G има p-клика, се нарича кликово число на G и се бележи с $cl(G)$. Едно множество от върхове на графа G, се нарича независимо, ако всеки два от тях не са съседни. Максималният брой независими върхове, които можем да изберем в G, се нарича число на независимост на G и се бележи с $\alpha(G)$. Всички останали означения и понятия са дадени в първа глава.

За даден граф G r-разлагане (r-оцветяване) на върховете на G наричаме всяко разлагане

$$V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j. \tag{1}$$

Ако всяко от множествата V_i е независимо множество, тогава казваме, че (1) е r-хроматично разлагане. Казваме, че G е r-хроматичен граф, ако той има поне едно r-хроматично разлагане.

Екстремалните задачи, които решаваме са свързани с две обобщения на r-хроматичните графи. Първото обобщение са $(a_1, \ldots, a_r)$-свободните r-разлагания, където a_i са естествени числа. Казваме, че r-разлагането (1) е $(a_1, \ldots, a_r)$-свободно, ако V_i не съдържа a_i-клика за всяко $i = 1, \ldots, r$. В тази терминология r-хроматичните разлагания са $\underbrace{(2, \ldots, 2)}_{r}$-свободни r-разлагания. Символът

$$G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$$

означава, че G няма $(a_1, \ldots, a_r)$-свободно r-разлагане. За произволни естествени числа $a_1, \ldots, a_r$ и q дефинираме

$$H_v(a_1, \ldots, a_r; q) = \{G \mid G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r) \ \text{ и } \ cl(G) < q\}.$$

Първата екстремална задача, която разглеждаме, е определянето на минимума на броя на върховете на графите от $H_v(a_1, \ldots, a_r; q)$. Във връзка с тази задача дефинираме

$$F_v(a_1, \ldots, a_r; q) = \min\{|V(G)| : G \in H_v(a_1, \ldots, a_r; q)\}.$$

Ясно е, че от $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$ следва $cl(G) \geq \max\{a_1, \ldots, a_r\}$. В [F2] *J. Folkman* доказва, че ако

$$q > \max\{a_1, \ldots, a_r\}, \ \text{ тогава } \ H_v(a_1, \ldots, a_r; q) \neq \emptyset.$$

Следователно

$$F_v(a_1, \ldots, a_r; q) \ \text{ съществува } \iff q > \max\{a_1, \ldots, a_r\}. \tag{2}$$

Числата $F_v(a_1, \ldots, a_r; q)$ се наричат върхови числа на *Folkman*. За естествените числа $a_1, \ldots, a_r$ дефинираме

$$p = \max\{a_1, \ldots, a_r\} \ \text{ и } \ m = \sum_{i=1}^{r}(a_i - 1) + 1. \tag{3}$$

Очевидно е, че

$$K_m \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r) \text{ и } K_{m-1} \overset{v}{\nrightarrow} (a_1, \ldots, a_r),$$

където K_m е пълният граф с m върха. Следователно, ако $cl(G) \geq m$, тогава $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$. От тези разсъждения става ясно, че

$$F_v(a_1, \ldots, a_r; q) = m, \quad \text{ако} \quad q > m. \tag{4}$$

Поради това, интересни са тези числа на *Folkman* $F_v(a_1, \ldots, a_r; q)$, за които $q \leq m$. В [L3] *Luczak* и *Urbanski* доказват, че

$$F_v(a_1, \ldots, a_r; m) = m + \max\{a_1, \ldots, a_r\}. \tag{5}$$

За числата $F_v(a_1, \ldots, a_r; q)$, $q \leq m - 1$ знаем много малко. Ние получаваме оценки за някои от числата $F_v(a_1, \ldots, a_r; q)$, $q \leq m - 1$, като в някои специални ситуации разглежданите върхови числа на *Folkman* са пресметнати точно.

Всяко разлагане

$$E(G) = E_1 \cup \ldots \cup E_r, \quad E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j \tag{6}$$

се нарича r-оцветяване на ребрата на графа G. Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа и $a_i \geq 2$, $i = 1, \ldots, r$. Ако K е клика на G и $E(K) \subseteq E_i$, казваме че K е едноцветна клика от i-тия цвят. Казваме, че (6) е $(a_1, \ldots, a_r)$-свободно r -разлагане, ако за всяко $i \in \{1, \ldots, r\}$ не съществува едноцветна a_i-клика от i-тия цвят. Символът $G \xrightarrow{e} (a_1, \ldots, a_r)$ означава, че G няма $(a_1, \ldots, a_r)$-свободно r-оцветяване на ребрата. Дефинираме

$$H_e(a_1, \ldots, a_r; q) = \{G \mid G \xrightarrow{e} (a_1, \ldots, a_r) \text{ и } cl(G) < q\}.$$

Втората основна задача, която разглеждаме е намирането на минимума на броя на върховете на графите от $H_e(a_1, \ldots, a_r; q)$. Във връзка с тази задача дефинираме

$$F_e(a_1, \ldots, a_r; q) = \min\{|V(G)| : G \in H_e(a_1, \ldots, a_r; q)\}.$$

Вярно е, че

$$F_e(a_1, \ldots, a_r; q) \text{ съществува } \iff q > \max\{a_1, \ldots, a_r\}. \tag{7}$$

В случая $r = 2$, твърдението (7) е доказано от *J. Folkman* в [F2], а в общия случай това твърдение е доказано от *J. Nešetřil* и *V. Rödl* в [N44]. Числата $F_e(a_1, \ldots, a_r; q)$ се наричат ребрени числа на *Folkman*.

Припомняме, че числото на *Ramsey* $R(a_1, \ldots, a_r)$ се дефинира като най-малкото естествено число n, за което $K_n \xrightarrow{e} (a_1, \ldots, a_r)$. От тази дефиниция става ясно, че

$$F_e(a_1, \ldots, a_r; q) = R(a_1, \ldots, a_r), \text{ ако } q > R(a_1, \ldots, a_r). \tag{8}$$

Поради това, числата на *Ramsey* са специален случай на ребрените числа на *Folkman*. Известни са много малко от числата $F_e(a_1, \ldots, a_r)$ даже в ситуацията, когато $R(a_1, \ldots, a_r)$ е пресметнато. Още преди 38 години

P. Erdös поставя като проблем пресмятането на числото $F_e(3,3;5)$. Този проблем е решен окончателно през 1998 година в [P3]. Точната стойност на това число е 15. В тази дисертация ние разглеждаме нашия принос (неравенството $F_e(3,3;5) \leq 15$) към решаването на този проблем на *P. Erdös*. Пресмятаме още четири ребрени числа на *Folkman*, а именно числата

$$F_e(3,4;9) = 14, \quad F_e(3,3,3;16) = 21,$$

$$F_e(3,3,3;15) = 23, \quad F_e(3,3,3;14) = 25.$$

Второто обобщение на r-хроматичните графи, което разглеждаме е следното:

Казваме, че графът G е обобщен r-хроматичен граф, ако съществува r-разлагане (1) на $V(G)$ такова, че

$$d(v) \leq |V(G)| - |V_i|, \quad \forall\, v \in V_i, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{9}$$

където $d(v)$ е степента на върха v.

Ако V_i е независимо множество, тогава неравенството (9) е изпълнено, тъй като ако $v \in V_i$, съседите му принадлежат на $V(G)\backslash V_i$. При фиксирани естествени числа n и r пресмятаме максимума на броя на ребрата на n-върховите обобщени r-хроматични графи. Получените резултати разширяват, обобщават и допълват класическата теорема на *Turan*, тъй като класът на обобщените r-хроматични графи включва в себе си класа на графите, които не съдържат $(r+1)$-клика.

Ще формулираме по-точно основните резултати във всяка глава.

ГЛАВА 1. Дефинират се необходимите понятия и означения от Теория на графите.

ГЛАВА 2. r-разлагането (1) се нарича p-плътно, ако обединението на всеки p от множествата V_i съдържа p-клика. Казваме, че графът G е p-плътен, ако всяко $\chi(G)$-хроматично разлагане, където $\chi(G)$ е хроматичното число на G, е p-плътно. Основният резултат във втора глава е следната:

Теорема 2.2. *Нека G е граф, такъв че $\chi(G) = r$ и $cl(G) < r$. Ако G е p-плътен, тогава*

(а) $|V(G)| \geq r + p$;

(б) *от* $|V(G)| = r + p$ *следва* $G = K_{r-p-1} + \overline{C}_{2p+1}$.

С C_n означаваме простия цикъл с дължина n. Теорема 2.2 в случая $p = 2$ е доказана от *G. Dirac* в [D1]. Тази теорема играе важна роля в ГЛАВА 9 при пресмятането на числото $F_e(3,4;9)$.

ГЛАВА 3. Изследват се върховите числа на Folkman и се доказват някои основни техни свойства. Доказана е следната:

Теорема 3.1. *Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа и числата m и p са дефинирани с равенствата (3). Нека G е граф и $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$. Тогава $\chi(G) \geq m$ и ако $\chi(G) = m$, графът G е p-плътен.*

Както отбелязахме по-горе, интересни са само числата $F_v(a_1, \ldots, a_r; q)$, за които $q \leq m$. За изследване на числата от този тип важно значение има следната:

Теорема 3.4. *Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа. Нека G е граф, такъв че $G \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r)$ и $cl(G) < m$. Тогава е вярно неравенството $\pi(\overline{G}) \geq p$.*

Числото $\pi(G)$ означава максималния брой независими (без общ връх) ребра, които можем да изберем в G. С помощта на Теорема 3.4 даваме нови и елегантни доказателства на следните резултати:

Следствие 3.1, [L3] *Нека $G \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r)$ и $cl(G) < m$. Тогава $|V(G)| \geq m + p$.*

Следствие 3.2, [L4] *Нека $G \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r)$ и $cl(G) < m$ и $|V(G)| = m + p$. Тогава $G = K_{m-p-1} + \overline{C}_{2p+1}$.*

Основният резултат в трета глава е:

Теорема 3.5. *Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа и G е граф с $cl(G) < m - 1$ и $G \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r)$. Тогава*

(а) $|V(G)| \geq m + p + \alpha(G) - 1$;

(б) *Ако $|V(G)| = m + p + \alpha(G) - 1$, тогава G съдържа като подграф графа $K_{m-p-2} + L_p$. Поради това $|V(G)| \geq m + 3p$.*

Числата m и p се дефинират с равенството (3), а L_p е конкретен граф, дефиниран в **ГЛАВА 3**.

В [L4] е доказано неравенството:

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m - 1) \geq m + p + 1.$$

Това неравенство не е точно, тъй като доказваме следната:

Теорема 3.6. *Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа и $m \geq p+2$. Тогава*

$$F(a_1, \dots, a_r; m - 1) \geq m + p + 2.$$

В специалния случай $a_1 = \dots = a_r = 2$, $r \geq 5$, неравенството от Теорема 3.6 е точно.

ГЛАВА 4. От (2) става ясно, че

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m - 1) \quad \text{съществува} \Longleftrightarrow m \geq p + 2,$$

Числата m и p са дефинирани с равенствата (3). В тази глава разглеждаме граничния случай $m = p + 2$. В уводната част на **ГЛАВА 4** изясняваме, че от $m = p + 2$ следва, че числата $F_v(a_1, \dots, a_r; m - 1)$ са следните:

$$F_v(2, 2, 2; 3); \quad F_v(2, 2, p; p + 1) \;\text{ и }\; F_v(3, p; p + 1) \;\text{ при }\; p \geq 3.$$

В [M4] *J. Mycielski* доказва, че $F_v(2, 2, 2; 3) \leq 11$, а в [C1] *V. Chvatal* доказва, че $F_v(2, 2, 2; 3) \geq 11$. Така, че $F_v(2, 2, 2; 3) = 11$. В тази глава разглеждаме останалите числа $F_v(2, 2, p; p + 1)$ и $F_v(3, p; p + 1)$, където $p \geq 3$. В [L4] е доказано, че

$$2p + 3 \leq F_v(3, p; p + 1) \leq 2p^2 + 1.$$

Ние усилваме този резултат като доказваме, че:

Теорема 4.1. *За всяко естествено число* $p \geq 3$ *са верни неравенствата*

$$2p + 4 \leq F_v(2, 2, p; p + 1) \leq F_v(3, p; p + 1) \leq 4p + 2.$$

От Теорема 4.1 следва $F_v(3, 3; 4) \leq 14$. Това неравенство доказваме през 1981 година в [N16]. С помощта на компютър през 1998 година в [P3] е доказано, че $F_v(3, 3; 4) \geq 14$. Така, че $F_v(3, 3; 4) = 14$. Това е второто пресметнато число от разглеждания тип.

За числата $F_v(2, 2, p; p + 1)$ получаваме друга оценка отгоре с помощта на:

Теорема 4.2. *Нека* $p \geq 2$, r *и* q *са естествени числа такива, че*

$$R(3, p) + 2r < R(3, q).$$

Тогава $F_v(\underbrace{2, \ldots, 2}_{r}, p; q) \leq R(3, p) + 2r$. От Теорема 4.2 получаваме

Следствие 4.1. *Верни са неравенствата*

$$F_v(2, 2, 4; 5) \leq 13;$$

$$F_v(2, 2, 6; 7) \leq 22;$$

$$F_v(2, 2, 7; 8) \leq 27;$$

$$F_v(2, 2, 8; 9) \leq 32;$$

$$F_v(2, 2, 9; 10) \leq 40, \text{ ако } R(3, 10) \neq 40.$$

Първите четири неравенства дават по-добра оценка от Теорема 4.1. За числото $F(2, 2, 9; 10)$ обаче от Теорема 4.1 получаваме по-добрата оценка отгоре 38.

Интересно е да отбележим, че за числото $F(2, 2, 5; 6)$, Теорема 4.2 не е приложима, понеже $R(3, 6) = R(3, 5) + 4$. Тъй като $R(3, 7) > R(3, 5) + 6$, от Теорема 4.2 ($r = 3$, $p = 5$ и $q = 7$) следва

$$F_v(2, 2, 2, 5; 7) \leq 20.$$

По-нататък се пресмятат още две числа от разглеждания тип:

$$F_v(2, 2, 4; 5) = 13 \text{ (Теорема 4.4) и}$$

$$F_v(3, 4; 5) = 13 \text{ (Следствие 4.2).}$$

В края на **ГЛАВА 4** разглеждаме и числата от вида

$$F_v(\underbrace{2, \ldots, 2}_{r}, p; r + p - 1) = F_v(2_r, p; r + p - 1)$$

$$F_v(\underbrace{3, \ldots, 3}_{r}, p; 2r + p - 1) = F_v(3_r, p; 2r + p - 1).$$

За тези числа доказваме:

Теорема 4.6. *За всеки две естествени числа $p \geq 3$ и $r \geq 2$ са верни неравенствата*

$$2p + r + 2 \leq F_v(2_r, p; r + p - 1) \leq 4p + r.$$

Теорема 4.7. *Нека $p \geq 3$ и $r \geq 1$ са естествени числа. Тогава*

$$2p + 2r + 2 \leq F_v(3_r, p; 2r + p - 1) \leq 4p + 2r.$$

ГЛАВА 5. Разглеждат се числата на *Folkman* $F_v(a_1, \dots, a_r; q)$, когато $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 2$, т.е. числата

$$F_v(\underbrace{2, \dots, 2}_{r}; q) = F_v(2_r; q).$$

От (4) имаме $F_v(2_r; q) = r+1$, ако $q > r+1$. Съгласно (5) имаме $F_v(2_r; r+1) = r + 3$. За следващото число $F_v(2_r; r)$ доказваме:

Теорема 5.1. *Верни са равенствата*

$$F_v(2_r; r) = \begin{cases} 11, & \text{ако } r = 3 \text{ или } r = 4; \\ r + 5, & \text{ако } r \geq 5. \end{cases}$$

Както отбелязахме по-горе в случая $r = 3$ Теорема 5.1 е доказана в [M4] и [C1]. Ние доказваме Теорема 5.1 при $r \geq 4$. Ще отбележим, че доказателството на тези теореми в случая $r = 4$ е значително по-сложно отколкото в случая $r \geq 5$.

При $r \geq 5$ Теорема 5.1 е усилена по следния начин:

Теорема 5.5. *Нека G е граф такъв, че*

$$G \xrightarrow{v} (2_r), \quad cl(G) < r \text{ и } |V(G)| = F_v(2_r; r),$$

където $r \geq 5$. Тогава $G = K_{r-5} + C_5 + C_5$.

Разгледани са и числата на *Folkman* $F_v(2_r;\, r-1)$ и $F_v(2_r;\, r-2)$. Доказани са следните две теореми:

Теорема 5.7. *Нека r е естествено число и $r \geq 4$. Тогава*

(а) $F_v(2_r; r - 1) \geq r + 7$;

(б) $F_v(2_r; r - 1) = r + 7$, *ако* $r \geq 8$.

Теорема 5.9. *Нека $r \geq 5$ е естествено число. Тогава*

(а) $F_v(2_r, r - 2) \geq r + 9$;

(б) $F_v(2_r, r - 2) = r + 9$, *ако* $r \geq 11$.

ГЛАВА 6. Разглеждат се числата $F_v(a_1, \dots, a_r; m - 1)$, в случая когато $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 3$ или 4. Ако $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 3$, съгласно (2) числото $F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1)$ съществува тогава и само тогава, когато $m \geq 5$. В граничния случай $m = 5$ има две такива числа: $F_v(3,3;4)$ и $F_v(2,2,3;4)$.

В **Глава 4** видяхме, че $F_v(3,3;4) = 14$. От Теорема 4.1 имаме неравенството $F_v(2,2,3;4) \leq 14$. В края на октомври 2004 година в [C5] се появи анонс, според който $F(2,2,3;4) = 14$. За сега няма подробна публикация във връзка с този анонс.

Ако $\max\{a_1, \ldots, a_r\} = 3$ и $m = 6$, тогава има две числа от вида

$$F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1): \quad F_v(2,2,2,3;5) \text{ и } F_v(2,3,3;5).$$

За тези числа доказваме

Теорема 6.1. $F_v(2,2,2,3;5) = F_v(2,3,3;5) = 12$**.**

Числата на *Folkman* от вида

$$F_v(\underbrace{3, \ldots, 3}_{r}, q) = F_v(3_r; q)$$

се наричат триъгълни числа на *Folkman*. От (4) имаме $F_v(3_r; q) = 2r + 1$, ако $q > 2r + 1$. Съгласно (5), $F_v(3_r; 2r+1) = 2r + 4$. В тази глава ние правим следващата стъпка към пресмятането на триъгълните числа на *Folkman* като доказваме:

Теорема 6.4.

$$F_v(3_r; 2r) = 2r + 7, \quad r \geq 3.$$

Ако $\max\{a_1, \ldots, a_r\} = p$, числото $F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1)$ зависи от числото $F_v(2,2,p;p+1)$. Това става ясно от следващата теорема, която допълва Теорема 3.6.

Теорема 6.5 *Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа и за тях m и p са дефинирани с равенствата (3), като $m \geq p + 2$ и $p \geq 3$. Тогава, ако $F(2,2,p;p+1) \geq 2p + 5$, е вярно неравенството*

$$F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1) \geq m + p + 3.$$

Изследването на числата $F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1)$, за които е в сила $m \geq 6$ и $\max\{a_1, \ldots, a_r\} = 3$ завършва с тяхното окончателно пресмятане.

Теорема 6.7. *Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа, за които p и m са дефинирани с равенствата (3). Ако $p = 3$ и $m \geq 6$, тогава*

$$F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1) = m + 6.$$

Съгласно (2), числата $F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1)$, $\max\{a_1, \ldots, a_r\} = 4$, съществуват тогава и само тогава, когато $m \geq 6$. С разработената в тази глава техника пресмятаме тези числа.

Теорема 6.8. *Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа, за които p и m са дефинирани с равенствата (3). Ако $p = 4$ и $m \geq 6$, тогава*

$$F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1) = m + 7.$$

Накрая на 6-та глава се разглеждат и числата $F_v(a_1,\dots,a_r;m-1)$, когато $\max\{a_1,\dots,a_r\}=5$. Съгласно (2) тези числа съществуват тогава и само тогава, когато $m\geq 7$. В [L4] е доказано, че

$$F_v(a_1,\dots,a_r;m-1)\leq m+25, \qquad \text{ако} \quad m\geq 12.$$

Също в [L4] е анонсирано без доказателство неравенството

$$F_v(a_1,\dots,a_r;m-1)\leq 77-3m, \quad 8\leq m\leq 11.$$

Ние подобряваме тези оценки като доказваме, че:

Теорема 6.9 *Нека $a_1,\dots,a_r$ са естествени числа, за които $m\geq 7$ и $\max\{a_1,\dots,a_r\}=5$. Тогава*

$$F_v(a_1,\dots,a_r;m-1)\leq m+15.$$

ГЛАВА 7. Да си припомним, че

$$F_v(a_1,\dots,a_r;q) \text{ съществува } \iff q\geq \max\{a_1,\dots,a_r\}+1.$$

Най-трудни за пресмятане $F_v(a_1,\dots,a_r;q)$ са в граничния случай, когато $q=\max\{a_1,\dots,a_r\}+1$. В **ГЛАВА 7** се разглеждат числата $F_v(p,p;p+1)$. За тези числа са известни следните две общи оценки:

$$F_v(p,p;p+1)\leq \lfloor 2p\,!\,(e-1)\rfloor-1, \quad \text{[L4]}. \tag{10}$$

$$F_v(p,p;p+1)\leq \lfloor p\,!\,e\rfloor-2, \quad p\geq 3, \quad \text{[N23]}. \tag{11}$$

Знаем точните стойности само на две от числата $F_v(p,p;p+1)$. Първото е $F_v(2,2;3)=5$ и е очевидно. Второто е $F_v(3,3;4)=14$. Неравенството $F_v(3,3;4)\leq 14$ е получено в [N16] и е доказано подробно в **ГЛАВА 4**. Неравенството $F_v(3,3;4)\geq 14$ е получено с помощта на компютър в [P3]. За следващото число $F_v(4,4;5)$ от (10) имаме $F_v(4,4;5)\leq 81$, а от (11) следва, че $F_v(4,4;5)\leq 63$.

Ние подобряваме тези оценки като доказваме, че

Теорема 7.1. $16\leq F_v(4,4;5)\leq 35$.

Доказваме и рекурентното неравенство:

Теорема 7.2. *За всяко естествено число $p\geq 2$ е вярно неравенството*

$$F_v(p+1,p+1;p+2)\leq (p+1)F_v(p,p;p+1).$$

От последното неравенство очевидно следва

$$F_v(p,p;p+1)\leq \frac{p\,!}{24}F_v(4,4:5), \quad p\geq 4.$$

Тъй като $F_v(4,4:5)\leq 35$ получаваме

Следствие 7.1. *За всяко естествено число $p\geq 4$ е вярно неравенството*

$$F_v(p,p;p+1)<1.46p\,!.$$

Тази оценка съществено подобрява оценките (10) и (11).

ГЛАВА 8. В тази глава се разглеждат оцветявания на ребрата на пълния граф с n върха K_n. Нека γ е r-оцветяване на ребрата на пълния граф с $R(a_1, \dots, a_r)$ върха. С $t(a_i)$ означаваме броя на едноцветните a_i-клики от i-тия цвят. Дефинираме $t(\gamma) = t(a_1) + \dots + t(a_r)$. С $M(a_1, \dots, a_r)$ означаваме $\min t(\gamma)$ по всички r-оцветявания γ на ребрата на пълния граф с $R(a_1, \dots, a_r)$ върха. Числото $M(a_1, \dots, a_r)$ се нарича кратност на *Ramsey* съответствуваща на числото на *Ramsey* $R(a_1, \dots, a_r)$.

Първата теорема, която доказваме в тази глава е:

Теорема 8.1.

(а) $M(3,4) = 1$;

(б) *съществува единствено (с точност до изоморфизъм)* 2*-оцветяване на* $E(K_9)$*, в което няма едноцветни* 3*-клики от първия цвят и има единствена едноцветна* 4*-клика от втория цвят.*

Теорема 8.1 по-нататък играе важна роля при пресмятането на числото $F_e(3,4;9)$. Ясно е, че $M(a_1, \dots, a_r) \geq 1$. Измежду известните кратности на *Ramsey* единствено $M(3,4)$ е равна на 1. Изглежда доста вероятно, че други такива кратности на *Ramsey* няма. В подкрепа на тази хипотеза доказваме:

Теорема 8.2. *Нека естествените числа* $a_1, \dots, a_r$, $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$, *са такива, че*

$$R(a_1, \dots, a_r) = R_1 + \dots + R_r + 2 - r, \tag{12}$$

където $R_1 = R(a_1 - 1, a_2, \dots, a_r), \dots, R_r = R(a_1, a_2, \dots, a_r - 1)$*. Тогава* $M(a_1, a_2, \dots, a_r) \geq 2$.

Полагаме

$$R(\underbrace{3, \dots, 3}_{r}) = R_r(3) \quad \text{и} \quad M(\underbrace{3, \dots, 3}_{r}) = M_r(3).$$

От доказаните в тази глава резултати получаваме

Следствие 8.2. *Нека* $n \geq R_n(3)$*. Тогава във всяко* r*-оцветяване на* $E(K_n)$ *има поне*

$$\frac{1}{r} M_r(3) \binom{n}{3} \binom{R_r(3)}{3}^{-1}$$

едноцветни 3*-клики от един и същи цвят.*

С помощта на Следствие 8.2 доказваме основния резултат в **ГЛАВА 8**:

Теорема 8.3. *Нека* F *е крайно поле и* $|F| \geq R_n(3)$*. Тогава уравнението* $x^n + y^n = z^n$ *има в полето* F *поне*

$$\frac{|F|(|F|-1)M_n(3)}{n\, R_n(3)(R_n(3)-1)(R_n(3)-2)}$$

абсолютно ненулеви решения.

Тази теорема съществено обобщава резултата на *I. Shur* от [S3].

ГЛАВА 9. Тази глава е посветена на ребрените числа на *Folkman*. В началото на главата се разглеждат ребрените $(3,3)$-графи (това са графите $G \xrightarrow{e} (3,3)$). Най-простите примери за такива графи са следните

$$K_6 \xrightarrow{e} (3,3), \quad [G14];$$

$$K_8 - C_5 = K_3 + C_5 \xrightarrow{e} (3,3), \quad [G8].$$

Тези два факта се обобщават по следния начин:

Теорема 9.1. *За всяко естествено число r е вярно, че*

$$C_3 + C_{2r+1} \xrightarrow{e} (3,3).$$

По-нататък се разглежда числото $F_e(3,3;5)$. Пресмятането на това число е поставено като проблем от *P. Erdös*, който е публикуван в [G9]. Този проблем е решен окончателно в [P3]. Историята на оценяването на $F_e(3,3;5)$ е дадена в Таблица 9.1, която е взета от [P3].

Year	Reference	Lower	Upper
1967	P. Erdos, A. Hajnal [E7]		?
1969	M. Schauble [S2]		42
1971	R.L. Graham, J. H. Spencer [G9]		23
1972	S. Lin [L1]	10	
1973	R.W. Irving [I1]		18
1979	N. Hadziivanov, N. Nenov [K23]		16
1980	N. Nenov [N9]	11	
1981	N. Nenov [N16]		15
1985	N. Hadziivanov, N. Nenov [N43]	12	
1993	M. Erikson [E4]		17
1994	J. Bukor [B16]		16
1998	Piwakowski et'al. [P3]	15	

Таблица 9.1. История на оценяването на $F_e(3,3;5)$ според [P3].

В тази глава ние излагаме нашия принос към решаването на този проблем на *P. Erdös*, като доказваме:

Теорема 9.2.

$$F_e(3,3;5) \leq 15.$$

От равенството (8) става ясно, че когато числото $R(a_1,\ldots,a_r)$ е известно, интересни са тези от числата $F_e(a_1,\ldots,a_r;q)$, за които

$$q \leq R(a_1,\ldots,a_r).$$

В [L1] *Lin* доказва, че ако е вярно равенството (12), тогава

$$F_e(a_1, \ldots, a_r;\ R(a_1, \ldots, a_r)) = R(a_1, \ldots, a_r) + 2.$$

Оттук *Lin* пресмята, че

$$F_e(3,3;6) = 8,\ \ F_e(3,5;14) = 16,\ \ F_e(4,4;18) = 20,\ \ F_e(3,3,3;17) = 19.$$

Най-малкото число на *Ramsey*, за което равенството (12) не е изпълнено е $R(3,4) = 9$. Поради това най-малкото число от вида

$$F_e(a_1, \ldots, a_r;\ R(a_1, \ldots, a_r)),$$

което не може да се пресметне по метода на *Lin* е $F_e(3,4;9)$. Ние пресмятаме това число като доказваме

Теорема 9.7. $F_e(3,4;9) = 14$.

Неравенството $F_e(3,4;9) \geq 14$ получаваме с помощта на:

Теорема 9.6. *Нека естествените числа $a_1, \ldots, a_r$, $a_i \geq 3$, $i = 1, \ldots, r$, $r \geq 2$, са такива, че пълният граф с $R = R(a_1, \ldots, a_r)$ върха има r-оцветяване*

$$E(K_R) = E_1 \cup \ldots \cup E_r,$$

в което има единствена едноцветна a_i-клика от i-я цвят и няма едноцветна a_j-клика от j-я цвят при $i \neq j$. Нека G е граф такъв, че

$$G \xrightarrow{e} (a_1, \ldots, a_r),\ \ \chi(G) = R \ \text{ и } \ cl(G) < r.$$

Тогава

(а) *G е a_i-плътен граф (виж Определение 2.1);*

(б) $|V(G)| \geq R + a_i$;

(в) *Ако $K_{R-a_i-1} + \overline{C}_{2a_i+1} \overset{e}{\nrightarrow} (a_1, \ldots, a_r)$, тогава $|V(G)| > R + a_i$.*

Дефинираме графа

$$G(r,\ s) = K_4 + C_{2r+1} + C_{2s+1}.$$

Оценката $F_e(3,4;9) \leq 14$ следва от:

Теорема 9.8. *За всеки две естествени числа r и s имаме*

$$G(r,s) \xrightarrow{e} (3,4).$$

В [L1] *Lin* доказва също неравенството

$$F_e(a_1, \ldots, a_r;\ R(a_1, \ldots, a_r)) \geq R(a_1, \ldots, a_r) + 4. \tag{13}$$

Също в [L1] той изказва предположението, че неравенството (13) е винаги строго. Ние уточняваме този резултат на *Lin* като доказваме:

Теорема 9.10. *Равенство в (13) имаме тогава и само тогава, когато*

$$K_{R-6} + C_5 + C_5 \xrightarrow{e} (a_1, \ldots, a_r).$$

Тъй като $K_{11} + C_5 + C_5 \xrightarrow{e} (3,3,3)$ (виж Теорема 9.13), от Теорема 9.10 следва, че $F_e(3,3,3;16) = 21$, т.е. хипотезата на Lin не е вярна.

В края на **ГЛАВА 9** пресмятаме числата:

$$F_e(3,3,3;16) = 21 \quad \text{(Следствие 9.3);}$$

$$F_e(3,3,3;15) = 23 \quad \text{(Следствие 9.4);}$$

$$F_e(3,3,3;14) = 25 \quad \text{(Следствие 9.5).}$$

Дефинираме графа

$$L_5(p,q,r,s) = K_5 + C_{2p+1} + C_{2q+1} + C_{2r+1} + C_{2s+1}.$$

Оценките отгоре за тези числа получаваме от:

Теорема 9.13. *За произволни естествени числа p, q, r и s е вярно, че*

$$L_5(p,q,r,s) \xrightarrow{e} (3,3,3).$$

Равенството $F_e(3,3,3;16) = 21$ е получено от Теорема 9.13 и Теорема 9.10. Числото $F_e(3,3,3;15) = 23$ е получено с помощта на Теорема 9.13 и следната:

Теорема 9.11. *Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа, такива че $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$ и $r \geq 2$. Тогава*

(а) $F_e(a_1, \dots, a_r; R-2) \geq R + 6$;

(б) *Ако $(a_1, \dots, a_r) \neq (3,3)$ и $K_{R-9} + C_5 + C_5 + C_5 \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r)$, тогава $F_e(a_1, \dots, a_r; R-2) = R + 6$.*

Числото $F_e(3,3,3;14) = 25$ е пресметнато с помощта на Теорема 9.13 и следната:

Теорема 9.12. *Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа такива, че $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$, $r \geq 2$ и $(a_1, \dots, a_r) \neq (3,3)$. Тогава*

(а) $F_e(a_1, \dots, a_r; R-3) \geq R + 8$;

(б) *Ако $(a_1, \dots, a_r) \neq (3,4)$ и $K_{R-12} + C_5 + C_5 + C_5 + C_5 \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r)$, тогава $F_e(a_1, \dots, a_r; R-3) = R + 8$.*

ГЛАВА 10. С $e(G)$ означаваме броя на ребрата на графа G. С $K(p_1, \dots, p_r)$ означаваме пълния r-хроматичен граф с части $V_1, \dots, V_r$, където $p_i = |V_i|$, $i = 1, \dots, r$. Ако $n = p_1 + \dots + p_r$ и $|p_i - p_j| \leq 1$, $\forall\, i, j$, тогава $K(p_1, \dots, p_r)$ се нарича r-хроматичен n-върхов граф на *Turan* и се бележи с $T_r(n)$. Резултатите в тази глава са свързани със следната класическа:

Теорема на Turan. *Нека G е n-върхов граф и $cl(G) \leq r$. Тогава:*

(а) $e(G) \leq e(T_r(n))$;

(б) $e(G) = e(T_r(n))$ *само когато* $G = T_r(n)$.

Определение 10.1. *Нека G е граф и $V \subseteq V(G)$. Казваме, че V е δ-множество в графа G, ако*

$$d(v) \le |V(G)| - |V|, \ \ \forall\, v \in V.$$

Основното понятие обобщен r-хроматичен граф се дефинира по следния начин:

Определение 10.2. *Казваме, че графът G е обобщен r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$, ако*

$$V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_r, \ \ V_i \cap V_j = \emptyset, \ \ i \ne j$$

и всяко от множествата V_i, $i = 1, \ldots, r$ е δ-множество в G. Ако

$$d(v) = |V(G)| - |V_i|, \ \ \forall\, v \in V_i, \ \ i = 1, \ldots, r,$$

тогава казваме, че графът G е обобщен пълен r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$.

Обобщените r-хроматични графи са въведени в съвместната ни с Н. Хаджииванов статия [K35]. За тези графи доказваме:

Теорема 10.1. *Нека G е обобщен r-хроматичен граф с части*

$$V_1, \ldots, V_r, \text{ където } |V_i| = p_i, \ i = 1, \ldots, r.$$

Тогава:

(а) $e(G) \le e(K(p_1, \ldots, p_r))$;

(б) $e(G) = e(K(p_1, \ldots, p_r))$ *само когато графът G е обобщен пълен r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$.*

Тъй като от $cl(G) \le r$ следва, че G е обобщен r-хроматичен граф, Теорема 10.1 може да се разглежда като разширение на Теоремата на *Turan*.

Ако $M \subseteq V(G)$ с $\Gamma(M)$ означаваме множеството от върховете на G, които са съседни на всичките върхове от M. В третия пункт на **ГЛАВА 10** се разглеждат обобщени r-хроматични графи, породени от така наречените α-редици от върхове в граф.

Определение 10.4. *Нека G е граф и $v_1, \ldots, v_r \in V(G)$. Казваме, че редицата $v_1, \ldots, v_r$ е наследствена, ако*

$$v_i \in \Gamma_G(v_1, \ldots, v_{i-1}), \quad i = 2, \ldots, r.$$

Определение 10.5. *Нека $v_1, \ldots, v_r$ е наследствена редица от върхове в графа G. Дефинираме*

$$V_1 = V(G) \backslash \Gamma_G(v_1), \ V_i = \Gamma_G(v_1, \ldots, v_{i-1}) \backslash \Gamma_G(v_i), \ i = 2, \ldots, r-1$$

$$V_r = \Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1}).$$

Редицата от подмножества $V_1, \ldots, V_r$ се нарича разслоение на $V(G)$, породено от наследствената редица $v_1, \ldots, v_r$. Множеството V_i се нарича i-ти слой на това разслоение.

Определение 10.6. *Нека G е граф и $v_1, \dots, v_r \in V(G)$. Казваме, че редицата $v_1, \dots, v_r$ е α-редица на графа G, ако тя удовлетворява следните условия:*

(i) *$v_1, \dots, v_r$ е наследствена редица в G;*

(ii) *v_1 е връх с максимална степен в G;*

(iii) *Ако $2 \le i \le r$, тогава v_i има максимална степен в графа $G[\Gamma_G(v_1, \dots, v_{i-1})]$.*

В екстремалната теория на графите α-редиците са въведени през 1976 година в [K17] и [K20]. Доказваме следните:

Теорема 10.4. *Нека $v_1, \dots, v_r$ е α-редица в n-върховия граф G и $V_1, \dots, V_r$ е разслоението, породено от тази редица, където $p_i = |V_i|$, $i = 1, \dots, r$. Ако V_r е δ-множество в G, тогава:*

(а) *G е обобщен r-хроматичен граф с части $V_1, \dots, V_r$;*

(б) *$e(G) \le e(K(p_1, \dots, p_r))$ и равенство се достига само когато G е обобщен пълен r-хроматичен граф;*

(в) *$e(G) \le (T_r(n))$ и равенство се достига само когато G е обобщен r-хроматичен граф на Turan.*

Теорема 10.5. *Нека G е n-върхов граф и $v_1, \dots, v_r$ е α-редица в G, която не се съдържа в $(r+1)$-клики на G (или, което е еквивалентно, $\Gamma_G(v_1, \dots, v_{r-1})$ е независимо множество). Нека $V_1, \dots, V_r$ е разслоението, породено от тази α-редица и $p_i = |V_i|$, $i = 1, \dots, r$. Тогава*

(а) $e(G) \le e(K(p_1, \dots, p_r))$;

(б) *Равенство в (а) е възможно само когато $G = K(p_1, \dots, p_r)$.*

Следващата теорема съществено обобщава Теоремата на *Turan*.

Теорема 10.6. *Нека $v_1, \dots, v_r$ е α-редица в графа G, която не се съдържа в $(r+1)$-клика на G. Тогава:*

(а) *$e(G) \le e(T_r(n))$, където $n = |V(G)|$;*

(б) *Равенството $e(G) = e(T_r(n))$ е възможно само когато $G = T_r(n)$.*

Теорема 10.6 може да се формулира и по следния еквивалентен начин:

Ако G е n-върхов граф и $e(G) \ge e(T_r(n))$, $r \le n$, тогава всяка максимална (в смисъл на включване) α-редица има поне $r+1$ члена, или $G = T_r(n)$.

В тази еквивалентна форма Теорема 10.6 е повторена от B. Bollobas в [B6] (виж Теорема 5, стр, 163) и в монографията [B7] (виж Теорема 6, стр. 109). Това обстоятелство наложи публикуването на критичното писмо [K39].

Ако в един граф има връх с максимална степен, който не се съдържа в $(r+1)$-клика, тогава всяка α-редица с първи член този връх също не се съдържа в $(r+1)$-клика. Поради това от Теорема 10.6 получаваме:

Следствие 10.5. *Нека G е n-върхов граф и $e(G) \geq T_r(n)$, $r \leq n$. Тогава всеки връх с максимална степен в G се съдържа в $(r+1)$-клика или $G = T_r(n)$.*

Теорията на α-редиците, която развихме в тази глава, дава възможност да докажем и следния резултат:

Теорема 10.7. *Нека G е n-върхов граф и $e(G) > e(T_r(n))$, $r \geq 2$. Тогава всяка $(r-1)$-членна α-редица на G се съдържа поне в две $(r+1)$-клики или съществува $e \in E(G)$ такова, че $G - e = T_r(n)$.*

Нека $v_1, \ldots, v_r$ е α-редица в графа G. Разглеждаме подграфите

$$G_1 = G \text{ и } G_i = G[\Gamma_G(v_1, \ldots, v_{i-1})], \ \ 2 \leq i \leq r.$$

Дефинираме

$$d'_i = d_{G_i}(v_i), \quad i = 1, \ldots, r$$

и

$$t_G(v_1, \ldots, v_r) = d'_1 + \cdots + d'_r.$$

От следващите две теореми става ясно, че числото $t_G(v_1, \ldots, v_r)$ е важна характеристика на графа G.

Теорема 10.8. *Нека G е n-върхов граф и $v_1, \ldots, v_r$ е α-редица в G такава, че за някое s, $1 \leq s \leq r$ имаме*

$$t_G(v_1, \ldots, v_s) \leq \frac{n}{r}\left(\binom{r}{2} - \binom{r-s}{2}\right).$$

Тогава G е обобщен r-хроматичен граф.

От Теорема 10.8 и Теорема 10.2 получаваме

Следствие 10.6. *Нека G е n-върхов граф и $v_1 \ldots, v_r$ е α-редица в G такава, че за някое s, $1 \leq s \leq r$ имаме*

$$t_G(v_1 \ldots, v_s) \leq \frac{n}{r}\left(\binom{r}{2} - \binom{r-s}{2}\right).$$

Тогава $e(G) \leq e(T_r(n))$.

Теорема 10.9. *Нека G е n-върхов граф, в който има α-редица $v_1, \ldots, v_k$ такава, че*

$$t_G(v_1, \ldots, v_k) \leq \frac{k\, e(G)}{n}.$$

Тогава G е обобщен k-хроматичен граф.

Резултатите от дисертацията са публикувани в [K17], [K20], [K22], [K24], [K30], [K35],[K40], [N3], [N5], [N8], [N13], [N14], [N15], [N16], [N17], [N18], [N20], [N21], [N22], [N23], [N26], [N27], [N28], [N29], [N30], [N31], [N32], [N33], [N34], [N35], [N37], [N39], [N40], [N42], [N45].

С изключение на [K40], която е приета за печат, всички статии са излезли от печат. Освен най-новите работи [K35], [K40], [N32] и [N35], те са реферирани в реферативните списания. Теореми 8.1 и 8.3 и цялата десета глава са получени съвместно с Н. Хаджииванов. Частният случай $m = 7$ на Теорема 6.8 е получен съвместно с Е. Недялков. Всички останали резултати са получени самостоятелно. Не е публикувана единствено Теорема 7.2.

Резултатите от дисертацията се цитират в:

— енциклопедията	[G4];
— книгите	[C3], [K5], [K17], [K13], [R6], [Z4];
— статиите	[B1], [B2], [B4], [C5], [E1], [G3], [G5], [H2], [J3], [P2], [P3], [U1], [R8];
— дисертациите	[P5] и [U2];
— master thesis	[C4];
— Рефератите	[B15] и [Z1].

Следните резултати от дисертацията са повторени буквално или в по-слаба форма от други автори.

Теорема 5.1. В случая $r = 4$ е повторена в [H2] и [J3].

Теорема 5.1. В случая $r \geq 5$ е повторена в [G13] и [L4].

Теорема 8.1. (a) е повторена в [B17].

Теорема 9.1. е повторена в [B17].

Теорема 9.2. в по-слаба форма е повторена в [B16], [E4], [G5], [M3].

Следствие 10.2. (a) е повторено в [B12].

Следствие 10.2. е повторено в [B6] и [B7].

Теорема 10.5 (a) е повторена в [H6]и [M5].

Теорема 10.6. е повторена в [B6] и [B7].

Резултатите от дисертацията са получени в периода от 1976 година до 2004 година. През този период те са докладвани на няколко конференции на СМБ, на семинари по комбинаторика в МГУ (1980), по време на семестъра по дискретна математика в Банаховия център във Варшава (1987). Най-последните резултати са докладвани на Third EuroWorkshop on Optimal Codes and Related Topics, 2001, Sunny Beach, Bulgaria и на семинара по Алгебра и Теория на кодирането в ИМИ - БАН през 2004 година.

В Теорията на графите ме въведе професор Николай Хаджииванов. Под негово ръководство през 1981 година защитих кандидатската си дисертация. Сътрудничеството ни продължава и до днес. За всичко това му изказвам своята благодарност. Благодаря на докторантите Е. Недялков и Н. Колев за оказаната помощ. Благодаря също и на участниците в семинара по Алгебра и Теория на кодирането в ИМИ - БАН за вниманието към тази работа.

януари, 2005 година

ГЛАВА 1

ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ ОТ ТЕОРИЯ НА ГРАФИТЕ

Разглеждат се само крайни и неориентирани графи, без кратни ребра и примки. С $V(G)$ и $E(G)$ ще означаваме съответно множеството на върховете и множеството на ребрата на графа G. Ако $v_1, v_2 \in V(G)$ и $[v_1, v_2] \in E(G)$, ще казваме, че върховете v_1 и v_2 са съседни в графа G. Допълнителният граф на графа G ще бележим с $\overline{G}$, който се дефинира по следния начин: $V(\overline{G}) = V(G)$ и ако $x, y \in V(G)$, тогава

$$[x, y] \in E(\overline{G}) \Leftrightarrow [x, y] \notin E(G).$$

Множеството на всичките съседи на $v \in V(G)$ в графа G ще означаваме с $\Gamma_G(v)$. Числото $|\Gamma_G(v)|$ се нарича степен на върха v в графа G и се бележи с $d_G(v)$. Графът G е регулярен, ако степените на всичките му върхове са равни.

Множество от p върха на графа G, всеки два от които са съседни в G, се нарича p-клика на графа G. Най-голямото естествено число p, за което G има p-клика, се нарича kликово число на G и се бележи с $cl(G)$. Едно множество от върхове на графа G, се нарича независимо множество от върхове на този граф, ако всеки два негови върхове не са съседни в G. Най-големият брой независими върхове, които можем да изберем в G, се нарича число на независимост на G и се бележи с $\alpha(G)$. Ясно е, че $\alpha(G) = cl(\overline{G})$.

Ще са необходими и следните стандартни означения:

$e(G) = |E(G)|$ - броят на ребрата на G;

$G[M], M \subseteq V(G)$ - подграфа на графа G, породен от множеството M;

$$\Gamma_G(M) = \bigcap_{v \in M} \Gamma_G(v), \quad M \subseteq V(G);$$

$$N_G(M) = \bigcup_{v \in M} \Gamma_G(v), \quad M \subseteq V(G);$$

$\pi(G)$ - максималният брой независими ребра (ребра без общ връх) в графа G;

$G - M, M \subseteq V(G)$ - подграфът на G породен от $V(G) \setminus M$;

$G - e,\ e \in E(G)$ - подграфът, който се получава от G, като премахнем реброто e.

$G + e,\ e \in E(\overline{G})$ - надграфът на G, който се получава като към $E(G)$ добавим реброто e.

K_n - пълният граф с n върха;

C_n - простият цикъл с n върха.

Нека G_1 и G_2 са два графа без общи върхове. С $G_1 + G_2$ ще означаваме графа G, който се получава като всеки връх на G_1 съединим с ребро с всеки връх на G_2, т.е. $V(G) = V(G_1) \bigcup V(G_2)$ и

$$E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{[x, y], x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}.$$

Дефиниция 1.1. *Нека G е граф. Всяко разлагане*

$$V(G) = V_1 \cup ... \cup V_r, V_i \cap V_j = \emptyset, i \neq j \tag{1.1}$$

се нарича r-разлагане на върховете на G. Множествата $V_1, ..., V_r$ се наричат части на това разлагане.

Дефиниция 1.2. *Казваме, че r-разлагането (1.1) е r-хроматично разлагане, ако частите му $V_1, ..., V_r$ са независими множества, а графът G се нарича r-хроматичен граф. Хроматичното число на графа G е най-малкото естествено число r, за което G има r-хроматично разлагане и се бележи с $\chi(G)$.*

Дефиниция 1.3. *Нека G е r-хроматичен граф с части $V_1, ..., V_r$. Казваме, че G е пълен r-хроматичен граф с части $V_1, ..., V_r$, ако всеки два върха, които са от различни части, са съседни и ще го бележим с $K(p_1, ..., p_r)$, където $p_i = |V_i|, i = 1, ..., r$.*

Ясно е, че $K(p_1, ..., p_r) = \overline{K}_{p_1} + ... + \overline{K}_{p_r}$.

Дефиниция 1.4. *Пълният r-хроматичен граф $K(p_1, ..., p_r)$ се нарича r-хроматичен граф на Туран, ако $|p_i - p_j| \leq 1, \forall i, j$, и се означава с $T_r(n)$, където $n = p_1 + \cdots + p_r$ е броят на върховете на този граф.*

Ясно е, че с точност до изоморфизъм, графът $T_r(n)$ се определя еднозначно от числата r и n.
В следващите глави ще ни е необходимо следното просто твърдение:

Твърдение 1.1. З*а всеки граф G е вярно неравенството*

$$\chi(G) + \pi(\overline{G}) \leq |V(G)|.$$

Доказателство. Нека $|V(G)| = n, \pi(\overline{G}) = s$ и $\{x_1, y_1\}, ..., \{x_s, y_s\}$ са независими ребра на $\overline{G}$. Ако $v_1, ..., v_{n-2s}$ са останалите върхове на $\overline{G}$, тогава

$$\{x_1, y_1\} \cup ... \cup \{x_s, y_s\} \cup \{v_1\} \cup ... \cup \{v_{2n-2s}\}$$

е $(n - s)$-хроматично разлагане за G. Следователно $\chi(G) \leq n - s$, т.е. $n \geq \chi(G) + s$.

ГЛАВА 2

ОБОБЩЕНИЕ НА ЕДНА ТЕОРЕМА НА ДИРАК

2.1. Формулировка на основния резултат.

Дефиниция 2.1. *Казваме, че r-разлагането*

$$V(G) = V_1 \cup ... \cup V_r, V_i \cap V_j = \emptyset, i \neq j,$$

е p-плътно, ако обединението на всеки p от неговите части $V_1, ..., V_r$ съдържа p-клика на графа G. Графът G се нарича p-плътен, ако всяко $\chi(G)$-хроматично разлагане на G е p-плътно.

Ясно е, че ако G е p-плътен, тогава той е и $(p-1)$-плътен. Ясно е също, че G е 2-плътен тогава и само тогава, когато $\chi(G) \geq 2$.
В [D1] Дирак доказва следния резултат:

Теорема 2.1. *Нека $\chi(G) = r$ и $cl(G) < r$. Тогава $|V(G)| \geq r + 2$ и ако $|V(G)| = r + 2$, тогава $G = K_{r-3} + C_5$.*

Забележка 2.1. *Очевидно от $\chi(G) \neq cl(G)$, следва $r \geq 3$.*

Основният резултат в тази глава е следното обобщение на Теорема 2.1:

Теорема 2.2. *Нека G е граф, такъв че $\chi(G) = r$ и $cl(G) < r$. Ако G е p-плътен, тогава*

(а) $|V(G)| \geq r + p$;

(б) *от* $|V(G)| = r + p$ *следва* $G = K_{r-p-1} + \overline{C}_{2p+1}$.

Забележка 2.2. *От това, че G е p-плътен, очевидно следва $p \leq cl(G)$. Понеже $cl(G) < \chi(G) = r$ имаме $r \geq p + 1$. Поради това K_{r-p-1} съществува.*

Забележка 2.3. *Понеже $\overline{C}_5 = C_5$ Теорема 2.1. се получава от Теорема 2.2. при $p = 2$.*

За доказателство на някой от следващите резултати ще ни е необходима следната:

Лема 2.1. *Нека $V' \subset V(\overline{C}_{2p+1}), |V'| = m < 2p + 1$ и $G = \overline{C}_{2p+1}[V']$. Тогава $cl(G) \geq \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$.*

Доказателство. Понеже $|V'| < 2p + 1$, допълнителният граф $\overline{G}$ е собствен подграф на C_{2p+1}. Всеки собствен подграф на C_{2p+1} обаче има хроматично число по-малко от 3. Следователно $\chi(\overline{G}) \leq 2$. Нека $V(\overline{G}) = V_1 \cup V_2$ е 2-хроматично разлагане. Понеже V_1 и V_2 са независими множества в $\overline{G}$, имаме $\alpha(\overline{G}) \geq max\{|V_1|, |V_2|\}$. Но $|V_1| + |V_2| = m$. Ето защо, $\alpha(\overline{G}) \geq \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$. Последното неравенство е еквивалентно на $cl(G) \geq \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$.

Следващите две твърдения дават примери на p-плътни графи.

Твърдение 2.1. *Нека p е естествено число. Тогава:*

(а) *$\overline{C}_{2p+1}$ е p-плътен;*

(б) *Всеки собствен подграф на $\overline{C}_{2p+1}$ или има хроматично число по-малко от $p+1$ или не е p-плътен.*

Доказателство. Ако $p = 1$, твърдението е очевидно. Нека $p \geq 2$. Тогава $\alpha(\overline{C}_{2p+1}) = 2$. От това равенство следва $\chi(\overline{C}_{2p+1}) = p+1$. Да разгледаме произволно $(p+1)$-хроматично разлагане на $\overline{C}_{2p+1}$:

$$V(\overline{C}_{2p+1}) = V_1 \cup ... \cup V_{p+1}.$$

За всяко от множествата $V_i' = V(\overline{C}_{2p+1}) \setminus V_i, i = 1, ..., p$ дефинираме $G_i = \overline{C}_{2p+1}[V_i'], i = 1, ..., p$. Понеже $\alpha(\overline{C}_{2p+1}) = 2$, имаме че $|V_i| \leq 2$. Поради това $|V_i'| \geq 2p-1$. Съгласно Лема 2.1., $cl(G_i) \geq p$, т.е. V_i' съдържа p-клика, $i = 1, ..., p+1$. С това (а) е доказано. В доказателството на (б) ще предполагаме, че:

$$V(C_{2p+1}) = \{v_1, ..., v_{2p+1}\};$$

$$E(C_{2p+1}) = \{[v_i, v_{i+1}], i = 1, ..., 2p\} \cup \{[v_1, v_{2p+1}]\}.$$

Тъй като $p \geq 2$, графът $\overline{C}_{2p+1}$ е свързан. Това ни дава право да докажем (б) само за подграфи от вида $\overline{C}_{2p+1} - e, e \in E(\overline{C}_{2p+1})$. Без ограничение на общността можем да считаме, че единият край на реброто e е върхът v_1, т.е. $e = [v_1, v_s], 2 \leq s \leq 2p+1$. Ако s е четно число, то след като преномерираме върховете на C_{2p+1} в обратен ред, върхът v_s ще има нечетен индекс. С тези предварителни разсъждения изяснихме, че е достатъчно да докажем (б) за подграфи от вида $\overline{C}_{2p+1} - [v_1, v_s]$, където s е нечетно число. Нека $H = \overline{C}_{2p+1} - [v_1, v_s]$.

Случай 1. $s = 3$.
В този случай $\{v_1, v_2, v_3\}$ е независимо множество в $\overline{C}_{2p+1}$ и

$$\{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5\} \cup ... \cup \{v_{2p}, v_{2p+1}\}$$

е r-хроматично разлагане на H. Следователно $\chi(H) \leq r$.

Случай 2. $5 \leq s \leq 2p-1$.
В този случай $\alpha(\overline{H}) = 2$. Поради това $\chi(H) = p+1$. Да забележим, че $(2p-1)$-върховият подграф $\overline{C}_{2p+1} - \{v_{2p}, v_{2p+1}\}$ има единствена p-клика

$$Q = \{v_1, v_3, ..., v_{2p-1}\}.$$

Понеже s е нечетно число, Q не е p-клики в $H - \{v_{2p}, v_{2p+1}\}$. Следователно $H - \{v_{2p}, v_{2p+1}\}$ не съдържа p-клики. Това означава, че $(p+1)$-хроматичното разлагане

$$V(H) = \{v_1\} \cup \{v_2, v_3\} \cup ... \cup \{v_{2p}, v_{2p+1}\}$$

не е p-плътно и H не е p-плътен.

Твърдение 2.2. *Нека p и r са естествени числа и $p < r$. Тогава*

(а) *$G = K_{r-p-1} + \overline{C}_{2p+1}$ е p-плътен;*

(б) *Всеки собствен подграф на G или има хроматично число по-малко от r, или не е p-плътен.*

Доказателство. Ще докажем (а) по индукция относно r. Понеже $r \geq p+1$, базата на индукцията е $r = p+1$ и (а) следва от Твърдение 2.1. (а). Нека $r \geq p+2$. Тогава $G = K_1 + G_1$, където $G_1 = K_{r-p-2} + \overline{C}_{2p+1}$. Съгласно индуктивната хипотеза G_1 е p-плътен. Всяко $\chi(G)$-хроматично разлагане на G се получава като към произволно $\chi(G_1)$-хроматично разлагане на G_1 добавим като самостоятелна част $V(K_1)$. Следователно G също е p-плътен.

Преминаваме към доказателството на (б). Доказателството ще направим по индукция относно r. Базата на индукцията е $r = p+1$ и следва от Твърдение 2.1. (б). Нека $r \geq p+2$ и $G = K_1+G_1$, където $G_1 = K_{r-p-2}+\overline{C}_{2p+1}$. Ясно е, че G е свързан граф. Поради това достатъчно е да докажем (б) за подграфи от вида $G-e, e \in E(G)$.

Случай 1. $e \notin E(G_1)$, *т.е. единият край на e е $V(K_1)$.*
В тази ситуация очевидно $\chi(G-e) = \chi(G_1) = r-1$.

Случай 2. $e \in E(G_1)$.
В този случай е вярно равенството

$$G - e = K_1 + (G_1 - e). \tag{2.1}$$

Съгласно индуктивната хипотеза $\chi(G_1 - e) < r-1$ или $G_1 - e$ не е p-плътен. От (2.1) следва $\chi(G-e) < r$, или че $G-e$ не е p-плътен.

Твърдение 2.2. е доказано.

2.2. Доказателство на теорема 2.2.

Дефиниция 2.2. *Графът G се нарича α-критичен, ако*

$$\alpha(G-e) > \alpha(G), \ \forall e \in E(G).$$

Ще ни са необходими следните два резултата за α-критичните графи.

Теорема 2.3. ([H1], вж. също [B4], Т. 8, стр. 290).
Нека G е α-критичен граф, който няма изолирани върхове. Тогава, всяко независимо множество от върхове $A \subseteq V(G)$ удовлетворява неравенството

$$|N_G(A)| \geq |A|.$$

Теорема 2.4. ([L2], стр. 58, задача 25).
Нека G е свързан α-критичен граф и $|V(G)| = 2\alpha(G)+1$. Тогава G е прост цикъл с $2\alpha(G)+1$ върха.

Ще ни са необходими и следващите няколко леми.

Лема 2.2. *Нека G е граф такъв, че $cl(G-v) = cl(G)$, $\forall v \in V(G)$. Тогава:*

(а) $|N_{\overline{G}}(Q)| \geq |Q|$ *за всяка клика Q на G;*

(б) $\pi(\overline{G}) \geq cl(G)$;

(в) $|V(G)| \geq \chi(G) + cl(G)$.

Доказателство. С евентуално добавяне на нови ребра към графа G получаваме граф H, такъв че $V(H) = V(G)$, $cl(H) = cl(G)$, $E(H) \geq E(G)$ и $cl(H+e) > cl(H)$, $\forall\, e \in E(\overline{H})$. За този граф имаме

$$cl(H-v) \leq cl(H) = cl(G) = cl(G-v) \leq cl(H-v).$$

Следователно

$$cl(H-v) = cl(H), \qquad \forall v \in V(H). \tag{2.2}$$

Тъй като

$$cl(H+e) > cl(H) \Longleftrightarrow \alpha(\overline{H} - e) > \alpha(\overline{H})$$

допълнителният граф $\overline{H}$ е α-критичен. От (2.2) следва, че $\overline{H}$ няма изолирани върхове. Нека Q е произволна клика на G. Тогава Q ще бъде независимо множество в $\overline{H}$. Съгласно Теорема 2.3., $|N_{\overline{H}}(Q)| \geq |Q|$. Понеже $N_{\overline{G}}(Q) \supseteq N_{\overline{H}}(Q)$, от последното неравенство следва (а).

Нека Q е клика на G и $|Q| = cl(G)$. От (а) и теоремата на Хол за представителите (вж. [H5]) имаме $\pi(\overline{G}) \geq cl(G)$, с което (б) е доказано.

Твърдението (в) очевидно следва от (б) и Твърдение 1.1.

Лема 2.2. е доказана.

Забележка 2.4. *Твърдението (а) е формулирано като задача 8 в [B1], стр. 302. Твърдението (б) е резултат от [V1]. Доказателството, което даваме тук е различно от оригиналното.*

Лема 2.3. *Нека G е граф, $\chi(G) = p+1$ и $cl(G) = p$. Ако G е p-плътен, тогава:*

(а) $cl(G-v) = cl(G)$, $\forall\, v \in V(G)$;

(б) $\pi(\overline{G}) \geq p$;

(в) *Ако $|V(G)| = 2p+1$, тогава допълнителният граф $\overline{G}$ е свързан.*

Доказателство. Нека $V_1 \cup \ldots \cup V_{p+1}$ е $(p+1)$-хроматично разлагане на G. Понеже това разлагане е p-плътно имаме

$$cl(G - V_i) = p, \qquad i = 1, \ldots, p+1$$

От тези равенства следва (а). От (а) и Лема 2.2. (б) имаме $\pi(\overline{G}) \geq p$, с което (б) също е доказано.

Преминаваме към доказателството на (в). Нека $V(G) = \{v_1, \ldots, v_{2p+1}\}$ и $[v_1, v_2], \ldots, [v_{2p-1}, v_{2p}]$ са независими ребра в $\overline{G}$ (поради $\pi(\overline{G}) \geq p$, такива ребра има). Ясно е, че

$$\{v_1, v_2\} \cup \ldots \cup \{v_{2p-1}, v_{2p}\} \cup \{v_{2p+1}\}$$

е $(p+1)$-хроматично разлагане на G. Да означим с M компонентата на свързаност на $\overline{G}$, която съдържа v_{2p+1}. От (а) следва, че в $\overline{G}$ няма изолирани върхове. Следователно $|M| \geq 2$. Да забележим, че ако единият от върховете

v_{2k-1}, v_{2k} принадлежи на M, тогава другият също принадлежи на M. Поради това можем да предположим, че

$$M = \{v_1 v_2, ..., v_{2s-1}, v_{2s}, v_{2p+1}\}$$

за някое s, $1 \leq s \leq p$. Да предположим, че $\overline{G}$ не е свързан. Тогава $s < p$. Тъй като G е p-плътен, M съдържа $(s+1)$-клика Q на графа G. Без ограничение на общността можем да предположим, че

$$Q = \{v_{2i+1} | i = 1, ..., s-1\} \cup \{v_{2p+1}\}.$$

Ясно е, че $N_{\overline{G}}(Q) \subseteq M$. Поради това $N_{\overline{G}}(Q) = \{v_2, v_4, ..., v_{2s}\}$. Следователно $|N_{\overline{G}}(Q)| = s$. От друга страна, съгласно Лема 2.3 (а) и Лема 2.2 (а), $|N_{\overline{G}}(Q)| \geq s+1$. Полученото противоречие завършва доказателството на (в).

Лема 2.4. *Нека G е граф, $\chi(G) = p+1$ и $cl(G) = p$. Ако G е p-плътен, тогава:*

(а) $|V(G)| \geq 2p+1$;

(б) *от* $|V(G)| = 2p+1$ *следва* $G = \overline{C}_{2p+1}$.

Доказателство. От Лема 2.3 (а) имаме

$$cl(G - v) = cl(G), \quad \forall\, v \in eV(G). \tag{2.3}$$

От (2.3) и Лема 2.2 (в) имаме $|V(G)| \geq 2p+1$. Нека $|V(G)| = 2p+1$. С евентуално добавяне на няколко нови ребра към $E(G)$ получаваме граф H такъв, че $V(H) = V(G)$, $cl(H) = cl(G)$, $E(H) \supseteq E(G)$ и $cl(H+e) > cl(H)$, $\forall\, e \in E(\overline{H})$. Както изяснихме в доказателството на лема 2.2, от (2.3) следва

$$cl(H - v) = cl(H), \quad \forall\, v \in V(H). \tag{2.4}$$

От (2.4) и Лема 2.2 (в) получаваме $\chi(H) \leq p+1$. Понеже

$$\chi(H) \geq \chi(G) = p+1,$$

имаме $\chi(H) = p+1$. Ясно е, че всяко $(p+1)$-хроматично разлагане на H също е $(p+1)$-хроматично разлагане и за G. Следователно H също е p-плътен. Съгласно Лема 2.3 (в), допълнителният граф $\overline{H}$ е свързан. В доказателството на Лема 2.2 изяснихме, че $\overline{H}$ е α-критичен. Това че $\overline{H}$ е свързан и α-критичен, заедно с Теорема 2.4 ни дава, че $\overline{H} = C_{2p+1}$, т.е. G е подграф на $\overline{C}_{2p+1}$. От Твърдение 2.1 (б) следва, че G не е собствен подграф на $\overline{C}_{2p+1}$. Остава единствената възможност $G = \overline{C}_{2p+1}$.

Лема 2.4 е доказана.

Доказателство на Теорема 2.2. Нека q е най-голямото естествено число, за което G е q-плътен. Понеже G е p-плътен имаме

$$q \geq p. \tag{2.5}$$

Тъй като G не е $(q+1)$-плътен, съществува r-разлагане

$$V(G) = V_1 \cup ... \cup V_r$$

такова, че обединението на някои $q+1$ от множествата V_i не съдържа $(q+1)$-клика. Нека например $V' = V_1 \cup ... \cup V_{q+1}$ не съдържа $(q+1)$-клика. Полагаме $G' = G[V']$ и $V'' = V(G) \setminus V'$. Ясно е, че $cl(G') \leq q$. От това, че G е q-плътен следва, че G' също е q-плътен. Следователно $cl(G') = q$. Да забележим, че $\chi(G') = q+1$. От Лема 2.4 получаваме $|V'| \geq 2q+1$. Понеже $|V''| \geq r-q-1$, имаме $|V(G)| = |V'| + |V''| \geq r + q$. Последното неравенство заедно с (2.4) ни дава, че $|V(G)| \geq r + p$. С това (а) е доказано.

Нека $|V(G)| = r + p$. Тогава $q = p$, $|V'| = 2p + 1$ и $|V''| = r - p - 1$. Съгласно Лема 2.4 имаме $G' = \overline{C}_{2p+1}$, което означава, че G е подграф на графа $K_{r-p-1} + \overline{C}_{2p+1}$. От Твърдение 2.2 (б) следва, че G не е собствен подграф на $K_{r-p-1} + \overline{C}_{2p+1}$. Остава единствената възможност $G = K_{r-p-1} + \overline{C}_{2p+1}$. Теорема 2.2 е доказана.

Теорема 2.2 и всичките междинни резултати са публикувани в [N29].

ГЛАВА 3

ВЪРХОВИ ФОЛКМАНОВИ ГРАФИ

3.1. Дефиниция и основни свойства на върховите Фолкманови графи.

Дефиниция 3.1. *Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа и G е даден граф. Казваме, че r-разлагането*

$$V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

е $(a_1, \ldots, a_r)$-свободно, ако за всяко $i \in \{1, \ldots, r\}$ множеството V_i не съдържа a_i-клика на графа G.

Символът $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$ означава, че всяко r-разлагане на $V(G)$ не е $(a_1, \ldots, a_r)$-свободно. Ако $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$, казваме че G е върхов $(a_1, \ldots, a_r)$-граф на Фолкман.

Следващите три твърдения са очевидни.

Твърдение 3.1. *Нека $a_1, \ldots, a_r$, $\;r \geq 2$ са естествени числа и $a_i = 1$ за някое $i \in \{1, \ldots, r\}$. Тогава*

$$G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r) \Longleftrightarrow G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_r).$$

Твърдение 3.2. *За всяка пермутация φ от симетричната група S_r имаме*

$$G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r) \Longleftrightarrow G \xrightarrow{v} (a_{\varphi(1)}, \ldots, a_{\varphi(r)}).$$

Твърдение 3.3. *Нека H е подграф на графа G. Тогава*

$$H \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r) \Longrightarrow G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r).$$

Ще ни са необходими и следните твърдения:

Твърдение 3.4. *Нека G е граф и $G \to (a_1, \ldots, a_r)$. Нека $a_i \geq 2$, за някое $i \in \{1, \ldots, r\}$ и A е независимо множество от върхове на G. Тогава*

$$G - A \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_r).$$

Доказателство. Да допуснем противното и нека

$$V_1 \cup \ldots \cup V_r$$

е $(a_1, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_r)$-свободно r-разлагане на $G - A$. Добавяйки към V_i върховете на A получаваме $(a_1, \ldots, a_r)$-свободно разлагане на G, което е противоречие.

Твърдение 3.5. *Нека $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$ и $a_i \geq k$ за някое $i \in \{1, \ldots, r\}$. Тогава*

$$G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_{i-1}, k, a_i - k + 1, a_{i+1}, \ldots, a_r).$$

Доказателство. Да допуснем противното и нека

$$V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_{r+1}$$

е $(a_1, \ldots, a_{i-1}, k, a_i - k + 1, a_{i+1}, \ldots, a_r)$-свободно $(r+1)$-разлагане на $V(G)$. Тогава

$$V(G) = V_1 \cup \ldots \cup (V_i \cup V_{i+1}) \cup \ldots \cup V_r$$

е $(a_1, \ldots, a_r)$-свободно r-разлагане на G, което е противоречие.

Твърдение 3.6. *Нека $G \xrightarrow{\varphi} H$ е хомоморфизъм на графа G в графа H. Тогава*

$$G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r) \Longrightarrow H \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r).$$

Доказателство. Съгласно Твърдение 3.3, достатъчно е да разгледаме случая, когато φ е изображение на $V(G)$ върху $V(H)$. Нека

$$V(H) = V_1 \cup \ldots \cup V_r$$

е произволно r-разлагане на H. Тогава

$$V(G) = \varphi^{-1}(V_1) \cup \ldots \cup \varphi^{-1}(V_r)$$

е r-разлагане на G. Съгласно условието $\varphi^{-1}(V_i)$ съдържа a_i-клика Q за някое $i \in \{1, \ldots, r\}$. Тогава $\varphi(Q)$ е a_i-клика на H и $\varphi(Q) \subseteq V_i$. И така, доказахме че всяко r-разлагане на $V(H)$ не е $(a_1, \ldots, a_r)$-свободно, т.е. $H \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$.

За произволни естествени числа $a_1, \ldots, a_r$ дефинираме

$$m = m\,(a_1, \ldots, a_r) = \sum_{i=1}^{r}(a_i - 1) + 1; \tag{3.1}$$

$$p = p\,(a_1, \ldots, a_r) = max\{a_1, \ldots, a_r\}. \tag{3.2}$$

Очевидно е, че $K_m \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$. Поради това, съгласно Твърдение 3.3., имаме

$$cl(G) \geq m \Longrightarrow G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r). \tag{3.3}$$

Ясно е, че

$$G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r) \Longrightarrow cl(G) \geq p. \tag{3.4}$$

В [F2] Фолкман доказва, че съществува граф $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$ с

$$cl(G) = max\{a_1, \ldots, a_r\}.$$

Поради това графите $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$ се наричат върхови $(a_1, \ldots, a_r)$-графи на Фолкман.

Важна характеристика на върховите Фолкманови графи дава следната:

Теорема 3.1. *Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа и числата m и p са дефинирани с равенствата (3.1) и (3.2). Нека G е граф и $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$. Тогава $\chi(G) \geq m$ и ако $\chi(G) = m$, графът G е p-плътен.*

Доказателство. Да разгледаме r-разлагането

$$V(K_{m-1}) = V_1 \cup \ldots \cup V_r, \quad \text{където} \quad |V_i| = a_i - 1.$$

Очевидно това r-разлагане е $(a_1, \ldots, a_r)$-свободно. Поради това

$$K_{m-1} \overset{v}{\nrightarrow} (a_1, \ldots, a_r). \tag{3.5}$$

Да допуснем, че $\chi(G) \leq m - 1$ и нека

$$V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_{m-1}$$

е $(m-1)$-хроматично разлагане. Да положим $V(K_{m-1}) = \{w_1, \ldots, w_{m-1}\}$. Дефинираме $V(G) \xrightarrow{\varphi} V(K_{m-1})$ по следния начин:

$$v \xrightarrow{\varphi} w_i, \ \text{ако} \ v \in V_i.$$

Ясно е, че φ е хомоморфизъм. Съгласно Твърдение 3.6,

$$K_{m-1} \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r),$$

което противоречи на (3.5).

Нека $\chi(G) = m$. Да предположим, че G не е p-плътен и нека $V_1 \cup \ldots \cup V_m$ е m-хроматично разлагане на G, такова че $V' = V_1 \cup \ldots \cup V_p$ не съдържа p-клика. Съгласно Твърдение 3.2., можем да предположим, че

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_r = p.$$

Полагаме $G' = G - V'$. Тогава

$$\chi(G') = m - p = m - a_r = \sum_{i=1}^{r-1}(a_i - 1) = m(a_1, \ldots, a_{r-1}) - 1.$$

Поради това G' има $(a_1, \ldots, a_{r-1})$-свободно $(r-1)$-разлагане $W_1 \cup \ldots \cup W_{r-1}$. Ясно е, че тогава $W_1 \cup \ldots \cup W_{r-1} \cup V'$ е $(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r)$-свободно r-разлагане, което противоречи на условието.

Теорема 3.1 е доказана.

Следващата теорема дава възможност да се строят върхови Фолкманови графи (това ще бъде направено по-нататък).

Теорема 3.2. *Нека n и p са фиксирани естествени числа и $p \geq 2$. Нека G е граф такъв, че*

$$G \xrightarrow{v} (b_1, \ldots, b_s)$$

за всички естествени числа $b_1, \ldots, b_s$ такива, че $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_s \leq p$ и $\sum_{i=1}^{s}(b_i - 1) + 1 = n$ (числото s не е фиксирано). Тогава, за всички естествени числа $a_1, \ldots, a_r$ такива, че

$$\max\{a_1, \ldots, a_r\} \leq p \ \text{ и } \ \sum_{i=1}^{r}(a_i - 1) + 1 = m \geq n$$

имаме

$$K_{m-n} + G \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r).$$

Доказателство. Ще докажем тази теорема по индукция относно $t = m - n$. Базата на индукцията е $t = 0$, т.е. $m = n$. Съгласно Твърдение 3.2 можем да предположим, че $a_1 \le \dots \le a_r$. Съгласно условието, $G \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r)$.

Да предположим, че $t \ge 1$. Графът $K_t + G = K_{m-n} + G$ означаваме с $\widetilde{G}$. Нека $w \in V(K_t)$. Дефинираме $G' = \widetilde{G} - w = K_{t-1} + G$. Нека $V_1 \cup \dots \cup V_r$ е произволно r-разлагане на $V(\widetilde{G})$. Ще докажем, че това r-разлагане не е $(a_1, \dots, a_r)$-свободно. Да допуснем, че $w \in V_i$ и че V_j, $j \neq i$ не съдържа a_j-клика. Трябва да докажем, че V_i съдържа a_i-клика. Тъй като $w \in V_i$, ако $a_i = 1$ това е очевидно. Нека $a_i \ge 2$. Съгласно индуктивната хипотеза

$$G' \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \dots, a_r). \tag{3.6}$$

Да разгледаме r-разлагането

$$V(G') = V_1 \cup \dots \cup V_{i-1} \cup (V_i - \{w\}) \cup \dots \cup V_r.$$

От допускането, че V_j, $j \neq i$ не съдържа a_j-клика и (3.6) следва, че $V_i - \{w\}$ съдържа $(a_i - 1)$-клика. Тази клика заедно с w образуват a_i-клика, която се съдържа в V_i. И така, всяко r-разлагане на $V(\widetilde{G})$ не е $(a_1, \dots, a_r)$-свободно, което означава, че

$$\widetilde{G} = K_{m-n} + G \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r).$$

Теорема 3.2 е доказана.

Теорема 3.1 е публикувана в [N29], а Теорема 3.2 е публикувана в [N34].

3.2. Върхови Фолкманови $(a_1,\ldots,a_r)$-графи с кликово число по-малко от $m\ (a_1,\ldots,a_r)$.

Да припомним, че $m = m\ (a_1,\ldots,a_r)$ и $p = p\ (a_1,\ldots,a_r)$ са дефинирани с равенствата (3.1) и (3.2). Ако $G \xrightarrow{v} (a_1,\ldots,a_r)$ и $cl\ (G) < m$, тогава от (3.4) следва

$$m \geq p+1. \tag{3.7}$$

Пример на граф $G \xrightarrow{v} (a_1,\ldots,a_r)$ с $cl(G) < m$ дава следната теорема от [L3].

Теорема 3.3., [L3]. *Нека $a_1,\ldots,a_r$ са естествени числа, такива че $m \geq p+1$. Тогава*

$$K_{m-p-1} + \overline{C}_{2p+1} \xrightarrow{v} (a_1,\ldots,a_r).$$

За пълнота ще дадем ново доказателство на Теорема 3.3.

Доказателство. Нека $b_1,\ldots,b_s$ са естествени числа,

$$\max\{b_1,\ldots,b_s\} \leq p \quad \text{и} \quad m\ (b_1,\ldots,b_s) = p+1.$$

Ще докажем, че

$$\overline{C}_{2p+1} \xrightarrow{v} (b_1,\ldots,b_s). \tag{3.8}$$

Да допуснем противното и нека $V_1 \cup \ldots \cup V_s$ е $(b_1,\ldots,b_s)$-свободно s-разлагане на $V(\overline{C}_{2p+1})$. Понеже V_i не съдържа b_i-клика и $b_i \leq p$, имаме $V_i \neq V(\overline{C}_{2p+1})$, $i = 1,\ldots,s$. От Лема 2.1. следва $|V_i| \leq 2b_i - 2$, $i = 1,\ldots,s$. Поради това

$$|V(G)| = \sum_{i=1}^{s} |V_i| \leq \sum_{i=1}^{s} (2b_i - 2) = 2m\ (b_1,\ldots,b_s) - 2 = 2p,$$

което е противоречие.

И така (3.8.) е изпълнено за всички естествени числа $b_1,\ldots,b_s$ такива, че $\max\{b_1,\ldots,b_s\} \leq p$ и $m\ (b_1,\ldots,b_s) = p+1$. Поради това, от Теорема 3.2 следва

$$K_{m-p-1} + \overline{C}_{2p+1} \xrightarrow{v} (a_1,\ldots,a_r).$$

Теорема 3.3 е доказана.

За разглеждания клас от върхови Фолкманови графи е вярна следната:

Теорема 3.4. *Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа. Нека G е граф, такъв че $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$ и $cl(G) < m$. Тогава е вярно неравенството $\pi(\overline{G}) \geq p$.*

Доказателство. Съгласно Твърдение 3.2. можем да считаме, че

$$a_1 \leq \ldots \leq a_r = p. \tag{3.9}$$

От (3.4) имаме

$$cl(G) \geq p. \tag{3.10}$$

Ще докажем неравенството $\pi(\overline{G}) \geq p$ по индукция относно m. Поради (3.7), базата на индукцията е $m = p + 1$. В тази ситуация от (3.9) следва $a_1 = \ldots = a_{r-2} = 1$; $a_{r-1} = 2$ и $a_r = p$. Ето защо, Твърдение 3.1 ни дава $G \xrightarrow{v} (2, p)$. От (3.10) и $cl(G) < m = p + 1$ става ясно, че $cl(G) = p$. Ясно е, че

$$G \xrightarrow{v} (2, p) \Longrightarrow cl(G) = cl(G - v) = p, \ \ \forall\, v \in V(G).$$

Съгласно Лема 2.2 (б) имаме $\pi(\overline{G}) \geq p$. С това базата на индукцията е доказана.

Нека $m \geq p + 2$. Ще разгледаме следните два случая:

Случай 1. $cl(G - v) = cl(G)$, $\forall\, v \in V(G)$.

От Лема 2.2 (б) следва $\pi(\overline{G}) \geq cl(G)$. От последното неравенство и (3.10) получаваме $\pi(\overline{G}) \geq p$.

Случай 2. $cl(G - v) < cl(G)$ *за някой връх* $v \in V(G)$.

В тази ситуация от $cl(G) < m$ следва $cl(G-v) < m-1$. Тъй като $m \geq p+2$, от (3.9) следва $a_{r-1} \geq 2$. Съгласно Твърдение 3.4,

$$G - v \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_{r-2}, a_{r-1} - 1, a_r).$$

Прилагайки индуктивната хипотеза към графа $G - v$, получаваме $\pi(\overline{G} - v_0) \geq p$. Следователно $\pi(\overline{G}) \geq p$.

Теорема 3.4 е доказана.

Следствие 3.1., [L3]. *Нека $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$ и $cl(G) < m$. Тогава $|V(G)| \geq m + p$.*

Доказателство. Съгласно Теорема 3.1., $\chi(G) \geq m$, а съгласно Теорема 3.4. имаме $\pi(\overline{G}) \geq p$. От Твърдение 1.1. следва $|V(G)| \geq m + p$.

Следствие 3.2., [L4]. *Нека $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$ и $cl(G) < m$ и $|V(G)| = m + p$. Тогава $G = K_{m-p-1} + \overline{C}_{2p+1}$.*

Доказателство. От Твърдение 1.1 и Теорема 3.4 имаме $|V(G)| \geq \chi(G)+p$. Последното неравенство заедно с $|V(G)| = m+p$ ни дава $\chi(G) \leq m$. От Теорема 3.1. следва $\chi(G) = m$ и че G е p-плътен. Съгласно Теорема 2.2. имаме $G = K_{m-p-1} + \overline{C}_{2p+1}$.

Забележка 3.1. *Доказателството на Следствие 3.2, дадено в [L4] се базира на Лема 4 в [L4](вж. стр. 251). Доказателството на тази лема обаче не е коректно, тъй като твърдението, изказано в предпоследното изречение (вж. стр. 252), не е вярно.*

Основният резултат в този пункт Теорема 3.4 е публикуван в [N29].

3.3. Върхови Фолкманови $(a_1, \ldots, a_r)$-графи с кликово число по-малко от $m\ (a_1, \ldots, a_r) - 1$.

Ако m и p са дефинирани с равенствата (3.1)и (3.2), тогава съгласно (3.4), от $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$ и $cl(G) < m - 1$ следва

$$m \geq p + 2. \tag{3.11}$$

Ще смятаме, че простият цикъл C_{2p+1} е зададен с равенствата

$$V(C_{2p+1}) = \{v_1, \ldots, v_{2p+1}\} \tag{3.12}$$

$$E(C_{2p+1}) = \{[v_i, v_{i+1}],\ \ i = 1, \ldots, 2p+1\} \cup \{[v_1, v_{2p+1}]\}. \tag{3.13}$$

Дефинираме:

$$Q = \{v_{2i+1} \mid i = 0, \ldots, p-2\},\ \ M_1 = Q \cup \{v_{2p-2}, v_{2p+1}\}$$

$$M_i = \sigma^{i-1}(M_1),\ \ i = 1, \ldots, 2p+1,$$

където $\sigma(v_i) = v_{i+1}$, $i = 1, \ldots, 2p$, и $\sigma(v_{2p+1}) = v_1$.

Да забележим, че v_{2p} и v_{2p-1} са единствената двойка несъседни върхове в $V(\overline{C}_{2p+1}) \backslash M_1$ на графа $\overline{C}_{2p+1}$. Поради това имаме

$$v_{2p},\ v_{2p-1} \notin M_i \Longrightarrow M_i \equiv M_1. \tag{3.14}$$

С L_p означаваме графа, който се получава като към $\overline{C}_{2p+1}$ добавим нови $2p+1$ независими върхове $u_1, \ldots, u_{2p+1}$ такива, че $\Gamma_{L_p}(u_i) = M_i$, $i = 1, \ldots, 2p+1$.

Ще докажем следната

Теорема 3.5. *Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа и G е граф с $cl(G) < m - 1$ и $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$. Тогава*

(а) $|V(G)| \geq m + p + \alpha(G) - 1$;

(б) *Ако $|V(G)| = m + p + \alpha(G) - 1$, тогава G съдържа като подграф графа $K_{m-p-2} + L_p$. Поради това $|V(G)| \geq m + 3p$.*

Доказателство. Съгласно Твърдение 3.2., достатъчно е да разгледаме ситуацията, когато

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_r = p. \tag{3.15}$$

От (3.11) и (3.15) следва $a_{r-1} \geq 2$.

Нека A е независимо множество от върхове на G такива, че $|A| = \alpha(G)$. Разглеждаме графа $G_1 = G - A$. Съгласно Твърдение 3.4 имаме

$$G_1 \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_{r-1} - 1, a_r). \tag{3.16}$$

Понеже $cl(G_1) < m - 1 = m\ (a_1, \ldots, a_{r-1} - 1, a_r)$, от (3.16) и Следствие 3.1 получаваме $|V(G_1)| \geq m + p - 1$. Следователно $|V(G)| \geq m + p + \alpha(G) - 1$ и (а) е доказано.

Преминаваме към доказателството на (б). Нека $|V(G)| = m+p+\alpha(G)-1$. Тогава

$$|V(G_1)| = m + p - 1. \tag{3.17}$$

Ще докажем (б) по индукция относно m. Съгласно (3.11) базата на индукцията е $m = p + 2$. От това равенство следва $\sum_{i=1}^{r-1}(a_i - 1) = 2$. Като вземем под внимание (3.15), стигаме до извода, че или $a_1 = \ldots = a_{r-2} = 1$, $a_{r-1} = 3$, или $r \geq 3$ и $a_1 = \ldots a_{r-3} = 1$ и $a_{r-2} = a_{r-1} = 2$. Поради това от Твърдение 3.1. следва $G \xrightarrow{v} (3,p)$ или $G \xrightarrow{v} (2,2,p)$. Съгласно Твърдение 3.5 ($k = 2$), от $G \xrightarrow{v} (3,p)$ следва $G \xrightarrow{v} (2,2,p)$. И така, ако $m = p + 2$, тогава

$$G \xrightarrow{v} (2,2,p). \tag{3.18}$$

Твърдение 3.4 и (3.18) ни дават $G_1 \xrightarrow{v} (2,p)$. От $cl(G) < m - 1 = p + 1$, следва $cl(G_1) \leq p$ (и следователно $cl(G_1) = p$). От (3.17) и $m = p + 2$ получаваме $|V(G_1)| = 2p + 1$. От тези разсъждения става ясно, че за G_1 можем да приложим Следствие 3.2. Откъдето получаваме $G_1 = \overline{C}_{2p+1}$. Ще предположим, че за $\overline{C}_{2p+1}$ са изпълнени (3.12) и (3.13).

Най-напред ще докажем, че за всяко M_i, $i = 1, \ldots, 2p + 1$ съществува $u \in A$, такъв че $\Gamma_G(u) \supseteq M_i$. Тъй като $M_i = \sigma^{i-1}(M_1)$, достатъчно е да докажем, че $\exists\, u \in A$, такъв че $\Gamma_G(u) \supseteq M_1$. Да допуснем противното, т.е.

$$M_1 \nsubseteq \Gamma_G(u), \quad \forall\, u \in A. \tag{3.19}$$

Дефинираме:

$$W_1 = \{u \in A : \Gamma_G(u) \supseteq Q \ \text{ и } \ v_{2p-2} \notin \Gamma_G(u)\};$$

$$W_2 = \{u \in A \backslash W_1 : \Gamma_G(u) \supseteq Q \ \text{ и } \ v_{2p+1} \notin \Gamma_G(u)\};$$

$$W_3 = A \backslash (W_1 \cup W_2).$$

От (3.19)имаме

$$u \in W_3 \Longrightarrow Q \nsubseteq \Gamma_G(u). \tag{3.20}$$

Нека $V_1' = \{v_{2p-2}, v_{2p-1}\}$, $V_2' = \{v_{2p}, v_{2p+1}\}$ и $V_3' = V(\overline{C}_{2p+1}) \backslash (V_1' \cup V_2')$. Полагаме $V_i = W_i \cup V_i'$, $i = 1, 2, 3$. Ясно е, че $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ е 3-разлагане на $V(G)$. Ще докажем, че V_1 е независимо множество на G. Понеже $W_1 \subseteq A$ и V_1' са независими множества, трябва да докажем, че всеки връх $u \in W_1$ не е съседен на v_{2p-2} и v_{2p-1}. Всеки връх $u \in W_1$ не е съседен на v_{2p-2} съгласно дефиницията на W_1. Също съгласно дефиницията на W_1 имаме $\Gamma_G(u) \supseteq Q$, $\forall\, u \in W_1$. Понеже $Q \cup \{v_{2p-1}\}$ е p-клика на $\overline{C}_{2p+1}$, от $cl(G) < p + 1$ следва, че $[u,\ v_{2p-1}] \notin E(G)$, $\forall\, u \in W_1$. Доказахме, че V_1 е независимо множество. Аналогично се доказва, че V_2 също е независимо множество. Поради това от (3.18) следва, че V_3 съдържа p-клика. Тъй като Q е единствената $(p-1)$-клика в V_3', трябва $N_G(u) \supseteq Q$ за някой връх $u \in W_3$. Това противоречи на (3.20).

И така, доказахме че за всяко $i \in \{1, \ldots, 2p + 1\}$ съществува $u_i \in A$ такъв, че $\Gamma_G(u_i) \supseteq M_i$. За да докажем, че G съдържа L_p като подграф (това е твърдението (б) в случая $m = p+2$) остава да докажем, че $u_i \neq u_j$, $i \neq j$. Да допуснем противното и нека, например, $u_1 = u_k$, $k \neq 1$. Тогава $\Gamma_G(u_1) \supseteq M_1 \cup M_k$. Съгласно (3.14), $v_{2p} \in M_k$ или $v_{2p-1} \in M_k$. Понеже $M_1 \supset Q$, следва че $\Gamma_G(u_1)$ съдържа p-кликата $Q \cup \{v_{2p}\}$ или p-кликата $Q \cup \{v_{2p-1}\}$, което противоречи на условието $cl(G) < p+1$. С това базата на индукцията е доказана.

Нека $m \geq p+3$. Ще разгледаме два случая.

Случай 1. $G - v \overset{v}{\nrightarrow} (a_1, \dots, a_r)$, $\forall\, v \in V(G)$.

В този случай имаме

$$\Gamma_G(v) \nsubseteq \Gamma_G(u), \quad \forall\, u, v \in V(G). \tag{3.21}$$

Да допуснем противното, т.е. $\Gamma_G(v) \subseteq \Gamma_G(u)$. Тогава u и v не са съседни. Да разгледаме някое $(a_1, \dots, a_r)$-свободно r-разлагане на $G - v$. Ако добавим v към тази част на това разлагане, където е върхът u, ще получим $(a_1, \dots, a_r)$-свободно r-разлагане на G, което е противоречие. Това противоречие доказва (3.21). Тъй като G_1 удовлетворява (3.16) и (3.17), от Следствие 3.2 имаме $G_1 = K_{m-p-2} + \overline{C}_{2p+1}$. Нека $w \in V(K_{m-p-2})$. От (3.21) следва $\Gamma_G(w) \supseteq A$ и поради това $G = K_1 + \widetilde{G}$. Ясно е, че $cl(\widetilde{G}) = cl(G) - 1 < m - 2$. Прилагайки Твърдение 3.4 за $A = \{w\}$ и $i = r-1$ получаваме $\widetilde{G} \overset{v}{\longrightarrow} (a_1, \dots, a_{r-1} - 1, a_r)$. Освен това $|V(\widetilde{G})| = |V(G)| - 1 = m + p + \alpha(G) - 2 = m + p + \alpha(\widetilde{G}) - 2$. Съгласно индуктивната хипотеза $\widetilde{G}$ съдържа като подграф $K_{m-p-3} + L_p$. Следователно $K_{m-p-2} + L_p$ е подграф на G.

Случай 2. *$G' = G - v \overset{v}{\longrightarrow} (a_1, \dots, a_r)$ за някой връх $v \in V(G)$.*

Прилагайки (а) за графа G' получаваме $|V(G')| \geq m + p + \alpha(G') - 1$. Тъй като

$$|V(G')| = |V(G)| - 1 = m + p + \alpha(G) - 2$$

следва, че $\alpha(G') \leq \alpha(G) - 1$. Тъй като $\alpha(G') = \alpha(G - v) \geq \alpha(G) - 1$ имаме $\alpha(G') = \alpha(G) - 1$. Поради това $|V(G')| = m + p + \alpha(G') - 1$. Ако съществува $v' \in V(G')$ такъв, че $G'' = G' - v' \overset{v}{\longrightarrow} (a_1, \dots, a_r)$ по същия начин доказваме, че $|V(G'')| = m + p + \alpha(G'') - 1$ и т.н. Продължавайки тази процедура, в крайна сметка получаваме подграф H на G такъв, че $H \overset{v}{\longrightarrow} (a_1, \dots, a_r)$, $|V(H)| = m + p + \alpha(H) - 1$ и $H - v \overset{v}{\nrightarrow} (a_1, \dots, a_r)$, $\forall\, v \in V(H)$. Съгласно доказаното в Случай 1, H съдържа като подграф $K_{m-p-2} + L_p$. Следователно G също съдържа като подграф $K_{m-p-2} + L_p$.

Теорема 3.5 е доказана

Частният случай $p = 3$, $m = 5$ и $G \overset{v}{\longrightarrow} (3, 3)$ на тази теорема е доказан в съвместната ни работа с Е. Недялков [N2]. Общият случай е публикуван в [N33].

3.4. Върхови числа на Фолкман.

Дефинираме:

$$H_v(a_1,\dots,a_r;q) = \{G : G \xrightarrow{v} (a_1,\dots,a_r) \text{ и } cl(G) < q\};$$

$$F_v(a_1,\dots,a_r;q) = \min\{|V(G)| : G \in H_v(a_1,\dots,a_r)\}.$$

Ясно е, че $G \xrightarrow{v} (a_1,\dots,a_r)$ следва $cl(G) \geq \max\{a_1,\dots,a_r\}$. *Folkman* в [F2] доказва, че съществуват графи

$$G \xrightarrow{v} (a_1,\dots,a_r) \text{ с } cl(G) = \max\{a_1,\dots,a_r\}.$$

Поради това

$$F_v(a_1,\dots,a_r;q) \text{ съществува } \Longleftrightarrow q > \max\{a_1,\dots,a_r\}. \tag{3.22}$$

Числата $F_v(a_1,\dots,a_r;q)$ се наричат върхови числа на Фолкман.

Нека m и p са дефинирани с равенствата (3.1) и (3.2). Тъй като $K_m \xrightarrow{v} (a_1,\dots,a_r)$ и $K_{m-1} \overset{v}{\nrightarrow} (a_1,\dots,a_r)$ имаме

$$F_v(a_1,\dots,a_r;q) = m, \text{ ако } q \geq m+1. \tag{3.23}$$

От (3.22) става ясно, че $F_v(a_1,\dots,a_r;m)$ съществува само когато $m \geq p+1$. *Luczac* и *Urbanski* в [L13] доказват, че $F(a_1,\dots,a_r;m) = m+p$ (във формулировката на този резултат е пропуснато условието $m \geq p+1$). Съгласно (3.22)

$$F_v(a_1,\dots,a_r;m-1) \text{ съществува } \Longleftrightarrow m \geq p+2. \tag{3.24}$$

Много малко е известно за числата $F_v(a_1,\dots,a_r;m-1)$. В тази дисертация даваме оценки за тези числа, които подобряват оценките, получени от други автори. В случаите $p = 2$, 3 и 4 числата $F_v(a_1,\dots,a_r;m-1)$ са пресметнати.

В [L4] е доказано, че $F_v(a_1,\dots,a_r;m-1) \geq m+p+1$. Вярно е обаче следното точно неравенство:

Теорема 3.6. *Нека $a_1,\dots,a_r$ са естествени числа и $m \geq p+2$. Тогава*

$$F(a_1,\dots,a_r;m-1) \geq m+p+2. \tag{3.25}$$

Доказателство. Нека $G \xrightarrow{v} (a_1,\dots,a_r)$ и $cl(G) < m-1$. Трябва да докажем, че $|V(G)| \geq m+p+2$. Съгласно Теорема 3.5, достатъчно е да разгледаме следните два случая:

Случай 1. $|V(G)| > m+p+\alpha(G)-1$.

От $cl(G) < m-1$ и Теорема 3.1. следва, че G не е пълен граф. Поради това $\alpha(G) \geq 2$ и $|V(G)| \geq m+p+2$.

Случай 2. $|V(G)| = m+p+\alpha(G)-1$.

Съгласно Теорема 3.5, G съдържа като подграф $K_{m-p-2} + L_p$. Понеже този подграф има $m+3p$ върха, имаме $|V(G)| \geq m+3p > m+p+2$.

Теорема 3.6 е доказана.

Забележка 3.2. *Както ще стане ясно по-нататък, в случая*

$$a_1 = \ldots = a_r = 2 \quad \textit{и} \quad r \geq 5,$$

неравенството (3.25) е точно.

Теорема 3.6 е публикувана в [N28] и [N33]. Доказателството в [N28] е директно (без използването на Теорема 3.5).

Основните резултати за върховите Фолкманови графи и числа, получени от други автори, са публикувани в: [A1], [B13], [B14], [C1], [F2], [G13], [H2], [J3], [L3], [L4], [L5], [M4], [P3], [U1] и [U2]. Най-съществени са резултатите от [L4].

ГЛАВА 4

ЧИСЛАТА НА ФОЛКМАН $F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1)$ при $m = p+2$.

4.1. Уводни бележки. Да припомним, че

$$F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1) \quad \text{съществува} \iff m \geq p+2,$$

(вж. (3.22)), където m и p са дефинирани с равенствата (3.1) и (3.2). В тази глава ще разгледаме граничния случай $m = p+2$. Съгласно Твърдение 3.1 и Твърдение 3.2, достатъчно е да разгледаме числата $F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1)$, за които

$$2 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_r = p. \tag{4.1}$$

Ако $p = 2$, от $m = p+2$ и (4.1) следва

$$\sum_{i=1}^{r}(a_i - 1) = 3.$$

От последното равенство и (4.1) следва $r = 3$ и $a_1 = a_2 = a_3 = 2$.

Ако $p \geq 3$, от $m = p+2$ и (4.1) получаваме

$$\sum_{i=1}^{r-1}(a_i - 1) = 2.$$

Това равенство и (4.1) ни дават, че $r = 2$ и $a_1 = 3$, $a_2 = p$ или $r = 3$, $a_1 = a_2 = 2$ и $a_3 = p$. И така, съществените числа $F_v(a_1, \ldots a_r; m-1)$ при $m = p+2$ са $F_v(2, 2, p; p+1)$, $p \geq 2$ и $F_v(3, p; p+1)$, $p \geq 3$.

В [M4] *Mycielski* построява 11-върхов граф G с $\chi(G) = 4$ и $cl(G) = 2$. Тъй като

$$G \xrightarrow{v} (2, 2, 2) \iff \chi(G) \geq 4$$

този граф доказва, че $F_v(2, 2, 2; 3) \leq 11$. Chvatal [C1] доказва, че графът на *Mycielski* е единствен 11-върхов граф с хроматично число 4, който няма 3-клики. С това той доказва, че $F(2, 2, 2; 3) \geq 11$. Поради това е вярно равенството

$$F_v(2, 2, 2; 3) = 11, \quad [M4] \text{ и } [C1]. \tag{4.2}$$

Подробно доказателство на равенството (4.2) е дадено и в книгата на Н. Хаджииванов [K7]. Ще отбележим също, че $F_v(2, 2, 2; 3)$ е първото нетривиално пресметнато Фолкманово число.

4.2. Оценки за числата $F_v(2,2,p;p+1)$ и $F_v(3,p;p+1)$.

В [L4] е доказано, че

$$2p+3 \leq F_v(3,p;p+1) \leq 2p^2+1.$$

Ще усилим този резултат по следния начин:

Теорема 4.1. *За всяко естествено число $p \geq 3$ са верни неравенствата*

$$2p+4 \leq F_v(2,2,p;p+1) \leq F_v(3,p;p+1) \leq 4p+2.$$

Доказателство. Неравенството

$$F_v(2,2,p;p+1) \geq 2p+4 \tag{4.3}$$

следва от Теорема 3.6. Съгласно Твърдение 3.4

$$G \xrightarrow{v} (3,p) \Longrightarrow G \xrightarrow{v} (2,2,p).$$

Следователно

$$F_v(2,2,p;p+1) \leq F_v(3,p;p+1). \tag{4.4}$$

Остава да докажем, че $F_v(3,p;p+1) \leq 4p+2.$.

Нека C_{2p+1} е зададен с равенствата (3.12) и (3.13). Дефинираме изображението σ както следва:

$$\sigma(v_i) = v_{i+1}, \quad i = 1,\dots,2p \text{ и } \sigma(v_{2p+1}) = v_1.$$

Разглеждаме множеството $M_i \subseteq V(C_{2p+1})$, $i = 1,\dots,2p+1$, където

$$M_1 = V(C_{2p+1}) - \{v_1, v_{2p-1}, v_{2p-2}\}$$

и

$$M_i = \sigma^{i-1}(M_1), \quad i = 1,\dots,2p+1. \tag{4.5}$$

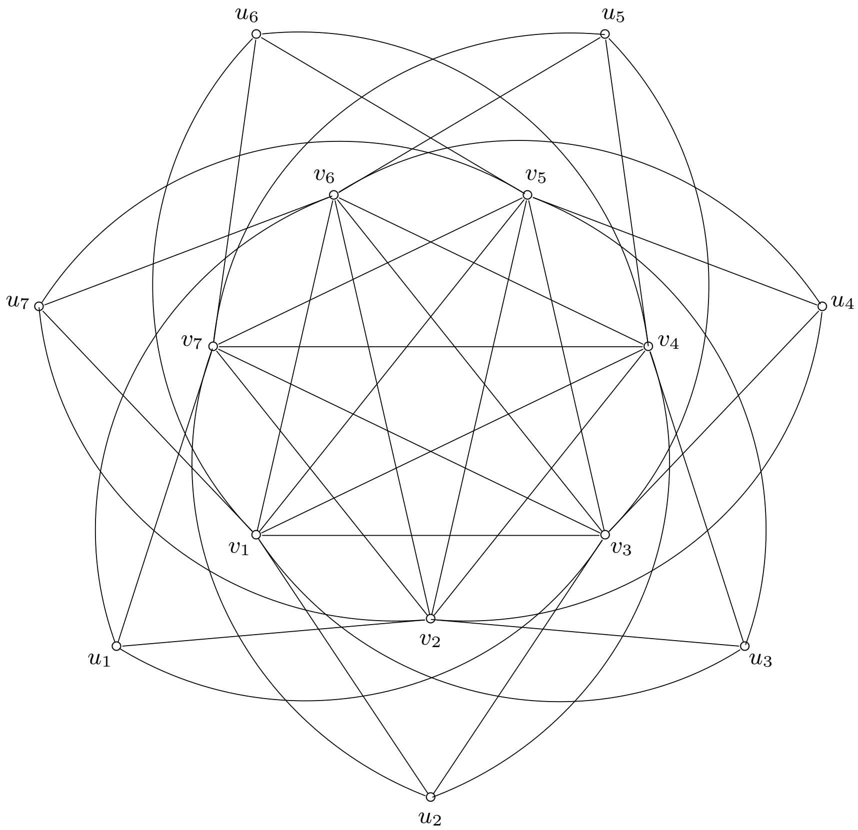
С T_p означаваме графа, който се получава като към $\overline{C}_{2p+1}$ добавим новите върхове $u_1,\dots,u_{2p+1}$, всеки два от които не са съседни и

$$\Gamma_{T_p}(u_i) = M_i, \quad i = 1,\dots,2p+1. \tag{4.6}$$

В специалния случай $p = 3$, графът T_3 е даден на Фиг. 4.1. За пръв път графът T_3 е публикуван в [N16].

Разширяваме σ по следния начин $\sigma(u_i) = u_{i+1},\ i = 1, \dots, 2p$ и $\sigma(u_{2p+1}) = u_1$. Ясно е, че

(4.7) $$\sigma \text{ е автоморфизъм на графа } T_p.$$



Фигура 4.1, граф T_3

Ще докажем, че $cl(T_p) = p$. Понеже очевидно $\overline{C}_{2p+1}$ съдържа p-клика, достатъчно е да се убедим, че T_p не съдържа $(p+1)$-клики. Да допуснем противното и нека Q е $(p+1)$-клика на T_p. Понеже $\overline{C}_{2p+1}$ не съдържа $(p+1)$-клика, следва че за някое $i \in \{1, \dots, 2p+1\}$ имаме $u_i \in Q$. От (4.6) следва, че M_i съдържа p-клика. От (4.5) става ясно, че M_1 също съдържа p-клика. От друга страна

$$\{v_2, v_3\} \cup \ldots \cup \{v_{2p-4}, v_{2p-3}\} \cup \{v_{2p}, v_{2p+1}\}$$

е $(p-1)$-хроматично разлагане за подграфа $T_p\,[M_1]$. Ето защо, този подграф не може да съдържа p-клики. Полученото противоречие доказва, че

(4.8) $$cl(T_p) = p.$$

Ще докажем също, че

$$T_p \xrightarrow{v} (3,p). \tag{4.9}$$

Да допуснем, че това не е така и нека $V_1 \cup V_2$ е $(3,p)$-свободно 2-разлагане на T_p. Ако $V_i' = V(\overline{C}_{2p+1}) \bigcap V_i$ и $G_i = \overline{C}_{2p+1}[V_i']$, $i = 1, 2$, това означава, че

$$cl(G_1) < 3 \text{ и } cl(G_2) < p. \tag{4.10}$$

От (4.10) и Лема 2.1 следва $|V_1'| \leq 4$ и $|V_2'| \leq 2p-2$. От последното неравенство имаме $|V_1'| \geq 3$. И така, $|V_1'| = 3$ или $|V_1'| = 4$. Ще разгледаме тези две възможности поотделно:

Случай 1. $|V_1'| = 3$.
Понеже $cl(G_1) < 3$, V_1' съдържа два несъседни върха на $\overline{C}_{2p+1}$. Съгласно (4.7), можем да предположим, че тези два несъседни върха в V_1' са v_1 и v_2. Да означим третият връх на V_1' с w, т.е. $V_1' = \{v_1, v_2, w\}$. Нека $Q = \{v_{2i+1} : i = 1, \ldots, p\}$. Тъй като Q е p-клика на $\overline{C}_{2p+1}$ и V_2' не съдържа p-клики, някой от върховете на Q не принадлежи на V_2'. Следователно, поне един от върховете на Q принадлежи на V_1'. Понеже $v_1, v_2 \notin Q$, остава единствената възможност $w \in Q$.

Подслучай 1.а. $w \in Q - \{v_{2p-1}, v_{2p+1}\}$.
В този подслучай v_1 и w са съседни и $w \in \Gamma_{T_p}(u_2)$. Понеже също $v_1 \in \Gamma_{T_p}(u_2)$, $[v_1, w, u_2]$ е 3-клика. Тъй като w, $v_1 \in V_1$ и V_1 не съдържа 3-клика, имаме че $u_2 \in V_2$. Дефинираме

$$Q' = \{v_{2k} : \ k = 2, \ldots, p-1\}.$$

Ясно е, че Q' е $(p-2)$-клика на $\overline{C}_{2p+1}$ и

$$Q' \subseteq \Gamma_{T_p}(u_2).$$

Освен това $v_{2p+1} \in V_2'$ и $v_{2p+1} \in \Gamma_{T_p}(u_2)$. Следователно, $Q' \cup \{v_{2p+1}, u_2\}$ е p-клика в V_2. Това противоречи на нашето допускане, че 2-разлагането $V_1 \cup V_2$ е $(3,p)$-свободно.

Подслучай 1.в. $w = v_{2p-1}$, т.е. $V_1' = \{v_1, v_2, v_{2p-1}\}$.
Тъй като $\Gamma_{T_p}(u_{2p}) \supseteq \{v_1, v_{2p-1}\}$, $\{v_1, v_{2p-1}, u_{2p}\}$ е 3-клика. Понеже $v_1, v_{2p-1} \in V_1'$ и V_1 не съдържа 3-клика, следва $u_{2p} \in V_2$. Дефинираме

$$Q'' = Q - \{v_{2p-1}, v_{2p-3}\}.$$

Ясно е, че

$$Q'' \cup \{v_{2p-2}\} \subseteq \Gamma_{T_p}(u_{2p}).$$

Понеже $Q'' \cup \{v_{2p-2}\}$ е $(p-1)$-клика на $\overline{C}_{2p+1}$, от последното включване става ясно, че V_2 съдържа p-клика, което противоречи на нашето допускане, че V_2 не съдържа p-клики.

Подслучай 1.c. $w = v_{2p+1}$, т.е. $V_1' = \{v_1, v_2, v_{2p+1}\}$.
Тъй като $\sigma(V_1') = \{v_1, v_2, v_3\}$, този подслучай е еквивалентен на случая $w = v_3$, който е разгледан в подслучай 1.а.

Случай 2. $|V_1'| = 4$.

От (4.10) следва $\chi(G_1) \leq 2$. Нека $V_1' = W_1 \cup W_2$ е 2-хроматично разлагане на G_1. Тъй като $\alpha(\overline{C}_{2p+1}) = 2$, имаме $|W_1| = |W_2| = 2$. Съгласно (4.7), можем да предположим, че $W_1 = \{v_1, v_2\}$ и $W_2 = \{v_i, v_{i+1}\}$, където $i \in \{3, 4, \ldots, 2p\}$.

Подслучай 2.а. $i = 2k, \quad 2 \leq k \leq p$.
Дефинираме

$$Q_1 = \{v_{2i+1} : i = 1, \ldots, k-1\}.$$

$$Q_2 = \{v_{2i} : i = k+1, \ldots, p\} \text{ ако } k < p \text{ и } Q_2 = \emptyset, \text{ ако } k = p.$$

$$\widetilde{Q} = Q_1 \cup Q_2.$$

Ясно е, че $\widetilde{Q}$ е $(p-1)$-клика на $\overline{C}_{2p+1}$. Тъй като

$$\Gamma_{T_p}(u_4) = V(C_{2p+1}) - \{v_1, v_4, v_{2p+1}\}$$

имаме $\widetilde{Q} \subseteq \Gamma_{T_p}(u_4)$. Следователно, $\widetilde{Q} \cup \{u_4\}$ е p-клика на T_p. Понеже $\widetilde{Q} \subseteq V_2$ и V_2 не съдържа p-клики, имаме $u_4 \in V_1$. Нека $k = 2$. Тогава $V_1' = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$. Поради това $\{u_4, v_2, v_5\}$ е 3-клика в V_1, което е противоречие. Да разгледаме сега ситуацията, когато $3 \leq k \leq p$. Тъй като $v_2, v_{2k} \in V_1'$ и са съседни, $\{v_2, v_{2k}, u_4\}$ е 3-клика на V_1, което отново е противоречие.

Подслучай 2.в. $i = 2k-1, \quad 2 \leq k \leq p$.
Нека $m = 2p - 2k + 3$. Тогава $\sigma^m(v_{2k-1}) = v_1$, $\sigma^m(v_{2k}) = v_2$, $\sigma^m(v_1) = v_{m+1}$ и $\sigma^m(v_2) = v_{m+2}$. Понеже $m+1$ е четно число, от тези равенства и (4.7) следва, че този подслучай е еквивалентен на подслучая 2.а.

И така, доказахме (4.8) и (4.9). Понеже $|V(T_p)| = 4p + 2$, имаме

$$F_v(3, p; p+1) \leq 4p + 2. \tag{4.11}$$

Теорема 4.1 следва от неравенствата (4.3), (4.4) и (4.11).

Съгласно Теорема 4.1 имаме $F_v(3, 3; 4) \leq 14$. Този резултат е подобрение на неравенството $F_v(3, 3; 4) \leq 17$ от [I1] и е публикуван в [N16].

С помощта на компютър, използвайки специални програми от [M2] и техниката, разработена в [N11], [N9], [N20] и [N26], в [P3] е доказано, че $F_v(3, 3; 4) \geq 14$. Поради това е вярно равенството

$$F_v(3, 3; 4) = 14 \ \ [N16] \ \text{ и } \ [P3]. \tag{4.12}$$

Без компютър, най-добрата оценка отдолу е $F_v(3, 3; 4) \geq 12$ и е получена в съвместната ни работа с Е. Недялков [N1]. Теорема 4.1 е публикувана в [N28].

4.3. Оценки за числата $F_v(2,2,p;p+1)$ с помощта на числата на Рамзи $R(3,q)$.

Числото на *Рамзи* $R(3,q)$ е най-малкото естествено число n, за което пълният граф K_n има свойството, че при всяко оцветяване на ребрата му с два цвята има едноцветен триъгълник от първия цвят или едноцветна q-клика от втория цвят. Числото $R(3,q)$ се дефинира еквивалентно и като най-малкото естествено число n, за което всеки n-върхов граф G има $\alpha(G) \geq 3$ или $cl(G) \geq q$. В следващата таблица са дадени всички известни числа $R(3,q)$, [R2]:

q	3	4	5	6	7	8	9	10
$R(3,q)$	6	9	14	18	23	28	36	$40-43$

Таблица 4.1

Ще докажем следната:

Теорема 4.2. *Нека $p \geq 2$, r и q са естествени числа такива, че*

$$R(3,p) + 2r < R(3,q). \tag{4.13}$$

Тогава $F_v(\underbrace{2,\ldots,2}_{r},p;q) \leq R(3,p) + 2r$.

Доказателство. Нека G е граф, такъв че $|V(G)| = R(3,p)+2r$, $cl(G) < q$ и

$$\alpha(G) = 2. \tag{4.14}$$

Съгласно (4.13), такъв граф съществува. Нека $V_1 \cup \ldots \cup V_{r+1}$ е произволно $(r+1)$-разлагане на $V(G)$. Да предположим, че $V_1, \ldots, V_r$ са независими. Тогава от (4.14) следва $|V_i| \leq 2$, $i = 1, \ldots, r$. Следователно $|V_{r+1}| \geq R(3,p)$. Нека $G_1 = G[V_{r+1}]$. От (4.14) имаме $\alpha(G_1) \leq 2$. Тъй като $|V(G_1)| \geq R(3,p)$, от $\alpha(G_1) \leq 2$ следва $cl(G_1) \geq p$, т.е. V_{r+1} съдържа p-клика. С тези разсъждения доказахме, че G няма $(\underbrace{2,\ldots,2}_{r},p)$-свободно $(r+1)$-разлагане, с което доказахме, че

$$G \xrightarrow{v} (\underbrace{2,\ldots,2}_{r},p).$$

Понеже $|V(G)| = R(3,p) + 2r$ и $cl(G) < q$ имаме

$$F_v(\underbrace{2,\ldots,2}_{r},q) \leq R(3,p) + 2r.$$

Теорема 4.2. е доказана.

От Теорема 4.2 ($r = 2$ и $q = p+1$) и от Таблица 4.1 получаваме

Следствие 4.1. *Верни са неравенствата*

$$F_v(2,2,4;5) \leq 13;$$

$$F_v(2,2,6;7) \leq 22;$$
$$F_v(2,2,7;8) \leq 27;$$
$$F_v(2,2,8;9) \leq 32;$$
$$F_v(2,2,9;10) \leq 40, \text{ ако } R(3,10) \neq 40.$$

Първите четири неравенства дават по-добра оценка от Теорема 4.1. За числото $F(2,2,9;10)$ обаче от Теорема 4.1 получаваме по-добрата оценка отгоре 38.

Интересно е да отбележим, че за числото $F(2,2,5;6)$, Теорема 4.2 не е приложима, понеже $R(3,6) = R(3,5) + 4$. Тъй като $R(3,7) > R(3,5) + 6$, от Теорема 4.2 ($r = 3$, $p = 5$ и $q = 7$) следва

$$F_v(2,2,2,5;7) \leq 20. \tag{4.15}$$

Оценките, получени в тази част са публикувани в [N32].

4.4. Пресмятане на числата $F_v(2,2,4;5)$ и $F_v(3,4;5)$.

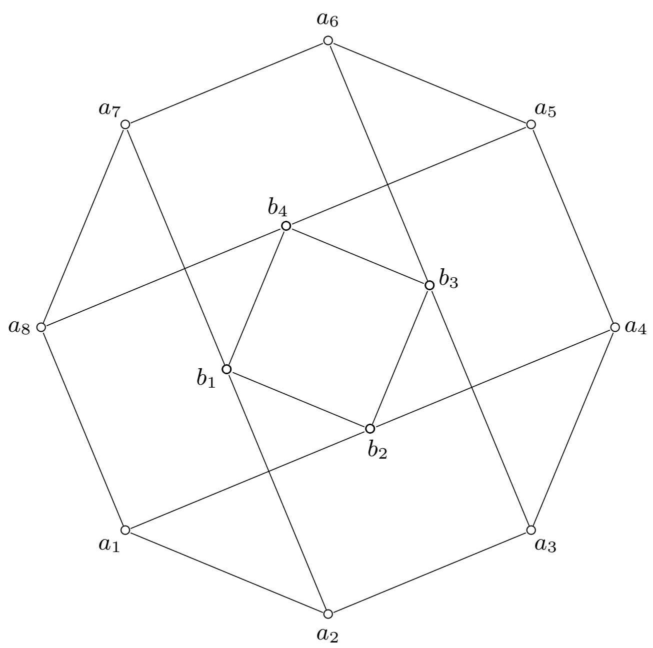
Да разгледаме графа P, допълнението $\overline{P}$ на който е дадено на Фигура 4.2. Всеки от графите $P = P_0, P_1, \dots, P_{11}$ се получава от някой предишен чрез премахване точно на едно ребро. По-точно тези графи се дефинират по следния начин:

$$P_0 = P, \quad P_1 = P_0 - [a_1, a_6], \quad P_2 = P_0 - [a_1, a_5],$$

$$P_3 = P_1 - [a_2, a_5], \quad P_4 = P_1 - [a_4, a_7], \quad P_5 = P_1 - [a_3, a_7],$$

$$P_6 = P_2 - [a_4, a_8], \quad P_7 = P_2 - [a_3, a_7], \quad P_8 = P_3 - [a_4, a_7],$$

$$P_9 = P_7 - [a_2, a_6], \quad P_{10} = P_8 - [a_3, a_8], \quad P_{11} = P_9 - [a_4, a_8].$$



Фигура 4.2, Граф $\overline{P}$

Ще ни е необходима следната

Теорема 4.3 [N42]. *Нека G е 12-върхов граф, $cl(G) = 4$ и $\alpha(G) = 2$. Тогава G е изоморфен на един от графите P_i, $i = 0, \dots, 11$. Между графите P_i, $i = 0, \dots, 11$, няма изоморфни.*

Подробно доказателство на тази теорема е дадено в [N42]. Поради това, че доказателството е обемисто и обременено с много технически детайли, ние не го включваме тук.

Теорема 4.4 [N30]. *Вярно е равенството*

$$F_v(2,2,4;5) = 13.$$

Доказателство. Съгласно Следствие 4.1 имаме $F(2,2,4;5) \leq 13$. Нека $G \xrightarrow{v} (2,2,4)$ и $cl(G) < 5$. За да докажем обратното неравенство, трябва да покажем, че $|V(G)| \geq 13$. Съгласно Теорема 3.6, $|V(G)| \geq 12$. Да допуснем, че $|V(G)| = 12$. От Теорема 3.5 (а) следва, че $\alpha(G) \leq 3$, а от Теорема 3.5 (б) следва $\alpha(G) \neq 3$, т.е. $\alpha(G) \leq 2$. Тъй като $R(3,4) = 9$ имаме $cl(G) = 4$. Съгласно Теорема 4.3, G е изоморфен на някой от графите P_i. Следователно

$$P_i \xrightarrow{v} (2,2,4) \quad \text{за някое} \quad i \in \{0,\dots,11\}.$$

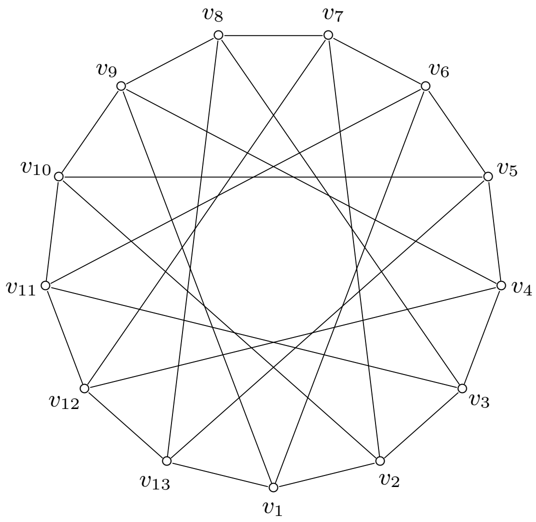
Тъй като всеки от графите P_i е подграф на P, от Твърдение 3.3 имаме

$$P \xrightarrow{v} (2,2,4). \tag{4.16}$$

Да разгледаме 3-разлагането $V(P) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, където $V_1 = \{a_1, a_2\}$ и $V_2 = \{b_1, b_2\}$. Ясно е, че V_1 и V_2 са независими множества на P. Допълнението на подграфа $P[V_3]$ е 8-цикъла $a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, b_3, b_4$, с диагоналите $[b_3, a_6]$ и $[b_4, a_5]$. Лесно се съобразява, че V_3 не съдържа 4-клики на P. И така $V(P) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ е $(2,2,4)$-свободно 3-разлагане на графа P, което противоречи на (4.16).

Теорема 4.4 е доказана.

С Q означаваме 13-върховия граф, допълнителният граф $\overline{Q}$ на който е даден на фигура 4.3. Този граф е построен от *Greenwood* и *Gleasson* в [G14] за доказателството на равенството $R(3,5) = 14$.



Фигура 4.3, граф $\overline{Q}$

Теорема 4.5. *Вярно е, че*

$$Q \xrightarrow{v} (3,4).$$

Доказателство. Нека $V(Q) = V_1 \cup V_2$ е 2-разлагане на Q и $G_1 = Q[V_1]$, $G_2 = Q[V_2]$. Понеже $\alpha(Q) = 2$, имаме

$$\alpha(G_1) \leq 2 \quad \text{и} \quad \alpha(G_2) \leq 2. \tag{4.17}$$

Ще разгледаме следните три случая:

Случай 1. $|V_1| \leq 4$.
В този случай $|V_2| \geq 9$. От (4.17) и равенството $R(3,4) = 9$ следва, че $cl(G_2) \geq 4$, т.е. V_2 съдържа 4-клики на Q. Поради това, 2-разлагането $V_1 \cup V_2$ в Случай 1 не е $(3,4)$-свободно.

Случай 2. $|V_1| \geq 6$.
От (4.17) и равенството $R(3,3) = 6$ следва $cl(G_1) \geq 3$, т.е. V_1 съдържа 3-клика. Това означава, че в Случай 2, разглежданото 2-разлагане не е $(3,4)$-свободно.

Случай 3. $|V_1| = 5$.
Да допуснем, че V_2 не съдържа 3-клика. Този факт заедно с (4.17) ни дава, че $G_1 = \overline{G}_1 = C_5$. Дефинираме

$$E_1 = \{[v_i, v_{i+1}],\ \ i = 1, \ldots, 12\} \cup \{[v_1, v_{13}]\} \subset E(\overline{Q}).$$

Нека $E_2 = E(\overline{Q}) \backslash E_1$. От $|E(\overline{G}_1)| = 5$ следва, че

$$|E(\overline{G}_1) \cap E_1| \geq 3 \quad \text{или} \quad |E(\overline{G}_1) \cap E_2| \geq 3.$$

Тъй като изображението

$$\psi = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} & v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_1 & v_6 & v_{11} & v_3 & v_8 & v_{13} & v_5 & v_{10} & v_2 & v_7 & v_{12} & v_4 & v_9 \end{pmatrix}$$

е автоморфизъм на $\overline{Q}$ и $\psi(E_1) = E_2$, достатъчно е да разгледаме само ситуацията, когато $|E(\overline{G}_1) \cap E_1| \geq 3$. Поради това можем да предположим, че $\exists\, e_1, e_2, e_3 \in E(\overline{G}_1) \bigcap E_1$. Тъй като $|V_1| = 5$, две от ребрата e_1, e_2, e_3 имат общ връх. Нека например e_1 и e_2 са две ребра с общ връх. Понеже $e_1, e_2 \in E_1$, тези ребра са съседни ребра в цикъла $v_1, v_2, \ldots, v_{13}, v_1$. Поради симетрията на $\overline{Q}$, можем да предположим, че $e_1 = [v_1, v_2]$ и $e_2 = [v_2, v_3]$. Също поради симетрията на $\overline{Q}$, достатъчно е да разгледаме ситуацията, когато

$$e_3 \in \{[v_3, v_4],\ \ [v_4, v_5],\ \ [v_5, v_6],\ \ [v_6, v_7],\ \ [v_7, v_8],\ \ [v_8, v_9]\}.$$

От $\overline{G}_1 = C_5$ следва $e_3 \neq [v_4, v_5]$, $e_3 \neq [v_5, v_6]$, $e_3 \neq [v_6, v_7]$ и $e_3 \neq [v_7, v_8]$. Поради това остава да разгледаме следните два подслучая:

Подслучай 3.а. $e_3 = [v_3, v_4]$.
В тази ситуация от $\overline{G}_1 = C_5$ следва $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_9\}$. Тогава 4-кликата $[v_6, v_8, v_{10}, v_{12}]$ на графа Q се съдържа в V_2, което означава, че $V_1 \cup V_2$ не е $(3,4)$-свободно 2-разлагане на Q.

Подслучай 3.в. $e_3 = [v_8, v_9]$, т.е. $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_8, v_9\}$.
В този подслучай V_2 съдържа 4-кликата $[v_4, v_7, v_{10}, v_{13}]$ и следователно 2-разлагането $V_1 \cup V_2$ не е $(3,4)$-свободно разлагане на Q.

И така, всяко 2-разлагане на Q не е $(3,4)$-свободно, което доказва Теорема 4.5.

Следствие 4.2. *Вярно е равенството*

$$F_v(3,4;5) = 13.$$

Доказателство. От (4.4) и Теорема 4.4 имаме $F_v(3,4;5) \geq 13$. Тъй като $cl(Q) = 4$ (вж. [G14]), от Теорема 4.5 следва $F(3,4;5) \leq |V(Q)| = 13$.
Следствие 4.2 е доказано.

Теорема 4.5 и Следствие 4.2 са публикувани в [N31].

4.5. Оценки за числата

$$F_v(\underbrace{2,\ldots,2}_{r},p;r+p-1) \text{ и } F_v(\underbrace{3,\ldots,3}_{r},p;2r+p-1), \quad p \geq 3.$$

За краткост на записването полагаме

$$(\underbrace{q,\ldots,q}_{r}) = (q_r);$$

$$(\underbrace{q,\ldots,q}_{r},p) = (q_r,p).$$

В [L4] са формулирани следните резултати:

$$r+2p+1 \leq F_v(2_r,p;r+p-1) \leq p^2+p+r, \quad r \geq p+2, \quad p \geq 2; \tag{4.17}$$

$$r+2p+1 \leq F_v(2_r,p;r+p-1) \leq 2p^2+3p-rp+2r-3, \quad 3 \leq r \leq p+1; \tag{4.18}$$

$$r+2p+1 \leq F_v(2_r,p;r+p-1) \leq 2p^2+1, \quad r=2, \quad p \geq 3. \tag{4.19}$$

Да припомним, че съгласно (3.24), $r \geq 2$.

Неравенствата (4.17) и (4.19) са доказани в [L4], а неравенството (4.18) е анонсирано също там без доказателство.

Ще усилим неравенствата (4.17), (4.18) и (4.19) по следния начин:

Теорема 4.6. *За всеки две естествени числа $p \geq 3$ и $r \geq 2$ са верни неравенствата*

$$2p+r+2 \leq F_v(2_r,p;r+p-1) \leq 4p+r. \tag{4.20}$$

Забележка 4.1. *Случаят $p=2$ не е включен в Теорема 4.6, тъй като в следващата глава числата $F_v(2_r,2;r+1) = F_v(2_{r+1};r+1)$ ще бъдат пресметнати точно.*

Ще ни са необходими следните леми.

Лема 4.1. *Нека G е граф и $G \xrightarrow{v} (a_1,\ldots,a_r)$. Тогава*

$$K_1+G \xrightarrow{v} (2,a_1,\ldots,a_r). \tag{4.21}$$

Доказателство. Съгласно Твърдение 3.2., (4.21) е еквивалентно на

$$K_1+G \xrightarrow{v} (a_1,\ldots,a_r,2). \tag{4.22}$$

За удобство на записването ще докажем (4.22). Нека $V_1\cup\ldots\cup V_{r+1}$ е $(r+1)$-разлагане на K_1+G и $V(K_1)=\{a\}$. Да предположим, че V_{r+1} е независимо множество. Тогава $V_{r+1}=\{a\}$ или $a \notin V_{r+1}$. Ако $V_{r+1}=\{a\}$, имаме че $V_1\cup\ldots\cup V_r$ е r-разлагане на G. От условието следва, че за някое $i \in 1,\ldots,r$, V_i съдържа a_i-клика. Следователно, разглежданото $(r+1)$-разлагане не е $(a_1,\ldots,a_r,2)$-свободно.

Нека сега разгледаме другата ситуация, когато $a \notin V_{r+1}$. Без ограничение на общността можем да предположим, че $a \in V_r$. Полагаме $V'_r = V_r \backslash \{a\}$. Ясно е, че

$$V_1 \cup \ldots \cup V_{r-1} \cup (V'_r \cup V_{r+1})$$

е r-разлагане на G. Сега нека допуснем, че всяко от подмножествата V_i, където $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ не съдържа a_i-клика. Тогава от условието следва, че $V'_r \cup V_{r+1}$ съдържа a_r-клика. Понеже V_{r+1} е независимо множество, множеството V'_r непременно съдържа $(a_r - 1)$-клика. Заедно с върха a тази $(a_r - 1)$-клика образува a_r-клика в V_r.

И така, всяко $(r+1)$-разлагане на $K_1 + G$ не е $(a_1, \ldots, a_r, 2)$-свободно, с което (4.22) (а с това и (4.21)) е доказано.

Чрез последователно прилагане на Лема 4.1 получаваме

Следствие 4.3. Нека G е граф и $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$. Тогава

$$K_s + G \xrightarrow{v} (2_s, a_1, \ldots, a_r).$$

Лема 4.2. Нека r и s са естествени числа и $2 \leq s \leq r$. Тогава

$$F_v(2_r, p; p + r - 1) \leq F_v(2_s, p; s + p - 1) + r - s.$$

Доказателство. Нека графът G е такъв, че

$$cl(G) < s + p - 1, \ G \xrightarrow{v} (2_s, p) \text{ и } |V(G)| = F_v(2_s, p; s + p - 1).$$

Разглеждаме графа $\widetilde{G} = K_{r-s} + G$. Имаме

$$cl(\widetilde{G}) = cl(K_{r-s}) + cl(G) < r + p - 1.$$

Съгласно Следствие 4.3

$$\widetilde{G} \xrightarrow{v} (2_{r-s}, 2_s, p) = (2_r, p).$$

Следователно

$$F_v(2_r, p; r + p - 1) \leq |V(\widetilde{G})| = F_v(2_s, p; s + p - 1) + r - s.$$

Лема 4.2 е доказана.

Доказателство на Теорема 4.6. Съгласно Теорема 4.1 имаме

$$F_v(2, 2, p; p + 1) \leq 4p + 2.$$

Поради това от Лема 4.2 получаваме

$$F_v(2_r, p; r + p - 1) \leq 4p + r.$$

Неравенството

$$F_v(2_r, p; r + p - 1) \geq 2p + r + 2$$

следва от Теорема 3.6.

Теорема 4.6. е доказана.

Оценките от Следствие 4.1 и (3.25) заедно с Лема 4.2 ни дават, че

$$r+10 \le F_v(2_r,4;r+3) \le r+11, \quad r \ge 2;$$

$$r+14 \le F_v(2_r,6;r+5) \le r+20, \quad r \ge 2;$$

$$r+16 \le F_v(2_r,7;r+6) \le r+25, \quad r \ge 2;$$

$$r+18 \le F_v(2_r,8;r+7) \le r+30, \quad r \ge 2.$$

От (4.15), (3.25) и Лема 4.2 следва, че

$$r+12 \le F_v(2_r,5;r+4) \le r+17, \quad r \ge 3.$$

Накрая на тази глава ще получим оценки за числата

$$F_v(3_r,p;2r+p-1).$$

За тези числа в [L4] е доказано, че

$$F_v(3_r,p;2r+p-1) \le p^2+2r+p, \quad r \ge \frac{p+2}{2}; \tag{4.23}$$

$$F_v(3_r,p;2r+p-1) \le 2p^2+3p-2pr+4r-3, \quad 2 \le r < \frac{p+2}{2}; \tag{4.24}$$

$$F_v(3_r,p;2r+p-1) \le 2p^2+1, \quad r=1. \tag{4.25}$$

Неравенствата (4.23) и (4.25) са доказани в [L4], а (4.24) е анонсирано в [L4] без доказателство.

Ще докажем следното усилване на (4.23), (4.24) и (4.25)

Теорема 4.7. *Нека $p \ge 3$ и $r \ge 1$ са естествени числа. Тогава*

$$2p+2r+2 \le F_v(3_r,p;2r+p-1) \le 4p+2r.$$

За доказателство на Теорема 4.7 ще са ни необходими следните леми:

Лема 4.3. *Нека G е граф и $G \xrightarrow{v} (3_r,p), \quad r \ge 1$. Тогава*

$$K_2+G \xrightarrow{v} (3_{r+1},p).$$

Доказателство. Нека $V_1 \cup \ldots \cup V_{r+2}$ е $(r+2)$-разлагане на K_2+G. Да допуснем, че

$$V_i \quad \text{не съдържа 3-клики}, \quad i=1,\ldots,r+1. \tag{4.26}$$

Нека $V(K_2)=\{a,b\}$. Ще разгледаме следните четири случая:

Случай 1. $a,b \in V_i$ за някое $i \in \{1,\ldots,r+1\}$.
Без ограничение на общността можем да предположим, че $a,b \in V_1$. От (4.26) следва, че $V_1=\{a,b\}$. Поради това

$$V_2 \cup \ldots \cup V_{r+2}$$

е $(r+1)$-разлагане за G. Съгласно условието и (4.26), V_{r+2} съдържа p-клика. Следователно в Случай 1 разглежданото $(r+2)$-разлагане не е $(3_{r+1}, p)$-свободно.

Случай 2. $a \in V_i$, $b \in V_j$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, r+1\}$.
Без ограничение на общността можем да предположим, че $a \in V_1$ и $b \in V_2$. Полагаме $V_1' = V_1 - \{a\}$ и $V_2' = V_2 - \{b\}$. Ясно е, че

$$(V_1' \cup V_2') \cup V_3 \cup \ldots \cup V_{r+2}$$

е $(r+1)$-разлагане на G. От (4.26) следва, че V_1' и V_2' са независими множества. Поради това $V_1' \cup V_2'$ не съдържа 3-клика. Този факт и (4.26) ни дават, че V_{r+2} съдържа p-клика. Поради това, разглежданото $(r+2)$-разлагане на $K_2 + G$ в Случай 2 не е $(3_{p+1}, p)$-свободно.

Случай 3. $a \in V_i$, $i \neq r+2$ и $b \in V_{r+2}$.
Без ограничение на общността можем да предположим, че $a \in V_{r+1}$. Полагаме $V_{r+1}' = V_{r+1} - \{a\}$, $V_{r+2}' = V_{r+2} - \{b\}$. Тогава

$$V_1 \cup \ldots \cup V_r \cup (V_{r+1}' \cup V_{r+2}')$$

е $(r+1)$-разлагане на G. От условието и (4.26) следва, че $V_{r+1}' \cup V_{r+2}'$ съдържа p-клика. Съгласно (4.26), V_{r+1}' е независимо множество. Следователно V_{r+2}' съдържа $(p-1)$-клика. Заедно с върха b, тази $(p-1)$-клика образува p-клика в V_{r+2}. С това доказахме, че и в Случай 3, разглежданото $(r+2)$-разлагане на $K_2 + G$ не е $(3_{r+1}, p)$-свободно.

Случай 4. $a, b \in V_{r+2}$.
Полагаме $V_{r+2}' = V_{r+2} - \{a, b\}$. Ясно е, че

$$V_1 \cup \ldots \cup V_r \cup (V_{r+1} \cup V_{r+2}')$$

е $(r+1)$-разлагане на G. От условието и (4.26) следва, че $V_{r+1} \cup V_{r+2}'$ съдържа p-клика. Тъй като V_{r+1} не съдържа 3-клики (съгласно допускането (4.26)), множеството V_{r+2}' съдържа $(p-2)$-клика. Заедно с върховете a и b тази $(p-2)$-клика образува p-клика в V_{r+2}.

И така, и в Случай 4 разглежданото $(r+2)$-разлагане не е $(3_{r+1}, p)$-свободно, с което Лема 4.3 е доказана.

С последователно прилагане на Лема 4.3 получаваме:

Следствие 4.4. Нека G е граф и $G \xrightarrow{v} (3_r, p)$. Тогава

$$K_{2t} + G \xrightarrow{v} (3_{r+t}, p).$$

Лема 4.4. *Нека r и s са естествени числа и $1 \leq s \leq r$. Тогава е вярно неравенството*

$$F_v(3_r, p; 2r+p-1) \leq F_v(3_s, p; 2s+p-1) + 2(r-s).$$

Доказателство. Нека G е граф такъв, че $cl(G) < 2s+p-1$, $G \xrightarrow{v} (3_s, p)$ и

$$|V(G)| = F_v(3_s, p; 2s+p-1).$$

Разглеждаме графа $\widetilde{G} = K_{2(r-s)} + G$. Имаме

$$cl(\widetilde{G}) = cl(K_{2(r-s)}) + cl(G) < 2r + p - 1.$$

Съгласно Следствие 4.4

$$\widetilde{G} \xrightarrow{v} (3_r, p).$$

Поради това

$$F_v(3_r, p; 2r + p - 1) \leq |V(\widetilde{G})| = F_v(3_s, p; 2s + p - 1) + 2(r - s).$$

Лема 4.4 е доказана.

Доказателство на Теорема 4.7. Съгласно Теорема 4.1 имаме

$$F_v(3, p; p + 1) \leq 4p + 2.$$

От това неравенство и Лема 4.4 получаваме

$$F_v(3_r, p; 2r + p - 1) \leq F_v(3, p; p + 1) + 2(r - 1) \leq 4p + 2r.$$

Неравенството

$$F_v(3_r, 2r + p - 1) \geq 2p + 2r + 2$$

следва от Теорема 3.6.

Теорема 4.7 е доказана.

Теоремите 4.6 и 4.7 са публикувани в [N28]. Оценките, получени след доказателството на Теорема 4.6, са публикувани в [N32].

ГЛАВА 5

ПРЕСМЯТАНЕ НА ФОЛКМАНОВИТЕ ЧИСЛА

$$F_v(a_1,\dots,a_r;q-1)$$

В СЛУЧАЯ, КОГАТО $\max\{a_1,\dots,a_r\}=2$.

5.1. Уводни бележки и формулировки на основния резултат.

Нека $a_1,\dots,a_r$ са естествени числа, такива, че $\max\{a_1,\dots,a_r\}=2$. Тогава

$$m=\sum_{i=1}^{r}(a_i-1)+1=s+1,$$

където s е броят на числата в $\{a_1,\dots,a_r\}$, които са равни на 2. От Твърдение 3.3 следва

$$F_v(a_1,\dots,a_r;m-1)=F_v(2_s;s),$$

където $2_s=(\underbrace{2,\dots,2}_{s})$. Следователно, достатъчно е да разглеждаме само Фолкмановите числа от вида $F_v(2_r;r)$. Съгласно (3.24) имаме

$$F_v(2_r;r)\ \text{ съществува } \iff r\ge 3. \tag{5.1}$$

По-нататък ще ни бъде полезен и следния очевиден факт

$$G\overset{v}{\longrightarrow}(\underbrace{2,\dots,2}_{r})\iff \chi(G)\ge r+1. \tag{5.2}$$

Ще ни са необходими и следните очевидни равенства

$$cl(G_1+G_2)=cl(G_1)+cl(G_2)\ \text{ и }\ \chi(G_1+G_2)=\chi(G_1)+\chi(G_2). \tag{5.3}$$

Първият резултата в тази глава е следната:

Теорема 5.1. *Верни са равенствата*

$$F_v(2_r;r)=11,\ \text{ ако } r=3 \text{ или } r=4; \tag{5.4}$$

$$F_v(2_r;r)=r+5,\ \text{ ако } r\ge 5. \tag{5.5}$$

Равенство (5.4) в случая $r=3$ е вярно съгласно (4.2). Ние ще докажем Теорема 5.1 в останалите случаи $r\ge 4$. Доказателството на (5.5) лесно следва от Теорема 3.6 и е дадено по-долу. Най-трудно е доказателството на Теорема 5.1 в случая $r=4$. Ще разгледаме случая $r=4$ в по-следващия пункт.Равенството(5.5) е публикувано в [N20] през 1983 година. През 1998 година този резултат е повторен в [G13], през 2001 година е преповторен в [L4].

Доказателство на (5.5). Съгласно Теорема 3.6 имаме

$$F_v(2_r;r)\ge r+5$$

Разглеждаме графа $G = K_{r-5}+C_5+C_5$. Понеже $r \geq 5$, графът G е дефиниран (ако $r = 5$, тогава $G = C_5 + C_5$). От равенствата (5.3) имаме

$$cl(G) = r - 1 \quad \text{и} \quad \chi(G) = r + 1.$$

Съгласно (5.2), $G \xrightarrow{v} (2_r)$. Следователно

$$F_v(2_r; r) \leq |V(G)| = r + 5.$$

С това равенството (5.5) е доказано.

Определение 5.1. *Казваме, че графът G е ребрено-критичен k-хроматичен граф, ако $\chi(G) = k$ и $\chi(G') < k$ за всеки собствен подграф G' на G.*

Ясно е, че G е ребрено-критичен k-хроматичен граф тогава и само тогава, когато G е свързан, $\chi(G) = k$ и $\chi(G - e) < k$, $\forall\, e \in E(G)$.

Определение 5.2. *Казваме, че графът G е върхово-критичен k-хроматичен граф, ако $\chi(G) = k$ и $\chi(G - v) < k$, $\forall\, v \in (G)$.*

Ще ни са необходими следните два класически резултата на Gallai:

Теорема 5.2. ([G1], виж също [G2]). *Нека G е върхово-критичен k-хроматичен граф, $k \geq 2$. Ако $|V(G)| < 2k - 1$, тогава $G = G_1 + G_2$, където $V(G_i) \neq \emptyset$, $i = 1, 2$.*

Теорема 5.3. ([G2], виж също[G2]). *Нека G е върхово-критичен k-хроматичен граф, $|V(G)| = n$ и $k \geq 3$. Тогава съществуват поне*

$$\left\lceil \frac{3}{2}\ \left(\frac{5}{3}\, k - n\right) \right\rceil$$

върха в G, всеки от които е съседен на всичките останали $n - 1$ върха на G.

Бележка 5.1. *В оригиналните условия на Теорема 5.2 и Теорема 5.3 графът G е ребрено-критичен k-хроматичен (а не върхово-критичен k-хроматичен). Тъй като всеки върхово-критичен k-хроматичен граф G съдържа ребрено-критичен k-хроматичен подграф H такъв, че $V(G) = V(H)$, формулировките, които даваме тук, са еквивалентни на оригиналните. Формулировките, които ние даваме са по-удобни за следващите приложения.*

Бележка 5.2. *Оригиналното условие на Теорема 5.3 включва също условието $n < \dfrac{5}{3}\, k$. Ние пропускаме това условие, понеже при $n \geq \dfrac{5}{3}\, k$ Теорема 5.3 е вярна по тривиални съображения.*

Накрая на този пункт ще формулираме два широко известни факта, които ще ни бъдат полезни по-нататък.

$$\chi(G) \geq 3 \Longleftrightarrow G \text{ съдържа като подграф прост цикъл с нечетна дължина } [K41]. \tag{5.6}$$

$$\text{ако } \chi(G - v) < k \text{ и } d_G(v) \leq k - 2, \text{ тогава } \chi(G) < k. \tag{5.7}$$

5.2. Едно свойство на 10-върховите графи.

За доказателство на Теорема 5.1 в случая $r = 4$, ще ни е необходима следната:

Теорема 5.4. *За произволен* 10*-върхов граф* G *е вярно едно от следните три твърдения:*

(а) $cl(G) \geq 4$

(б) $\alpha(G) \geq 4$

(в) *G съдържа две* 3*-клики без общ връх и две независими* 3*-върхови множества без общ връх.*

Доказателството на Теорема 5.4 ще направим с помощта на следните леми:

Лема 5.1. *Нека G е* 7*-върхов граф, $cl(G) \leq 3$ и $\alpha(G) = 2$. Нека още*

$$d_G(v) \leq 4, \quad \forall\, v \in V(G).$$

Тогава G е върхово-критичен 4*-хроматичен граф.*

Доказателство. От $\alpha(G) = 2$ очевидно следва, че $\chi(G) \geq 4$. Да допуснем противното, т.е. че $\chi(G - v_0) \geq 4$ за някой връх $v_0 \in V(G)$. Съгласно Теорема 2.1 имаме $G - v_0 = K_1 + C_5$. Следователно G има връх със степен по-голяма от 4, което е противоречие.

Лема 5.2, [N11]. *Нека G е* 7*-върхов* 4*-хроматичен върхово-критичен граф и $\alpha(G) = 2$. Тогава*

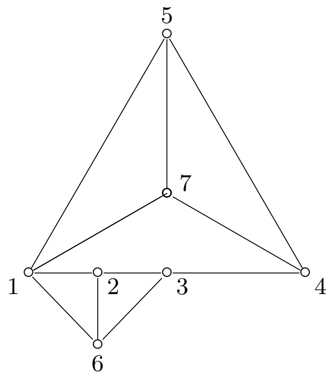
$$3 \leq d_G(v) \leq 4, \qquad \forall\, v \in V(G).$$

Нещо повече, G непременно има връх със степен 4 и ако G има точно един връх със степен 4, тогава G е изоморфен на графа от Фиг. 5.1.

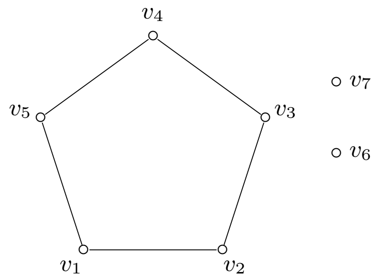
Лема 5.3. *Нека G е граф, такъв, че $|V(G)| \geq 7$, $cl(G) < 3$ и всеки две независими* 3*-върхови множества в G имат общ връх. Тогава $\alpha(G) \geq 4$.*

Доказателство. Нека H е 7-върхов породен подграф на G. Ясно е, че H удовлетворява условията на Лема 5.3. Достатъчно е да докажем, че $\alpha(H) \geq 4$. Ако $\chi(H) < 3$ и $V_1 \cup V_2$ е 2-хроматично разлагане на H, тогава едното от множествата V_1, V_2 има поне 4-върха и следователно $\alpha(H) \geq 4$. Нека $\chi(H) \geq 3$. Съгласно (5.6), H съдържа нечетен цикъл. Тъй като $cl(H) < 3$, това означава, че H съдържа цикъл с дължина 5 без диагонали или $H = C_7$. Втората ситуация обаче не е възможна, понеже C_7 съдържа две независими 3-върхови множества без общ връх.
И така, H съдържа цикъл с дължина 5 без диагонали. Нека този цикъл е v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, а останалите два върха на H да са v_6 и v_7. (виж Фиг. 5.2.)
Понеже в H всеки две независими 3-върхови множества имат общ връх, със сигурност единият от върховете v_6, v_7 е съседен на някой връх от 5-цикъла v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Без ограничение на общността можем да предположим, че v_3 и v_6 са съседни. Тогава от $cl(H) < 3$ следва, че $\{v_6, v_2, v_4\}$ е независимо множество в H. Ако допуснем, че v_2 и v_7 са съседни, от $cl(H) < 3$ следва,

че $\{v_1, v_3, v_7\}$ е независимо множество, което е дизюнктно с $\{v_2, v_4, v_6\}$. Това противоречи на условието. Следователно v_2 и v_7 не са съседни, По същите съображения v_4 и v_7 не са съседни. Ако допуснем, че v_6 и v_7 са съседни, тогава от $cl(H) < 3$ следва, че v_3 и v_7 не са съседни. От $cl(H) < 3$ следва също, че v_7 не е съседен на единия от върховете v_1, v_5. В единия и другия случай, освен независимото множество $\{v_2, v_4, v_6\}$ графът H съдържа или независимото множество $\{v_1, v_3, v_7\}$ или независимото множество $\{v_3, v_5, v_7\}$, което противоречи на условието.



Фигура 5.1



Фигура 5.2

И така v_6 и v_7 не са съседни. Следователно $\{v_2, v_4, v_6, v_7\}$ е независимо множество на H. Поради това $\alpha(H) \geq 4$. Тъй като H е породен подграф на G имаме $\alpha(G) \geq 4$.

Лема 5.3 е доказана.

Лема 5.4. *Нека G е подграф на графа $C_3 + C_5$ такъв, че*

$$V(G) = V(C_3 + C_5) \text{ и } E(G) \supset E(C_3) \cup E(C_5).$$

Тогава $cl(G) \geq 4$ или $\alpha(G) = 3$.

Доказателство. От $E(G) \supset E(C_3) \cup E(C_5)$ следва, че $\alpha(G) \leq 3$. Ясно е, че $\alpha(G) \geq 2$. Следователно, $\alpha(G) = 2$ или $\alpha(G) = 3$. Да допуснем, че $\alpha(G) = 2$. Нека $V(C_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$. Дефинираме

$$G_i = G\Big[\Gamma_G(v_i)\Big], \quad i = 1, 2, 3.$$

От $\alpha(G) = 2$ следва, че

$$\Big|E(G_i) \cap E(C_5)\Big| \geq 2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Тъй като $\Big|E(C_5)\Big| = 5$, от последните неравенства става ясно, че $\exists\ i \neq j$ такива, че

$$E(C_5) \cap E(G_i) \cap E(G_j) \neq \emptyset,$$

което означава, че върховете v_i и v_j заедно с два съседни върха на C_5 образуват 4-клика. Поради това $cl(G) \geq 4$.

Лема 5.4 е доказана.

Лема 5.5. *Нека G е 9-върхов граф с $cl(G) \leq 3$. Тогава $\chi(G) \leq 4$.*

Доказателство. Да допуснем противното, т.е. $\chi(G) \geq 5$. Съгласно (5.2) имаме

$$G \xrightarrow{v} (2,2,2,2).$$

От Теорема 3.5 (а) ($m = 5$, $r = 4$ и $p = 2$) имаме $\alpha(G) \leq 3$. От равенството $R(3,4) = 9$ и $cl(G) \leq 3$ следва $\alpha(G) \geq 3$. Поради това $\alpha(G) = 3$. От последното равенство и Теорема 3.5 (б) получаваме

$$|V(G)| \geq |V(K_1 + L_2)| = 11,$$

което е противоречие.

Лема 5.5 е доказана.

Доказателство на Теорема 5.4. Да допуснем, че твърденията (а) и (б) не са верни, т.е. $cl(G) < 4$ и $\alpha(G) < 4$. Ще докажем, че от тези неравенства следва (в). При това, достатъчно е да докажем само втората част на (в), т.е. че G има две независими 3-върхови множества, които нямат общ връх (защото това свойство ще има и графа $\overline{G}$, което е точно първата част на (в)).

И така,ще докажем че от $cl(G) < 4$ и $\alpha(G) < 4$ следва, че G има две дизюнктни 3-върхови независими множества. Ще разгледаме следните четири случая:

Случай 1. *$d_G(v_0) \geq 7$ за някой връх $v_0 \in V(G)$.*
Нека $G_0 = G[\Gamma_G(v_0)]$. От $cl(G) < 4$ следва, че $cl(G_0) < 3$, а от $\alpha(G) < 4$ следва $\alpha(G_0) < 4$. От Лема 5.3 следва, че G_0 има две дизюнктни и независими 3-върхови множества. Понеже G_0 е породен подграф, тези дизюнктни и независими 3-върхови множества ще бъдат такива и за G.

Случай 2. *$d_G(v_0) \leq 3$ за някой връх $v_0 \in V(G)$.*
Нека $G' = G - v_0$. Съгласно Лема 5.5 имаме $\chi(G') \leq 4$. От (5.7) следва $\chi(G) \leq 4$. Нека $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ е 4-хроматично разлагане на G. Понеже $\alpha(G) < 4$, две от подмножествата V_i, $i = 1,2,3,4$ са 3-елементни. Поради това G съдържа две дизюнктни и независими 3-върхови множества.

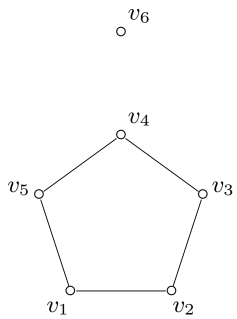
Случай 3. *$d_G(v_0) = 6$ за някой връх $v_0 \in V(G)$.*
Нека $G_0 = G[\Gamma_G(v_0)]$. Да допуснем най-напред, че $\chi(G_0) \leq 2$. Нека $V_1 \cup V_2$ е 2-хроматично разлагане на G_0. Тогава от $\alpha(G) < 4$ следва $|V_1| = |V_2| = 3$. Следователно V_1 и V_2 са независими и дизюнктни 3-върхови множества. По-нататък ще предполагаме, че $\chi(G_0) \geq 3$. Съгласно (5.6), графът G_0 съдържа нечетен цикъл. От $cl(G) < 4$ следва $cl(G_0) < 3$. Поради това G_0 съдържа 5-цикъл без диагонали. Нека този 5-цикъл е v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 и v_6 е върхът на G_0 извън този цикъл. От $cl(G_0) < 3$ следва, че $d_{G_0}(v_6) \leq 2$. С тези разсъждения изяснихме, че G_0 съвпада с един от графите на Фиг. 5.3., Фиг. 5.4. и Фиг. 5.5.
Нека a, b и c са върховете на G, които са различни от v_0 и не са съседни на v_0. Да допуснем, че два от тези върхове, например a и b, не са съседни. Тогава $\{v_0, a, b\}$ е независимо множество. Тъй като G_0 съдържа независимо 3-върхово множество (виж Фиг. 5.3, 5.4 и 5.5), в тази ситуация G съдържа дизюнктни 3-върхови независими множества. Поради това по-нататък ще

предполагаме, че

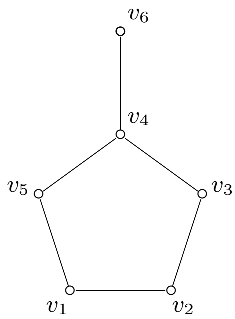
$$\{a, b, c\} \quad \textit{е 3-клика на графа} \quad G. \tag{5.8}$$

Прилагайки Лема 5.4. за подграфа $G_1 = G - \{v_0, v_6\}$, получаваме, че G_1 съдържа независимо 3-върхово множество. Поради това имаме:

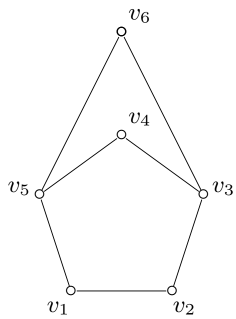
$$\begin{array}{l}\textit{единият от върховете } a, b, c \text{ заедно с два} \\ \textit{несъседни върха от 5-цикъла } v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \\ \textit{образува независимо 3-върхово множество на } G\end{array} \tag{5.9}$$



Фигура 5.3



Фигура 5.4



Фигура 5.5

Ще разгледаме трите възможности за G_0 както следва:

Подслучай 3.а. *G_0 съвпада с графа на Фиг. 5.3.*
Съгласно (5.9), можем да предположим, че $\{a, v_1, v_3\}$ е независимо множество на графа G. Това независимо множество и независимото множество $\{v_2, v_4, v_6\}$ са дизюнктни, така че в този подслучай Теорема 5.4 е доказана.

Подслучай 3.в. *G_0 съвпада с графа на Фиг. 5.4.*
Съгласно (5.9), можем да считаме, че едно от множествата

$$\{a, v_1, v_3\}, \quad \{a, v_1, v_4\}, \quad \{a, v_2, v_4\}, \quad \{a, v_2, v_5\}, \quad \{a, v_3, v_5\} \tag{5.10}$$

е независимо. Ако едно от първите четири от тези множества е независимо, тогава v_6 заедно с други два несъседни върха на 5-цикъла v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 образува независимо 3-върхово независимо множество, което е дизюнктно с независимото множество от (5.10). Поради това, остава да разгледаме ситуацията, когато $\{a, v_3, v_5\}$ е независимо множество и върхът a е съседен на v_1 и v_2. От $\alpha(G) < 4$ следва, че a и v_6 са съседни. Поради това, от $cl(G) < 4$ следва, че върхът v_6 не е съседен на единия от върховете b и c. Без ограничение на общността можем да предположим, че b и v_6 не са съседни, Тъй като a е съседен на v_1 и v_2 и $cl(G) < 4$, върхът b не е съседен на v_1 или v_2. В единия и в другия случай получаваме независимо 3-върхово множество, което е дизюнктно с $\{a, v_3, v_5\}$.

Подслучай 3.с. *G_0 съвпада с графа от Фиг. 5.5.*

Както и в Подслучай 3.в. можем да предположим, че едно от подмножествата в (5.10) е независимо. Всяко от подмножествата

$$\{a, v_1, v_3\}, \quad \{a, v_2, v_5\}, \quad \{a, v_3, v_5\} \tag{5.11}$$

е дизюнктно или с $\{v_1, v_4, v_6\}$ или с $\{v_2, v_4, v_6\}$. Поради това, ако едно от подмножествата в (5.11) е независимо, твърдението е доказано. Нека множествата в (5.11) не са независими. Понеже сме допуснали, че в (5.10) има независимо множество или $\{a, v_2, v_4\}$, или $\{a, v_1, v_4\}$ е независимо. Поради симетрията, достатъчно е да разгледаме случая, когато $\{a, v_1, v_4\}$ е независимо. Тъй като в разглеждания подслучай върховете v_4 и v_6 са равноправни (виж Фиг. 5.5), по същия начин стигаме до извода, че единия от върховете a, b, c заедно с $\{v_2, v_6\}$ или с $\{v_1, v_6\}$ образува независимо множество. От допускането, че $\{a, v_1, v_4\}$ е независимо и $\alpha(G) < 4$ следва, че a и v_6 са съседни. Следователно, $\{a, v_2, v_6\}$ и $\{a, v_1, v_6\}$ не са независими. С тези разсъждения доказахме, че едно от множествата

$$\{v_1, v_6, b\}, \quad \{v_1, v_6, c\}, \quad \{v_2, v_6, b\}, \quad \{v_2, v_6, c\}$$

е независимо. Ако $\{v_2, v_6, .b\}$ или $\{v_2, v_6, c\}$ е независимо, тогава то ще бъде дизюнктно с независимото множество $\{a, v_1, v_4\}$. Остава да разгледаме ситуацията, когато $\{v_1, v_6, b\}$ или $\{v_1, v_6, c\}$ е независимо. Върховете b и c в разглежданата ситуация са равноправни. Поради това можем да предположим, че $\{v_1, v_6, b\}$ е независимо. Ако върхът a не е съседен на v_3, тогава $\{a, v_1, v_3\}$ и $\{v_2, v_4, v_6\}$ са дизюнктни независими множества. Ако върхът b не е съседен на v_3, тогава $\{b, v_1, v_3\}$ и $\{v_2, v_4, v_6\}$ са дизюнктни независими множества. Нека върхът v_3 е съседен на a и b. Тогава от $cl(G) < 4$ следва, че върхът v_2 не е съседен или на a или на b. Ако v_2 и a не са съседни, $\{v_2, v_4, a\}$ и $\{v_1, v_6, b\}$ са независими дизюнктни множества. Ако v_2 и b не са съседни, тогава $\{v_2, v_6, b\}$ и $\{v_1, v_4, a\}$ са независими дизюнктни множества.

Случай 4. *Верни са неравенствата*

$$4 \leq d_G(v) \leq 5, \quad \forall\, v \in V(G). \tag{5.12}$$

От $R(3, 4) = 9$ и $cl(G) < 4$ следва, че G съдържа независимо множество $\{w_1, w_2, w_3\}$. Нека

$$H = G - \{w_1, w_2, w_3\}.$$

Ясно е, че ако $\alpha(H) = 3$, тогава G има две независими и дизюнктни 3-върхови множества. Поради това ще предполагаме, че $\alpha(H) = 2$. От $\alpha(G) < 4$ следва, че всеки връх на H е съседен на поне един от върховете w_1, w_2, w_3. Поради това от (5.12) следва

$$d_H(v) \leq 4, \quad \forall\, v \in V(H). \tag{5.13}$$

Изяснихме, че H удовлетворява условията на Лема 5.1, с което доказахме, че H е върхово-критичен 4-хроматичен граф. Съгласно Лема 5.2 имаме

$$d_H(v) \geq 3, \quad \forall\, v \in V(H). \tag{5.14}$$

Дефинираме

$$l = |E(G) \setminus E(H)|.$$

Понеже $\{w_1, w_2, w_3\}$ е независимо множество, за l е вярно равенството

$$l = d_G(w_1) + d_G(w_2) + d_G(w_3). \tag{5.15}$$

От (5.15) и (5.12) следва

$$l \geq 12. \tag{5.16}$$

Да означим с x броя на върховете $v \in V(H)$ с $d_H(v) = 3$. От (5.13) и (5.14) става ясно, че броят на върховете на H, които имат степен 4 в H е равен на $7 - x$. От (5.12) следва, че всеки от върховете на H, който има степен 3 в H е съседен най-много на два от върховете $\{w_1, w_2, w_3\}$, а всеки от върховете на H, който има степен 4 в H е съседен най-много на един от върховете $\{w_1, w_2, w_3\}$. Поради това е вярно неравенството

$$l \leq 2x + (7 - x) = x + 7. \tag{5.17}$$

От (5.16) и (5.17) следва $x \geq 5$. Понеже броят на върховете с нечетна степен в даден граф е четно число, трябва $x = 6$. Следователно H е върхово-критичен 4-хроматичен граф, който има единствен връх със степен 4. Съгласно Лема 5.2, H съвпада с графа от Фиг. 5.1. От $\alpha(G) < 4$ следва, че върхът 1 е съседен на някои от върховете $\{w_1, w_2, w_3\}$. Нека например 1 и w_1 са съседни. Тогава от (5.12) правим извода, че $\{1, w_2, w_3\}$ е независимо множество. От $cl(G) < 4$ следва, че w_1 не е съседен на един от върховете 5 и 7, а също така че w_1 не е съседен на един от върховете 2 и 6. Поради това, едно от множествата

$$\{w_1, 5, 2\}, \quad \{w_1, 5, 6\}, \quad \{w_1, 7, 2\}, \quad \{w_1, 7, 6\}$$

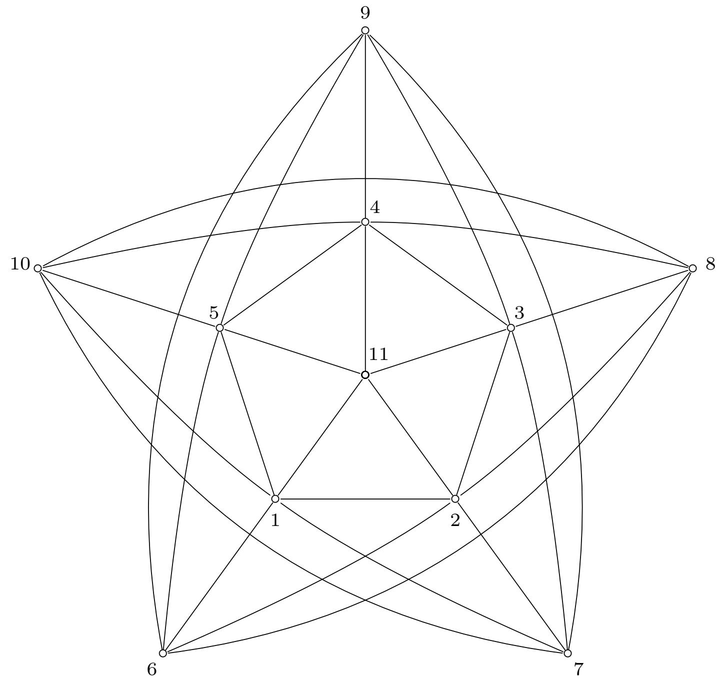
е независимо и дизюнктно с независимото множество $\{1, w_2, w_3\}$.

Теорема 5.4 е доказана.

Теорема 5.4 е публикувана в [N21].

5.3. Доказателство на равенството (5.4) в случая $r = 4$.

I. Доказателство на неравенството $F_v(2,2,2,2;4) \leq 11$. Да разгледаме графа G на фиг. 5.6.



Фиг. 5.6.

Ще докажем, че $G \xrightarrow{v} (2,2,2,2)$, т.е. че G не е 4-хроматичен граф. Нека $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ е произволно 4-разлагане на $V(G)$. Дефинираме подграфа $G_1 = G[1,2,3,4,5]$. Ясно е, че $G_1 = C_5$. Нека

$$V_i' = V(G_1) \cap V_i, \quad i = 1,2,3,4.$$

Ако две от множествата V_i' са празни, тогава непременно едно от другите две множества съдържа съседни върхове, понеже $\chi(G_1) = 3$. Поради това, в тази ситуация, $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ не е 4-хроматично разлагане на G.

Да допуснем сега, че и четирите множества V_i' не са празни. Тогава, ако $11 \in V_i$, непременно 11 е съседен на върховете от $V_i' \subseteq V_i$. Следователно, и в тази ситуация $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ не е 4-хроматично разлагане на G.

Остава да разгледаме ситуацията, когато точно три от множествата V_i' не са празни. Без ограничение на общността можем да предположим, че $V_i' \neq \emptyset$, $i = 1,2,3$ и $V_4' = \emptyset$. Да допуснем, че

(5.18) $$V_1, V_2, V_3 \text{ са независими множества на } G.$$

Тогава V'_1, V'_2 и V'_3 също са независими. Понеже $\alpha(C_5) = 2$, следва че $|V'_i| \leq 2$. Поради това две от множествата V'_i, $i = 1, 2, 3$ имат точно по два върха, а третото има точно един връх. Тъй като изображението

$$\varphi = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5)(6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10)(11) \in S_{11}$$

е автоморфизъм на графа G и степените на φ действат транзитивно на $V(G_1)$, достатъчно е да разгледаме само ситуацията, когато

$$V'_1 = \{1\} \quad \text{и} \quad |V'_2| = |V'_3| = 2.$$

От това, че V'_2 и V'_3 са независими, следва че

$$V'_2 = \{2, 4\} \quad \text{и} \quad V'_3 = \{3, 5\}.$$

Понеже $1 \in V'_1$, $2 \in V'_2$, $3 \in V'_3$ и $1, 2, 3 \in \Gamma_G(7)$, от (5.18) следва $7 \in V_4$. Понеже $1 \in V'_1$, $4 \in V'_2$, $5 \in V'_3$ и $1, 4, 5 \in \Gamma_G(10)$, от (5.18) следва $10 \in V_4$. И така $7, 10 \in V_4$. Понеже 7 и 10 са съседни, доказахме че $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ не е 4-хроматично разлагане на G. С това доказахме, че $G \xrightarrow{v} (2, 2, 2, 2)$. Очевидно $cl(G) = 3$. Следователно

$$F_v(2, 2, 2, 2; 4) \leq |V(G)| = 11.$$

II. Доказателство на неравенството$F_v(2, 2, 2, 2; 4) \geq 11$.

Съгласно Лема 5.5 имаме $F_v(2, 2, 2, 2; 4) \geq 10$. Поради това, трябва да докажем, че $F_v(2, 2, 2, 2; 4) \neq 10$, т.е. трябва да докажем, че всеки 10-върхов граф, който не съдържа 4-клики има 4-хроматично разлагане.

И така, нека G е произволен 10-върхов граф с $cl(G) < 4$. Да допуснем, че съществуват два несъседни върха $v_1, v_2 \in V(G)$, такива че $\Gamma_G(v_1) \subseteq \Gamma_G(v_2)$. Разглеждаме подграфа $G_1 = G - \{v_1\}$. Съгласно Лема 5.5, G_1 има 4-хроматично разлагане $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$. Ако $v_2 \in V_1$, тогава

$$(V_1 \cup \{v_1\}) \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$$

е 4-хроматично разлагане на G. Съгласно тези разсъждения по-нататък можем да предположим, че

$$\Gamma_G(v_i) \nsubseteq \Gamma_G(v_j) \ \text{ за всеки два несъседни върха } \ v_i, v_j \in V(G). \tag{5.19}$$

Да допуснем, че $\exists\, v_0 \in V(G)$, такъв че $d_G(v_0) = 9$. Нека $G_0 = G - v_0$. От $cl(G) < 4$ следва $cl(G_0) < 3$. Съгласно (4.2), $\chi(G_0) \leq 3$. Поради това $\chi(G) \leq 4$. Нека $d_G(v) \neq 9$, $\forall\, v \in V(G)$. От (5.19) следва, че $d_G(v) \neq 8$, $\forall\, v \in V(G)$. Ето защо за разглеждания граф G ще предполагаме, че

$$d_G(v) \leq 7, \quad \forall\, v \in V(G). \tag{5.20}$$

Ще разгледаме следните две възможности:

Случай 1. $\alpha(G) \geq 4$.
Нека $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ е независимо множество на G и $G_1 = G - \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Ако $\chi(G_1) \leq 3$, тогава $\chi(G) \leq 4$. Нека $\chi(G_1) \geq 4$. Понеже $cl(G_1) \leq 3$, от Теорема 2.1 следва, че $G_1 = K_1 + C_5$. Нека $V(K_1) = \{v'\}$. Съгласно (5.20),

върхът v' не е съседен на някой от върховете v_1, v_2, v_3, v_4. Нека например v' и v_1 не са съседни. Тогава $\Gamma_G(v_1) \subseteq \Gamma_G(v')$, което противоречи на (5.19).

Случай 2. $\alpha(G) < 4$.
Съгласно Теорема 5.4, графът G има две независими и дизюнктни множества $\{v_1, v_2, v_3\}$ и $\{v_4, v_5, v_6\}$. Нека останалите върхове на G са v_7, v_8, v_9 и v_{10}. От $cl(G) < 4$ следва, че два от тези върхове не са съседни. Нека, например, v_7 и v_8 не са съседни. Ако v_9 и v_{10} също не са съседни, тогава

$$\{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} \cup \{v_7, v_8\} \cup \{v_9, v_{10}\}$$

е 4-хроматично разлагане на G. Поради това ще считаме, че v_9 и v_{10} са съседни.

Нека всеки от върховете v_1, v_2, v_3 не е съседен на някой от върховете v_9 и v_{10}. Да означим с V_1 множеството на върховете v_1, v_2, v_3, които не са съседни на v_9 и самия връх v_9. С V_2 означаваме тези от върховете v_1, v_2, v_3, които не са в V_1 и върха v_{10}. Ясно е, че

$$V_1 \cup V_2 \cup \{v_4, v_5, v_6\} \cup \{v_7, v_8\}$$

е 4- хроматично разлагане на G. Поради това, можем да считаме, че поне един от върховете v_1, v_2, v_3 е съседен на v_9 и v_{10}. По същия начин се доказва, че поне един от върховете v_4, v_5, v_6 е съседен на v_9 и v_{10}, а също така, че поне един от върховете v_7, v_8 е съседен на v_9 и v_{10}. От тези разсъждения следва, че можем да предположим, че

$$\Gamma_G(v_9, v_{10}) \supseteq \{v_1, v_4, v_7\}.$$

Понеже $cl(G) < 4$ и $\alpha(G) < 4$ следва, че $\{v_1, v_4, v_7\}$ е независимо множество и

$$\Gamma_G(v_9, v_{10}) = \{v_1, v_4, v_7\}. \tag{5.21}$$

От (5.21) следва, че върхът v_8 не е съседен на единия от върховете v_9, v_{10}. Нека, например, v_8 и v_9 не са съседни. Ще разгледаме два подслучая:

Подслучай 2.а. Върховете v_8 и v_{10} не са съседни.
Съгласно (5.21) върхът v_5 не е съседен на един от върховете v_9, v_{10}. Без ограничение на общността можем да предположим, че v_5 и v_9 не са съседни. Ако v_6 и v_9 не са съседни, тогава

$$\{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_5, v_6, v_9\} \cup \{v_4, v_7\} \cup \{v_8, v_{10}\}$$

е 4-хроматично разлагане на G. Нека v_6 и v_9 са съседни. Тогава от (5.21) следва, че v_6 и v_{10} не са съседни.

Ако v_5 и v_{10} не са съседни, тогава

$$\{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_7\} \cup \{v_5, v_6, v_{10}\} \cup \{v_8, v_9\}$$

е 4-хроматично разлагане. Поради това ще предполагаме, че v_5 и v_{10} са съседни.

И така

$$[v_5, v_9],\ [v_6, v_{10}] \notin E(G) \quad \text{и} \quad [v_5, v_{10}],\ [v_6, v_9] \in E(G).$$

Разсъждавайки за върховете v_2 и v_3 по същия начин, както по-горе разсъждавахме за v_5 и v_6, стигаме до ситуацията, когато

$$[v_2, v_9],\ [v_3, v_{10}] \notin E(G) \quad \text{и} \quad [v_3, v_9],\ [v_2, v_{10}] \in E(G).$$

Ако v_5 и v_7 не са съседни, тогава

$$\{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5, v_7\} \cup \{v_6, v_{10}\} \cup \{v_8, v_9\}$$

е 4- хроматично разлагане на G. По същия начин се убеждаваме, че когато v_7 не е съседен на някой от върховете v_2, v_3, v_6 графът G има 4-хроматично разлагане. Поради това остава да разгледаме ситуацията, когато v_7 е съседен на v_2, v_3, v_5, v_6. В тази ситуация имаме

$$\Gamma_G(v_7) \supseteq \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_9, v_{10}\}. \tag{5.22}$$

От $cl(G) < 4$ и (5.22) следва, че

$$[v_3, v_6] \notin E(G) \quad \text{и} \quad [v_2, v_5] \notin E(G).$$

Ето защо

$$\{v_1, v_4\} \cup \{v_2, v_5, v_9\} \cup \{v_3, v_6, v_{10}\} \cup \{v_7, v_8\}$$

е 4-хроматично разлагане на G.

Подслучай 2.в. Върховете v_8 и v_{10} са съседни.

Ако v_{10} не е съседен на v_2 и v_3, тогава

$$\{v_1, v_7\} \cup \{v_2, v_3, v_{10}\} \cup \{v_8, v_9\} \cup \{v_4, v_5, v_6\}$$

е 4-хроматично разлагане на G. Ако v_{10} не е съседен на v_5 и v_6, тогава

$$\{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_7\} \cup \{v_5, v_6, v_{10}\} \cup \{v_8, v_9\}$$

е 4-хроматично разлагане на G. Поради това остава да разгледаме ситуацията, когато v_{10} е съседен на един от върховете v_2, v_3 и на един от върховете v_5, v_6. Без ограничение на общността можем да предположим, че

$$[v_3, v_{10}] \in E(G) \quad \text{и} \quad [v_6, v_{10}] \in E(G).$$

От (5.20) следва, че v_{10} не е съседен на v_2 и v_5, а от (5.21) следва, че v_9 не е съседен на v_3 и v_6. Ако $v_1, v_4, v_3, v_6 \in \Gamma_G(v_8)$, тогава

$$\Gamma_G(v_8, v_{10}) \supseteq \{v_1, v_4, v_3, v_6\}.$$

От $cl(G) < 4$ следва, че $\{v_1, v_4, v_3, v_6\}$ е независимо множество, което противоречи на условието $\alpha(G) < 4$ в разглеждания случай.

Нека v_8 не е съседен на някой от върховете v_1, v_4, v_3, v_6. Ако v_8 не е съседен на един от върховете v_3, v_6, например v_8 не е съседен на v_3, тогава

$$\{v_1, v_7\} \cup \{v_2, v_{10}\} \cup \{v_3, v_8, v_9\} \cup \{v_4, v_5, v_6\}$$

е 4-хроматично разлагане на графа G. Ако v_8 не е съседен на един от върховете v_1, v_4, например v_8 не е съседен на v_4, тогава

$$\{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_5, v_{10}\} \cup \{v_6, v_9\} \cup \{v_4, v_7, v_8\}$$

е 4-хроматично разлагане на графа G.

Неравенството $F_v(2,2,2,2;4) \geq 11$ е доказано, а с това доказателството на равенството (5.4), в случая $r = 4$, е доказано.

Неравенството $F_v(2,2,2,2;4) \leq 11$ е от дисертацията [N12] и е публикувано в [N20]. За независимост и пълнота на изложението включваме доказателството му и тук. Окончателното пресмятане на $F_v(2,2,2,2;4)$ е направено през 1984 г. и публикувано в [N22]. През 1987 г. B. Toft поставя като проблем пресмятането на числото $F_v(2,2,2,2;4)$. Поради това през 1993 г. в [H2] и през 1995 г. в [J3] това число е пресметнато отново. Странното в тази ситуация е това, че в [H2] и [J3] се цитира нашата работа [N22]. Това наложи повторното публикуване на равенството $F_v(2,2,2,2;4) = 11$ в [N27].

5.4. Усилване на Теорема 5.1, когато $r \geq 5$.

В този пункт ще усилим равенството (5.5) по следния начин

Теорема 5.5. *Нека G е граф такъв, че*

$$G \xrightarrow{v} (2_r), \quad cl(G) < r \ \text{и} \ |V(G)| = F_v(2_r; r),$$

където $r \geq 5$. Тогава $G = K_{r-5} + C_5 + C_5$.

Съгласно (5.2), Теорема 5.4. може да се формулира по следния еквивалентен начин:

Теорема 5.6. *Нека G е граф такъв, че $\chi(G) \geq r + 1$ и $cl(G) < r$, където $r \geq 5$. Тогава*

$$|V(G)| \geq r + 6 \quad \text{или} \quad G = K_{r-5} + C_5 + C_5.$$

Доказателство на Теорема 5.6. Нека G удовлетворява условията на Теорема 5.6 и да допуснем, че $|V(G)| \leq r + 5$. Трябва да докажем, че $G = K_{r-5} + C_5 + C_5$. От (5.5) и (5.2) следва, че

(5.23) $\qquad G$ е върхово-критичен $(r + 1)$ – хроматичен граф.

Доказателството на равенството $G = K_{r-5} + C_5 + C_5$ ще направим по индукция относно r. Понеже $r \geq 5$, базата на индукцията е $r = 5$. В тази ситуация трябва да докажем, че ако $cl(G) < 5$, $\chi(G) \geq 6$ и $|V(G)| \leq 10$, тогава $G = C_5 + C_5$. От (5.23) и Теорема 5.2 следва, че $G = G_1 + G_2$. Ще докажем, че

(5.24) $$cl(G_1) = cl(G_2) = 2$$

и

(5.25) $$\chi(G_i) \geq 3, \quad i = 1, 2.$$

Съгласно (5.3) имаме $cl(G_1) + cl(G_2) = cl(G) < 5$. Поради това, равенствата (5.24) ще бъдат доказани, ако докажем, че $cl(G_i) \geq 2$, $i = 1, 2$. Да допуснем противното и нека, например, $cl(G_1) = 1$. Тогава $\chi(G_1) = 1$. От (5.3) получаваме $cl(G_2) < 4$ и $\chi(G_2) \geq 5$. От (5.2) и Теорема 5.1. ($r = 4$) следва $|V(G_2)| \geq 11$, което противоречи на допускането, че $|V(G)| \leq 10$. С това (5.24) е доказано.

Да допуснем сега, че (5.25) не е вярно и нека, например, $\chi(G_1) \leq 2$. Тогава от (5.3) и (5.24) правим извода, че $cl(G_2) = 2$ и $\chi(G_2) \geq 4$. Съгласно (5.2) и Теорема 5.1 ($r = 3$) имаме $|V(G_2)| \geq 11$, което отново противоречи на неравенството $|V(G)| \leq 10$.

И така доказахме (5.24) и (5.25). От Теорема 2.1 ($r = 3$) следва $|V(G_i)| \geq 5$, $i = 1, 2$. Последните неравенства и неравенството $|V(G)| \leq 10$ ни дават

(5.26) $$|V(G_1)| = |V(G_2)| = 5.$$

От (5.26) и Теорема 2.1 ($r = 3$) следва $G_1 = G_2 = C_5$. Доказахме, че $G = C_5 + C_5$. С това базата на индукцията е доказана.

Нека $r \geq 6$. Понеже $|V(G)| \leq r + 5$ имаме

$$\frac{5}{3}(r + 1) - |V(G)| \geq \frac{5}{3}(r + 1) - (r + 5) > 0.$$

От последното неравенство, (5.23) и Теорема 5.3 получаваме $G = K_1 + G'$. От последното равенство и (5.3)става ясно, че $cl(G') < r - 1$ и $\chi(G) \geq r$. Понеже $|V(G')| \leq r + 4$, индукционната хипотеза ни дава, че $G' = K_{r-6} + C_5 + C_5$. Следователно $G = K_{r-5} + C_5 + C_5$.

Теорема 5.6 е доказана.

Теорема 5.6 е от дисертацията [N12] и е публикувана в [N20]. През 2003 г. в [N37] публикуваме ново доказателство на тази теорема. Доказателството, което даваме тук, съвпада с това от [N37].

5.5. Пресмятане на числата $F_v(2_r; r-1)$ и $F_v(2_r; r-2)$ при достатъчно големи стойности на r.

В този пункт ще пресметнем Фолкмановите числа $F_v(2_r; r-1)$ при $r \geq 8$ и $F_v(2_r; r-2)$ при $r \geq 11$, където

$$2_r = (\underbrace{2, \ldots, 2}_{r})$$

Съгласно (3.22) имаме

$$F_v(2_r; r-1) \quad \text{съществува} \quad \Longleftrightarrow r \geq 4.$$

Ще докажем следната:

Теорема 5.7. *Нека r е естествено число и $r \geq 4$. Тогава*

(а) $F_v(2_r; r-1) \geq r+7$;

(б) $F_v(2_r; r-1) = r+7$, *ако* $r \geq 8$.

Ще са ни необходими следните две леми:

Лема 5.6. *Нека $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$, $r \geq 2$ и $cl(G) < q$. Тогава*

$$|V(G)| \geq F_v(a_2, \ldots, a_r; q) + \alpha(G).$$

Доказателство. Нека $A \subseteq V(G)$ е независимо множество и $|A| = \alpha(G)$. Разглеждаме подграфа $G_1 = G - A$. От $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$ очевидно следва

$$G_1 \xrightarrow{v} (a_2, \ldots, a_r).$$

Понеже $cl(G_1) \leq cl(G) < q$ имаме

$$|V(G_1)| \geq F_v(a_2, \ldots, a_r; q).$$

Следователно $|V(G)| \geq F_v(a_2, \ldots, a_r; q) + \alpha(G)$.

Лема 5.7. *Нека G е върхово-критичен r-хроматичен граф. Тогава*

$$\Gamma_G(v_i) \not\subseteq \Gamma_G(v_j)$$

за всеки два несъседни върха v_i и v_j на графа G.

Доказателство. Да допуснем противното, т.е. че съществуват несъседни върхове v_i и v_j на G такива, че

$$\Gamma_G(v_i) \subseteq \Gamma_G(v_j).$$

Понеже G е върхово-критичен r-хроматичен граф, $\chi(G - v_i) \leq r-1$. Нека $V_1 \cup \ldots \cup V_{r-1}$ е $(r-1)$-хроматично разлагане на $G - v_i$. Добавяйки върха v_i към това от множествата $V_1, \ldots, V_{r-1}$, в което е върхът v_j получаваме $(r-1)$-хроматично разлагане на графа G, което е противоречие.

Теорема 5.7 ще докажем с помощта на следната:

Теорема 5.8. *Нека G е граф такъв, че $cl(G) < r-1$ и $\chi(G) \geq r+1$, където $r \geq 4$. Тогава*

$$|V(G)| \geq r+7.$$

Доказателство на Теорема 5.8. Съгласно (5.2) имаме

$$G \xrightarrow{v} (2_r).$$

Понеже $cl(G) < r - 1$, от Лема 5.6 получаваме

$$|V(G)| \geq F_v(2_{r-1}; r-1) + \alpha(G).$$

От това неравенство и Теорема 5.1 правим извода, че

$$|V(G)| \geq r + 4 + \alpha(G). \tag{5.27}$$

Тъй като всеки $(r+1)$-хроматичен граф съдържа върхово-критичен $(r+1)$-хроматичен подграф, достатъчно е да докажем Теорема 5.8, когато

$$G \quad \textit{е върхово-критичен} \ \ (r+1) - \textit{хроматичен граф}. \tag{5.28}$$

Доказателството на неравенството $|V(G)| \geq r+7$ ще направим по индукция относно r. Понеже $r \geq 4$, базата на индукцията е $r = 4$. В тази ситуация имаме $\chi(G) \geq 5$ и $cl(G) < 3$. Съгласно (5.2) имаме $G \xrightarrow{v} (2,2,2,2)$. Понеже G не е пълен граф, $\alpha(G) \geq 2$. От Лема 5.6 получаваме $|V(G)| \geq F_v(2,2,2;3)+2$. От това неравенство и равенството $F_v(2,2,2;3) = 11$ (виж Теорема 5.1, $r = 3$), следва $|V(G)| \geq 13$. С това базата на индукцията е доказана. При това доказахме по-силното неравенство $|V(G)| \geq 13$ вместо $|V(G)| \geq 11$.

Нека $r \geq 5$. Ако $G = K_1 + G_1$, тогава $cl(G_1) < r-2$ и $\chi(G_1) \geq r$. Съгласно индуктивната хипотеза $|V(G_1)| \geq r+6$. Следователно $|V(G)| \geq r+7$. Остава да разгледаме ситуацията, когато

$$d_G(v) \leq |V(G)| - 2, \quad \forall\, v \in V(G).$$

От (5.28) и Лема 5.7 следва

$$d_G(v) \neq |V(G)| - 2, \quad \forall\, v \in V(G).$$

С тези разсъждения изяснихме, че

$$d_G(v) \leq |V(G)| - 3, \quad \forall\, v \in V(G). \tag{5.29}$$

Случай 1. $G \overset{v}{\nrightarrow} (2,2,r-2)$.
Нека $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ е $(2,2,r-2)$-свободно 3-разлагане на G. Ако $\alpha(G) \geq 3$, тогава от (5.27) следва $|V(G)| \geq r+7$. Нека $\alpha(G) < 3$. Понеже G не е пълен граф имаме $\alpha(G) = 2$. Поради това $|V_i| \leq 2$, $i = 1, 2$. Съгласно (5.29) можем да предположим, че $|V_1| = 2$. От (5.29) и $\alpha(G) = 2$ следва, че ако $|V_2| = 1$ и $V_2 = \{w\}$, тогава w не е съседен на някой от върховете на V_3. Поради това можем да предположим, че $|V_2| = 2$. Нека $\widetilde{G} = G[V_3]$. Тъй като $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ е $(2,2,r-2)$-свободно 3-разлагане на G, $cl(\widetilde{G}) < r-2$. Ясно е, че от $\chi(G) \geq r+1$ следва $\chi(\widetilde{G}) \geq r-1$. От Теорема 5.1 получаваме $|V(\widetilde{G})| \geq r+3$. Понеже $|V_1| = |V_2| = 2$, следва $|V(G)| \geq r+7$.

Случай 2. $G \xrightarrow{v} (2,2,r-2)$.
Понеже $cl(G) < r-1$, от Теорема 4.1 следва

$$|V(G)| \geq 2(r-2) + 4 = 2r.$$

Поради това, ако $2r \geq r + 7$, т.е. $r \geq 7$, имаме $|V(G)| \geq r + 7$. Остава да докажем Теорема 5.7 в случаите $r = 5$ и $r = 6$.

Нека $r = 5$. Съгласно (5.27), $|V(G)| \geq 11$. Понеже $cl(G) < 4$, от $R(3, 4) = 9$ следва $\alpha(G) \geq 3$. От последното неравенство и (5.27) следва $|V(G)| \geq 12$.

Нека $r = 6$. В тази ситуация имаме $G \xrightarrow{v} (2, 2, 4)$. Тъй като $cl(G) < 5$

$$|V(G)| \geq F_v(2, 2, 4; 5).$$

Съгласно Теорема 4.4, $F_v(2, 2, 4; 5) = 13$. Следователно $|V(G)| \geq 13$.

Теорема 5.8 е доказана.

Доказателство на Теорема 5.7. Нека G е граф такъв, че $G \xrightarrow{v} (2_r)$ и $cl(G) < r - 1$. За да докажем (а), трябва да докажем, че $|V(G)| \geq r + 7$. От $G \xrightarrow{v} (2_r)$, съгласно (5.2), имаме $\chi(G) \geq r + 1$. Понеже $cl(G) < r - 1$, от Теорема 5.8 следва $|V(G)| \geq r + 7$. С това (а) е доказано.

Нека $r \geq 8$. Разглеждаме графа

$$G = K_{r-8} + C_5 + C_5 + C_5.$$

От (5.3) имаме $cl(G) = r - 2$ и $\chi(G) = r + 1$. Съгласно (5.2), $G \xrightarrow{v} (2_r)$. Следователно

$$F_v(2_r; r - 1) \leq |V(G)| = r + 7, \quad \text{ако} \quad r \geq 8.$$

От последното неравенство и неравенството (а) получаваме

$$F_v(2_r; r - 1) = r + 7, \quad \text{ако} \quad r \geq 8.$$

Теорема 5.7 е доказана.

Забележка 5.3. *В случая $r = 4$ всъщност доказахме по-силното от (а) неравенство $F_v(2, 2, 2, 2; 3) \geq 13$ (виж базата на индукцията $r = 4$ в доказателството на Теорема 5.8)*

Пресмятането на числата $F_v(2_r; r-1)$ при $4 \leq r \leq 7$ е екстремално трудна задача. За сега е пресметнато само числото $F_v(2, 2, 2, 2; 3)$. По-важните етапи от пресмятането на това число са следните:

$$F_v(2, 2, 2, 2; 3) \leq 23, \quad 1955 \text{ г. в [M4]};$$

$$F_v(2, 2, 2, 2; 3) \geq 18, \quad 1979 \text{ г. в [A1]};$$

$$F_v(2, 2, 2, 2; 3) = 22, \quad 1995 \text{ г. в [J3]}.$$

Доказателството на последното равенство е получено с помощта на компютър.

Теорема 5.7 е публикувана в [N20]. Доказателството, което даваме тук е съществено различно от доказателството в [N20].

Преминаваме към пресмятането на числата $F_v(2_r, r-2)$, $r \geq 11$. Съгласно (3.22)

$$F_v(2_r, r - 2) \quad \text{съществува} \quad \Longleftrightarrow \quad r \geq 5.$$

За тези числа ще докажем следния резултат:

Теорема 5.9. *Нека $r \geq 5$ е естествено число. Тогава* (а) $\quad F_v(2_r, r-2) \geq r+9$;

(б) $\quad F_v(2_r, r-2) = r+9, \quad$ ако $\quad r \geq 11$.

Теорема 5.9 ще докажем с помощта на следната:

Теорема 5.10. *Нека G е граф такъв, че $cl(G) < r-2$ и $\chi(G) \geq r+1$, където $r \geq 5$. Тогава $|V(G)| \geq r+9$.*

Доказателство на Теорема 5.10. Съгласно (5.2) имаме $G \xrightarrow{v} (2_r)$. Понеже $cl(G) < r-2$, от Лема 5.6 следва

$$|V(G)| \geq F_v(2_{r-1}; r-2) + \alpha(G). \tag{5.30}$$

От това неравенство и Теорема 5.7 получаваме

$$|V(G)| \geq r+6+\alpha(G). \tag{5.31}$$

Тъй като всеки $(r+1)$-хроматичен граф съдържа върхово-критичен $(r+1)$-хроматичен подграф, достатъчно е да докажем Теорема 5.10, когато

$$G \quad \textit{е върхово-критичен} \quad (r+1)-\textit{хроматичен граф.} \tag{5.32}$$

Доказателството на неравенството $|V(G)| \geq r+9$ ще направим по индукция относно r. Понеже $r \geq 5$ базата на индукцията е $r = 5$. Когато $r = 5$ имаме $\chi(G) \geq 6$ и $cl(G) < 3$. От (5.2) имаме

$$G \xrightarrow{v} (2,2,2,2,2).$$

Съгласно забележка 5.3, $F_v(2,2,2,2;3) \geq 13$. Поради това, от (5.30) получаваме $|V(G)| \geq 15$. С това базата на индукцията $r = 5$ е доказана.

Нека $r \geq 6$. Ако $G = K_1 + G_1$, тогава $cl(G_1) < r-3$ и $\chi(G_1) \geq r$. Съгласно индуктивната хипотеза $|V(G_1)| \geq r+8$. Следователно $|V(G)| \geq r+9$.

По-нататък ще считаме, че

$$d_G(v) \leq |V(G)| - 2, \quad \forall\, v \in V(G). \tag{5.33}$$

От (5.32) и Лема 5.7 следва, че

$$d_G(v) \neq |V(G)| - 2, \quad \forall\, v \in V(G).$$

Този факт и (5.33) дават

$$d_G(v) \leq |V(G)| - 3, \quad \forall\, v \in V(G). \tag{5.34}$$

Ще разгледаме два случая:

Случай 1. $G \overset{v}{\nrightarrow} (2,2,r-3)$.

Нека $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ е $(2,2,r-3)$-свободно 3-разлагане на графа G. Ако $\alpha(G) \geq 3$, от (5.31) получаваме $|V(G)| \geq r+9$. Нека $\alpha(G) < 3$. Понеже G не е пълен граф, имаме

$$\alpha(G) = 2. \tag{5.35}$$

От (5.35) следва $|V_i| \leq 2$, $i = 1, 2$. Съгласно (5.33) можем да предположим, че $|V_1| = 2$. Да предположим, че $|V_2| = 1$ и нека $V_2 = \{w\}$. От (5.35) и (5.34) правим извода, че върхът w не е съседен на някой от върховете на V_3. Тези разсъждения ни дават право да считаме, че $|V_2| = 2$. Нека $\widetilde{G} = G[V_3]$. Тъй като $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ е $(2, 2, r-3)$-свободно 3-разлагане, $cl(\widetilde{G}) < r - 3$. Ясно е, че от $\chi(G) \geq r + 1$ следва $\chi(\widetilde{G}) \geq r - 1$. Поради това, от Теорема 5.8 имаме $|V(\widetilde{G})| \geq r + 5$. Понеже $|V_1| = |V_2| = 2$, $|V(G)| \geq r + 9$.

Случай 2. $G \xrightarrow{v} (2, 2, r - 3)$.
Понеже $cl(G) < r - 2$, от Теорема 4.1 следва $|V(G)| \geq 2(r - 3) + 4 = 2r - 2$. Поради това, ако $2r - 2 \geq r + 9$, т.е. $r \geq 11$, неравенството $|V(G)| \geq r + 9$ е доказано. Остава да докажем неравенството $|V(G)| \geq r+9$, когато $6 \leq r \leq 10$.

Подслучай 2.а. $r = 6$.
От (5.31) имаме $|V(G)| \geq 14$. Понеже $cl(G) < 4$ и $R(3, 4) = 9$, следва $\alpha(G) \geq 3$. От (5.31) получаваме $|V(G)| \geq 15$.

Подслучай 2.в. $r = 7$.
Съгласно (5.31), $|V(G)| \geq 15$. Понеже $cl(G) < 5$ и $R(3, 5) = 14$, следва $\alpha(G) \geq 3$. Сега от (5.31) получаваме $|V(G)| \geq 16$.

Подслучай 2.с. $r = 8$.
В тази ситуация от (5.31) имаме $|V(G)| \geq 16$. Трябва да докажем, че $|V(G)| \neq 16$. Да допуснем противното, т.е. $|V(G)| = 16$. Тогава от (5.31) следва $\alpha(G) = 2$. От (5.32) и Теорема 5.2 правим извода, че $G = G_1 + G_2$. Съгласно (5.34), G_1 и G_2 не са пълни графи. От (5.32) следва, че G_1 и G_2 са върхово-критични хроматични графи. От тези два факта имаме

$$cl(G_i) \geq 2, \quad i = 1, 2. \tag{5.36}$$

Без ограничение на общността можем да предположим, че

$$2 \leq cl(G_1) \leq cl(G_2).$$

Понеже

$$cl(G_1) + cl(G_2) = cl(G) \leq 5$$

от (5.36) получаваме $cl(G_1) = 2$ и $cl(G_2) \leq 3$. Равенствата $\alpha(G) = 2$, $cl(G_1) = 2$ и $R(3, 3) = 6$ дават, че $|V(G_1)| \leq 5$. Равенствата $\alpha(G) = 2$ и $R(3, 4) = 9$ заедно с $cl(G_2) \leq 3$ дават, че

$$|V(G_2)| \leq 8.$$

Получихме, че $|V(G)| \leq 13$, което е противоречие.

Подслучай 2.д. $r = 9$.
От (5.31) следва $|V(G)| \geq 17$. Трябва да докажем, че $|V(G)| \neq 17$. Да допуснем противното, т.е. $|V(G)| = 17$. Тогава от (5.31) имаме $\alpha(G) = 2$. От (5.32) и Теорема 5.2 правим извода, че $G = G_1 + G_2$. От (5.32) следва, че G_1 и G_2 са върхово-критични хроматични графи, а от (5.34) следва, че G_1 и G_2 не са пълни графи. Тези два факта ни дават, че

$$\chi(G_i) \geq 3, \quad i = 1, 2. \tag{5.37}$$

и че е вярно (5.36). Без ограничение на общността можем да предположим, че

$$2 \leq cl(G_1) \leq cl(G_2).$$

Понеже $cl(G_1) + cl(G_2) = cl(G) \leq 6$, имаме $cl(G_1) = 2$ и $cl(G_2) \leq 4$ или $cl(G_1) = cl(G_2) = 3$.

Нека $cl(G_1) = 2$ и $cl(G_2) \leq 4$. Тогава от $\alpha(G) = 2$ и $R(3,3) = 6$ следва $|V(G_1)| \leq 5$. От (5.37) имаме $|V(G_1)| \geq 5$. Следователно $|V(G_1)| = 5$. Съгласно Теорема 2.1, $G_1 = C_5$. Понеже $\chi(C_5) = 3$, от $\chi(G) \geq 10$ и (5.3) следва $\chi(G_2) \geq 7$. И така, за графа G_2 получихме, че

$$cl(G_2) \leq 4, \quad \chi(G_2) \geq 7 \quad \text{и} \quad |V(G_2)| = 12.$$

Това противоречи на Теорема 5.8 ($r = 6$).

Да допуснем сега, че $cl(G_1) = cl(G_2) = 3$. В тази ситуация от $R(3,4) = 9$ и $\alpha(G) = 2$ следва $|V(G_i)| \leq 8$, $i = 1, 2$. Получихме, че $|V(G)| \leq 16$, което е противоречие.

Подслучай 2.е. $r = 10$.
Съгласно (5.33) в G няма връх, който да е съседен на всички останали. Поради това от (5.32) и Теорема 5.3 имаме

$$\frac{5.11}{3} - |V(G)| < 0, \qquad \text{т.е} \quad |V(G)| > 18.$$

Теорема 5.10 е доказана.

Доказателство на Теорема 5.9. Нека G е граф такъв, че $G \xrightarrow{v} (2_r)$ и $cl(G) < r - 2$. За да докажем (а), трябва да докажем, че $|V(G)| \geq r + 9$. От $G \xrightarrow{v} (2_r)$, съгласно (5.2), имаме $\chi(G) \geq r + 1$. Понеже $cl(G) < r - 2$, от Теорема 5.10 получаваме $|V(G)| \geq r + 9$. С това (а) е доказано.

Нека $r \geq 11$. Разглеждаме графа

$$G = K_{r-11} + C_5 + C_5 + C_5 + C_5.$$

От (5.3) имаме $cl(G) = r - 3$ и $\chi(G) = r + 1$. От (5.2) следва $G \xrightarrow{v} (2_r)$. Поради това

$$F_v(2_r; r - 3) \leq |V(G)| = r + 9.$$

От последното неравенство и неравенството (а) получаваме

$$F_v(2_r; r - 3) = r + 9 \quad \text{ако} \quad r \geq 11.$$

Теорема 5.9 е доказана.

Теорема 5.9 е публикувана в [N18]. Доказателството, което даваме тук, е съществено различно от доказателството в [N18].

ГЛАВА 6

ПРЕСМЯТАНЕ НА ФОЛКМАНОВИТЕ ЧИСЛА

$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1)$, когато $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 3$ или 4.

6.1. Пресмятане на числата $F_v(2,3,3;5)$ и $F_v(2,2,2,3;5)$.

Числата m и p са дефинирани с равенствата (3.1) и (3.2). Ако $p = 3$, тогава съгласно (3.24)

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) \quad \text{съществува} \quad \iff \quad m \geq 5.$$

Ако $m = 5$, тогава има две съществени (в смисъл, че $a_i \geq 2$) такива числа, а именно $F_v(3,3;4)$ и $F_v(2,2,3;4)$. Съгласно (4.12) имаме $F_v(3,3;4) = 14$, а от (4.4) имаме $F_v(2,2,3;4) \leq 14$. Точната стойност на това число не е известна. В този пункт ще разгледаме числата $F_v(a_1, \dots, a_r; m-1)$, когато $p = 3$ и $m = 6$. Предполагайки, че $a_i \geq 2$ (виж Твърдение 3.1) от $m = 6$ и $p = 3$ следва, че има две такива числа: $F_v(2,2,2,3;5)$ и $F_v(2,3,3;5)$. Ще докажем следната:

Теорема 6.1. $F_v(2,2,2,3;5) = F_v(2,3,3;5) = 12$.

Преди да докажем тази теорема, ще докажем няколко леми за графа P, допълнението $\overline{P}$, на който е дадено на Фиг. 4.2. Върховете на този граф разделяме на следните две подмножества:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_8\} \quad \text{и} \quad B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}.$$

Лема 6.1. *Нека $W \subseteq V(\overline{P})$ и $\overline{P}[W] = C_5$.*

(а) *Ако $W \bigcap B = \{b_1\}$, тогава $W = \{b_1, a_1, a_2, a_7, a_8\}$;*

(б) *Ако $W \bigcap B = \{b_2\}$, тогава $W = \{b_2, a_1, a_2, a_3, a_4\}$;*

(в) *Ако $W \bigcap B = \{b_3\}$, тогава $W = \{b_3, a_3, a_4, a_5, a_6\}$;*

(г) *Ако $W \bigcap B = \{b_4\}$, тогава $W = \{b_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$.*

Доказателство. Ще докажем само (а), понеже (б), (в) и (г) се доказват аналогично. И така, нека $W \bigcap B = \{b_1\}$. Тогава от $b_2, b_4 \notin W$ и $\overline{P}[W] = C_5$ следва, че $a_2, a_7 \in W$. От $a_7 \in W$ и $\overline{P}[W] = C_5$ следва, че $a_8 \in W$ или $a_6 \in W$. От $a_2 \in W$ и $\overline{P}[W] = C_5$ следва, че или $a_1 \in W$ или $a_3 \in W$. Тъй като в $\{a_1, a_3, a_6, a_8\}$ единствената съседна в $\overline{P}$ двойка върхове е $\{a_1, a_8\}$, стигаме до извода, че $W = \{b_1, a_1, a_2, a_7, a_8\}$.

Лема 6.2. *Нека $W \subseteq V(\overline{P})$ и $\overline{P}[W] = C_5$.*

(а) *Ако $W \bigcap B = \{b_1, b_3\}$, тогава*

$$W = \{b_1, b_2, a_1, a_7, a_8\} \text{ или } W = \{b_1, b_2, a_2, a_3, a_4\};$$

(б) *Ако $W \bigcap B = \{b_2, b_3\}$, тогава*

$$W = \{b_2, b_3, a_1, a_2, a_3\} \text{ или } W = \{b_2, b_3, a_4, a_5, a_6\};$$

(в) *Ако* $W \bigcap B = \{b_3, b_4\}$*, тогава*

$$W = \{b_3, b_4, a_3, a_4, a_5\} \text{ или } W = \{b_3, b_4, a_6, a_7, a_8\};$$

(г) *Ако* $W \bigcap B = \{b_1, b_4\}$*, тогава*

$$W = \{b_1, b_4, a_5, a_6, a_7\} \text{ или } W = \{b_1, b_4, a_1, a_2, a_8\}.$$

Доказателство. Ще докажем само (а), тъй като (б), (в) и (г) се доказват по същия начин. И така, нека $W \bigcap B = \{b_1, b_2\}$. От $b_1 \in W$, $b_4 \notin W$ и $\overline{P}[W] = C_5$ следва, че $a_2 \in W$ или $a_7 \in W$. Нека $a_2 \in W$. От $\overline{P}[W] = C_5$ следва, че $a_1 \in W$ или $a_3 \in W$. Понеже $\overline{P}[a_1, a_2, b_1, b_2] = C_4$ имаме $a_1 \notin W$. Поради това $a_3 \in W$. Доказахме, че $b_1, b_2, a_2, a_3 \in W$. От $\overline{P}[W] = C_5$ сега лесно получаваме, че $W = \{b_1, b_2, a_2, a_3, a_4\}$.

Нека $a_7 \in W$. Тогава от $\overline{P}[W] = C_5$ следва, че $a_6 \in W$ или $a_8 \in W$. Тъй като

$$\Gamma_{\overline{P}}(a_6) \cap \Gamma_{\overline{P}}(b_2) = \{b_3\}$$

и $b_3 \notin W$ имаме $a_6 \notin W$. Поради това $a_8 \in W$. От $\overline{P}[W] = C_5$ и равенството

$$\Gamma_G(a_8) \cap \Gamma_G(b_2) = \{a_1\}$$

получаваме $W = \{b_1, b_2, a_7, a_8, a_1\}$.

Лема 6.3. *Нека* $W \subseteq V(\overline{P})$ *и* $\overline{P}[W] = C_5$.

(а) *Ако* $W \bigcap B = \{b_1, b_2, b_3\}$*, тогава*

$$W = \{b_1, b_2, b_3, a_2, a_3\} \text{ или } W = \{b_1, b_2, b_3, a_6, a_7\};$$

(б) *Ако* $W \bigcap B = \{b_2, b_3, b_4\}$*, тогава*

$$W = \{b_2, b_3, b_4, a_4, a_5\} \text{ или } W = \{b_2, b_3, b_4, a_1, a_8\};$$

(в) *Ако* $W \bigcap B = \{b_1, b_3, b_4\}$*, тогава*

$$W = \{b_1, b_3, b_4, a_6, a_7\} \text{ или } W = \{b_1, b_3, b_4, a_2, a_3\};$$

(г) *Ако* $W \bigcap B = \{b_1, b_2, b_4\}$*, тогава*

$$W = \{b_1, b_3, b_4, a_1, a_8\} \text{ или } W = \{b_1, b_2, b_4, a_4, a_5\}.$$

Доказателство. Твърдения (а), (б), (в) и (г) се доказват по един и същ начин. Поради това ще докажем само (а). Нека $W \bigcap B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Тогава от $b_1 \in W$ и $\overline{P}[W] = C_5$ следва, че $a_2 \in W$ или $a_7 \in W$. Тъй като

$$\Gamma_{\overline{P}}(a_2) \cap \Gamma_{\overline{P}}(b_3) = \{a_3\}$$

от $a_2 \in W$ следва $W = \{b_1, b_2, b_3, a_2, a_3\}$. От равенството

$$\Gamma_{\overline{P}}(a_7) \cap \Gamma_{\overline{P}}(b_3) = \{a_6\}$$

става ясно, че когато $a_7 \in W$ имаме

$$W = \{b_1, b_2, b_3, a_6, a_7\}.$$

Лема 6.4. *Нека $W \subseteq V(\overline{P})$ и $\overline{P}[W] = C_5$. Ако $|W \cap B| = 2$, тогава двата върха в $W \cap B$ са съседни в $\overline{P}$.*

Доказателство. Да допуснем противното и нека, например, $W = \{b_1, b_3\}$. От $\overline{P}[W] = C_5$ следва, че съществува $u \in W$ такъв, че

$$u \in \Gamma_{\overline{P}}(b_1) \cap \Gamma_{\overline{P}}(b_3) = \{b_2, b_4\},$$

което противоречи на равенството $W = \{b_1, b_3\}$.

Доказателство на Теорема 6.1. Съгласно Твърдение 3.5 ($i = 2$ и $k = 2$) от $G \xrightarrow{v} (2, 3, 3)$ следва $G \xrightarrow{v} (2, 2, 2, 3)$. Поради това е вярно неравенството

$$F_v(2, 2, 2, 3; 5) \leq F_v(2, 3.3; 5).$$

Следователно трябва да докажем неравенствата

$$F_v(2, 2, 2, 3; 5) \geq 12 \quad \text{и} \quad F_v(2, 3, 3; 5) \leq 12.$$

I. Доказателство на неравенството $F_v(2, 3, 3; 5) \leq 12$.

Ще докажем, че

$$P \xrightarrow{v} (2, 3, 3). \tag{6.1}$$

Да допуснем противното и нека $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ е $(2, 3, 3)$-свободно разлагане на $V(P)$. Тъй като $\alpha(P) = 2$ имаме

$$|V_1| \leq 2. \tag{6.2}$$

Множеството V_i, $i = 2, 3$ не съдържа 3-клика. Поради това от $\alpha(P) = 2$ и $R(3, 3) = 6$ следва

$$|V_i| \leq 5, \quad i = 2, 3. \tag{6.3}$$

От $|V(P)| = 12$, (6.2) и (6.3) получаваме, че $|V_1| = 2$, $|V_2| = |V_3| = 5$. Дефинираме подграфите

$$G_i = \overline{P}[V_i], \quad i = 2, 3.$$

От $\alpha(G_i) = cl(G_i) = 2$ и $|V(G_i)| = 5$, $i = 2, 3$ лесно следва, че $G_2 = G_3 = C_5$. Да забележим, че $\overline{P}[A] = C_8$ (множеството A е дефинирано по-горе). Ето защо $V_i \nsubseteq A$, $i = 2, 3$. Поради това имаме, че $V_i \cap B \neq \emptyset$, $i = 2, 3$. Без ограничение на общността можем да предположим, че $|V_2 \cap B| \leq |V_3 \cap B|$. От $|B| = 4$ и $V_2 \cap B \neq 0$ следва, че $1 \leq |V_2 \cap B| \leq 2$.

Случай 1. $|V_2 \cap B| = 1$.
Поради симетрията на графа P можем да предположим, че $V_2 \cap B = \{b_1\}$. Съгласно Лема 6.1 (a) имаме $V_2 = \{b_1, a_1, a_2, a_7, a_8\}$.

Подслучай 1.a. $|V_3 \cap B| = 1$.

Ако $V_3 \cap B = \{b_2\}$ или $V_3 \cap B = \{b_4\}$, тогава от Лема 6.1 следва, че $V_2 \cap V_3 \neq \emptyset$, което е противоречие. Нека $V_3 \cap B = \{b_3\}$. Съгласно Лема 6.1 (в) имаме $V_3 = \{b_3, a_3, a_4, a_5, a_6\}$. Получихме, че $V_1 = \{b_2, b_4\}$. Това е противоречие, понеже V_1 не е независимо множество на графа P.

Подслучай 1.в. $|V_3 \cap B| = 2$.

От Лема 6.4 следва, че $V_3 \cap B = \{b_2, b_3\}$ или $V_3 \cap B = \{b_3, b_4\}$. Тези две възможности са равноправни поради съществуващата симетрия. Поради това ще разгледаме само ситуацията, когато $V_3 \cap B = \{b_2, b_3\}$. От $V_2 \cap V_3 = \emptyset$ и Лема 6.2 (б) следва, че $V_3 = \{b_2, b_3, a_4, a_5, a_6\}$ и $V_1 = \{a_3, b_4\}$. Това е противоречие, понеже V_1 не е независимо множество на графа P.

Подслучай 1.c. $|V_3 \cap B| = 3$.

В тази ситуация $V_3 \cap B = \{v_2, v_3, v_4\}$. От $V_2 \cap V_3 = \emptyset$ и Лема 6.3 (б) следва, че $V_3 = \{b_2, b_3, b_4, a_4, a_5\}$ и $V_1 = \{a_3, a_6\}$. Понеже a_3 и a_6 са съседни в графа P, това е противоречие.

Случай 2. $|V_2 \cap B| = 2$.

Ясно е, че $|V_3 \cap B| = 2$. Поради симетрията и Лема 6.4 достатъчно е да разгледаме ситуацията, когато $V_2 \cap B = \{b_1, b_2\}$ и $V_3 \cup B = \{b_3, b_4\}$. Съгласно Лема 6.2 (а) налице са следните две възможности:

Подслучай 2.a. $V_2 = \{b_1, b_2, a_2, a_3, a_4\}$.
В този подслучай от Лема 6.2 (в) и $V_2 \cap V_3 = \emptyset$ следва $V_3 = \{b_3, b_4, a_6, a_7, a_8\}$ и $V_1 = \{a_1, a_5\}$. Получихме противоречие, понеже a_1 и a_5 са съседни върхове в графа P.

Подслучай 2.в. $V_2 = \{b_1, b_2, a_1, a_7, a_8\}$.
От Лема 6.2 (в) и $V_2 \cap V_3 = \emptyset$ имаме $V_3 = \{b_3, b_4, a_3, a_4, a_5\}$ и $V_2 = \{a_2, a_6\}$. Това е противоречие, понеже a_2 и a_6 са съседни върхове на графа P.

Доказахме (6.1). Понеже $cl(P) = 4$ имаме

$$F_v(2, 3, 3; 5) \leq |V(P)| = 12.$$

II. Доказателство на неравенството $F_v(2, 2, 2, 3; 5) \geq 12$.

От Теорема 3.6 имаме

$$F_v(2, 2, 2, 3; 5) \geq 11. \tag{6.4}$$

Поради това, трябва да докажем, че $F_v(2, 2, 2, 3; 5) \neq 11$. Да допуснем противното, т.е. че $F_v(2, 2, 2, 3; 5) = 11$. Нека G е 11-върхов граф такъв, че $cl(G) < 5$ и $G \xrightarrow{v} (2, 2, 2, 3)$. От Теорема 3.5 (а) получаваме $\alpha(G) \leq 3$, а от Теорема 3.5 (б) следва $\alpha(G) \neq 3$. Понеже G не е пълен граф, $\alpha(G) \geq 2$. С тези разсъждения доказахме, че

$$\alpha(G) = 2. \tag{6.5}$$

Да предположим, че съществува u, $v \in V(G)$ такива, че $\Gamma_G(v) \subseteq \Gamma_G(u)$. Ясно е, че $[u, v] \notin E(G)$. От (6.4) имаме $G - v \overset{v}{\nrightarrow} (2, 2, 2, 3)$. Нека $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ е $(2, 2, 2, 3)$-свободно 4-разлагане на $G - v$. Добавяйки върха v към това от множествата V_1, V_2, V_3, V_4, в което е върха u, ще получим $(2,2,2,3)$-свободно 4-разлагане на $V(G)$, което е противоречие. И така доказахме, че

$$\Gamma_G(v) \nsubseteq \Gamma_G(u). \quad \forall\, u, \;\; v \in V(G). \tag{6.6}$$

Да допуснем, че $\exists\, v \in V(G)$ такъв, че $d_G(v) = |V(G)| - 1$. Тогава $cl(G - v) < 4$. Съгласно Твърдение 3.4 от $G \xrightarrow{v} (2,2,2,3)$ следва

$$G - v \xrightarrow{v} (2,2,2,2).$$

Това противоречи на равенството (5.4). Това противоречие доказва, че

$$d_G(v) \neq |V(G)| - 1, \; \forall\, v \in V(G).$$

От (6.6) следва също, че $d_G(v) \neq |V(G)| - 2$. Следователно

$$d_G(v) \leq |V(G)| - 3, \quad \forall\, v \in V(G). \tag{6.7}$$

От $|V(G)| = 11$ и Теорема 4.4 следва $G \overset{v}{\nrightarrow} (2,2,4)$. Нека $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ е $(2,2,4)$-свободно 3-разлагане на $V(G)$. От (6.5) правим извода, че $|V_i| \leq 2$, $i = 1,2$. Да допуснем, че $|V_1| = 1$ и $V_1 = \{u\}$. Съгласно (6.5) и (6.7) съществува връх $v \in V_3$, който не е съседен на върха u. Като добавим този връх v към V_1 ще получим 3-разлагане $V_1 \cup V_2 \cup V_3$, което е $(2,2,4)$-свободно и $|V_1| = 2$. Ако $|V_2| = 1$ и $V_2 = \{w\}$, тогава от (6.5) и (6.7) следва, че съществува връх $v \in V_3$, който не е съседен на w. Добавяйки този връх към V_2 получаваме $(2,2,4)$-свободно 3-разлагане $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ на $V(G)$, такова, че $|V_1| = |V_2| = 2$. Нека $V_1 = \{a,b\}$ и $V_2 = \{c,d\}$. Тогава дефинираме подграфите

$$G_1 = G - \{a,b,c,d\} = G[V_3] \quad \text{и} \quad G_2 = G[a,b,c,d].$$

Ясно е, че от $G \xrightarrow{v} (2,2,2,3)$ следва $G_1 \xrightarrow{v} (2,3)$. Понеже V_3 не съдържа 3-клика имаме $cl(G_1) < 4$. Съгласно Следствие 3.2, $G_1 = \overline{C_7}$ (Фиг. 6.1). От (6.5) става ясно, че $E(G_2)$ непременно съдържа две ребра без общ връх. Поради това можем да предположим, че $[a,c]$, $[b,d] \in E(G_1)$. Ще разгледаме два случая.

Случай 1. $E(G_2) = \{[a,c], \quad [b,d]\}$.
От $cl(C) < 5$ следва, че един от върховете a и c не е съседен на някой от върховете $v_1, \ldots, v_7$ на G_1 (Фиг. 6.1). Без ограничение на общността можем да предположим, че v_1 и a не са съседни. Разглеждаме 4-разлагането

$$\{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{c,d\} \cup \{v_1, v_2, v_3, a, b\}.$$

От $G \xrightarrow{v} (2,2,2,3)$ следва, че $\{v_1, v_2, v_3, a, b\}$ съдържа 3-клика. Понеже a и v_1 не са съседни, тази 3-клика е $\{v_1, v_3, b\}$. По същия начин от 4-разлагането

$$\{v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{c,d\} \cup \{v_1, v_6, v_2, a, b\}.$$

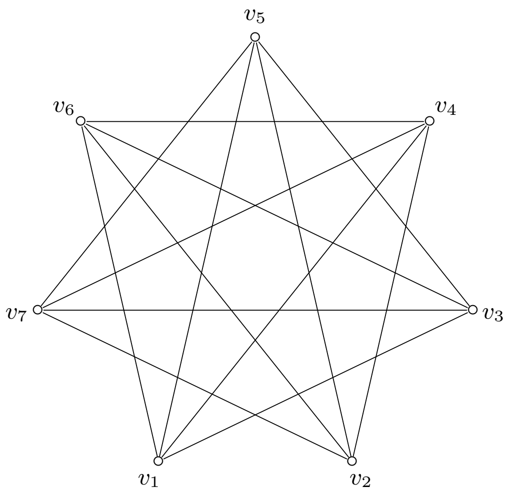
следва, че $\{v_1, v_6, b\}$ е 3-клика. От тези два факта правим извода, че

$$v_1, v_3, v_6 \in \Gamma_G(b).$$

Понеже върховете b и d в разглежданата ситуация са равноправни имаме също, че

$$v_1, v_3, v_6 \in \Gamma_G(d).$$

Получихме, че $\{v_1, v_3, v_6, b, d\}$ е 5-клика, което е противоречие.



Фиг. 6.1

Случай 2. $E(G_2) \supseteq \{[a, c],\ \ [b, d],\ \ [a, d]\}$.

Както и в Случай 1 можем да предположим, че v_1 и a не са съседни, От (6.5) следва, че $v_2, v_7 \in \Gamma_G(a)$. От (6.5) следва също, че a е съседен на единия от върховете v_4 и v_5. Без ограничение на общността можем да предположим, че a и v_4 са съседни. И така, имаме

$$v_2, v_4, v_7 \in \Gamma_G(a). \tag{6.8}$$

От (6.8) и $cl(G) < 5$ следва, че върхът d не е съседен на един от върховете v_2, v_4, v_7. Поради това, налице са следните три възможности:

Подслучай 2.a. *Върховете d и v_2 не са съседни.*

Разглеждаме 4-разлагането

$$\{v_5, v_6\} \cup \{v_1, v_7\} \cup \{a, b\} \cup \{v_2, v_1, v_4, c, d\}. \tag{6.9}$$

От $G \xrightarrow{v} (2, 2, 2, 3)$ следва, че $\{v_2, v_3, v_4, c, d\}$ съдържа 3-клика. Понеже d и v_2 в разглеждания подслучай не са съседни, тази 3-клика е $\{c, v_2, v_4\}$. По същия начин от 4-разлагането

$$\{v_3, v_4\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \{a, b\} \cup \{v_1, v_2, v_7, c, d\}. \tag{6.10}$$

следва, че $\{c, v_2, v_7\}$ е 3-клика. От тези разсъждения става ясно, че $v_2, v_4, v_7 \in \Gamma_G(c)$. Този факт и (6.8) ни дават, че $\{v_2, v_4, v_7, a, d\}$ е 5-клика, което е противоречие.

Подслучай 2.в. *Върховете d и v_4 не са съседни.*
Както и в Подслучай 2.а от 4-разлагането (6.9) следва, че $\{c, v_2, v_4\}$ е 3-клика. От 4-разлагането

$$\{v_1, v_7\} \cup \{v_2, v_3\} \cup \{a, b\} \cup \{v_4, v_5, v_6, c, d\}$$

по същия начин следва, че $\{v_4, v_6, c\}$ е 3-клика.

Доказахме, че

$$v_2, v_4, v_6 \in \Gamma_G(c). \tag{6.11}$$

От (6.8), (6.11) и $cl(G) < 5$ следва, че c и v_7 не са съседни. Сега разглеждаме 4- разлагането (6.10). От $G \xrightarrow{v} (2, 2, 2, 3)$ следва, че в $\{v_1, v_2, v_7, c, d\}$ има 3-клика. Тъй като c и v_7 не са съседни, тази 3-клика е $\{v_2, v_7, d\}$. По същия начин от 4-разлагането

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_3, v_4\} \cup \{a, b\} \cup \{v_5, v_6, v_7, c, d\}$$

следва, че $\{v_5, v_7, d\}$ е 3-клика. По този начин изяснихме, че

$$v_2, v_5, v_7 \in \Gamma_G(d). \tag{6.12}$$

От (6.8), (6.11) и $cl(G) < 5$ следва, че a и v_6 не са съседни. От (6.8), (6.12) и $cl(G) < 5$ следва, че a и v_5 не са съседни. Стигнахме до извода, че $\{a, v_5, v_6\}$ е независимо множество, което противоречи на (6.5)

Подслучай 2.c. *Върховете d и v_7 не са съседни.*

Този подслучай е аналогичен на подслучай 2.в.

Теорема 6.1 е доказана.

Нека P е графът, чието допълнение $\overline{P}$ е дадено на Фиг. 4.2. С помощта на Теорема 4.3 ще докажем две допълнения на Теорема 6.1.

Теорема 6.2. *Нека G е граф такъв, че $G \xrightarrow{v} (2,3,3)$, $\alpha(G) = 2$ и $cl(G) < 5$. Тогава $|V(G)| \geq 13$ или $G = P$.*

Доказателство. Съгласно Теорема 6.1 имаме $|V(G)| \geq 12$. Да допуснем, че $|V(G)| = 12$. Съгласно Теорема 4.3, G е изоморфен на един от графите $P = P_0, P_1, \ldots, P_{11}$. Тъй като 3-разлагането

$$\{a_7, a_8\} \cup \{b_2, a_1, a_4, a_5, a_6\} \cup \{b_1, b_3, b_4, a_2, a_3\}$$

е $(2,3,3)$-свободно за графа P_1, G не е подграф на P_1. От 3-разлагането

$$\{a_1, a_5\} \cup \{b_1, b_2, a_2, a_3, a_4\} \cup \{b_3, b_4, a_6, a_7, a_8\}$$

следва $P_2 \overset{v}{\nrightarrow} (2,3,3)$. Следователно G не е подграф и на P_2. Остава единствената възможност $G = P$.

Теорема 6.3. *Нека G е граф такъв, че $G \xrightarrow{v} (2,2,2,3)$, $\alpha(G) = 2$ и $cl(G) < 5$. Тогава $|V(G)| \geq 13$ или $G = P_i$ за някое $i = 0, 1, \ldots, 13$.*

Доказателство. Съгласно Теорема 6.1 имаме $|V(G)| \geq 12$. Да допуснем, че $|V(G)| = 12$. Съгласно Теорема 4.3, G е изоморфен на един от графите P_i, $i = 0, 1, \ldots, 11$. Ще докажем, че всяка една от тези възможности е реална, т.е. че всеки от графите P_i, $i = 0, 1, \ldots, 11$ има свойството $P_i \xrightarrow{v} (2,2,2,3)$. Наистина, нека $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ е 4-разлагане на P_i. Да допуснем, че V_1, V_2, V_3 са независими множества на графа P_i. Понеже $\alpha(P_i) = 2$ имаме $|V_i| \leq 2$, $i = 1, 2, 3$. Следователно $|V_4| \geq 6$. От $\alpha(P_i) = 2$ и $R(3,3) = 6$ следва, че V_4 съдържа 3-клика. Доказахме, че всяко 4-разлагане на P_i не е $(2,2,2,3)$-свободно, което означава, че $P_i \xrightarrow{v} (2,2,2,3)$, $i = 0, 1, \ldots, 11$.

Теоремите 6.1, 6.2 и 6.3 са публикувани в [N32].

6.2. Триъгълни върхови Фолкманови числа.

Фолкмановите числа от вида

$$F_v(\underbrace{3,\dots,3}_{r};q) = F_v(3_r;q)$$

се наричат триъгълни числа на Фолкман. Съгласно (3.23) имаме

$$F_v(3_r;q) = 2r+1, \quad \text{ако} \quad q > 2r+1.$$

В [L3] е доказано, че

$$F_v(3_r;2r+1) = 2r+4.$$

Съгласно (3.24), $F_v(3_r;2r)$ съществува само когато $r \geq 2$. От (4.12) имаме $F_v(3,3;4) = 14$. В този пункт ще пресметнем числата $F_v(3_r;2r)$ при $r \geq 3$. Резултатите, които предшестват окончателното пресмятаме на тези числа са следните:

$$11 \leq F_v(3,3,3;6) \leq 20 \quad \text{и} \quad 2r+5 \leq F_v(3_r;2r) \leq 2r+10, \ \text{[L4]};$$

$$2r+6 \leq F_v(3_r;2r) \leq 2r+8, \ \text{[N28]}.$$

Ще докажем следната

Теорема 6.4.

$$F_v(3_r;2r) = 2r+7, \quad r \geq 3.$$

Ще ни е необходима следната

Лема 6.5. *Нека G е граф, такъв че*

$$G \xrightarrow{v} (3_r), \quad r \geq 3$$

и $\chi(G-v) \geq 2r+1$ за някой връх $v \in V(G)$. Тогава $|V(G)| \geq 2r+7$.

Доказателство. Да допуснем противното, т.е. $|V(G)| \leq 2r+6$. Тогава $|V(G-v)| \leq 2r+5$. Тъй като $\chi(G-v) \geq 2r+1$ и $cl(G-v) < 2r$, от Теорема 5.6 следва $G-v = K_{2r-5}+C_5+C_5$. Това равенство означава, че G е подграф на $K_{2r-4}+C_5+C_5$. От очевидното равенство

$$K_{2r-4}+C_5+C_5 = \underbrace{K_2+\ldots+K_2}_{r-2}+C_5+C_5$$

става ясно, че

$$K_{2r-4}+C_5+C_5 \overset{v}{\nrightarrow} (3_r).$$

Следователно $G \overset{v}{\nrightarrow} (3_r)$, което е противоречие. Лема 6.5 е доказана.

Доказателство на Теорема 6.4.

I. Доказателство на неравенството $F_v(3_r;2r) \leq 2r+7, \quad r \geq 3$.

Разглеждаме графа $\widetilde{P} = K_1 + P$, където допълнителния граф $\overline{P}$ е даден на Фиг. 4.2. Ще докажем, че

$$\widetilde{P} \xrightarrow{v} (3,3,3). \tag{6.13}$$

Нека $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ е 3-разлагане на $V(\widetilde{P})$ и $V(K_1) = \{a\}$. Без ограничение на общността можем да предположим, че $a \in V_1$. Да допуснем, че V_1 не съдържа 3-клика. Тогава $V_1 \backslash \{a\}$ е независимо множество. Понеже

$$(V_1 - \{a\}) \cup V_2 \cup V_3$$

е 3-разлагане на графа P и $P \xrightarrow{v} (2,3,3)$ (виж (6.1)) следва, че или V_2, или V_3 съдържа 3-клика. С това (6.13) е доказано.

Разглеждаме графа $P(r) = K_{2r-6} + \widetilde{P}$, $r \geq 3$. Тъй като $cl(P) = 4$ имаме, че $cl(\widetilde{P}) = 5$ и $cl(P(r)) = 2r - 1$. От (6.13) и Следствие 4.4 ($r = 3$ и $t = r - 3$) получаваме

$$P(r) \xrightarrow{v} (3_r).$$

Следователно

$$F_r(3_r; 2r) \leq |V(P(r))| = 2r + 7.$$

II. Доказателство на неравенството $F_r(3_r; 2r) \geq 2r + 7, \quad r \geq 3.$

Ще докажем това неравенство по индукция относно r. Базата на индукцията е $r = 3$. Трябва да докажем, че $F_v(3,3,3;6) \geq 13$. Да допуснем противното и нека G е граф такъв, че $G \xrightarrow{v} (3,3,3)$, $cl(G) < 6$ и $|V(G)| \leq 12$. Съгласно Теорема 3.1 имаме $\chi(G) \geq 7$. От Лема 6.5 следва, че G е върхово-критичен 7-хроматичен граф. От Теорема 5.2 следва, че $G = G_1 + G_2$. Без ограничение на общността можем да предположим, че $cl(G_1) \leq cl(G_2)$. Тъй като

$$cl(G_1) + cl(G_2) = cl(G) < 6$$

или $cl(G_1) = 1$, или $cl(G_2) = 2$. Ако $cl(G_1) = 1$, тогава $cl(G_2) < 5$. От $G \xrightarrow{v} (3,3,3)$ следва, че $G_2 \xrightarrow{v} (2,3,3)$. Понеже $|V(G_2)| \leq 11$, това противоречи на Теорема 6.1. Ако $cl(G_1) = 2$, тогава $cl(G_2) < 4$, а от $G \xrightarrow{v} (3,3,3)$ следва, че $G_2 \xrightarrow{v} (3,3)$. Понеже $|V(G_2)| < 12$ това противоречи на равенството (4.12).

С това базата на индукцията $r = 3$ е доказана.

Нека $r \geq 4$. Нека $G \xrightarrow{v} (3_r)$ и $cl(G) < 2r$. Трябва да докажем, че $|V(G)| \geq 2r + 7$. Да предположим, че

$$(6.14) \qquad \frac{3}{2}\left(\frac{5}{3}(2r+1) - n\right) \leq 1, \quad \text{където} \quad n = |V(G)|.$$

От последното неравенство следва, че $n \geq \left\lceil \dfrac{10r+3}{3} \right\rceil$. Понеже $r \geq 4$ имаме $\left\lceil \dfrac{10r+3}{3} \right\rceil \geq 2r + 7$. Поради това $n = |V(G)| \geq 2r + 7$. Сега да допуснем, че (6.14) не е изпълнено. Тогава ще бъде изпълнено неравенството

$$(6.15) \qquad \left\lceil \frac{3}{2}\left(\frac{5}{3}(2r+1) - n\right) \right\rceil \geq 2.$$

Съгласно Теорема 3.1 имаме $\chi(G) \geq 2r+1$. Ако $\chi(G-v) \geq 2r+1$ за някой връх $v \in V(G)$, тогава от Лема 6.5 получаваме желаното неравенство $|V(G)| \geq$

$2r+7$. Остава да разгледаме ситуацията, когато G е върхово-критичен $(r+1)$-хроматичен граф. От този факт и неравенството (6.15), съгласно Теорема 5.3, следва, че $G = K_2 + G_1$. От $G \xrightarrow{v} (3_r)$ и $cl(G) < 2r$ следва, че $G_1 \xrightarrow{v} (3_{r-1})$ и $cl(G_1) < 2r - 2$. Съгласно индуктивната хипотеза $|V(G_1)| \geq 2r + 5$. Следователно $|V(G)| \geq 2r + 7$.

Теорема 6.4 е доказана.

Теорема 6.4 е публикувана в [N37].

6.3. Едно уточнение на Теорема 3.6.

Ще усилим Теорема 3.6 по следния начин:

Теорема 6.5 *Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа и за тях m и p са дефинирани с равенствата (3.1) и (3.2), като $m \geq p+2$ и $p \geq 3$. Тогава, ако $F(2,2,p;p+1) \geq 2p+5$, е вярно неравенството*

$$F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1) \geq m+p+3$$

Забележка 6.1. *Съгласно (3.23) условието $m \geq p+2$ е необходимо за да съществува числото $F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1)$. Ако $p = 2$. твърдението на Теорема 6.5 не е вярно съгласно Теорема 5.1. Поради това условието $p \geq 3$ е необходимо.*

Преди да докажем Теорема 6.5 ще докажем следния специален случай на тази теорема, който е и подобрение на едното от неравенствата (4.20) на Теорема (4.6).

Теорема 6.6 *Нека естественото число $p \geq 3$ е такова, че*

$$F(2,2,p;p+1) \geq 2p+5.$$

Тогава за всяко естествено число $r \geq 2$ е вярно неравенството

$$F_v(2_r, p; r+p-1) \geq r+2p+3.$$

Доказателство. Ще докажем Теорема 6.6 по индукция относно r.

I. Доказателство на Теорема 6.6, когато $r = 3$.

Ако $p = 3$, Теорема 6.6 следва от Теорема 6.1. Поради това ще считаме, че $p \geq 4$. Нека G е граф такъв, че $G \xrightarrow{v} (2,2,2,p)$ и $cl(G) < p+2$. Трябва да докажем, че $|V(G)| \geq 2p+6$. Най-напред ще разгледаме три ситуации, в които неравенството $|V(G)| \geq 2p+6$ се доказва лесно.

Ако за някой връх $v \in V(G)$ имаме $d_G(v) = |V(G)| - 1$, тогава $G - v \xrightarrow{v} (2,2,p)$ и $cl(G-v) < p+1$. От условието имаме

$$|V(G-v)| \geq F(2,2,p;p+1) \geq 2p+5.$$

Следователно $|V(G)| \geq 2p+6$. По-нататък ще предполагаме, че

$$d_G(v) \leq |V(G)| - 2, \quad \forall\, v \in V(G). \tag{6.16}$$

Да допуснем, че за някой връх $v \in V(G)$ в (6.16) имаме равенство. Ако u е несъседният на v връх, тогава $\Gamma_G(u) \subseteq \Gamma_G(v)$. Разглеждаме подграфа $G - u$. От $G \xrightarrow{v} (2,2,2,p)$ и $\Gamma_G(u) \subseteq \Gamma_G(v)$ следва, че $G - u \xrightarrow{v} (2,2,2,p)$. Наистина, ако допуснем, че $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ е $(2,2,2,p)$-свободно 4-разлагане на $V(G-u)$, като добавим върха u към това от множествата V_1, V_2, V_3, V_4, в което е върха v, ще получим $(2,2,2,p)$-свободно 4-разлагане на $V(G)$, което е противоречие. Понеже $cl(G-u) \leq cl(G) < p+2$ имаме

$$|V(G-u)| \geq F_v(2,2,2,p;p+2).$$

Съгласно Теорема 4.6, $F_v(2,2,2,p) \geq 2p+5$. Следователно

$$|V(G)| \geq 2p+6.$$

По-нататък ще считаме, че $d_G(v) \neq |V(G)|-2$, $\forall\, v \in V(G)$. Поради това от (6.16) получаваме

$$d_G \leq |V(G)|-3, \quad \forall\, v \in V(G). \tag{6.17}$$

Ако $\alpha(G) \geq 4$, от Теорема 3.5 (а) следва желаното неравенство $|V(G)| \geq 2p+6$. Нека $\alpha(G)=3$. Да допуснем, че $|V(G)| < 2p+6$. Тогава от Теорема 3.5 (а) имаме $|V(G)| = 2p+5$. От Теорема 3.5 (б) следва

$$2p+5 = |V(G)| \geq |V(K_{m-p-2}+L_p)| = m+3p = 4p+3,$$

което е противоречие. Остана да разгледаме ситуацията, когато $\alpha(G) \leq 2$. Понеже G не е пълен граф, имаме

$$\alpha(G) = 2. \tag{6.18}$$

И така, трябва да докажем неравенството $|V(G)| \geq 2p+6$, когато G има свойствата (6.17) и (6.18). От Теорема 3.5 (а) имаме $|V(G)| \geq 2p+5$. Поради това, трябва да докажем, че $|V(G)| \neq 2p+5$. Да допуснем противното, т.е. $|V(G)| = 2p+5$. Съгласно Теорема 3.6 имаме $F(2,2,p+1;p+2) \geq 2p+6$. Следователно $G \overset{v}{\nrightarrow} (2,2,p+1)$. Нека $V(G) = X \cup Y \cup Z$ е $(2,2,p+1)$-свободно 3-разлагане. От (6.18) става ясно, че $|X| \leq 2$ и $|Y| \leq 2$. Ако $|X| = 1$ и $X = \{v'\}$, тогава от (6.17) и (6.18) следва, че съществува $w \in Z$, който не е съседен на v'. Ясно е, че $\{v', w\} \cup Y \cup (Z-w)$ също е $(2,2,p+1)$-свободно 3-разлагане на $V(G)$. От тези разсъждения става ясно, че можем да считаме, че $|X| = |Y| = 2$. Нека $X = \{a,b\}$ и $Y = \{c,d\}$. Дефинираме подграфите

$$G_1 = G[a,b,c,d] \quad \text{и} \quad G_2 = G[Z].$$

От $G \xrightarrow{v} (2,2,2,p)$ следва $G_2 \xrightarrow{v} (2,p)$. Понеже Z не съдържа $(p+1)$-клики имаме $cl(G_2) < p+1$. Като вземем под внимание, че $|Z| = 2p+1$, от Следствие 3.2 получаваме $G_2 = \overline{C}_{2p+1}$. Ще предполагаме, че C_{2p+1} е зададен с равенствата (3.12) и (3.13). Дефинираме множествата

$$Q = \{v_{2i-1} \mid i = 1,2,\ldots,p-2\} \cup \{v_{2p}\};$$

$$Q_1 = Q \cup \{v_{2p-3}\} \quad \text{и} \quad Q_2 = Q \cup \{v_{2p-2}\}.$$

Очевидно Q_1 и Q_2 са p-клики на $\overline{C}_{2p+1}$.

От (6.18) следва, че $E(G_1)$ съдържа две ребра без общ връх. Поради това можем да предположим, че $[a,c]$, $[b,d] \in E(G_1)$. От $cl(G) < p+2$ следва, че единият от върховете a и c не е съседен на някои от върховете на $\overline{C}_{2p+1}$. Нека, например, a и v_1 не са съседни. Разглеждаме 4-разлагането $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$, където $V_1 = \{v_{2p}, v_{2p+1}\}$, $V_2 = \{v_{2p-1}, v_{2p-2}\}$, $V_3 = \{c,d\}$. Тъй като V_1, V_2, V_3 са независими множества и

$$G \xrightarrow{v} (2,2,2,p),$$

множеството V_4 съдържа p-клика на G. Тъй като $Q' = Q_1 - \{v_{2p}\}$ е единствена $(p-1)$-клика в $V_4 - \{a,b\}$ следва, че $Q' \cup \{a\}$ или $Q' \cup \{b\}$ е p-клика на

G. Понеже $v_1 \in Q'$ и a не е съседен на v_1, множеството $Q' \cup \{a\}$ не е клика. Следователно $Q' \cup \{b\}$ е p-клика на графа G. Поради това

$$Q' = Q_1 - v_{2p} \subseteq \Gamma_G\ (b). \tag{6.19}$$

Нека $Q'' = Q_2 - v_{2p-5}$. Както по-горе, от 4-разлагането $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$, където $V_1 = \{v_{2p-3}, v_{2p-4}\}$, $V_2 = \{v_{2p-5}, v_{2p-6}\}$, $V_3 = \{c, d\}$, правим извода, че $Q'' \cup \{a\}$ или $Q'' \cup \{b\}$ е p-клика. Понеже $p \geq 4$ имаме $2p - 6 \geq 2$. Следователно V_2 е дефиниран коректно и $v_1 \in Q''$. От $[a, v_1] \notin E(G)$ правим извода, че $Q'' \cup \{b\}$ е p-клика на G. Ето защо имаме

$$Q'' = Q_2 - v_{2p-5} \subseteq \Gamma_G(b). \tag{6.20}$$

От (6.19) и (6.20) получаваме

$$Q_1 \subseteq \Gamma_G\ (b) \tag{6.21}$$

$$Q_2 \subseteq \Gamma_G\ (b). \tag{6.22}$$

Ще разгледаме следните два случая:

Случай 1. $[b, c] \in E(G)$.
Разглеждаме 4-разлагането $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$, където

$$V_1 = \{v_{2p-1}, v_{2p-2}\},\ V_2 = \{v_{2p-3}, v_{2p-4}\}\ V_3 = \{a, b\}.$$

Понеже V_1, V_2, V_3 са независими множества от $G \xrightarrow{v} (2, 2, 2, p)$ следва, че V_4 съдържа p-клика L. Тъй като Q е единствена $(p-1)$-клика в $V_4 - \{c, d\}$, или $L = Q \cup \{c\}$, или $L = Q \cup \{d\}$. Ако $L = Q \cup \{c\}$ тогава $Q \subseteq \Gamma_G(c)$. Този факт и (6.21) ни дават, че

$$Q \subseteq \Gamma_G(b) \cap \Gamma_G(c). \tag{6.23}$$

От (6.23), (6.21) и $cl(G) < p + 2$ следва, че c и v_{2p-3} не са съседни, а от (6.23), (6.22) и $cl(G) < p + 2$ следва, че c и v_{2p-2} не са съседни. Получихме, че $\{c, v_{2p-2}, v_{2p-3}\}$ е независимо множество, което противоречи на (6.18).

Ако $L = Q \cup \{d\}$, по същия начин стигаме до противоречието, че множеството $\{d, v_{2p-2}, v_{2p-3}\}$ е независимо.

Случай 2. $[b, c] \notin E(G)$.
Разглеждаме 4-оцветяването $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$, където $V_1 = \{v_{2p}, v_{2p+1}\}$, $V_2 = \{v_{2p-1}, v_{2p-2}\}$, $V_3 = \{v_{2p-3}, v_{2p-4}\}$. Тъй като V_1, V_2, V_3 са независими множества, от $G \xrightarrow{v} (2, 2, 2, p)$ следва, че V_4 съдържа p-клика L. Понеже $cl(G_1) = 2$ имаме $|L \cap V(\overline{C}_{2p+1})| \geq p - 2$. Да забележим, че $\widetilde{Q} = Q - v_{2p}$ е единствена $(p-2)$-клика в $V_4 - \{a, b, c, d\}$. Поради това $L \cap V(\overline{C}_{2p+1}) = \widetilde{Q}$. Тъй като $v_1 \in Q$ и $[a, v_1] \notin E(G)$, следва че $b \in L$. В разглеждания случай $[b, c] \notin E(G)$. Поради това $c \notin L$. Остава единствената възможност $L = \widetilde{Q} \cup \{b, d\}$. Оттук правим извода, че

$$\widetilde{Q} = Q - v_{2p} \subseteq \Gamma_G(d). \tag{6.24}$$

По същия начин от 4-разлагането $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$, където $V_1 = \{v_{2p-1}, v_{2p-2}\}$, $V_2 = \{v_{2p-3}, v_{2p-4}\}$, $V_3 = \{v_{2p-5}, v_{2p-6}\}$ следва, че

$$Q - \{v_{2p-5}\} \subseteq \Gamma_G(d). \tag{6.25}$$

От (6.24) и (6.25) следва

$$Q \subseteq \Gamma_G(d). \tag{6.26}$$

От (6.21), (6.26) и $cl(G) < p + 2$ получаваме, че d и v_{2p-3} не са съседни. От $cl(G) < p+2$, (6.22) и (6.26) следва, че d и v_{2p-2} не са съседни. Получихме, че $\{d, v_{2p-3}, v_{2p-2}\}$ е независимо множество, което противоречи на (18).

II. Доказателство на Теорема 6.6, когато $r = 4$.

Нека $G \xrightarrow{v} (2, 2, 2, 2, p)$ и $cl(G) < p + 3$. Трябва да докажем, че $|V(G)| \geq 2p + 7$. Съгласно Теорема 3.6 имаме $|V(G)| \geq 2p + 6$. Остава да докажем, че $|V(G)| \neq 2p + 6$. Да допуснем противното, т.е. $|V(G)| = 2p + 6$. Ако за някой връх $v \in V(G)$ имаме $d_G(v) = |V(G)| - 1$, тогава $G - v \xrightarrow{v} (2, 2, 2, p)$ и $cl(G - v) < p + 2$. Тъй като доказахме Теорема 6.6 в случая $r = 3$, правим извода, че $|V(G - v)| \geq 2p+6$. Това противоречи на допускането, че $|V(G)| = 2p + 6$. Поради това е изпълнено неравенството (6.16). Също както в случая $r = 3$ правим извода, че ако в (6.16) имаме равенство, тогава $|V(G)| \geq 2p + 7$. Следователно неравенството (6.16) е строго, т.е. изпълнено е (6.17). От $|V(G)| = 2p+6$ и Теорема 3.5 (а) получаваме $\alpha(G) \leq 3$. Ако допуснем, че $\alpha(G) = 3$, тогава в (а) на Теорема 3.5 имаме равенство. От Теорема 3.5 (б) следва, че

$$2p + 6 = |V(G)| \geq |V(K_{m-p-2} + L_p)| = m + 3p = 4p + 4,$$

което е противоречие. Това противоречие доказва, че $\alpha(G) \leq 2$. Понеже G не е пълен граф имаме $\alpha(G) = 2$. И така, за графа G са изпълнени (6.17) и (6.18).

Съгласно Теорема 3.6, $F(2, 2, p+2; p+3) \geq 2p+8$. Понеже $|V(G)| = 2p+6$ и $cl(G) < p+3$, стигаме до извода, че $G \nrightarrow (2, 2, p+2)$. Нека $V(G) = X \cup Y \cup Z$ е $(2, 2, p + 2)$-свободно 3-разлагане. От (6.18) следва $|X| \leq 2$ и $|Y| \leq 2$. От (6.17) и (6.18), както в случая $r = 3$, става ясно, че можем да считаме, че $|X| = |Y| = 2$. Нека $X = \{a, b\}$, $Y = \{c, d\}$ и $G_1 = G[Z]$. Да забележим, че

$$G \xrightarrow{v} (2, 2, 2, 2, p) \Longrightarrow G_1 \xrightarrow{v} (2, 2, p).$$

Тъй като Z не съдържа $(p + 2)$-клики имаме $cl(G_2) < p + 2$. От Следствие 3.2 получаваме $G_1 = K_1 + \overline{C}_{2p+1}$. Нека $V(K_1) = \{w\}$ и C_{2p+1} е зададен с равенствата (3.12) и (3.13). От (6.18) става ясно, че w е съседен на единия от върховете a, b и че w е съседен на единия от върховете c, d. Без ограничение на общността можем да предположим, че w е съседен на a и c. От (6.17) следва, че w не е съседен на b и d.

Случай 1. $[a, c] \notin E(G)$**.**

В този случай $G[w, a, b, c, d]$ не съдържа 3-клика. От $(p+1)$-хроматичното разлагане на $\overline{C}_{2p+1}$

$$\{v_1\} \cup \{v_2, v_3\} \cup \ldots \cup \{v_{2p}, v_{2p+1}\}$$

става ясно, че

$$\chi(\overline{C}_{2p+1} - \{v_1, v_2, \ldots, v_7\}) < p - 2.$$

Следователно $\overline{C}_{2p+1} - \{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ не съдържа $(p-2)$-клики. Понеже $G[w, a, b, c, d]$ не съдържа 3-клики, правим извода, че

$$M = V(G) - \{v_1, \ldots, v_7\}$$

не съдържа p-клики. Поради това

$$V(G) = \{v_1, v_2\} \cup \{v_3, v_4\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \{v_7\} \cup M$$

е $(2, 2, 2, 2, p)$-свободно 5-разлагане, което е противоречие.

Случай 2. $[a, c] \in E(G)$**.**

От $cl(G) < p + 3$ следва, че единия от върховете a, c не е съседен на някой от върховете на $\overline{C}_{2p+1}$. Поради това ще предполагаме, че a и v_1 не са съседни. Нека $N = V(G) - \{a, v_1, \ldots, v_7\}$. Понеже $\overline{C}_{2p+1} - \{v_1, \ldots, v_7\}$ не съдържа $(p-2)$-клики и $G[w, b, c, d]$ не съдържа 3-клики, множеството N не съдържа p-клики. Получихме, че

$$V(G) = \{v_1, a\} \cup \{v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup N$$

е $(2, 2, 2, 2, p)$-свободно 5-разлагане, което е противоречие.

III. Доказателство на Теорема 6.6, когато $r \geq 5$.

Нека $G \xrightarrow{v} (2_r, p)$ и $cl(G) < p + r - 1$. Трябва да докажем, че

$$|V(G)| \geq 2p + r + 3.$$

Съгласно Теорема 3.1 имаме

$$\chi(G) \geq r + p. \tag{6.27}$$

Ще разгледаме два случая:

Случай 1. $G \xrightarrow{v} (2, p+r-2)$.
Очевидно $\chi(\overline{C}_{2p+2r-3}) = p+r-1$. Поради това от (6.27) следва, че $G \neq \overline{C}_{2p+2r-3}$. Съгласно Следствие 3.2 имаме $|V(G)| \geq 2p+2r-2$. Да забележим, че от $r \geq 5$ следва $2p+2r-2 \geq r+2p+3$. Следователно $|V(G)| \geq r+2p+3$.

Случай 2. $G \overset{v}{\nrightarrow} (2, p+r-2)$.
Нека $X \cup Y$ е $(2, p+r-2)$-свободно 2-разлагане на G и $G_1 = G[Y]$. Ясно е, че можем да считаме, че $X \neq \emptyset$. Очевидно от

$$G \xrightarrow{v} (2_r, p) \Longrightarrow G_1 \xrightarrow{v} (2_{r-1}, p).$$

Тъй като Y не съдържа $(p+r-2)$-клики имаме $cl(G_1) < r+p-2$. Съгласно индуктивната хипотеза $|V(G_1)| \geq 2p+r+2$. Понеже $X \neq \emptyset$ имаме $|V(G)| \geq 2p+r+3$.

Теорема 6.6 е доказана.

Доказателство на Теорема 6.5. Броят на числата в $\{a_1, \ldots, a_r\}$, които са равни на две, означаваме с $l(a_1, \ldots, a_r)$. Дефинираме

$$t(a_1, \ldots, a_r) = m - l(a_1, \ldots, a_r) - 1.$$

От равенствата

$$m = \sum_{a_i=2}(a_i - 1) + \sum_{a_i \geq 3}(a_i - 1) + 1 = l(a_1, \ldots, a_r) + \sum_{a_i \geq 3}(a_i - 1) + 1$$

следва, че

$$t(a_1, \ldots, a_r) = \sum_{a_i \geq 3}(a_i - 1). \tag{6.28}$$

Доказателството на Теорема 6.5 ще проведем с помощта на индукция относно $t(a_1, \ldots, a_r)$. Понеже $p \geq 3$, от (6.28) следва $t(a_1, \ldots, a_r) \geq p-1$. Поради това базата на индукцията е $t(a_1, \ldots, a_r) = p-1$. Съгласно Твърдение 3.1 и Твърдение 3.2 можем да предположим, че

$$2 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_r = p.$$

От тези неравенства и $t(a_1, \ldots, a_r) = p-1$ (виж (6.28)) получаваме $a_1 = \ldots = a_{r-1} = 2$. Поради това базата на индукцията следва от Теорема 6.6.

Нека $t(a_1, \ldots, a_r) \geq p$. Отново ще предполагаме, че

$$2 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_r = p.$$

От тези неравенства и $t(a_1, \ldots, a_r) \geq p$ (виж (6.28)) следва, че $a_{r-1} \geq 3$. От Твърдение 3.5 ($k = 2$) имаме

$$F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1) \geq F_v(a_1, \ldots, a_{r-2}, 2, a_{r-1}-1, a_r; m-1). \tag{6.29}$$

Тъй като $t(a_1, \ldots, a_{r-2}, 2, a_{r-1}-1, a_r) < t(a_1, \ldots, a_r)$, от индуктивната хипотеза имаме

$$F_v(a_1, \ldots, a_{r-2}, 2, a_{r-1}-1, a_r; m-1) \geq m+p+3.$$

От последното неравенство и (6.29) получаваме желаното неравенство

$$F_v(a_1, \dots, a_r) \geq m + p + 3.$$

Теорема 6.5 е доказана.

Теорема 6.6 и Теорема 6.5 са публикувани в [N34].

6.4. Пресмятане на числата $F_v(a_1, \dots, a_r; m-1)$, когато $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 3$.

Теорема 6.7. *Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа, за които p и m са дефинирани с равенствата (3.1) и (3.2). Ако $p = 3$ и $m \geq 6$, тогава*

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) = m + 6.$$

Доказателство. Най-напред ще докажем, че

$$F_v(2, 2, 3; 4) \geq 11. \tag{6.30}$$

Нека G е граф такъв, че $G \xrightarrow{v} (2, 2, 3)$ и $cl(G) < 4$. От Теорема 4.6 имаме $|V(G)| \geq 10$. Понеже $cl(G) < 4$ и $R(3, 4) = 9$ имаме $\alpha(G) \geq 3$. Ако $\alpha(G) \geq 4$, тогава (6.30) следва от Теорема 3.5 (а). Ако $\alpha(G) = 3$, неравенството (6.30) следва от Теорема 3.5 (б). От неравенството (6.30) и Теорема 6.5 следва $F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) \geq m + 6$.

За да докажем обратното неравенство $F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) \leq m + 6$ разглеждаме графа P, чийто допълнителен граф $\overline{P}$ е даден на Фиг. 4.3. Ще докажем, че този граф удовлетворява условията на Теорема 3.2 за $n = 6$ и $p = 3$. Нека $b_1, \dots, b_s$ са естествени числа такива, че

$$b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_s \leq 3 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{s}(b_i - 1) + 1 = 6. \tag{6.31}$$

Трябва да докажем, че

$$P \xrightarrow{v} (b_1, \dots, b_s). \tag{6.32}$$

Съгласно Твърдение 3.1 можем да предположим, че $b_i \geq 2$, $i = 1, 2, 3$. От последните неравенства и условията (6.31) получаваме следните възможности:

$$s = 3,\ \ b_1 = 2,\ \ b_2 = b_3 = 3;$$
$$s = 4,\ \ b_1 = b_2 = b_3 = 2,\ \ b_4 = 3;$$
$$s = 5,\ \ b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 2.$$

В доказателството на Теорема 6.1 изяснихме, че $P \xrightarrow{v} (2, 3, 3)$. От Твърдение 3.5 ($i = 2,\ k = 2$) и $P \xrightarrow{v} (2, 3, 3)$ следва $P \xrightarrow{v} (2, 2, 2, 3)$ От $P \xrightarrow{v} (2, 2, 2, 3)$ и Твърдение 3.5 получаваме $P \xrightarrow{v} (2, 2, 2, 2, 2)$.

И така доказахме, че от (6.31) следва (6.32). От Теорема 3.2 следва

$$K_{m-6} + P \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r).$$

Понеже $cl(P) = 4$, имаме $cl(K_{m-6} + P) = m - 2$. Следователно

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) \leq |V(K_{m-6} + P)| = m + 6.$$

Теорема 6.7 е доказана.

Забележка 6.2. *Ако $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 3$ тогава, съгласно (3.22), $F_v(a_1, \dots, a_r; m-1)$ съществува само тогава, когато $m \geq 5$. Поради това*

Теорема 6.7 не обхваща единствено случая $m = 5$. *От* $m = 5$ *и* $p = 3$ *следва, че* $r = 2$ *и* $a_1 = a_2 = 3$ *или* $r = 3$ *и* $a_1 = a_2 = 2$, $a_3 = 3$. *От (4.12) знаем, че* $F_v(3,3;4) = 14$. *От последното равенство и (4.4) следва* $F_v(2,2,3;4) \leq 14$, *а в доказателството на Теорема 6.7 получихме, че* $F_v(2,2,3;4) \geq 11$. *При коректурите на тази работа се появи анонс в* [C5], *че* $F_v(2,2,3;4) = 14$.

Забележка 6.3. *Теорема 6.4 е специален случай на Теорема 6.7. Поради важността на триъгълните числа на Фолкман се постарахме да дадем директно доказателство на Теорема 6.4, което е сравнително просто и елегантно. Ще отбележим още, че това доказателство няма нищо общо с доказателството на Теорема 6.7.*

Теорема 6.7 е публикувана в [N34].

6.5. Пресмятане на числата $F_v(a_1, \dots, a_r; m-1)$, когато $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 4$.

Теорема 6.8. *Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа, за които p и m са дефинирани с равенствата (3.1) и (3.2). Ако $p = 4$ и $m \geq 6$, тогава*

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) = m + 7.$$

Доказателство. От Теорема 4.4 имаме $F(2, 2, 4; 5) = 13$. От последното равенство и Теорема 6.6 получаваме

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) \geq m + 7$$

За да докажем обратното неравенство, разглеждаме графа Q, чийто допълнителен граф $\overline{Q}$ е даден на Фиг. 4.3. Ще докажем, че графът Q удовлетворява условията на Теорема 3.2 за $n = 6$ и $p = 4$. Нека $b_1, \dots, b_s$ са естествени числа такива, че

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_s \leq 4 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{s}(b_i - 1) + 1 = 6. \tag{6.33}$$

Трябва да докажем, че

$$Q \xrightarrow{v} (b_1, \dots, b_s). \tag{6.34}$$

Съгласно Твърдение 3.1 можем да предположим, че $b_i \geq 2$, $i = 1, \dots, s$. От последните неравенства и условията (6.33) получаваме следните възможности:

$$s = 2, \;\; b_1 = 3, \;\; b_2 = 4;$$

$$s = 3, \;\; b_1 = b_2 = 2. \;\; b_3 = 4;$$

$$s = 3, \;\; b_1 = 2, \;\; b_2 = b_3 = 3;$$

$$s = 4, \;\; b_1 = b_2 = b_3 = 2, \;\; b_4 = 3;$$

$$s = 5, \;\; b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 2.$$

От Теорема 4.5 имаме $Q \xrightarrow{v} (3, 4)$. От $Q \xrightarrow{v} (3, 4)$ и Твърдение 3.5 следва $Q \xrightarrow{v} (2, 2, 4)$ и $Q \xrightarrow{v} (2, 3, 3)$. От $Q \xrightarrow{v} (2, 3, 3)$ и Твърдение 3.5 получаваме $Q \xrightarrow{v} (2, 2, 2, 3)$, а от $Q \xrightarrow{v} (2, 2, 2, 3)$ получаваме, че $Q \xrightarrow{v} (2, 2, 2, 2, 2)$.

И така доказахме, че от (6.33) следва (6.34). От Теорема 3.2 следва

$$K_{m-6} + Q \xrightarrow{v} (a_1, \dots, a_r).$$

Понеже $cl(Q) = 4$ имаме $cl(K_{m-6} + Q) = m - 2$. Следователно

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) \leq |V(K_{m-6} + Q)| = m + 7.$$

Теорема 6.8 е доказана.

Забележка 6.4. *Ако $max\{a_1, \dots, a_r\} = 4$ тогава, съгласно (3.22), $F_v(a_1, \dots, a_r; m-1)$ съществува само когато $m \geq 6$. Поради това Теорема 6.8 обхваща всички числа от разглеждания тип.*

Два частни случая на Теорема 6.8 са публикувани в съвместните с Е. Недялков статии [N3] и [N4]. Самата Теорема 6.8 е публикувана в [N34].

6.6. Оценка отгоре за числата $F_v(a_1, \dots, a_r; m-1)$, където $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 5$.

Ако $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 5$, съгласно (3.22), числото $F_v(a_1, \dots, a_r; m-1)$ съществува тогава и само тогава, когато $m \geq 7$. За тези числа в [L4] е доказано неравенството

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) \leq m + 25, \quad \text{ако} \quad m \geq 12.$$

Също в [L4] е анонсирано без доказателство неравенството

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) \leq 77 - 3m, \quad 8 \leq m \leq 11.$$

Ще подобрим тези оценки като докажем следната;

Теорема 6.9 *Нека* $a_1, \dots, a_r$ *са естествени числа, за които* $m \geq 7$ *и* $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 5$. *Тогава*

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) \leq m + 15.$$

Разглеждаме графа T_p, който е дефиниран във втория пункт на четвърта глава. Ще ни е необходима следната:

Лема 6.6. *Вярно е, че*

$$T_5 \xrightarrow{v} (4, 4).$$

Доказателство. Нека $V(T_5) = V_1 \cup V_2$ е произволно 2-разлагане на графа T_5. Трябва да докажем, че едно от множествата V_1, V_2 непременно съдържа 4-клика. Дефинираме

$$V_1' = V(\overline{C}_{11}) \cap V_i, \quad i = 1, 2.$$

Без ограничение на общността можем да предположим, че

$$|V_1'| \leq |V_2'|. \tag{6.35}$$

Да допуснем, че V_1' и V_2' не съдържат 4-клики. Тогава от Лема 2.1 следва, че $|V_i'| \leq 6$, $i = 1, 2$. От тези неравенства и (6.35) получаваме, че $|V_1'| = 5$ и $|V_2'| = 6$. Разглеждаме подграфа $G_1 = \overline{C}_{11}[V_1']$. Понеже V_1' не съдържа 4-клики и $\alpha(\overline{C}_{11}) = 2$, непременно допълнителният граф $\overline{G}_1$ има две ребра e_1 и e_2, които нямат общ връх. Без ограничение на общността можем да предположим, че $e_1 = \{v_1, v_2\}$. Това разбира се означава, че $v_1, v_2 \in V_1'$. За реброто e_2 са налице следните възможности:

Случай 1. $e_2 = \{v_3, v_4\}$ *или* $e_2 = [v_{10}, v_{11}]$.

Поради симетрията, достатъчно е да разгледаме само ситуацията, когато $e_2 = \{v_3, v_4\}$. И така имаме $V_1' \supseteq \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Тъй като V_2' не съдържа 4-клики (така сме допуснали) петият връх на V_1' е някой от върховете на 4-кликата $\{v_5, v_7, v_9, v_{11}\}$.

Подслучай 1.a. $V_1' = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Ако $u_2 \in V_1$, тогава V_1 съдържа 4-кликата $\{u_2, v_1, v_3, v_5\}$.

Ако $u_2 \in V_2$, тогава V_2 съдържа 4-кликата $\{u_2, v_6, v_8, v_{11}\}$.

Подслучай 1.в. $V_1' = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7\}$.

Ако $u_2 \in V_1$, тогава V_1 съдържа 4-кликата $\{u_2, v_1, v_3, v_7\}$.

Ако $u_2 \in V_2$, тогава V_2 съдържа 4-кликата $\{u_2, v_6, v_8, v_{11}\}$.

Подслучай 1.с. $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_9\}$.

Ако $u_6 \in V_1$, тогава V_1 съдържа 4-кликата $\{u_6, v_1, v_4, v_9\}$.

Ако $u_6 \in V_2$, тогава V_2 съдържа 4-кликата $\{u_6, v_5, v_7, v_{11}\}$.

Подслучай 1.д. $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_{11}\}$.

Този подслучай е очевидно еквивалентен на Подслучай 1.а.

Случай 2. $e_2 = [v_4, v_5]$ *или* $e_2 = [v_9, v_{10}]$.

Поради симетрията ще разгледаме само ситуацията, когато $e_2 = [v_4, v_5]$. И така, $\{v_1, v_2, v_4, v_5\} \subseteq V_1'$. Ако петият връх на V_1' е v_3, тогава от Подслучай 1.а следва, че едното от множествата V_1, V_2 съдържа 4-клики. Нека $v_3 \in V_2'$. Тогава една от 4-кликите $\{v_3, v_7, v_9, v_{11}\}$ и $\{v_3, v_6, v_8, v_{10}\}$ се съдържа в V_2', което противоречи на нашето допускане.

Случай 3. $e_2 = [v_5, v_6]$ *или* $e_2 = [v_8, v_9]$.

Поради симетрията ще разгледаме само ситуацията $e_2 = [v_5, v_6]$. Имаме, че $\{v_1, v_2, v_5, v_6\} \subseteq V_1'$. Ако петият връх на V_1' е v_3 или v_4 попадаме във вече разгледаните случаи. Нека $v_3, v_4 \in V_2'$. Тъй като сме допуснали, че V_2' не съдържа 4-клика, петият връх на V_1' е един от върховете $\{v_9, v_7, v_{11}\}$.

Подслучай 3.а. $V_1' = \{v_1, v_2, v_5, v_6, v_7\}$.

Ако $u_6 \in V_1$, тогава V_1 съдържа 4-кликата $\{u_6, v_1, v_5, v_7\}$.

Ако $u_6 \in V_2$, тогава V_2 съдържа 4-кликата $\{u_6, v_4, v_8, v_{10}\}$.

Подслучай 3.в. $V_1' = \{v_1, v_2, v_5, v_6, v_9\}$.
Ако $u_6 \in V_1$, тогава V_1 съдържа 4-кликата $\{u_6, v_1, v_5, v_9\}$.
Ако $u_6 \in V_2$, тогава V_2 съдържа 4-кликата $\{u_6, v_4, v_7, v_{10}\}$.

Подслучай 3.с. $V_1' = \{v_1, v_2, v_5, v_6, v_{11}\}$.
Ако $u_1 \in V_1$, тогава V_1 съдържа 4-кликата $\{u_1, v_2, v_{11}, v_5\}$.
Ако $u_1 \in V_2$, тогава V_2 съдържа 4-кликата $\{u_1, v_3, v_7, v_{10}\}$.

Случай 4. $e_2 = [v_6, v_7]$ *или* $e_2 = [v_7, v_8]$.

Поради симетрията ще разгледаме само ситуацията, когато $e_2 = [v_6, v_7]$. Имаме, че $V_1' \supseteq \{v_1, v_2, v_6, v_7\}$. Ако петият връх на V_1' е някой от върховете v_3, v_4, v_5 попадаме в условията на някой от предишните случаи. Нека $v_3, v_4, v_5 \in V_2'$. В тази ситуация една от 4-кликите

$$\{v_3, v_5, v_8, v_{10}\}, \quad \{v_3, v_5, v_9, v_{11}\}$$

се съдържа в V_2'. което противоречи на нашето допускане, че V_2' не съдържа 4-клики.

Лема 6.6 е доказана.

Доказателство на Теорема 6.9. Най-напред ще докажем, че графът T_5 удовлетворява условията на Теорема 3.2 за $n = 7$ и $p = 5$. Нека $b_1, \dots, b_s$ са естествени числа такива, че

$$b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_s \le s \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{s}(b_i - 1) + 1 = 7. \tag{6.36}$$

Трябва да докажем, че

$$T_5 \xrightarrow{v} (b_1, \dots, b_s). \tag{6.37}$$

Съгласно Твърдение 3.1 можем да предположим, че $b_i \ge 2$, $i = 1, \dots, s$. От тези неравенства и (6.36) получаваме че са налице следните възможности:

$$s = 2, \quad b_1 = 3, \quad b_2 = 5;$$
$$s = 2, \quad b_1 = 4, \quad b_2 = 4;$$
$$s = 3, \quad b_1 = b_2 = 2, \quad b_3 = 5;$$
$$s = 3, \quad b_1 = 2, \quad b_2 = 3, \quad b_3 = 4;$$
$$s = 3, \quad b_1 = b_2 = b_3 = 3;$$
$$s = 4, \quad b_1 = b_2 = b_3 = 2, \quad b_4 = 4;$$
$$s = 4, \quad b_1 = b_2 = 2, \quad b_3 = b_4 = 3;$$
$$s = 5, \quad b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 2, \quad b_5 = 3;$$
$$s = 6, \quad b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 2.$$

От (4.8) имаме $T_5 \xrightarrow{v} (3, 5)$. Прилагайки Твърдение 3.5 за $i = 1$, $k = 2$ и за $i = 2$, $k = 2$ получаваме $T_5 \xrightarrow{v} (2, 2, 5)$ и $T_5 \xrightarrow{v} (3, 2, 4)$. Съгласно Твърдение 3.2 от $T_5 \xrightarrow{v} (3, 2, 4)$ следва $T_5 \xrightarrow{v} (2, 3, 4)$. От $T_5 \xrightarrow{v} (3, 5)$ и Твърдение 3.5

за $i = 2$ и $k = 3$ получаваме $T_5 \xrightarrow{v} (3,3,3)$. От $T_5 \xrightarrow{v} (2,2,5)$ и Твърдение 3.5 последователно получаваме

$$T_5 \xrightarrow{v} (2,2,2,4), \quad T_5 \xrightarrow{v} (2,2,2,2,3), \quad T_5 \xrightarrow{v} (2,2,2,2,2,2).$$

От $T_5 \xrightarrow{v} (2,3,4)$ и Твърдение 3.5 правим извода, че $T_5 \xrightarrow{v} (2,3,2,3)$. От Твърдение 3.2 имаме $T_5 \xrightarrow{v} (2,2,3,3)$. Съгласно Лема 6.6, $T_5 \xrightarrow{v} (4,4)$.

И така, доказахме, че от (6.36) следва (6.37). От Теорема 3.2 правим извода, че

$$K_{m-7} + T_5 \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r).$$

Понеже $cl(T_5) = 5$ имаме $cl(K_{m-7} + T_5) = m - 2$. Следователно

$$F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1) \leq |V(K_{m-7} + T_5)| = m + 15.$$

Теорема 6.9 е доказана.

ГЛАВА 7

ФОЛКМАНОВИТЕ ЧИСЛА $F_v(p,p;p+1)$

7.1. Уводни бележки.

За числата $F_v(p,p;p+1)$ са известни следните оценки:

$$F_v(p,p;p+1) \le \lfloor 2p\,!\,(e-1)\rfloor - 1, \quad p \ge 2, \quad \text{[L4]}; \tag{7.1}$$

$$F_v(p,p;p+1) \le \lfloor p\,!\,e\rfloor - 2, \quad p \ge 3, \quad \text{[N23]}; \tag{7.2}$$

Знаем точните стойности само на две от тези числа. Първото от тях е $F_v(2,2;3) = 5$ и е очевидно. Второто число е $F_v(3,3;4) = 14$. Неравенството $F_v(3,3;4) \le 14$ е получено в [N16] и доказателството му е дадено в четвърта глава. Неравенството $F_v(3,3;4) \ge 14$ е получено с помощта на компютър в [P3]. За следващото число $F_v(4,4;5)$ от (7.1) имаме $F_v(4,4;5) \le 81$, а от (7.2) имаме $F_v(4,4;5) \le 63$.

В тази глава ще подобрим тези оценки като докажем, че

$$F_v(4,4;5) \le 35.$$

За доказателството на това неравенство ще построим 35-върхов граф R такъв, че $R \xrightarrow{v} (4,4)$ и $cl(R) = 4$. Най-напред ще построим 61-върхов граф $Q \xrightarrow{v} (4,4)$ с $cl(G) = 4$. Желаният 35-върхов граф R ще получим като хомоморфен образ на графа Q. Най-накрая, като използваме равенството $F_v(3,3;4) = 14$ и оценката $F_v(4,4;5) \le 35$ ще подобрим неравенствата (7.1) и (7.2) като докажем, че

$$F_v(p+1,p+1) \le 1.46p\,!, \quad p \ge 3.$$

Ако $G_1,\dots,G_k$ са графи, всеки два от които нямат общи върхове, тогава с $\bigcup_{i=1}^{k} G_i$ ще означаваме графа G, за който

$$V(G) = \bigcup_{i=1}^{k} V(G_i) \quad \text{и} \quad E(G) = \bigcup_{i=1}^{k} E(G_i).$$

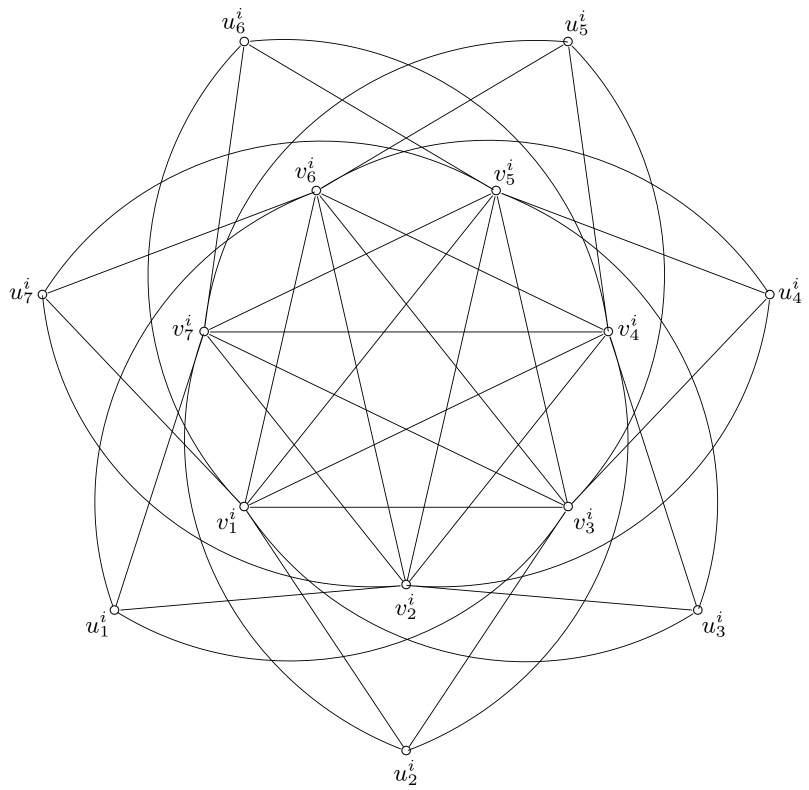
7.2. Построяване на 61**-върхов граф** Q **с** $cl(Q) = 4$ **и** $Q \xrightarrow{v} (4,4)$.

Най-напред ще докажем следната:

Лема 7.1. *Нека* G *е граф такъв, че* $G \xrightarrow{v} (p,p)$. *Нека* $V_1 \cup V_2$ *е* $(p+1, p+1)$*-свободно* 2*-разлагане на графа* $\overline{K}_2 + G$. *Тогава двата върха на* $\overline{K}_2$ *или са в* V_1*, или са в* V_2.

Доказателство. Нека $V(\overline{K}_2) = \{u, v\}$. Да допуснем противното, т.е. $u \in V_1$ и $v \in V_2$. Тогава $(V_1 - \{u\}) \cup (V_2 - \{v\})$ е (p,p)-свободно 2-разлагане на G, което е противоречие. С това лемата е доказана.

Разглеждаме графите Γ_i, $i = 1,2,3,4$, които са дадени на Фиг. 7.1.

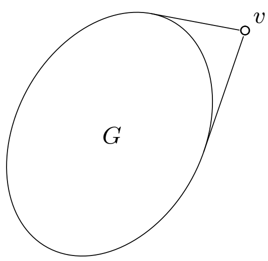


Фиг. 7.1, граф F_i, $i = 1,2,3,4$.

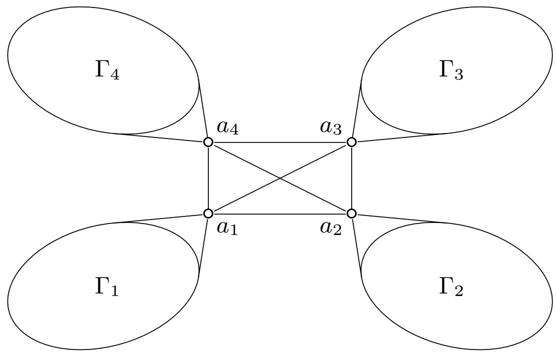
Изображението

$$v_k \longrightarrow v_k^i, \quad u_k \longrightarrow u_k^i, \quad i = 1,2,3,4$$

е изоморфизъм между графа T_3, дефиниран в доказателството на Теорема 4.1, и графа Γ_i, така че графите Γ_i са изоморфни копия на графа T_3.



Фиг 7.2, Граф $K_1 + G$



Фиг. 7.3, Граф P

За произволен граф G, на Фиг. 7.2 е означен графа $K_1 + G$, където $V(K_1) = \{v\}$. С помощта на това означение на Фиг. 7.3 е даден 60-върховия граф P, където Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 са от Фиг. 7.1. С Q означаваме графа, който се получава като към P добавим нов връх b такъв, че

$$\Gamma_Q(b) = \bigcup_{i=1}^{4} V(\Gamma_i). \tag{7.3}$$

Твърдение 7.1. *$Q \xrightarrow{v} (4,4)$ и $cl(Q) = 4$.*

Доказателство. От (4.8) имаме $cl(\Gamma_i) = 3$, $i = 1,2,3,4$. Поради това $cl(P) = 4$. От (7.3) става ясно, че върхът b не е връх на 5-клика. Следователно $cl(Q) = 4$.

Да предположим, че $Q \overset{v}{\nrightarrow} (4,4)$ и нека $V_1 \cup V_2$ е $(4,4)$-свободно 2-разлагане на $V(Q)$. Без ограничение на общността можем да предположим, че $b \in V_1$. Нека $W_i = V(\Gamma_i) \cup \{b, a_i\}$, $i = 1,2,3,4$. Ясно е, че $Q[W_i] = \overline{K}_2 + \Gamma_i$, където $V(\overline{K}_2) = \{b, a_i\}$. Съгласно (4.9) имаме $\Gamma_i \xrightarrow{v} (3,3)$. От този факт и Лема 7.1 следва, че $a_i \in V_1$, $i = 1,2,3,4$. Получихме, че V_1 съдържа 4-кликата $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, което е противоречие.

Твърдение 7.1. е доказано.

Понеже $|V(Q)| = 61$, от Твърдение 7.1 получаваме $F_v(4,4;5) \le 61$.

7.3. Слепване на несъседни върхове в графи.

Определение 7.1. *Нека x и y са два несъседни върха на графа G. С $G/_{x*y}$ означаваме графа H, който се получава като от G премахнем x и y заедно с ребрата излизащи от тях и към получения подграф $G-\{x,y\}$ добавим нов връх $x*y$, за който*

$$\Gamma_H(x*y) = \Gamma_G(x) \cup \Gamma_G(y). \tag{7.4}$$

Казваме, че графът H се получава от графа G чрез слепване на върховете x и y.

Определение 7.2. *Нека G е граф, $x_i,\ y_i \in V(G)$ и $[x_i,y_i] \notin E(G)$, $i=1,2,\dots,k$. С*

$$G/_{\{x_1*y_1,\dots,x_k*y_k\}}$$

означаваме графа $H/_{x_k*y_k}$, където

$$H = G/_{\{x_1*y_1\dots,x_{k-1}*y_{k-1}\}}.$$

Твърдение 7.2. *Нека G е граф, $x_i,\ y_i \in V(G)$ и $[x_i,y_i] \notin E(G)$, $i=1,\dots,k$. Тогава съществува хомоморфизъм на графа G в графа*

$$G/_{\{x_1*y_1,\dots,x_k*y_k\}}.$$

Доказателство. Достатъчно е да докажем твърдението в случая $k=1$. Нека $H = G/_{x_1*y_1}$. Дефинираме изображението $V(G) \xrightarrow{\varphi} V(H)$ по следния начин:

$$v \xrightarrow{v} v, \quad \forall\, v \in V(G)-\{x_1,y_1\}, \quad x_1 \xrightarrow{\varphi} x_1*y_1, \quad y_1 \xrightarrow{\varphi} x_1*y_1.$$

От $H-\{x_1*y_1\} = G-\{x_1,y_1\}$ и (7.4) следва, че φ е хомоморфизъм на G в H.

Твърдение 7.3. *Нека G е граф и $cl(G)=q$. Нека G_1 и G_2 са изоморфни копия на G и изображението $V(G_1) \xrightarrow{\varphi} V(G_2)$ е изоморфизъм между G_1 и G_2. За $x_1,\dots,x_k \in V(G_1)$ дефинираме графа*

$$H = G_1 \cup G_2/_{\{x_1*\varphi(x_1),\dots,x_k*\varphi(x_k)\}}.$$

Тогава $cl(H)=q$.

Доказателство. Нека

$$V_1 = V(G_1)-\{x_1,\dots,x_k\} \quad \text{и} \quad V_2 = V(G_2)-\{\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_k)\}.$$

От дефиницията на графа H имаме, че

$$\text{ако} \quad u \in V_1 \quad \text{и} \quad v \in V_2, \quad \text{тогава} \quad [u,v] \notin E(H). \tag{7.5}$$

Дефинираме следните два подграфа на H:

$$\widetilde{G}_1 = H - V_2 \quad \text{и} \quad \widetilde{G}_2 = H - V_1.$$

Ще докажем, че

$$cl(H) = cl(\widetilde{G}_1) \quad \text{или} \quad cl(H) = cl(\widetilde{G}_2). \tag{7.6}$$

За тази цел разглеждаме произволна клика A на графа H. Да забележим, че $A \subseteq V(\widetilde{G}_1)$ или $A \subseteq V(\widetilde{G}_2)$. Наистина, ако допуснем противното, тогава съществуват u, $v \in A$ такива, че $u \in V_1$ и $v \in V_2$. Съгласно (7.5), u и v не са съседни, което е противоречие. С тези разсъждения доказахме (7.6).

Разглеждаме изображението $V(G_1) \xrightarrow{\pi} V(\widetilde{G}_1)$, което се дефинира както следва:

$$\pi(v) = v, \quad \forall\, v \in V_1 \quad \text{и} \quad \pi(x_i) = x_i * \varphi(x_i), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Ясно е, че

$$\pi \quad \text{е биективно изображение.} \tag{7.7}$$

Понеже

$$G_1 - \{x_1, \ldots, x_k\} = \widetilde{G}_1 - \{x_1 * \varphi(x_1), \ldots, x_k * \varphi(x_k)\}$$

имаме

$$[u, v] \in E(G_1), \;\; u, v \in V_1 \Longleftrightarrow [u, v] \in E(\widetilde{G}_1). \tag{7.8}$$

От (7.4) става ясно, че

$$[u, x_i] \in E(G_1), \;\; u \in V_1 \Longleftrightarrow [u, x_i * \varphi(x_i)] \in E(\widetilde{G}_1). \tag{7.9}$$

Съгласно (7.4), ако $[x_i, x_j] \in E(G_1)$, тогава

$$[x_i * \varphi(x_i), \;\; x_j * \varphi(x_j)] \in E(\widetilde{G}_1).$$

Обратно, ако

$$[x_i * \varphi(x_i), \;\; x_j * \varphi(x_j)] \in E(\widetilde{G}_1)$$

от (7.4) следва, че или $[x_i, x_j] \in E(G_1)$, или $[\varphi(x_i), \varphi(x_j)] \in E(G_2)$. Понеже φ е изоморфизъм, вярно е едното и другото. С тези разсъждения доказахме, че

$$[x_i, x_j] \in E(G_1) \Longleftrightarrow [x_i * \varphi(x_i), \; x_j * \varphi(x_j)] \in E(\widetilde{G}_1). \tag{7.10}$$

От (7.7), (7.8), (7.9) и (7.10) следва, че π е изоморфизъм между G_1 и $\widetilde{G}_1$. По същия начин се доказва, че G_2 и $\widetilde{G}_2$ са изоморфни. Поради това от (7.6) следва, че $cl(H) = q$.

7.4. Оценки за числото $F_v(4,4;5)$.

Ще докажем следната

Теорема 7.1. $16 \le F_v(4,4;5) \le 35.$.

Най-напред ще докажем две леми. Разглеждаме графа

$$L = \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i,$$

където графите Γ_i са дадени на Фиг. 7.1. За графа L дефинираме множествата:

$$M_1' = \{u_i^1 * u_i^2,\ \ i = 1,\dots,7\},\quad M_1'' = \{v_1^1 * v_1^2,\ v_2^1 * v_2^2\},\quad M_1 = M_1' \cup M_1'';$$

$$M_2' = \{u_i^3 * u_i^4,\ \ i = 1,\dots,7\},\quad M_2'' = \{v_1^3 * v_1^4,\ v_2^3 * v_2^4\},\quad M_2 = M_2' \cup M_2'';$$

$$M_3' = \{v_3^1 * v_3^3,\ v_4^1 * v_4^3\},\quad M_3'' = \{v_5^1 * v_5^3,\ v_6^1 * v_6^3\},\quad M_3 = M_3' \cup M_3'';$$

$$M_4' = \{v_3^2 * v_3^4,\ v_4^2 * v_4^4\},\quad M_4'' = \{v_5^2 * v_5^4,\ v_6^2 * v_6^4\},\quad M_4 = M_4' \cup M_4'';$$

$M = \bigcup_{i=1}^{4} M_i$.

Лема 7.2. *Множествата M_i', M_i'', $i = 1,2,3,4$ са независими множества в графа ${}^{L}/_{M}$.*

Доказателство. Множеството $\{u_1^1,\dots,u_7^1\}$ е независимо множество в Γ_1, а $\{u_1^2,\dots,u_7^2\}$ е независимо множество в Γ_2. Поради това

$$\{u_1^1,\dots,u_7^1\} \cup \{u_1^2,\dots,u_7^2\}$$

е независимо множество в L. Оттук става ясно, че M_1' е независимо множество в ${}^{L}/_{M}$. По същия начин се доказва, че и другите множества M_i', M_i'' са независими в ${}^{L}/_{M}$.

Лема 7.3.

$$cl({}^{L}/_{M}) = 3.$$

Доказателство. Нека

$$L' = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,\quad L'' = \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \quad \text{и} \quad L_1 = {}^{L}/_{M_1 \cup M_2}.$$

Тогава имаме

$$L_1 = {}^{L'}/_{M_1} \cup {}^{L''}/_{M_2} \tag{7.11}$$

и

$${}^{L}/_{M} = {}^{L_1}/_{M_3 \cup M_4}. \tag{7.12}$$

Разглеждаме изоморфизма $V(\Gamma_1) \xrightarrow{\varphi} V(\Gamma_2)$, който се дефинира както следва:

$$v_i^1 \xrightarrow{\varphi} v_i^2.\quad u_i^1 \xrightarrow{\varphi} u_i^2,\quad i = 1,\dots,7.$$

Тъй като

$$M_1' = \{u_i^1 * \varphi(u_i^1),\ \ i = 1, \ldots, 7\} \quad \text{и} \quad M_1'' = \{v_1^1 * \varphi(v_1^1),\ \ v_2^1 * \varphi(v_2^1)\}$$

от Твърдение 7.3 следва, че

$$cl\left({}^{L'}\big/_{M_1} \right) = 3. \tag{7.13}$$

Дефинираме изображението $V\left({}^{L'}\big/_{M_1} \right) \xrightarrow{\psi} V\left({}^{L''}\big/_{M_2} \right)$ както следва:

$$v_i^1 \xrightarrow{\psi} v_i^3, \quad v_i^2 \xrightarrow{\psi} v_i^4, \quad i = 3, \ldots, 7;$$

$$v_1^1 * v_1^2 \xrightarrow{\psi} v_1^3 * v_1^4, \quad v_2^1 * v_2^2 \xrightarrow{\psi} v_2^3 * v_2^4;$$

$$u_i^1 * u_i^2 \xrightarrow{\psi} u_i^3 * u_i^4, \quad i = 1, \ldots, 7.$$

Очевидно ψ е изоморфизъм между ${}^{L'}\big/_{M_1}$ и ${}^{L''}\big/_{M_2}$. Тъй като

$$M_3 = \{v_i^1 * \psi(v_i^1),\ \ i = 3, \ldots, 6\} \quad \text{и} \quad M_4 = \{v_i^2 * \psi(v_i^2),\ \ i = 3, \ldots, 6\}$$

от Твърдение 7.3 следва $cl\left({}^{L_1}\big/_{M_3 \cup M_4} \right) = cl\left({}^{L'}\big/_{M_1} \right)$. От последното равенство, (7.12) и (7.13) получаваме

$$cl\left({}^{L}\big/_{M} \right) = 3.$$

Доказателство на Теорема 7.1.

I. Доказателство на неравенството $F_v(4,4;5) \geq 16$.

Нека G е граф такъв, че $G \xrightarrow{v} (4,4)$ и $cl(G) < 5$. Трябва да докажем, че $|V(G)| \geq 16$. Тъй като $G \xrightarrow{v} (4,4)$ и $cl(G) < 6$ имаме, че $|V(G)| \geq F_v(4,4;6)$. Съгласно Теорема 6.8 ($r = 2$, $a_1 = a_2 = 4$), $F_v(4,4;6) = 14$. Поради това $|V(G)| \geq 14$. От последното неравенство, $R(3,5) = 14$ и $cl(G) < 5$ следва, че $\alpha(G) \geq 3$. Нека $\{v_1, v_2, v_3\}$ е независимо множество на графа G. Съгласно Твърдение 3.4 имаме, че

$$G' = G - \{v_1, v_2, v_3\} \xrightarrow{v} (3,4).$$

Тъй като $cl(G') \leq cl(G) < 5$ е вярно, че $|V(G')| \geq F_v(3,4;5)$. От последното неравенство и Следствие 4.2 получаваме $|V(G')| \geq 13$. Следователно $|V(G)| \geq 16$.

II. Доказателство на неравенството $F_v(4,4;5) \leq 35$.

Разглеждаме графа $R = {}^{Q}\!/_{M}$, където графът Q е дефиниран преди Твърдение 7.1, а множеството M е дефинирано преди Лема 7.2. Очевидно е, че

$$R - \{a_1, a_2, a_3, a_4, b\} = {}^{L}\!/_{M} \quad \text{и} \quad \Gamma_R(b) = V\left({}^{L}\!/_{M}\right), \tag{7.14}$$

където графът ${}^{L}\!/_{M}$ е дефиниран по-горе. От Твърдение 7.2, Твърдение 7.1 и Твърдение 3.6 получаваме $R \xrightarrow{v} (4,4)$. Ще докажем, че $cl(R) < 5$. Да допуснем противното, т.е. $cl(R) \geq 5$ и нека A е 5-клика на графа R. Съгласно Лема 7.3 имаме

$$cl\left({}^{L}\!/_{M}\right) = 3. \tag{7.15}$$

От (7.14) и (7.15) следва, че $b \notin A$. Поради това

$$A \subseteq V\left({}^{L}\!/_{M}\right) \cup \{a_1, a_2, a_3, a_4\}. \tag{7.16}$$

От (7.15) и (7.16) правим извода, че

$$|A \cap \{a_1, a_2, a_3, a_4\}| \geq 2. \tag{7.17}$$

Да забележим, че

$$\Gamma_R(a_1) \cap \Gamma_R(a_2) = M_1 \cup \{a_3, a_4\} = (M_1' \cup a_3) \cup (M_1'' \cup a_4). \tag{7.18}$$

Съгласно Лема 7.2, множествата M_1' и M_1'' са независими множества на графа ${}^{L}\!/_{M}$, а поради (7.14) са независими множества и на R. Тъй като

$$M_1' \cap \Gamma_R(a_3) = \emptyset \quad \text{и} \quad M_1'' \cap \Gamma_R(a_4) = \emptyset$$

множествата $M_1' \cup \{a_3\}$ и $M_1'' \cup \{a_4\}$ също са независими в R. Следователно $M_1 \cup \{a_3, a_4\}$ не съдържа 3-клики. Поради това, от (7.18) правим извода, че $\{a_1, a_2\} \not\subseteq A$. По същия начин се доказва, че $\{a_i, a_j\} \not\subseteq A$, $\forall\ i \neq j$. Това противоречи на (7.17). Полученото противоречие доказва, че $cl(R) \leq 4$. И така, $R \xrightarrow{v} (4,4)$ и $cl(R) < 5$. Тъй като $|V(R)| = 35$, имаме $F_v(4,4;5) \leq 35$.

Теорема 7.1 е доказана.

Теорема 7.1 е публикувана в [N35].

7.5. Оценка за числата $F_v(p,p;p+1)$.

Ще докажем следната:

Теорема 7.2. *За всяко естествено число $p \geq 2$ е вярно неравенството*

$$F_v(p+1,p+1;p+2) \leq (p+1)F_v(p,p;p+1). \tag{7.19}$$

Доказателство. Специалните случаи $p=2$ и $p=3$ следват от равенствата $F_v(2,\ 2;\ 3)=5$, $F_v(3,\ 3;\ 4)=14$ и неравенството $F_v(4,\ 4;\ 5) \leq 35$. Нека $p \geq 4$ и G е граф такъв, че $G \xrightarrow{v} (p,p)$, $cl(G)=p$ и

$$|V(G)| = F_v(p,p;p+1). \tag{7.20}$$

Разглеждаме графа

$$P = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_{p+1} \cup K_{p+1},$$

където всеки от графите G_i е изоморфно копие на графа G и $V(K_{p+1}) = \{a_1,\ldots,a_{p+1}\}$. Графът $\widetilde{P}$ се получава като в P върха a_i съединим с ребро с всеки връх на G_i $i=1,\ldots,p+1$. Графът Q се получава като добавим към $\widetilde{P}$ нов връх b такъв, че

$$\Gamma_Q(b) = \bigcup_{i=1}^{p+1} V(G_i).$$

Ще докажем, че

$$Q \xrightarrow{v} (p+1,p+1). \tag{7.21}$$

Да допуснем противното и нека $V_1 \cup V_2$ е $(p+1,p+1)$-свободно 2-разлагане на графа Q. Без ограничение на общността можем да предположим, че $b \in V_1$. Дефинираме множествата

$$W_i = V(G_i) \cup \{b, a_i\}, \quad i=1,\ldots,p+1.$$

Ясно е, че $Q[W_i] = \overline{K}_2 + G_i$, където $V(\overline{K}_2) = \{b, a_i\}$. Тъй като $G \xrightarrow{v} (p,p)$, от Лема 7.1 следва, че $a_i \in V_1$, $i=1,\ldots,p+1$. Получихме, че V_1 съдържа $(p+1)$-кликата $\{a_1,\ldots,a_{p+1}\}$, което е противоречие. С това (7.21) е доказано.

От дефиницията на графа Q и $cl(G)=p$ очевидно следва, че

$$cl(Q) = p+1. \tag{7.22}$$

От (7.20) получаваме

$$|V(Q)| = (p+1)F_v(p,p;p+1) + p + 2. \tag{7.23}$$

Във всеки от графите G_i, $i=1,\ldots,p$ (без графа G_{p+1}) избираме върховете $x_i, y_i \in V(G_i)$ такива, че $[x_i,y_i] \notin E(G_i)$ (понеже G_i не е пълен граф, такива върхове има). Дефинираме множествата:

$$X_i = \Gamma_{G_i}(x_i) \cup \{a_i\} \cup \{b\} \text{ и } Y_i = \Gamma_{G_i}(y_i) \cup \{a_i\} \cup \{b\},\ i=1,\ldots,p. \tag{7.24}$$

От $cl(G_i) = p$ следва, че $\Gamma_{G_i}(x_i)$ и $\Gamma_{G_i}(y_i)$ не съдържат p-клики. Понеже върховете b и a_i не са съседни имаме, че

$$X_i \text{ и } Y_i \text{ не съдържат } (p+1)-\text{клики}, \; i = 1, \dots, p. \tag{7.25}$$

Да забележим, че

$$\Gamma_Q(x_i) = X_i \quad \text{и} \quad \Gamma_Q(y_i) = Y_i. \tag{7.26}$$

С R означаваме графа, който се получава като от графа Q премахнем върховете x_i, y_i, $i = 1 \dots, p$ и ребрата, излизащи от тях и добавим два нови върха x и y такива, че

$$\Gamma_R(x) = \bigcup_{i=1}^{p} X_i, \quad \Gamma_R(y) = \bigcup_{i=1}^{p} Y_i. \tag{7.27}$$

Ясно е, че

$$|V(R)| = |V(Q)| - 2(p-1).$$

От последното равенство и (7.23) следва

$$|V(R)| = (p+1)F_v(p, p; p+1) - p + 4.$$

Тъй като $p \geq 4$, получаваме, че

$$|V(R)| \leq (p+1)F_v(p, p; p+1). \tag{7.28}$$

Ще докажем, че

$$cl(R) < p + 2. \tag{7.29}$$

Да допуснем противното, т.е. $cl(R) \geq p+2$ и нека A е $(p+2)$-клика на графа R. Понеже $R - \{x, y\}$ е подграф на графа Q и $cl(Q) = p+1$ следва, че $x \in A$ или $y \in A$. Без ограничение на общността можем да предположим, че $x \in A$. Разглеждаме $(p+1)$-кликата $A' = A - x$. От (7.27) следва, че

$$A' \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} X_i, \quad i = 1, \dots, p. \tag{7.30}$$

Понеже $|A'| = p + 1$, от (7.30) следва, че някое от множествата X_i съдържа два върха на A'. Без ограничение на общността можем да предположим, че X_1 съдържа два върха на A'. Понеже b и a_1 не са съседни в R, от (7.24), $i = 1$, става ясно, че съществува връх w такъв, че

$$w \in A' \cap \Gamma_{G_1}(x_1).$$

Тъй като

$$\Gamma_R(w) \cap V(G_i - x_i - y_i) = \emptyset, \quad i = 2, \dots, p+1$$

и $a_2, \dots, a_{p+1} \notin \Gamma_R(w)$ следва, че

$$A' \cap V(G_i - x_i - y_i) = \emptyset, \; i \geq 2 \text{ и } a_2, \dots, a_{p+1} \notin A'.$$

Тъй като

$$\Gamma_{G_i}(x_i) \subseteq V(G_i - x_i - y_i),$$

правим извода, че

$$A' \cap X_i = \emptyset \quad \text{или} \quad A' \cap X_i = \{b\}, \quad i = 2, \dots, p+1.$$

Поради това, от (7.30) следва, че $A' \subseteq X_1$, което противоречи на (7.25). С това (7.29) е доказано.

Разглеждаме изображението $V(Q) \xrightarrow{\varphi} V(R)$, което се дефинира както следва:

$$v \xrightarrow{\varphi} v, \;\text{ ако }\; v \neq x_i,\; v \neq y_i,\; i = 1, \dots, p;$$

$$x_i \xrightarrow{\varphi} x \;\text{ и }\; y_i \xrightarrow{\varphi} y,\; i = 1, \dots, p.$$

От (7.26) и (7.27) става ясно, че φ е хомоморфизъм на Q в R. От (7.21) и Твърдение 3.6 получаваме $R \xrightarrow{v} (p+1, p+1)$. Този факт и (7.29) ни дават

$$F_v(p+1, p+1; p+2) \leq |V(R)|.$$

От това неравенство и (7.28) получаваме желаното неравенство (7.19).

Следствие 7.1. *За всяко естествено число $p \geq 4$ е вярно неравенството*

$$F_v(p, p; p+1) < 1.46p!. \tag{7.31}$$

Доказателство. Доказателството ще направим по индукция относно p. Базата $p = 4$ е вярна понеже при $p = 4$ дясната част на (7.31) е равна на $35,04$, а съгласно Теорема 7.1, лявата част не е по-голяма от 35.

Нека $p \geq 5$. Съгласно индуктивната хипотеза

$$F_v(p-1, p-1; p) < 1.46(p-1)!.$$

От последното неравенство и (7.19) следва неравенството (7.31).

ГЛАВА 8

ОЦВЕТЯВАНЕ РЕБРАТА НА ПЪЛНИ ГРАФИ

8.1. Числа на *Ramsey*.

Определение 8.1. *Всяко разлагане*

$$E(G) = E_1 \cup \ldots \cup E_r, \quad E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j \tag{8.1}$$

се нарича r-оцветяване на ребрата на графа G. Казваме, че кликата Q на графа G е едноцветна клика от i-я цвят при това оцветяване, ако $E(Q) \subseteq E_i$.

Определение 8.2. *Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа и $a_i \geq 2$, $i = 1, \ldots, r$. Казваме, че r-оцветяването (8.1) е $(a_1, \ldots, a_r)$-свободно, ако за всяко $i \in \{1, \ldots, r\}$ не съществува едноцветна a_i-клика от i-я цвят на графа G. Символът*

$$G \xrightarrow{e} (a_1, \ldots, a_r)$$

означава, че всяко r-оцветяване на $E(G)$ не е $(a_1, \ldots, a_r)$-свободно.

Определение 8.3. *Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа такива, че $a_i \geq 2$, $i = 1, \ldots, r$. Най-малкото естествено число n, за което пълният граф с n върха има свойството*

$$K_n \xrightarrow{e} (a_1, \ldots, a_r)$$

се нарича число на Ramsey и се бележи с $R(a_1, \ldots, a_r)$.

Съществуването на числата $R(a_1, \ldots, a_r)$ е доказано от *Ramsey* в [R3]. Поради това тези числа се наричат числа на *Ramsey*.

Очевидно $R(a_1) = a_1$, $a_1 \geq 2$. По-нататък ще разглеждаме тези от числата $R(a_1, \ldots, a_r)$, за които $r \geq 2$. Очевидно

$$G \xrightarrow{e} (a_1, \ldots, a_r) \Longleftrightarrow G \xrightarrow{e} (a_{\varphi(1)}, \ldots, a_{\varphi(r)}) \tag{8.2}$$

за всяка пермутация φ на симетричната група S_r. От (8.2) следва, че

$$R(a_1, \ldots, a_r) = R(a_{\varphi(1)}, \ldots, a_{\varphi(a_r)}) \tag{8.3}$$

за всяко $\varphi \in S_r$, т.е. $R(a_1, \ldots, a_r)$ е симетрична функция на $a_1, \ldots, a_r$. Очевидно е, че

$$R(a_1, \ldots, a_r) = R(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_r) \text{ ако } a_i = 2. \tag{8.4}$$

От направените разсъждения става ясно, че е достатъчно да разгледаме числата $R(a_1, \ldots, a_r)$, когато $3 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_r$ и $r \geq 2$.

Нека $a_i \geq 3$, $i = 1, \ldots, r$ и $r \geq 2$. Тогава е вярно неравенството

$$\begin{aligned} R(a_1, \ldots, a_r) &\leq R(a_1 - 1, a_2, \ldots, a_r) + \\ + R(a_1, a_2 - 1, a_3 \ldots, a_r) &+ \cdots + R(a_1, \ldots, a_r - 1) + 2 - r. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Случаят $r = 2$ е доказан в [E8]. Общият случай е доказан в [L1]. Трябва обаче да отбележим, че неявно това неравенство е получено още в [G14] (виж Теорема 6). В литературата на български език неравенството (8.5) е изложено в [K13].

Известни са само няколко от числата $R(a_1, \dots, a_r)$ и пресмятането на всяко ново число на Ramsey е голямо събитие в Теория на графите. На числата на Ramsey са посветени много статии, като най-важните според нас са [G10], [G11], [G14], [K1]. Какво е съвременното състояние на тази тематика, може да се види в обзорните статии [R1] и [R2]. Популярно изложение на числата на Ramsey е дадено в [K17].

Ще отбележим и едно рекурентно неравенство, което дава оценка отдолу за числата на Ramsey:

$$R(a_1, \dots, a_r) > \big(R(a_1, \dots, a_r) - 1\big)\big(R(a_{s+1}, \dots, a_r) - 1\big),$$

където $r \geq 2$ и $s \in \{1, \dots, r-1\}$. В частния случай $s = 1$, това неравенство е получено от Robertson в [R7]. Общият случай е публикуван в [N36]. Ние няма да доказваме тук това неравенство, тъй като по-нататък то не се използва.

8.2. Кратности на *Ramsey*.

Равенството $R(3,3) = 6$ означава, че графът K_5 има $(3,3)$-свободно 2-оцветяване на ребрата и че във всяко 2-оцветяване на ребрата на K_6 има едноцветна 3-клика. *Goodman* [G6] доказва, че във всяко 2-оцветяване на $E(K_6)$ има поне две едноцветни 3-клики (възможно е да са от различен цвят). Този изненадващ факт мотивира *Harary* и *Prins* [H3] да дефинират важното понятие ***кратност на Ramsey***.

Определение 8.4. *Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа, такива че $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$. Нека γ е r-оцветяване на ребрата на пълния граф с $R(a_1, \dots, a_r)$ върха. С $t(a_i)$ означаваме броя на едноцветните a_i-клики от i-я цвят в разглежданото r-оцветяване γ. Нека $t(\gamma) = t(a_1) + \cdots + t(a_r)$. С $M(a_1, \dots, a_r)$ означаваме $\min t(\gamma)$ по всички r-оцветявания γ на ребрата на пълния граф с $R(a_1, \dots, a_r)$ върха. Числото $M(a_1, \dots, a_r)$ се нарича кратност на Ramsey съответстваща на числото $R(a_1, \dots, a_r)$.*

От Определение 8.4 става ясно, че

$$M(a_1, \dots, a_r) \geq 1. \tag{8.6}$$

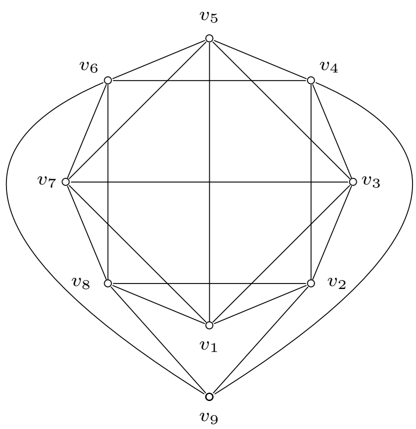
Както отбелязахме по-горе, в [G6] е доказано, че $M(3,3) = 2$. За следващата кратност $M(3,4)$ в [K22] е анонсиран и подробно доказан в [N39] следния резултат:

Теорема 8.1.

(а) $M(3,4) = 1$;

(б) *съществува единствено (с точност до изоморфизъм) 2-оцветяване на $E(K_9)$, в което няма едноцветни 3-клики от първия цвят и има единствена едноцветна 4-клика от втория цвят.*

Доказателство на (а). Разглеждаме 2-оцветяването $E(K_9) = E_1 \cup E_2$, където E_2 е дадено на Фиг. 8.1.



Фигура 8.1

Лесно се вижда, че в това 2-оцветяване няма 3-клики от първия цвят и че $[v_1, v_3, v_5, v_7]$ е единствена едноцветна 4-клика от втория цвят. Понеже

$R(3,4) = 9$ следва, че $M(3,4) \leq 1$. От неравенството (8.6) окончателно получаваме $M(3,4) = 1$.

Доказателството на (б) не го включваме тук, понеже е обемисто и освен това не се използва по-нататък.

Както отбелязахме по-горе, Теорема 8.1 е публикувана през 1978 г. в [K22]. През 1980 г. в [B17], твърдението (а) на тази теорема е обявено за резултат на *Faudree-Rosta-Schelp*, като се цитира непубликувана тяхна работа. Пресмятането на следващата кратност $M(3,5)$ е резултат от съвместните усилия на Н. Ненов, И. Пашов и Н. Хаджииванов, като окончателния резултат $M(3,5) = 4$ е получен в [P2]. Равенството $M(3,6) = 2$ е резултат на Н. Хаджииванов и И. Пашов, публикуван в [K15]. Последната пресметната кратност на *Ramsey* е $M(4,4) = 9$. В [E9] е доказано, че $M(4,4) \leq 9$. В [P4] с помощта на компютър е доказано обратното неравенство.

Изглежда доста вероятно, че единствената кратност на *Ramsey*, която е равна на единица е $M(3,4)$. В подкрепа на тази хипотеза ще докажем следната:

Теорема 8.2. *Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа, $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$, за които в (8.5) е налице равенство. Тогава*

$$M(a_1, \dots, a_r) \geq 2.$$

Доказателство. Полагаме

$$R(a_1, \dots, a_r) = R, \quad R(a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_r) = R_i.$$

По условие имаме, че

$$R = R_1 + \dots + R_r + 2 - r. \tag{8.7}$$

Да допуснем противното, т.е. $M(a_1, \dots, a_r) = 1$ и нека

$$E(K_R) = E_1 \cup \ldots \cup E_r$$

е r-оцветяване на ребрата на K_R, в което има единствена a_1-клика $Q = \{v_1, \dots, v_{a_1}\}$ от първия цвят и няма a_i-клики от i-я цвят при $i \geq 2$. За всеки връх $w \in V(K_R)$ дефинираме

$$A_i(w) = \{v \in V(K_R) \, : \, [w, v] \in E_i\}.$$

Тъй като

$$\Gamma_{K_R}(w) = \bigcup_{i=1}^{r} A_i(w) \;\text{ и }\; A_i(w) \cap A_j(w) = \emptyset, \;\; i \neq j$$

имаме, че

$$R - 1 = \sum_{i=1}^{r} |A_i(w)|. \tag{8.8}$$

Да предположим, че $w \in V(K_R)$ и $w \notin Q$, т.е. $w \neq v_i$, $i = 1, \dots, a_i$. Да забележим, че

$$|A_1(w)| \leq R_1 - 1. \tag{8.9}$$

Наистина, ако допуснем, че $|A_1(w)| \geq R_1$, тогава понеже няма едноцветни a_i-клики от i-я цвят при $i \geq 2$ следва, че $A_1(w)$ съдържа едноцветна (a_1-1)-клика Q' от първия цвят. Ясно е, че $Q' \cup \{w\}$ е едноцветна a_1-клика от първия цвят, която е различна от Q. Тъй като това противоречи на предположението, че $M(a_1, \dots, a_r) = 1$, неравенството (8.9) е доказано. От (8.7) и (8.8) получаваме

$$\sum_{i=1}^{r} \bigl|A_i(w)\bigr| = R_1 + \dots + R_r + 1 - r.$$

От това равенство и (8.9) следва, че съществува $i \geq 2$ такова, че $|A_i(w)| \geq R_i$. Тъй като в разглежданото 2-оцветяване няма едноцветни a_k-клики от k-я цвят при $k \geq 2$, от $|A_i(w)| \geq R_i$ следва, че $A_i(w)$ съдържа единствената едноцветна a_1-клика Q от първия цвят. И така, доказахме, че ако $w \notin Q$, тогава $Q \subseteq A_i(w)$ за някое $i \geq 2$. Това означава, че всяко ребро, което съединява връх от Q с връх извън Q не е оцветено с първия цвят. Поради това $A_1(v_1) = \{v_2, \dots, v_{a_1}\}$ и

$$|A_1(v_1)| = a_1 - 1. \tag{8.10}$$

От това, че Q е единствена едноцветна a_1-клика от първия цвят и няма едноцветни a_i-клики от i-я цвят при $i \geq 2$ следва, че

$$|A_i(v_1)| \leq R_i - 1, \quad i = 2, \dots, r. \tag{8.11}$$

От (8.8), (8.10) и (8.11) получаваме

$$R - 1 \leq (a_1 - 1) + \sum_{i=2}^{r} (R_i - 1). \tag{8.12}$$

Очевидно K_{a_1-1} има $(a_1 - 1, a_2, \dots, a_r)$-свободно r-оцветяване на ребрата. Поради това

$$a_1 - 1 < R(a_1 - 1, a_2, \dots, a_r) = R_1.$$

Това неравенство и (8.12) дават, че

$$R - 1 \leq \sum_{i=1}^{r} R_i - r,$$

което противоречи на (8.7).

Теорема 8.2 е доказана.

Частният случай $r = 2$ на тази теорема е публикуван в [N13]. Общият случай не е публикуван.

8.3. Брой на едноцветните 3-клики при оцветяване на ребрата на пълните графи.

Нека γ е r-оцветяване на ребрата на пълния граф с n върха K_n. Броят на едноцветните 3-клики на това оцветяване означаваме с $t(\gamma)$. С $g(n,r)$ означаваме минимума на числата $t(\gamma)$ по всички r-оцветявания γ на $E(K_n)$. В [G6] *Goodman* доказва, че

$$g(n,2) = \begin{cases} \dfrac{n(n-2)(n-4)}{24}, & n \equiv 0 \ (mod\, 2); \\[2ex] \dfrac{n(n-1)(n-5)}{24}, & n \equiv 1 \ (mod\, 4); \\[2ex] \dfrac{(n+1)(n-3)(n-4)}{24}, & n \equiv 3 \ (mod\, 4). \end{cases}$$

По-късно този резултат е допълван и усилван от различни автори. Най-последните публикации в това направление са [K17], [K26], [K27], [K28], [K33], [B2], [B3], [B4].

По-подробен обзор и библиография по тези въпроси има в монографията [K13].

Не е известно нито едно от числата $g(n,r)$ при $r \geq 3$. Ще докажем една оценка отдолу за тези числа, с помощта на която в следващия пункт ще обобщим един класически резултат на Schur, [S3] за решенията на уравнението $x^n + y^n = z^n$ в прости крайни полета с достатъчно много елементи.

Твърдение 8.1. *Вярно е неравенството*

$$\frac{g(n-1,r)}{\binom{n-1}{3}} \leq \frac{g(n,r)}{\binom{n}{3}}, \quad n \geq 4. \tag{8.13}$$

Доказателство. Да разгледаме произволно r-оцветяване γ на $E(K_n)$ и нека $V(K_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Както и по-горе с $t(\gamma)$ означаваме броя на едноцветните 3-клики в това r-оцветяване, а с $\delta(v_i)$ означаваме броя на едноцветните 3-клики в подграфа $K_n - v_i$. Ясно е, че

$$\delta(v_i) \geq g(n-1,r). \tag{8.14}$$

Да забележим, че в сумата $\delta(v_1) + \cdots + \delta(v_n)$ всяка едноцветна 3-клика са брои $n-3$ пъти. Поради това имаме

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = (n-3)t(\gamma). \tag{8.15}$$

От (8.14) и (8.15) получаваме

$$ng(n-1,r) \leq (n-3)t(\gamma). \tag{8.16}$$

И така, броят на едноцветните 3-клики $t(\gamma)$ в произволно r-оцветяване γ на $E(K_n)$ удовлетворява неравенството (8.16), Ето защо

$$n \cdot g(n-1,r) \leq (n-3)g(n,r).$$

Последното неравенство очевидно е еквивалентно на неравенството (8.13). С това Твърдение 8.1 е доказано.

За краткост полагаме

$$R\underbrace{(3,\dots,3)}_{r} = R_r(3)$$

и за кратността на Ramsey

$$M\underbrace{(3,\dots,3)}_{r} = M_r(3).$$

Ясно е, че $M_r(3) = g(R_r(3), r)$.

Следствие 8.1. *Нека* $n \geq R_r(3)$. *Тогава*

$$g(n,r) \geq M_r(3)\binom{n}{3}\binom{R_r(3)}{3}^{-1}.$$

Доказателство. От Твърдение 8.1 имаме

$$\frac{g(R_r(3),r)}{\binom{R_r(3)}{3}} \leq \frac{g(n,r)}{\binom{n}{3}}.$$

Това неравенство и желаното неравенство са очевидно еквивалентни.

Следствие 8.2. *Нека* $n \geq R_r(3)$. *Тогава във всяко* r*-оцветяване на* $E(K_n)$ *има поне*

$$\frac{1}{r}M_r(3)\binom{n}{3}\binom{R_r(3)}{3}^{-1}$$

едноцветни 3*-клики от един и същи цвят.*

8.4. Оценка отдолу за ненулевите решения на уравнението $x^n + y^n = z^n$ в крайни полета.

Решението x_0, y_0, z_0 на уравнението

$$x^n + y^n = z^n$$

се нарича абсолютно ненулево, ако $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, $z_0 \neq 0$. В този пункт ще обобщим следния резултат:

Теорема на Schur, [S3]. *Нека F е крайно просто поле и $|F| \geq R_n(3)$. Тогава уравнението $x^n + y^n = z^n$ има абсолютно ненулево решение в това поле.*

Ще докажем по-силния резултат:

Теорема 8.3. *Нека F е крайно поле и $|F| \geq R_n(3)$. Тогава уравнението $x^n + y^n = z^n$ има в полето F поне*

$$\frac{|F|(|F|-1)M_n(3)}{n\ R_n(3)(R_n(3)-1)(R_n(3)-2)}$$

абсолютно ненулеви решения.

Ще ни е необходима следната:

Лема 8.1. *Нека G е крайна адитивна група и $|G| \geq R_n(3)$. Нека е дадено произволно разлагане*

$$G - \{0\} = M_1 \cup \ldots \cup M_n, \quad M_i \cap M_j = \emptyset, \quad i \neq j. \tag{8.17}$$

Тогава съществува $i \in \{1, \ldots, n\}$ такова, че в множеството M_i уравнението $x + y = z$ има поне

$$\frac{|G|(|G|-1)M_n(3)}{n\ R_n(3)(R_n(3)-1)(R_n(3)-2)}$$

решения.

Доказателство. Нека $|G| = m$ и $G = \{x_0 = 0, x_1, \ldots, x_{m-1}\}$. Нека $V(K_m) = \{v_0, \ldots, v_{m-1}\}$. С помощта на (8.17) дефинираме n-оцветяването $E(K_m) = E_1 \cup \ldots \cup E_n$ по следния начин:

$$[v_k, v_l] \in E_i, \ \ k < l \Longleftrightarrow x_l - x_k \in M_i.$$

Да предположим, че $[v_k, v_l, v_s]$, $k < l < s$ е едноцветна 3-клика от i-я цвят на това n-оцветяване. Тогава

$$a = x_l - x_k, \ \ b = x_s - x_l, \ \ c = x_s - x_k \tag{8.18}$$

е решение на уравнението $x + y = z$ в множеството M_i. Да забележим, че ако a, b, c и x_k са дадени, тогава x_l и x_s се определят от (8.18) еднозначно. Понеже $0 \leq k < l < s \leq m - 1$ за x_k имаме не повече от $m - 2$ възможности. Поради това броят на едноцветните 3-клики от i-я цвят, които чрез (8.18) определят едно и също решение на уравнението $x + y = z$ не е по-голям от $m - 2$. Съгласно Следствие 8.2, съществува i такова, че имаме поне

$$\frac{1}{n} M_n(3) \binom{|G|}{3} \binom{R_n(3)}{3}^{-1}$$

едноцветни 3-клики от i-я цвят. Понеже всяка такава едноцветна 3-клика от i-я цвят определя чрез равенствата (8.18) решение на $x + y = z$ в M_i и най-много $(m - 2)$ от тези едноцветни 3-клики определят чрез равенствата (8.18) едно и също решение на уравнението $x + y = z$, стигаме до извода, че в множеството M_i това уравнение има поне

$$\frac{|G|\,(|G| - 1) M_n(3)}{n\; R_n(3)(R_n(3) - 1)(R_n(3) - 2)}$$

различни решения.

Доказателство на Теорема 8.3. Нека ε е примитивен елемент на полето F. Тогава

$$F \backslash \{0\} = \{\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{m-1}\}$$

където $m = |F|$. Нека $m - 1 = nq + r$, $0 \le r \le n - 1$. Дефинираме

$$F_i = \{\varepsilon^i, \varepsilon^{i+n}, \ldots, \varepsilon^{i+nq}\}, \qquad \text{ако } 1 \le i \le r;$$
$$F_i = \{\varepsilon^i, \varepsilon^{i+n}, \ldots, \varepsilon^{i+n(q-1)}\}, \qquad \text{ако } r < i \le n.$$

Ясно е, че

$$F \backslash \{0\} = F_1 \cup \ldots \cup F_n, \;\; F_i \cap F_j = \emptyset, \;\; i \ne j.$$

Понеже $|F| \ge R_n(3)$ от Лема 8.1 следва, че съществува i такова, че в F_i уравнението $x + y = z$ има поне

$$\frac{|F|\,(|F| - 1) M_n(3)}{n\; R_n(3)(R_n(3) - 1)(R_n(3) - 2)}$$

различни решения. Нека

$$(\varepsilon^{i+ku}, \varepsilon^{i+ln}, \varepsilon^{i+sn})$$

е едно от тези решения, т.е.

$$\varepsilon^{i+kn} + \varepsilon^{i+ln} = \varepsilon^{i+sn}.$$

Като разделим на ε^i получаваме

$$(\varepsilon^k)^n + (\varepsilon^l)^n = (\varepsilon^s)^n.$$

Следователно $(\varepsilon^k, \varepsilon^l, \varepsilon^s)$ е абсолютно ненулево решение на уравнението $x^n + y^n = z^n$. И така, всяко решение на $x + y = z$ в F_i определя абсолютно ненулево решение на уравнението $x^n + y^n = z^n$ в F. Ясно е, че две различни решения на уравнението $x + y = z$ в F_i определят различни решения на уравнението $x^n + y^n = z^n$. Поради това $x^n + y^n = z^n$ има в F поне

$$\frac{|F|\,(|F| - 1) M_n(3)}{n\; R_n(3)(R_n(3) - 1)(R_n(3) - 2)}$$

абсолютно ненулеви решения в полето F, с което Теорема 8.3 е доказана.

В [G14] за числата $R_n(3)$ е получена следната оценка:

$$R_n(3) \leq \lfloor n!e \rfloor + 1. \tag{8.19}$$

От това неравенство и неравенство (8.6) получаваме

Следствие 8.3. *Нека F е крайно поле и $|F| \geq \lfloor n!e \rfloor + 1$. Тогава уравнението $x^n + y^n = z^n$ има в полето F поне*

$$\frac{|F|\,(|F|-1)}{n\; R_n(3)(R_n(3)-1)(R_n(3)-2)}$$

абсолютно ненулеви решения.

Ще отбележим, че идеята за връзката между решенията на уравнението $x + y = z$ и уравнението $x^n + y^n = z^n$ е от работата на *Schur* [S3]. Теорема 8.3 и всичките помощни резултати са публикувани в [K24]. Тази теорема е включена в монографията [K13] и се цитира в енциклопедията [G4]. Подробен обзор и библиография на резултатите за уравнението $x^n + y^n = z^n$ в крайни полета са дадени в [K13] и [G14].

ГЛАВА 9

РЕБРЕНИ ФОЛКМАНОВИ ЧИСЛА.

9.1. Ребрени $(3,3)$-графи.

Казваме, че графът G е ребрен $(3,3)$-граф, ако $G \xrightarrow{e} (3,3)$, т.е. ако при всяко 2-оцветяване на $E(G)$ има едноцветна 3-клика. Най-простият такъв граф е пълният граф с шест върха:

$$K_6 \xrightarrow{e} (3,3), \quad [G14]. \tag{9.1}$$

От (9.1) следва, че ако $cl(G) \geq 6$, тогава $G \xrightarrow{e} (3,3)$. В [E7] *Erdos* и *Hajnal* поставят следния проблем:

Съществува ли ребрен $(3,3)$-граф, който не съдържа K_6?

Положителен отговор на този проблем пръв дава *J. H. van Lint*. Той построява 14-върхов $(3,3)$-граф, който не съдържа K_6. Този граф е публикуван в [G9] (самият автор не е публикувал този резултат).

По-късно *Graham* доказва, че

$$K_8 - C_5 \xrightarrow{e} (3,3), \quad [G8]. \tag{9.2}$$

С $K_8 - C_5$ е означен графа, който се получава като от $E(K_8)$ премахнем ребрата на някой цикъл с дължина 5. Очевидно е, че $cl(K_8 - C_5) = 5$. В [L1] *Lin* доказва, че $K_8 - C_5$ е най-простият ребрен $(3,3)$-граф с кликово число 5.

По-нататък *L. Posa* доказва, че съществува граф $G \xrightarrow{e} (3,3)$ с $cl(G) = 4$. Този резултат не е публикуван, тъй като се появява по-прост пример на такъв граф в [S2]. Най-накрая *J. H. Folkman* в [F2] доказва, че съществува ребрен $(3,3)$-граф G с $cl(G) = 3$. Конструкциите на *L. Posa* и *Folkman* са много сложни (графът на *Folkman* има стотици милиарди върхове). Поради това *Erdos* поставя като проблем, публикуван в [G9], намирането на числата

$$F_e(3,3;5) = \min\{|V(G)| : G \xrightarrow{e} (3,3) \text{ и } cl(G) < 5\};$$
$$F_e(3,3;4) = \min\{|V(G)| : G \xrightarrow{e} (3,3) \text{ и } cl(G) < 4\}.$$

Числото $F_e(3,3;5)$ е пресметнато окончателно. Историята на оценяването на това число е дадена в Таблица 9.1, която е взета от [P3].

Към фактите от тази Таблица ще добавим още, че вторият 15-върхов ребрен $(3,3)$-граф, който не съдържа K_5 е получен в съвместната ни работа с Н. Хаджииванов [K31] през 1984 г. Както става ясно от Таблица 9.1, нашите резултати, свързани с оценяването на $F_e(3,3;5)$, са повторени в [B16] и [E4]. Тези резултати са повторени също в [G5] и [M3]. Нито една от тези четири работи обаче няма приноси, тъй като буквално повтарят конструкцията от [K23]. В дискусионната статия [U1] *Urbanski* посочва част от тези повторения. За да бъдат избегнати следващи повторения, той включва в тази своя работа с подробни доказателства нашите резултати от [N16] и [K31]. Най-накрая на този обзор ще отбележим, че за числото $F_e(3,3;4)$ за сега няма задоволителни оценки. Освен резултата на *Folkman*, който доказва, че $F_e(3,3;4) < \infty$ са получени следните оценки:

$$F_e(3,3;4) \leq 10^{12}, \quad [F3]$$
$$F_e(3,3;4) \leq 3 \times 10^9, \quad [S4].$$

Според [C4] в настоящия момент Radziszowski усилено атакува с компютъра това число и се надява да получи, че $F_e(3,3;4) \leq 127$.

За сега обаче няма публикация на Radziszowski, която да потвърди този анонс.

Year	Reference	Lower	Upper
1967	P. Erdos, A. Hajnal [E7]		?
1969	M. Schauble [S2]		42
1971	R.L. Graham, J. H. Spencer [G9]		23
1972	S. Lin [L1]	10	
1973	R.W. Irving [I1]		18
1979	N. Hadziivanov, N. Nenov [K23]		16
1980	N. Nenov [N9]	11	
1981	N. Nenov [N16]		15
1985	N. Hadziivanov, N. Nenov [N43]	12	
1993	M. Erikson [E4]		17
1994	J. Bukor [B16]		16
1998	Piwakowski et'al. [P3]	15	

Таблица 9.1. История на оценяването на $F_e(3,3;5)$ според [P3].

По-нататък ще ни е необходимо следното обобщение на (9.1) и (9.2):

Теорема 9.1. *За всяко естествено число r е вярно, че*

$$C_3 + C_{2r+1} \xrightarrow{e} (3,3).$$

Доказателство. Нека $V(C_3) = \{w_1, w_2, w_3\}$. Нека $E_1 \cup E_2$ е произволно 2-оцветяване на $E(C_3 + C_{2r+1})$. Да допуснем, че $C_3 = [w_1, w_2, w_3]$ не е едноцветна 3-клика. Тогава можем да предположим, че

$$[w_1, w_2] \in E_1 \quad \text{и} \quad [w_1, w_3] \in E_2.$$

Дефинираме множествата

$$B_i(w_1) = \{v \in V(C_{2r+1}) \Big| [v, w_1] \in E_i\}, \quad i = 1, 2.$$

От $|V(C_{2r+1})| = 2r+1$ следва, че $|B_1(w_1)| \geq r+1$ или $|B_2(w_1)| \geq r+1$. Нека $|B_1(w_1)| \geq r+1$. Измежду всеки $r+1$ върха на C_{2r+1} непременно има два съседни. Поради това $B_1(w_1)$ съдържа два върха u и v, които са съседни. Разглеждаме 3-кликата $\{w_2, u, v\}$. Ако някое от ребрата на тази 3-клика принадлежи на E_1, тогава това ребро заедно с w_1 образува едноцветна

3-клика от първия цвят. В противен случай $\{w_2, u, v\}$ е едноцветна 3-клика от втория цвят. По същия начин, ако $|B_2(w_1)| \geq r + 1$, стигаме до извода, че в разглежданото 2-оцветяване има едноцветна 3-клика. И така, при всяко 2-оцветяване на $E(C_3 + C_{2r+1})$ има едноцветна 3-клика. С това Теорема 9.1 е доказана.

Да забележим, че ако $r = 1$ получаваме (9.1). Понеже $K_8 - C_5 = K_3 + C_5$, ако $r = 2$ получаваме (9.2). Теорема 9.1 е публикувана през 1979 г. в [N40]. В [N40] е отбелязано също, че ако $r \geq 2$, съществува 2-оцветяване на $E(C_3 + C_{2r+1})$, в което има точно една едноцветна 3-клика (от доказателството на Теорема 9.1 става ясно как да се построи такова 2-оцветяване). В [N40] е доказано също, че $C_3 + C_{2r+1}$ е критичен ребрен $(3,3)$-граф в смисъл, че всеки собствен подграф на $C_3 + C_{2r+1}$ не е ребрен $(3,3)$-граф. През 1980 г. в [B17, Теорема 13] Теорема 9.1 е обявен за непубликуван резултат на Erdos и Faudree.

Накрая на този пункт ще докажем следната:

Теорема 9.2. $F_e(3,3;5) \leq 15$.

Доказателство. Да разгледаме 14-върховия граф T_3, който е специален случай ($p = 3$) на дефинирания в доказателството на Теорема 4.1 граф T_p. Съгласно (4.8) и (4.9) имаме

$$T_3 \xrightarrow{v} (3,3) \quad \text{и} \quad cl(T_3) = 3. \tag{9.3}$$

Разглеждаме графа $G = K_1 + T_3$, където $V(K_1) = \{w\}$. Нека $E_1 \cup E_2$ е произволно 2-оцветяване на $E(G)$. Дефинираме

$$V_i = \{v \in V(T_3) : [w, v] \in E_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Ясно е, че $V_1 \cup V_2$ е 2-разлагане на $V(T_3)$. Съгласно (9.3) можем да предположим, че V_1 съдържа 3-клика Q. Ако някое от ребрата на Q принадлежи на E_1, тогава това ребро заедно с върха w_1 образуват едноцветна 3-клика от първия цвят. В противен случай Q е едноцветна 3-клика от втория цвят. С тези разсъждения доказахме, че

$$G = K_1 + T_3 \xrightarrow{e} (3,3).$$

От $cl(T_3) = 3$ следва, че $cl(G) = 4$. Поради това

$$F_e(3,3;5) \leq |V(G)| = 15.$$

Теорема 9.2 е доказана.

С помощта на компютър в [P3] е доказано, че $F_e(3,3;5) \geq 15$. Поради това $F_e(3,3;5) = 15$. С това единият от формулираните по-горе два проблема на Erdos, свързани с ребрените $(3,3)$-графи бе решен.

Теорема 9.2 е публикувана в [N16]. Най-добрата оценка отдолу за числото $F_e(3,3;5)$, която е получена без компютър е 12 и е публикувана в [N43]. Интересно е да отбележим също, че графът $K_1 + T_3$ има 56 ребра и всеки друг ребрен $(3,3)$-граф с кликово число 4 има повече ребра, [P3].

Забележка 9.1. *От разсъжденията, направени в доказателството на Теорема 9.2, става ясно, че е вярно следното твърдение:*

$$G \xrightarrow{v} (3,3) \Longrightarrow K_1 + G \xrightarrow{e} (3,3).$$

Това е непубликуван резултат на L. Posa, с помощта на който той построява първия ребрен $(3,3)$*-граф с кликово число 4.*

9.2. Ребрени Фолкманови числа.

Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа и $a_i \geq 2$, $i = 1, \dots, r$. Числата $F_e(3, 3; q)$, дефинирани в предишния пункт, могат да се обобщят по следния начин:

$$F_e(a_1, \dots, a_r; q) = \min\{|V(G)| : G \stackrel{e}{\longrightarrow} (a_1, \dots, a_r) \text{ и } cl(G) < q\}.$$

Тези числа са дефинирани за пръв път в [L1] и се наричат ребрени Фолкманови числа.

Ясно е, че

$$G \stackrel{e}{\longrightarrow} (a_1, \dots, a_r) \Longrightarrow cl(G) \geq \max\{a_1, \dots, a_r\}.$$

Вярно е, че

$$(9.3) \qquad F_e(a_1, \dots, a_r; q) \text{ съществува } \iff q > \max\{a_1, \dots, a_r\}.$$

Твърдението (9.3) в случая $r = 2$ е доказано от *Folkman* в [F2], а общият случай е доказан от *Nešetřil* и *Rödl* в [N44]. От (8.2) става ясно, че $F_e(a_1, \dots, a_r; q)$ е симетрична функция на $a_1, \dots, a_r$.

Ако $a_i = 2$ и $r \geq 2$, тогава очевидно

$$G \stackrel{e}{\longrightarrow} (a_1, \dots, a_r) \iff G \stackrel{e}{\longrightarrow} (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_r).$$

Следователно, ако $a_i = 2$, тогава

$$F_e(a_1, \dots, a_r; q) = F_e(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_r; q).$$

Очевидно $F_e(a_1; q)$ съществува само когато $q > a_1$ и $F_e(a_1; q) = a_1$.

По-нататък за Фолкмановите числа $F_e(a_1, \dots, a_r; q)$ ще предполагаме, че $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$ и $r \geq 2$. Съгласно направените разсъждения тези ограничения са естествени.

Важна роля за следващите резултати ще има следната:

Теорема 9.3, [L1]. *Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа, $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$ и $r \geq 2$. Тогава*

$$G \stackrel{e}{\longrightarrow} (a_1, \dots, a_r) \Longrightarrow \chi(G) \geq R(a_1, \dots, a_r).$$

Полагаме $R(a_1, \dots, a_r) = R$. Тъй като

$$K_R \stackrel{e}{\longrightarrow} (a_1, \dots, a_r) \text{ и } K_{R-1} \stackrel{e}{\not\rightarrow} (a_1, \dots, a_r)$$

имаме, че

$$(9.4) \qquad F_e(a_1, \dots, a_r; q) = R(a_1, \dots, a_r), \text{ ако } q > R(a_1, \dots, a_r).$$

От (9.4) става ясно, че ребрените Фолкманови числа обобщават класическите числа на *Ramsey*. От (9.3) имаме, че

$$F_e(a_1, \dots, a_r; R) \text{ съществува } \iff R \geq \max\{a_1, \dots, a_r\} + 1,$$

където, както и по-горе $R = R(a_1, \dots, a_r)$. Когато $a_i \geq 3$ и $r \geq 2$, неравенството $R \geq \max\{a_1, \dots, a_r\} + 1$ е изпълнено. Наистина, нека например $\max\{a_1, \dots, a_r\} = a_1$. Оцветявайки две независими (без общ връх) ребра на K_{a_1+1} с втория цвят, а останалите ребра с първия цвят, очевидно получаваме (a_1, a_2)-свободно 2-оцветяване на ребрата на $E(K_{a_1+1})$, което може да се разглежда като $(a_1, a_2, \dots, a_r)$-свободно r-оцветяване на ребрата на този граф, в което не са използвани от третия до последния цвят (при $r \geq 3$). Това доказва, че $R \geq \max\{a_1, \dots, a_r\} + 1$.

И така, ако $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$ и $r \geq 2$, числата $F_e(a_1, \dots, a_r; R)$ съществуват. За тези числа *Lin* доказва следната:

Теорема 9.4, [L1]. *Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа, $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$ и $r \geq 2$. Тогава*

(а) $F_e(a_1, \dots, a_r; R) \geq R + 2$;

(б) *равенство в (а) имаме тогава и само тогава, когато*

$$K_{R-3} + C_5 \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r).$$

Друго доказателство на Теорема 9.4. Нека G е граф такъв, че

$$G \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r) \text{ и } cl(G) < R.$$

Съгласно Теорема 9.3 имаме

$$\chi(G) \geq R, \tag{9.5}$$

а съгласно Теорема 2.1 имаме

$$|V(G)| \geq \chi(G) + 2. \tag{9.6}$$

От (9.5) и (9.6) получаваме $|V(G)| \geq R + 2$ с което (а) е доказано.

Преминаваме към доказателството на (б). Нека

$$F_e(a_1, \dots, a_r; R) = R + 2$$

и G е граф такъв, че $G \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r)$, $cl(G) < R$ и $|V(G)| = R + 2$. Тогава в (9.6) и (9.5) имаме равенство, т.е. $\chi(G) = R$ и $|V(G)| = \chi(G) + 2$. От Теорема 2.1 следва, че $G = K_{R-3} + C_5$. Следователно

$$K_{R-3} + C_5 \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r).$$

Нека сега $K_{R-3} + C_5 \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r)$. Понеже $cl(K_{R-3} + C_5) = R - 1$ имаме

$$F_e(a_1, \dots, a_r; R) \leq |V(K_{R-3} + C_5)| = R + 2.$$

Последното неравенство и (а) ни дават, че

$$F_e(a_1, \dots, a_r; R) = R + 2.$$

С това Теорема 9.4 е доказана.

Друг важен резултат на *Lin* за числата $F_e(a_1, \dots, a_r; R)$ е следната:

Теорема 9.5, [L1]. *Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа, $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$ и $r \geq 2$. Ако тези числа са такива, че в (8.5) е налице равенство, тогава*

$$F_e(a_1, \dots, a_r; R) = R + 2.$$

От известните числа на *Ramsey* само за числата $R(3, 3) = 6$, $R(3, 5) = R(5, 3) = 14$, $R(4, 4) = 18$ и $R(3, 3, 3) = 17$ в (8.5) имаме равенство. Поради това от Теорема 9.5 *Lin* получава точните стойности на следните ребрени Фолкманови числа:

$$F_e(3, 3; 6) = 8;$$
$$F_e(4, 4; 18) = 20;$$
$$F_e(3, 5; 14) = 16;$$
$$F_e(3, 3, 3; 17) = 19.$$

Най-малкото число на *Ramsey*, за което неравенството (8.5) е строго, е $R(3, 4) = 9$. От Теорема 9.4 (а) имаме $F_e(3, 4; 9) \geq 11$. В [L1] *Lin* показва, че

$$K_6 + C_5 \overset{e}{\nrightarrow} (3, 4)$$

и от Теорема 9.4 (б) получава $F_e(3, 4; 9) \geq 12$. Истинската стойност на това число обаче е 14. Това ще докажем в следващия пункт.

Накрая на този пункт ще докажем една оценка отдолу за числата

$$F_e(a_1, \dots, a_r; R),$$

в случая, когато кратността $M(a_1, \dots, a_r) = 1$. Тази оценка е по-силна от оценката, която дава Теорема 9.4. В следващия пункт ще използваме този резултат за пресмятане на числото $F_e(3, 4; 9)$.

Теорема 9.6. *Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа, $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$ и $r \geq 2$ такива, че пълният граф с $R = R(a_1, \dots, a_r)$ върха има r-оцветяване*

$$E(K_R) = E_1 \cup \ldots \cup E_r, \tag{9.7}$$

в което има единствена едноцветна a_i-клика от i-я цвят и няма едноцветна a_j-клика от j-я цвят при $i \neq j$. Нека G е граф такъв, че

$$G \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r), \;\; \chi(G) = R \;\text{ и }\; cl(G) < r.$$

Тогава

(а) *G е a_i-плътен граф (виж Определение 2.1);*

(б) $|V(G)| \geq R + a_i$;

(в) *Ако $K_{R-a_i-1} + \overline{C}_{2a_i+1} \overset{e}{\nrightarrow} (a_1, \dots, a_r)$, тогава $|V(G)| > R + a_i$.*

Доказателство на Теорема 9.6. Да предположим, че (а) не е вярно и нека

$$V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_R$$

е R-хроматично разлагане на графа G, което не е a_i-плътно. Без ограничение на общността можем да предположим, че $V_1 \cup \ldots \cup V_{a_i}$ не съдържа a_i-клика. Нека единствената едноцветна a_i-клика от i-я цвят на K_R е $P = \{z_1, \ldots, z_{a_i}\}$ и останалите върхове на K_R са $z_{a_i+1}, \ldots, z_R$. Разглеждаме изображението

$$V(G) \xrightarrow{\varphi} V(K_R),$$

което се дефинира по следния начин:

$$v \xrightarrow{\varphi} z_i, \quad \text{ако} \quad v \in V_i.$$

С помощта на изображението φ и r-оцветяването (9.7) дефинираме

$$r\text{-оцветяването } E(G) = E'_1 \cup \ldots \cup E'_r,$$

както следва:

$$[u, v] \in E'_i \Longleftrightarrow [\varphi(u), \varphi(v)] \in E_i, \quad \forall\, [u, v] \in E(G).$$

От $G \xrightarrow{e} (a_1, \ldots, a_r)$ следва, че при това r-оцветяване на $E(G)$ има едноцветна a_k-клика от k-я цвят Q, за някое $k \in \{1, \ldots, r\}$. Ясно е, че $\varphi(Q)$ е едноцветна a_k-клика от k-я цвят в r-оцветяването (9.7). От свойствата на това r-оцветяване следва, че

$$k = i \quad \text{и} \quad \varphi(Q) = P = \{z_1, \ldots, z_{a_i}\}.$$

От дефиницията на φ става ясно, че

$$Q \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_{a_i}.$$

Това противоречи на допускането, че $V_1 \cup \ldots \cup V_{a_i}$ не съдържа a_i-клика. Полученото противоречие доказва (а).

Преминаваме към доказателството на (б). Понеже G е a_i-плътен граф, от Теорема 2.2 (а) имаме, че $|V(G)| \geq \chi(G) + a_i = R + a_i$. Тъй като

$$K_{R-a_i-1} + \overline{C}_{2a_i+1} \overset{e}{\nrightarrow} (a_1, \ldots, a_r)$$

стигаме до извода, че $G \neq K_{R-a_i-1} + \overline{C}_{2a_i+1}$. Сега от Теорема 2.2 (б) следва, че $|V(G)| > R + a_i$.

Теорема 9.6 е доказана.

Теорема 9.6 е публикувана в [N29].

9.3. Пресмятане на числото $F_e(3,4;9)$.

Основен резултат в този пункт е следната:

Теорема 9.7. $F_e(3,4;9) = 14$.

За всеки две естествени числа r и s дефинираме графа

$$G(r,s) = K_4 + C_{2r+1} + C_{2s+1}.$$

Преди доказателството на Теорема 9.7 ще докажем необходимата

Теорема 9.8. *За всеки две естествени числа r и s имаме*

$$G(r,s) \xrightarrow{e} (3,4).$$

За доказателството на Теорема 9.8 ще са необходими две леми. Първата се отнася за 2-оцветяванията на ребрата на $C_{2r+1} + C_{2s+1}$, когато $r \geq 2$ и $s \geq 2$. Да оцветим ребрата от $E(C_{2r+1}) \cup E(C_{2s+1})$ с първия цвят, а останалите ребра на $C_{2r+1} + C_{2s+1}$ с втория цвят. Понеже $r \geq 2$ и $s \geq 2$, C_{2r+1} и C_{2s+1} не съдържат 3-клики. Поради това полученото 2-оцветяване на ребрата $C_{2r+1} + C_{2s+1}$ е $(3,3)$-свободно. Да забележим, че ако $r = 1$ или $s = 1$, съгласно Теорема 9.1, такова 2-оцветяване няма. Следващата лема дава характеристика на всичките $(3,3)$-свободни 2-оцветявания на ребрата на $C_{2r+1} + C_{2s+1}$.

Лема 9.1. *Нека $r \geq 2$ и $s \geq 2$ са естествени числа. Тогава във всяко $(3,3)$-свободно 2-оцветяване на ребрата на $C_{2r+1} + C_{2s+1}$ ребрата на $E(C_{2r+1}) \cup E(C_{2s+1})$ са оцветени еднакво.*

Доказателство. Нека $E_1 \cup E_2$ е едно произволно $(3,3)$-свободно 2-оцветяване на $E(C_{2r+1} + C_{2s+1})$. Най-напред ще докажем, че всяко от множествата $E(C_{2r+1})$ и $E(C_{2s+1})$ е едноцветно. Да допуснем противното и нека, например, $E(C_{2r+1})$ не е едноцветно. Тогава съществуват $v_1, v_2, v_3 \in V(C_{2r+1})$ такива, че $[v_1, v_2] \in E_1$ и $[v_2, v_3] \in E_2$ Дефинираме

$$B_1 = \{w \in V(C_{2s+1}) : [v_2, w] \in E_1\}$$

$$B_2 = \{w \in V(C_{2s+1}) : [v_2, w] \in E_2\}.$$

Ясно е, че $V(C_{2s+1}) = B_1 \cup B_2$. Поради това или $|B_1| \geq s+1$ или $|B_2| \geq s+1$. Нека $|B_1| \geq s+1$. Тогава съществуват два съседни в цикъла C_{2s+1} върха a и b, които принадлежат на B_1. Ако едно от ребрата на 3-кликата $\{a, b, v_1\}$ принадлежи на E_1, тогава това ребро, заедно с v_2 образува едноцветна 3-клика от първия цвят. В противен случай $\{a, b, v_1\}$ е едноцветна 3-клика от втория цвят. Ако $|B_2| \geq s+1$ със същите разсъждения стигаме до извода, че има едноцветна 3-клика. Полученото противоречие доказва, че $E(C_{2r+1})$ и $E(C_{2s+1})$ са едноцветни. Остава да докажем, че $E(C_{2r+1})$ и $E(C_{2s+1}$ са едноцветни от един и същ цвят. Да допуснем противното. Тогава можем да считаме, че

$$E(C_{2r+1}) \subseteq E_1 \text{ и } E(C_{2s+1}) \subseteq E_2.$$

Нека B_1 и B_2 са дефинираните по-горе множества. Ако $|B_2| \geq s+1$, тогава B_2 съдържа два съседни върха на C_{2s+1}. Тези два върха и върхът

v_2 образуват едноцветна 3-клика от втория цвят. Ако $|B_1| \geq s+1$, понеже $[v_1, v_2] \in E_1$, повтаряйки разсъжденията, направени по-горе, отново стигаме до извода, че има едноцветна 3-клика. Това противоречие завършва доказателството на Лема 9.1.

Лема 9.1 е публикувана в [N45].

Лема 9.2. *Нека G е граф и $E(G) = E_1 \cup E_2$ е $(3,4)$-свободно 2-оцветяване. За всеки връх $v \in V(G)$ дефинираме*

$$A_1(v) = \{w \in \Gamma_G(v) : [v,w] \in E_1\}$$

$$A_2(v) = \{w \in \Gamma_G(v) : [v,w] \in E_2\}$$

Тогава $A_1(v)$ не съдържа 4-клика и в $G[A_2(v)]$ няма едноцветни 3-клики. Поради това

$$G[A_2(v)] \overset{e}{\nrightarrow} (3,3).$$

Доказателство. Да допуснем, че $A_1(v)$ съдържа 4-клика Q. Ако някое от ребрата на Q принадлежи на E_1, тогава това ребро и v образуват едноцветна 3-клика от първия цвят, което е противоречие. В противен случай Q е едноцветна 4-клика от втория цвят, което отново е противоречие.

Нека $H = G[A_2(v)]$. За да докажем второто твърдение на Лема 9.2 разглеждаме 2-оцветяване $E(H) = E_1' \cup E_2'$, където $E_1' = E(H) \cap E_1$ и $E_2' = E(H) \cap E_2$. Тъй като $E_1 \cup E_2$ е $(3,4)$-свободно 2-оцветяване, това 2-оцветяване на $E(H)$ не съдържа едноцветни 3-клики от първия цвят. В H няма и едноцветни 3-клики от втория цвят, защото в противен случай такива 3-клика образува заедно с v едноцветна 4-клика от втория цвят на графа G. И така, доказахме, че $E(H) = E_1' \cup E_2'$ е $(3,3)$-свободно 2-оцветяване, с което Лема 9.2 е доказана.

Доказателство на Теорема 9.8. Нека

$$\begin{aligned} V(K_4) &= \{z_1, z_2, z_3, z_4\}, \\ V(C_{2r+1}) &= \{v_1, \dots, v_{2r+1}\}, \\ V(C_{2s+1}) &= \{w_1, w_2, \dots, w_{2s+1}\}. \end{aligned}$$

Ако поне едно от числата r, s е равно на единица, тогава $cl(G(r,s)) \geq 9$ и твърдението на Теоремата следва от равенството $R(3,4) = 9$. Поради това по-нататък ще предполагаме, че $r \geq 2$ и $s \geq 2$.

Да допуснем, че твърдението на Теорема 9.8 не е вярно и нека $E_1 \cup E_2$ е $(3,4)$-свободно 2-оцветяване на $E(G(r,s))$. За това 2-разлагане и произволен връх $v \in V(G(r,s))$ дефинираме

$$A_1(v) = \{w \in \Gamma_{G(r,s)}(v) : [v,w] \in E_1\}$$

$$A_2(v) = \{w \in \Gamma_{G(r,s)}(v) : [v,w] \in E_2\}.$$

Ще разгледаме три случая:

Случай 1. *В $E(K_4)$ има три ребра от първия цвят, които имат общ връх.*

Нека, например, $[z_1, z_2]$, $[z_1, z_3]$, $[z_1, z_4] \in E_1$. Тъй като няма едноцветни 3-клики от първия цвят, следва, че $[z_2, z_3]$, $[z_2, z_4]$, $[z_3, z_4] \in E_2$. Да забележим, че или $A_2(z_2) \cap V(C_{2r+1})$, или $A_2(z_2) \cap V(C_{2s+1})$ е независимо множество (иначе $A_2(z_2)$ съдържа $K_6 \xrightarrow{e} (3,3)$, което противоречи на Лема 9.2). Нека, например, $A_2(z_2) \cap V(C_{2r+1})$ е независимо множество. Тогава (тъй като $\chi(C_{2r+1}) = 3$), $A_1(z_2) \cap V(C_{2r+1})$ не е независимо множество. Без ограничение на общността можем да предположим, че $v_1, v_2 \in A_1(z_2)$. Понеже няма едноцветни 3-клики от първия цвят имаме, че $[v_1, v_2] \in E_2$. От Лема 9.2 следва, че $A_1(z_1) = \{z_2, z_3, z_4\}$. Ето защо

$$C_{2r+1} + C_{2s+1} \subseteq G[A_2(z_1)].$$

Поради това от Лема 9.2 следва, че в $C_{2r+1} + C_{2s+1}$ няма едноцветни 3-клики. От този факт и Лема 9.1 получаваме, че ребрата на $E(C_{2r+1}) \cup E(C_{2s+1})$ са оцветени еднакво. Като вземем под внимание, че $[v_1, v_2] \in E_2$, стигаме до извода, че

$$E(C_{2r+1}) \subseteq E_2 \quad \text{и} \quad E(C_{2s+1}) \subseteq E_2. \tag{9.8}$$

Тъй като $z_1, v_1, v_2 \in A_1(z_2)$, от Лема 9.2 следва, че

$$V(C_{2s+1}) \subseteq A_2(z_2).$$

Повтаряйки разсъжденията, които направихме за върха z_2, за върховете z_3 и z_4 стигаме до извода, че

$$V(C_{2r+1}) \subseteq A_2(z_3) \quad \text{или} \quad V(C_{2s+1}) \subseteq A_2(z_3)$$

$$V(C_{2r+1}) \subseteq A_2(z_4) \quad \text{или} \quad V(C_{2s+1}) \subseteq A_2(z_4).$$

От $V(C_{2s+1}) \subseteq A_2(z_2)$ и (9.8) следва, че $V(C_{2s+1}) \nsubseteq A_2(z_3)$ и $V(C_{2s+1}) \nsubseteq A_2(z_4)$ (иначе $[z_2, z_3, w_1, w_2]$ или $[z_2, z_4, w_1, w_2]$ е едноцветна 4-клика от втория цвят). Следователно

$$A_2(z_3) \cap A_2(z_4) \supset V(C_{2r+1}).$$

Стигнахме до извода, че $[z_3, z_4, v_1, v_2]$ е едноцветна 4-клика от втория цвят, което е противоречие.

Случай 2. *В $E(K_4)$ има две ребра от първия цвят, които имат общ връх.*

Нека, например, $[z_1, z_2], [z_1, z_3] \in E_1$ и $[z_1, z_4] \in E_2$. В тази ситуация

$$V(C_{2r+1}) \subseteq A_2(z_1) \quad \text{или} \quad V(C_{2s+1}) \subseteq A_2(z_1)$$

(иначе $A_1(z_1)$ ще съдържа 4-клика, което противоречи на Лема 9.2). Нека например

$$V(C_{2r+1}) \subseteq A_2(z_1).$$

В $A_1(z_1) \cap V(C_{2s+1})$ няма съседни върхове (иначе $A_1(z_1)$ ще съдържа 4-клика, което противоречи на Лема 9.2). Понеже $\chi(C_{2s+1}) = 3$, в $A_2(z_1) \cap V(C_{2s+1})$ има два съседни върха. Получихме, че $A_2(z_1)$ съдържа $C_3 + C_{2r+1}$. Тъй като $C_3 + C_{2r+1} \xrightarrow{e} (3,3)$ (виж Теорема 9.1), това противоречи на Лема 9.2.

Случай 3. *В $E(K_4)$ няма две ребра от първия цвят с общ връх.*

Понеже $E_1 \cup E_2$ е $(3,4)$-свободно 2-оцветяване на $E(G(r,s))$, непременно поне едно от ребрата на K_4 е оцветено с първия цвят. Без ограничение на общността можем да предположим, че $[z_1, z_2] \in E_1$. Тогава

$$[z_1, z_3],\ [z_2, z_3],\ [z_1, z_4],\ [z_2, z_4] \in E_2.$$

Да забележим, че поне едното от множествата

$$A_2(z_1) \cap V(C_{2r+1}) \quad \text{и} \quad A_2(z_1) \cap V(C_{2s+1})$$

е независимо (иначе $A_2(z_1)$ съдържа $K_6 \xrightarrow{e} (3,3)$, което противоречи на Лема 9.2). Нека, например, $A_2(z_1) \cap V(C_{2r+1})$ е независимо множество. Тогава $A_1(z_1) \cap V(C_{2r+1})$ съдържа два съседни върха. Ще предполагаме, че тези два върха са v_1 и v_2. Да забележим, че $V(C_{2s+1}) \cap A_1(z_1) = \emptyset$ (в противен случай z_2, v_1, v_2 и един от върховете на C_{2s+1} образуват 4-клика в $A_1(z_1)$, което противоречи на Лема 9.2). Поради това

$$V(C_{2s+1}) \subset A_2(z_1). \tag{9.9}$$

От $z_3, z_4 \in A_2(z_1)$ и (9.9) следва $V(C_{2r+1}) \cap A_2(z_1) = \emptyset$ (иначе $A_2(z_1)$ съдържа $C_3 + C_{2s+1} \xrightarrow{e} (3,)$, което противоречи на Лема 9.2). Следователно

$$V(C_{2r+1}) \subset A_1(z_1). \tag{9.10}$$

Тъй като няма едноцветни 3-клики от първия цвят, от (9.10) правим извода, че

$$E(C_{2r+1}) \subset E_2. \tag{9.11}$$

От (9.10) следва също, че $V(C_{2r+1}) \cap A_1(z_2) = \emptyset$ (иначе z_1, z_2 и един от върховете на C_{2r+1} образуват едноцветна 3-клика от първия цвят). Поради това

$$V(C_{2r+1}) \subset A_2(z_2). \tag{9.12}$$

От (9.12) следва, че $V(C_{2s+1}) \cap A_2(z_2) = \emptyset$ (иначе $A_2(z)$ съдържа $C_3 + C_{2r+1} \xrightarrow{e} (3,3)$, което противоречи на Лема 9.2). Следователно

$$V(C_{2s+1}) \subset A_1(z_2). \tag{9.13}$$

Понеже няма едноцветни 3-клики от първия цвят от (9.13) правим извода, че

$$E(C_{2s+1}) \subset E_2. \tag{9.14}$$

Ако допуснем, че в $A_2(z_3) \cap V(C_{2s+1})$ има два съседни върха, тогава тези два върха заедно с z_1 и z_3 образуват 4-клика, която съгласно (9.9) и (9.14), е едноцветна 4-клика от втория цвят. Следователно, $A_2(z_3) \cap V(C_{2s+1})$ е независимо множество. Поради това

$$\text{в } A_1(z_3) \cap V(C_{2s+1}) \text{ има два съседни върха.} \tag{9.15}$$

Ако допуснем, че в $A_2(z_3) \cap V(C_{2r+1})$ има два съседни върха, тогава тези два върха заедно с z_2 и z_3 образуват 4-клика, която, съгласно (9.12) и (9.11), е едноцветна 4-клика от втория цвят. Следователно $A_2(z_3) \cap V(C_{2r+1})$ е независимо множество и

(9.16) в $A_1(z_3) \cap V(C_{2r+1})$ има два съседни върха.

От (9.15) и (9.16) следва, че $A_1(z_3)$ съдържа 4-клика, което противоречи на Лема 9.2. С това Теорема 9.8 е доказана.

Теорема 9.8 е от [N12] и е публикувана в [N5].

Доказателство на Теорема 9.7.

I. Доказателство на неравенството $F_e(3,4;9) \leq 14$.

Съгласно Теорема 9.8 имаме

$$G(2,2) = K_4 + C_5 + C_5 \xrightarrow{e} (3,4).$$

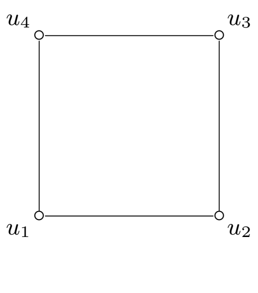
Очевидно $cl(G(2,2)) = 8$. Поради това имаме

$$F_e(3,4;9) \leq |V(G(2,2))| = 14.$$

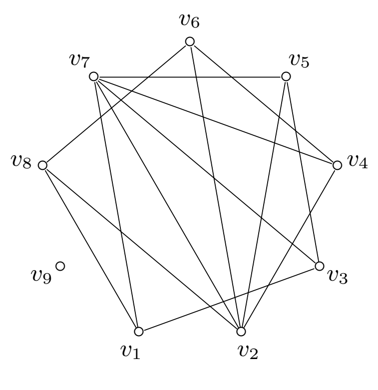
II. Доказателство на неравенството $F_e(3,4;9) \geq 14$.

Нека G е граф, $G \xrightarrow{e} (3,4)$ и $cl(G) < 9$. Трябва да докажем, че $|V(G)| \geq 14$. Съгласно Теорема 9.3, $\chi(G) \geq R(3,4) = 9$. Ако $\chi(G) \geq 10$, тогава от Теорема 5.6 следва желаното неравенство $|V(G)| \geq 14$. По-нататък ще предполагаме, че $\chi(G) = 9 = R(3,4)$. Ще докажем, че са налице условията на теорема 9.6 в ситуацията, когато $r = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 4$. Съгласно Теорема 8.1 съществува 2-оцветяване на $E(K_9)$, в което няма едноцветни клики от първия цвят и има единствена едноцветна 4-клика от втория цвят (ребрата, оцветени с втория цвят са дадени на Фиг. 8.1). Поради това Теорема 9.6 (б) ни дава, че $|V(G)| \geq 13$. За да докажем, че $|V(G)| \geq 14$, съгласно Теорема 9.6 (в), трябва да докажем, че $K_4 + \overline{C}_9 \overset{e}{\nrightarrow} (3,4)$.

И така, трябва да построим $(3,4)$-свободно 2-оцветяване на $E(K_4 + \overline{C}_9)$. Нека $V(K_4) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ и $V(\overline{C}_9) = \{v_1, \ldots, v_9\}$. Разглеждаме графите F_1 и F_2, които са дадени съответно на Фиг. 9.1 и Фиг. 9.2.



Фигура 9.1, граф F_1



Фигура 9.2, граф F_2

Дефинираме 2-оцветяването $E_1 \cup E_2$ на ребрата на $K_4 + \overline{C}_9$ по следния начин:

$$E(K_4) \cap E_2 = E(F_1) \quad \text{и} \quad E(\overline{C}_9) \cap E_2 = E(F_2).$$

Оцветяването на останалите ребра на $K_4 + \overline{C}_9$ ще направим с помощта на матрицата

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

както следва:

$$[u_i, v_j] \in E_1 \Longleftrightarrow a_{ij} = 1;$$
$$[u_i, v_j] \in E_2 \Longleftrightarrow a_{ij} = 2.$$

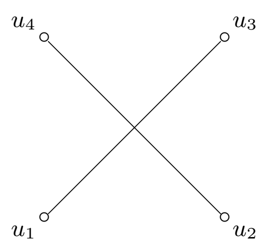
Ще докажем, че това 2-оцветяване на ребрата на $K_4 + \overline{C}_9$ е $(3,4)$-свободно. Най-напред ще докажем, че няма едноцветни 3-клики от първия цвят. От Фигура 9.3 и Фигура 9.4 става ясно, че K_4 и $\overline{C}_9$ не съдържат едноцветни 3-клики от първия цвят. Следователно, ако има едноцветна 3-клика от първия цвят, тя има или един връх в $V(K_4)$, или два върха в $V(K_4)$. Дефинираме

$$B_i(u_k) = \{v_j \in V(\overline{C}_9) : [u_k, v_j] \in E_i\},\ i = 1,2 \ \text{ и } \ k = 1,2,3,4.$$

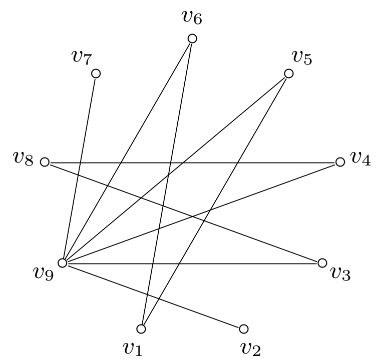
Тъй като $B_1(u_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ и в $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ няма ребро от първия цвят (виж Фигура 9.4), няма едноцветна 3-клика от първия цвят, единият връх на която е u_1, а другите две да са в $V(\overline{C}_9)$. По същия начин от равенствата

$$B_1(u_2) = \{v_1, v_2, v_7, v_8\}$$
$$B_1(u_3) = \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$$
$$B_1(u_4) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

и Фигура 9.4 следва, че няма едноцветна 3-клика от първия цвят, единият връх на която е върха u_i, а останалите два върха да са в $V(\overline{C}_9)$, $i = 2,3,4$.



Фигура 9.3, $E(K_4) \cap E_1$



Фигура 9.4, $E(\overline{C}_9) \cap E_1$

До тук доказахме, че няма едноцветна 3-клика от първия цвят, която има точно един връх в $V(K_4)$. Да допуснем сега, че има едноцветна 3-клика от първия цвят, която има два върха в $V(K_4)$. От Фигура 9.3 става ясно, че тези два върха са (u_1, u_3) или (u_2, u_4). От друга страна

$$B_1(u_1) \cap B_1(u_3) = \emptyset \quad \text{и} \quad B_1(u_2) \cap B_1(u_4) = \emptyset,$$

което е противоречие.

И така доказахме, че в разглежданото 2-оцветяване на ребрата на графа $K_4 + \overline{C}_9$ няма едноцветни 3-клики от първия цвят. Сега ще докажем, че няма едноцветна 4-клика от втория цвят. Преди всичко да забележим, че от Фигура 9.1 и Фигура 9.2, където са дадени $E_2 \cap E(K_4)$ и $E_2 \cap E(\overline{C}_9)$, следва че K_4 не е едноцветна 4-клика и че в $\overline{C}_9$ няма едноцветна 4-клика от втория цвят. Поради това, ако допуснем, че има едноцветна 4-клика от втория цвят, тя ще има поне един връх в K_4. От Фигура 9.1 става ясно, че тази едноцветна 4-клика от втория цвят не може да има повече от два върха в K_4. Поради това са налице следните две възможности:

Случай 1. *Едноцветната 4-клика от втория цвят има точно един връх в K_4.*

В тази ситуация трябва едно множествата

$$\begin{aligned}
B_2(u_1) &= \{v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}\\
B_2(u_2) &= \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_9\}\\
B_2(u_3) &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_9\}\\
B_2(u_4) &= \{v_1, v_2, v_7, v_8, v_9\}
\end{aligned}$$

да съдържа едноцветна 3-клика от втория цвят. От Фигура 9.2 става ясно, че това не е така.

Случай 2. *Едноцветната 4-клика от втория цвят има точно два върха в K_4.*

От Фигура 9.1 се вижда, че тези два върха са една от следните двойки върхове в K_4:

$$\{u_1, u_2\},\ \{u_2, u_3\},\ \{u_3, u_4\},\ \{u_4, u_1\}.$$

В тази ситуация трябва едно от множествата

$$\begin{aligned}
B_2(u_1) \cap B_2(u_2) &= \{v_5, v_6, v_9\}\\
B_2(u_2) \cap B_2(u_3) &= \{v_3, v_4, v_9\}\\
B_2(u_3) \cap B_2(u_4) &= \{v_1, v_2, v_9\}\\
B_2(u_4) \cap B_2(u_1) &= \{u_7, v_8, v_9\}
\end{aligned}$$

да съдържа ребро от втория цвят. От Фигура 9.2 се вижда, че това не е така. Полученото противоречие доказва, че разглежданото 2-оцветяване на ребрата на $K_4 + \overline{C}_9$ е $(3,4)$-свободно.

И така, доказахме, че $K_4 + \overline{C}_9 \overset{e}{\nrightarrow} (3,4)$. От Теорема 9.6 (б), следва че $|V(G)| \geq 14$. С това Теорема 9.7 е доказана.

Неравенството $F_e(3,4;9) \leq 14$ е от [N12] и е публикувано в [N5]. Окончателното пресмятане на числото $F_e(3,4;9)$ е публикувано в [N26]. По-късно в [N29] е дадено ново доказателство на неравенството $F_e(3,4;9) \geq 14$. Това ново и по-кратко доказателство привеждаме тук.

9.4. Оценки отдолу за някои числа $F_e(a_1, \dots, a_r; q)$ при $q < R(a_1, \dots, a_r)$.

За да изясним кога разглежданите числа $F_e(a_1, \dots, a_r; q)$ съществуват ще ни е необходимо следното елементарно:

Твърдение 9.1. *Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа такива, че $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$ и $r \geq 2$. Тогава*

$$R(a_1, \dots, a_r) \geq \max\{a_1, \dots, a_r\} + 3$$

и равенство е налице тогава и само тогава, когато $r = 2$ и $a_1 = a_2 = 3$.

Доказателство. Ако $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 3$, тогава

$$R(a_1, \dots, a_r) = R\underbrace{(3, \dots, 3)}_{r} \geq R(3, 3) = 6 = \max\{a_1, \dots, a_r\} + 3$$

и равенство е възможно тогава и само тогава, когато $r = 2$ и $a_1 = a_2 = 3$. Нека $\max\{a_1, \dots, a_r\} \geq 4$. Ако $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 4$, тогава

$$R(a_1, \dots, a_r) \geq R(3, 4) = 9 > \max\{a_1, \dots, a_r\} + 3.$$

Нека $p = \max\{a_1, \dots, a_r\} \geq 5$. Оцветяваме четири независими (без общ връх) ребра на $E(K_{p+3})$ с първия цвят (такива ребра има понеже $p \geq 5$), а останалите ребра с втория цвят. Ясно е, че това r-оцветяване на $E(K_{p+3})$ е $(3, p)$-свободно. Следователно $R(3, p) \geq p + 4$. Понеже $R(a_1, \dots, a_r) \geq R(3, p)$ получаваме желаното неравенство

$$R(a_1, \dots, a_r) \geq p + 4 > \max\{a_1, \dots, a_r\} + 3.$$

Твърдение 9.1 е доказано.

Съгласно (9.3), числото $F_e(a_1, \dots, a_r; R - 1)$, където $R = R(a_1, \dots, a_r)$, съществува тогава и само тогава, когато

$$R(a_1, \dots, a_r) \geq \max\{a_1, \dots, a_r\} + 2.$$

От Твърдение 9.1 имаме, че това неравенство е изпълнено, ако $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$ и $r \geq 2$, поради това числата $F_e(a_1, \dots, a_r; R - 1)$ съществуват при $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$ и $r \geq 2$. За тези числа *Lin* доказва следния резултат:

Теорема 9.9, [L1]. *Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа, $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$ и $r \geq 2$. Тогава*

$$F_e(a_1, \dots, a_r; R - 1) \geq R + 4. \tag{9.17}$$

Също в [L1] *Lin* изказва хипотезата, че неравенството (9.17) винаги е строго. В следващия пункт ще покажем, че има случаи, когато това неравенство е точно. Следващата теорема дава проста характеристика на случаите, когато в (9.17) имаме равенство.

Теорема 9.10. *Равенство в (9.17) имаме тогава и само тогава, когато*

$$K_{R-6} + C_5 + C_5 \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r).$$

Доказателство. Да допуснем, че $F_e(a_1, \dots, a_r; R-1) = R+4$. Нека G е граф такъв, че $G \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r)$, $cl(G) < R-1$ и $|V(G)| = R+4$. Съгласно Теорема 9.3, $\chi(G) \geq R$, а от Твърдение 9.1 имаме, че $R \geq 6$. Следователно, $\chi(G) \geq 6$. Тъй като $|V(G)| = R+4$, от Теорема 5.6 следва, че $G = K_{R-6} + C_5 + C_5$. Поради това

$$K_{R-6} + C_5 + C_5 \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r).$$

Нека $K_{R-6} + C_5 + C_5 \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r)$. Понеже $cl(K_{R-6} + C_5 + C_5) = R-2$ имаме

$$F_e(a_1, \dots, a_r; R-1) \leq |V(K_{R-6} + C_5 + C_5)| = R+4.$$

От последното неравенство и (9.17) получаваме

$$F_e(a_1, \dots, a_r; R-1) = R+4.$$

Теорема 9.10 е доказана.

Теорема 9.10 е публикувана в [N20].

Съгласно (9.3) числото $F_e(a_1, \dots, a_r; R-2)$, $R = R(a_1, \dots, a_r)$, съществува тогава и само тогава, когато $R \geq \max\{a_1, \dots, a_r\} + 3$. От Твърдение 9.1 имаме, че при $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$ и $r \geq 2$, това неравенство е изпълнено. Следователно за всички естествени числа $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$ и $r \geq 2$ числата $F_e(a_1, \dots, a_r; R-2)$ съществуват. За тези числа е вярна следната:

Теорема 9.11. *Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа, такива че $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$ и $r \geq 2$. Тогава*

(а) $F_e(a_1, \dots, a_r; R-2) \geq R+6$;

(б) *Ако $(a_1, \dots, a_r) \neq (3,3)$ и $K_{R-9} + C_5 + C_5 + C_5 \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r)$, тогава $F_e(a_1, \dots, a_r; R-2) = R+6$.*

Доказателство. Нека G е граф такъв, че

$$G \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r) \text{ и } cl(G) < R-2.$$

Трябва да докажем, че $|V(G)| \geq R+6$. От Теорема 9.3 имаме $\chi(G) \geq R$. Понеже $cl(G) < R-2$, от Теорема 5.8 получаваме желаното неравенство $|V(G)| \geq R+6$. С това (а) е доказано.

За доказателството на (б) разглеждаме графа

$$H = K_{R-9} + C_5 + C_5 + C_5.$$

Понеже $(a_1, \dots, a_r) \neq (3,3)$ имаме $R \geq 9$. Следователно графът H е дефиниран коректно. Очевидно е, че $cl(H) = R-3$. Поради това от $H \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r)$ следва, че

$$F_e(a_1, \dots, a_r; R-2) \leq |V(H)| = R+6.$$

От последното неравенство и неравенството (а) получаваме

$$F_e(a_1, \dots, a_r; R-2) = R+6.$$

С това Теорема 9.11 е доказана.

Теорема 9.11 е публикувана в [N20]. В следващия пункт ще докажем, че неравенството (а) е точно.

Числата $F_e(a_1, \dots, a_r; R-3)$, съгласно (9.3), съществуват тогава и само тогава, когато $R = R(a_1, \dots, a_r) \geq \max\{a_1, \dots, a_r\} + 4$. Поради това от Твърдение 9.1 следва, че ако $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$, $r \geq 2$ и $(a_1, \dots, a_r) \neq (3, 3)$, числата $F_e(a_1, \dots, a_r; R-3)$ съществуват.

Теорема 9.12. *Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа такива, че $a_i \geq 3$, $i = 1, \dots, r$, $r \geq 2$ и $(a_1, \dots, a_r) \neq (3, 3)$. Тогава*

(а) $F_e(a_1, \dots, a_r; R-3) \geq R + 8$;

(б) *Ако $(a_1, \dots, a_r) \neq (3, 4)$ и $K_{R-12}+C_5+C_5+C_5+C_5 \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r)$, тогава $F_e(a_1, \dots, a_r; R-3) = R + 8$.*

Доказателство. Нека G е граф, $G \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r)$ и $cl(G) < R - 3$. От Теорема 9.3 имаме $\chi(G) \geq R$. Тъй като $R(a_1, \dots, a_r) > R(3, 3)$ следва, че $\chi(G) > 6$. Понеже $cl(G) < R-3$, от Теорема 5.10 получаваме $|V(G)| \geq R+8$. С това (а) е доказано.

За доказателството на (б) разглеждаме графа

$$H = K_{R-12} + C_5 + C_5 + C_5 + C_5.$$

Понеже $(a_1, \dots, a_r) \neq (3, 4)$ имаме $R > 12$. Поради това графът H е дефиниран коректно. Нека сега $H \xrightarrow{e} (a_1, \dots, a_r)$. Ясно е, че $cl(H) = R - 4$. Следователно

$$F_e(a_1, \dots, a_r; R-3) \leq |V(H)| = R + 8.$$

От последното неравенство и (а) получаваме, че

$$F_e(a_1, \dots, a_r; R-3) = R + 8.$$

Теорема 9.12 е доказана.

Теорема 9.12 е публикувана в [N18]. В следващия пункт ще докажем, че неравенството (а) е точно.

9.5. Пресмятане на числата $F_e(3,3,3;q)$, $q = 14, 15, 16, 17$.

В този пункт ще разглеждаме ребрени $(3,3,3)$-графи. Най-простият такъв граф е получен от *Greenwood* и *Gleason*:

$$K_{17} \xrightarrow{e} (3,3,3), \quad \text{[G14]}. \tag{9.18}$$

Следващият пример на ребрен $(3,3,3)$-граф (който не съдържа K_{17}) е получен от *Lin*:

$$K_{14} + G_5 \xrightarrow{e} (3,3,3), \quad \text{[L1]} \quad \text{(виж Теорема 9.5)}. \tag{9.19}$$

Да дефинираме графа

$$L_t(p,q,r,s) = K_t + C_{2p+1} + C_{2q+1} + C_{2r+1} + C_{2s+1}.$$

Пресмятането на числата $F_e(3,3,3;q)$, $q = 14, 15, 16, 17$ се базира на следващия резултат, който обобщава (9.18) и (9.19):

Теорема 9.13. *За произволни естествени числа p, q, r и s е вярно, че*

$$L_5(p,q,r,s) \xrightarrow{e} (3,3,3).$$

За доказателството на Теорема 9.13 ще са ни необходими следните няколко леми.

Лема 9.3. *Нека $E(K_5) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ е 3-оцветяване, в което няма едноцветни 3-клики и $E_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, 3$. Тогава има връх, от който излизат ребра от трите цвята.*

Доказателство. Нека $V(K_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Ще разгледаме два случая:

Случай 1. *Съществува връх от който излизат три еднакво оцветени ребра. Нека например*

$$[v_1, v_2],\ [v_1, v_3],\ [v_1, v_4] \in E_1.$$

Разглеждаме 3-кликата $[v_2, v_3, v_4]$. Ако някое от ребрата на тази 3-клика принадлежи на E_1, тогава това ребро заедно с v_1 образуват едноцветна 3-клика от първия цвят, което е противоречие. Следователно ребрата на $[v_1, v_2, v_3]$ са оцветени с втория и третия цвят. Понеже няма едноцветни 3-клики можем да предположим, че

$$[v_2, v_3] \in E_2 \ \text{ и } \ [v_2, v_4] \in E_3.$$

Ребрата $[v_2, v_1]$, $[v_2, v_3]$, $[v_2, v_4]$ са оцветени различно, с което Случай 1 е доказан.

Случай 2. *От всеки връх излизат най-много две едноцветни ребра.*

Да допуснем, че няма връх, от който излизат три различно оцветени ребра. Тогава от всеки връх излизат две ребра от един цвят, две ребра от друг цвят и няма ребра от този връх от останалия цвят. Без ограничение на общността можем да предположим, че

$$[v_1, v_2],\ [v_1, v_3] \in E_1 \ \text{ и } \ [v_1, v_4],\ [v_1, v_5] \in E_2.$$

От v_4 освен $[v_1, v_4]$ излиза още едно ребро от втория цвят. Това не е реброто $[v_4, v_5]$ понеже няма едноцветна 3-клика. Остава едно от ребрата $[v_2, v_4]$, $[v_3, v_4]$ да принадлежи на E_2. Без ограничение на общността можем да предположим, че $[v_2, v_4] \in E_2$. Тъй като $[v_1, v_2] \in E_1$ и $[v_2, v_4] \in E_2$ следва, че $[v_2, v_3]$, $[v_2, v_5] \in E_1 \cup E_2$. Понеже няма едноцветни 3-клики, $[v_2, v_3] \notin E_1$. Следователно $[v_2, v_3] \in E_2$ и $[v_2, v_5] \in E_1$. Получихме, че от всеки от върховете v_1, v_2, v_3, v_5 излизат ребра от първия и втория цвят. Следователно от тези върхове не излизат ребра от третия цвят. Това означава, че няма ребра от третия цвят, което противоречи на условието $E_3 \neq \emptyset$.

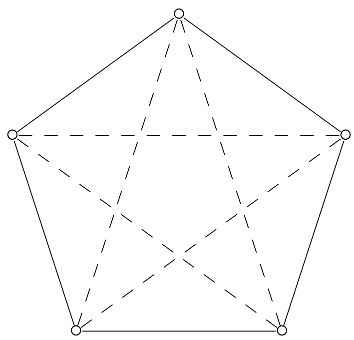
Лема 9.4. *Всяко 2-оцветяване на $E(K_5)$, в което няма едноцветна 3-клика, има свойството, че от всеки връх излизат две ребра от първия и две ребра от втория цвят.*

Доказателство. Нека $V(K_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Да допуснем противното и нека $E(K_5) = E_1 \cup E_2$ е 2-оцветяване без едноцветна 3-клика и такова, че

$$[v_1, v_2],\ [v_1, v_3],\ [v_1, v_4] \in E_1$$

Разглеждаме 3-кликата $[v_2, v_3, v_4]$. Ако някое от ребрата на тази три клика е оцветено с първия цвят, тогава имаме едноцветна 3-клика от първия цвят, което е противоречие. В противен случай $[v_2, v_3, v_4]$ е едноцветна 3-клика от втория цвят, което отново е противоречие.

Забележка. *Вярно е по-силното твърдение, че всяко 2-оцветяване на $E(K_5)$, в което няма едноцветни 3-клики е изоморфно на 2-оцветяването дадено на Фигура 9.5. Доказателството на този добре известен факт може да се намери в* [K7].



Фигура 9.5

Лема 9.5 *Нека*

$$H = K_2 + C_{2p+1} + C_{2q+1} + C_{2r+1},$$

където $V(K_2) = \{v_1, v_2\}$. Нека $V(H) = V_1 \cup V_2$ е 2-разлагане такова, че $v_1 \in V_1$ и $v_2 \in V_2$. Тогава

$$H_1 = H[V_1] \xrightarrow{e} (3,3) \text{ или } H_2 = H[V_2] \xrightarrow{e} (3,3).$$

Доказателство. Да забележим, че

$$E(X) \cap E(H_1) \neq \emptyset \text{ или } E(X) \cap E(H_2) \neq \emptyset,$$

където $X = C_{2p+1}, C_{2q+1}, C_{2r+1}$. Следователно можем да предположим, че

$$E(C_{2p+1}) \cap E(H_1) \neq \emptyset; \tag{9.20}$$

$$E(C_{2q+1}) \cap E(H_1) \neq \emptyset. \tag{9.21}$$

Ако допуснем, че $V_1 \cap V(C_{2r+1}) \neq \emptyset$, тогава от $v_1 \in V_1$, (9.20) и (9.21) следва, че V_1 съдържа 6-клика. От (9.1) става ясно, че $H_1 \xrightarrow{e} (3,3)$. Нека сега предположим, че $V_1 \cap V(C_{2r+1}) = \emptyset$. В тази ситуация имаме

$$V(C_{2r+1}) \subseteq V_2. \tag{9.22}$$

Ако $V_1 \supset V(C_{2p+1})$, тогава от $v_1 \in V_1$ и (9.21) следва, че H_1 съдържа $C_3 + C_{2p+1}$. От Теорема 9.1 получаваме $H_1 \xrightarrow{e} (3,3)$. Ако $V_1 \supset V(C_{2q+1})$, тогава от $v_1 \in V_1$ и (9.20) става ясно, че H_1 съдържа $C_3 + C_{2q+1}$. От Теорема 9.1 отново получаваме $H_2 \xrightarrow{e} (3,3)$. Остава да разгледаме ситуацията, когато

$$V(C_{2p+1}) \cap V_2 \neq \emptyset \text{ и } V(C_{2q+1}) \cap V_2 \neq \emptyset. \tag{9.23}$$

От $v_2 \in V_2$, (9.23) и (9.22) следва, че H_2 съдържа $C_3 + C_{2r+1}$. Поради това, съгласно Теорема 9.1, имаме $H_2 \xrightarrow{e} (3,3)$.

Лема 9.5 е доказана.

По-нататък ще са ни необходими следните два специални случая на лема 9.5.

Следствие 9.1. *Нека $V(K_5 + C_{2p+1} + C_{2q+1}) = V_1 \cup V_2$ е 2-разлагане, такова че $V_1 \cap V(K_5) \neq \emptyset$ и $V_2 \cap V(K_5) \neq \emptyset$. Тогава едно от подмножествата V_1, V_2 поражда подграф, който е ребрен $(3,3)$-граф.*

Доказателство. Нека $v_1, v_2 \in V(K_5)$, $v_1 \in V_1$ и $v_2 \in V_2$. Ако означим реброто $[v_1, v_2]$ с K_2, тогава

$$K_5 + C_{2p+1} + C_{2q+1} = K_2 + C_{2p+1} + C_{2q+1} + C_3.$$

От това равенство става ясно, че към графа $K_5 + C_{2p+1} + C_{2q+1}$ имаме право да приложим Лема 9.5, откъдето следва твърдението на Следствие 9.1.

Следствие 9.2. *Нека $V(K_8 + C_{2p+1}) = V_1 \cup V_2$ е 2-разлагане. Тогава едно от подмножествата V_1, V_2 поражда подграф, който е ребрен $(3,3)$-граф.*

Доказателство. Ако $V(K_8) \subseteq V_1$ или $V(K_8) \subseteq V_2$, тогава твърдението следва от (9.1). Ако $V_1 \cap V(K_8) \neq \emptyset$ и $V_2 \cap V(K_8) \neq \emptyset$, тогава Следствие 9.2 е специален случай $(q = 1)$ на Следствие 9.1.

Лема 9.6. *Нека*

$$V(L_4(p,q,r,s)) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$$

е 3-разлагане такова, че $V_i \cap V(K_4) \neq \emptyset$, $i = 1, 2, 3$. Тогава едно от подмножествата V_1, V_2, V_3 поражда подграф в $L_4(p, q, r, s)$, който е ребрен $(3, 3)$-граф.

Доказателство. Нека $V(K_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Без ограничение на общността можем да предположим, че $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ и $v_3, v_4 \in V_3$. Разглеждаме 2-оцветяването $V(L_4(p, q, r, s)) = \widetilde{V} \cup V_3$, където $\widetilde{V} = V_1 \cup V_2$. Ясно е, че

$$E(\widetilde{V}) \cap E(X) \neq \emptyset \text{ или } E(V_3) \cap E(X) \neq \emptyset, \tag{9.24}$$

където $X = C_{2p+1}, C_{2q+1}, C_{2r+1}, C_{2s+1}$ и $E(\widetilde{V})$, $E(V_3)$ са множествата на ребрата на подграфите породени съответно от $\widetilde{V}$ и V_3. Ако V_3 съдържа 6-клика, тогава от (9.1) следва, че породеният от V_3 подграф е ребрен $(3, 3)$-граф. Поради това ще предполагаме, че V_3 не съдържа 6-клика. От този факт и $v_3, v_4 \in V_3$ следва, че най-много едно от подмножествата

$$E(V_3) \cap E(X), \quad X = C_{2p+1}, C_{2q+1}, C_{2r+1}, C_{2s+1}$$

не е празно. Поради това от (9.24) правим извода, че поне три от подмножествата

$$E(\widetilde{V}) \cap E(X), \quad X = C_{2p+1}, C_{2q+1}, C_{2r+1}, C_{2s+1}$$

не са празни. Без ограничение на общността можем да предположим, че

$$\begin{aligned} E(\widetilde{V}) \cap E(C_{2p+1}) \neq \emptyset,\ & E(\widetilde{V}) \cap E(C_{2q+1}) \neq \emptyset, \\ & E(\widetilde{V}) \cap E(C_{2r+1}) \neq \emptyset. \end{aligned} \tag{9.25}$$

Ще разгледаме два случая:

Случай 1. $E(V_3) \cap E(C_{2s+1}) = \emptyset$.

В тази ситуация, съгласно (9.24) имаме

$$E(\widetilde{V}) \cap E(C_{2s+1}) \neq \emptyset. \tag{9.26}$$

Тъй като предполагаме, че V_3 не съдържа 6-клика, от $v_3, v_4 \in V_3$ следва, че едно от множествата

$$V_3 \cap V(X),\ X = C_{2p+1}, C_{2q+1}, C_{2r+1}, C_{2s+1}$$

е празно. Нека, например, $V_3 \cap V(C_{2p+1}) = \emptyset$. Тогава

$$V(C_{2p+1}) \subset \widetilde{V}. \tag{9.27}$$

От $v_1, v_2, \in \widetilde{V}$, (9.25), (9.26) и (9.21) правим извода, че породеният от $\widetilde{V}$ подграф съдържа $K_8 + C_{2p+1}$. От Следствие 9.2 имаме, че едното от множествата V_1, V_2 поражда ребрен $(3, 3)$-граф.

Случай 2. *Вярно е, че*

$$E(V_3) \cap E(C_{2s+1}) \neq \emptyset. \tag{9.28}$$

Понеже V_3 не съдържа 6-клика, от $v_3, v_4 \in V_3$ и (9.28) следва, че поне две от сеченията

$$V(C_{2p+1}) \cap V_3,\ V(C_{2q+1}) \cap V_3,\ V(C_{2r+1}) \cap V_3$$

са празни. Нека, например, $V(C_{2p+1}) \cap V_3 = \emptyset$ и $V(C_{2q+1}) \cap V_3 = \emptyset$. Тогава

$$V(C_{2p+1}) \subset \widetilde{V} \text{ и } V(C_{2q+1}) \subset \widetilde{V}. \tag{9.29}$$

Ако $\widetilde{V} \cap V(C_{2s+1}) \neq \emptyset$, тогава от $v_1, v_2 \in \widetilde{V}$, (9.29) и (9.25) следва, че подграфът, породен от $\widetilde{V} = V_1 \cup V_2$ съдържа $K_5 + C_{2p+1} + C_{2q+1}$. Тъй като $v_1 \in V_1 \cap V(K_5)$ и $v_2 \in V_2 \cap V(K_5)$, от Следствие 9.1 получаваме, че породеният от едно от множествата V_1, V_2 подграф е ребрен $(3,3)$-граф.

Нека сега $\widetilde{V} \cap V(C_{2s+1}) = \emptyset$. Ясно е, че

$$V(C_{2s+1}) \subset V_3. \tag{9.30}$$

Ако $V_3 \cap V(C_{2r+1}) \neq \emptyset$, от (9.30) и $v_3, v_4 \in V_3$ следва, че подграфът, породен от V_3, съдържа $C_3 + C_{2s+1}$. Съгласно Теорема 9.1, този подграф е ребрен $(3,3)$-граф. Ако $V_3 \cap V(C_{2r+1}) = \emptyset$, тогава $V(C_{2r+1}) \subset \widetilde{V}$. Този факт, заедно с $v_1, v_2 \in \widetilde{V}$ и (2.29) ни дават, че подграфът, породен от $\widetilde{V}$, съдържа $K_2 + C_{2p+1} + C_{2q+1} + C_{2r+1}$. Понеже $\widetilde{V} = V_1 \cup V_2$ и $v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2$ от Лема 9.5 следва, че едното от подмножествата V_1, V_2 поражда подграф, който е ребрен $(3,3)$-граф.

Лема 9.6 е доказана.

Лема 9.7. *Нека*

$$V(L_4(p,q,r,s)) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$$

е 3-разлагане такова, че $|V_i \cap V(K_4)| = 2$, $i = 1, 2$ и всяко от подмножествата V_1, V_2, V_3 поражда подграф, който не е ребрен $(3,3)$-граф. Тогава

(а) *V_3 е обединение на две от множествата $V(C_{2p+1})$, $V(C_{2q+1})$, $V(C_{2r+1})$, $V(C_{2s+1})$;*

(б) *Изпълнено е поне едно от неравенствата*

$$|V_1 \cap V(X)| > \frac{1}{2}|V(X)|,$$
$$X = V(C_{2p+1}), V(C_{2q+1}), V(C_{2r+1}), V(C_{2s+1}).$$

Доказателство. Понеже подграфите, породени от V_i, $i = 1, 2, 3$ не са ребрени $(3,3)$-графи, съгласно (9.1) имаме, че

$$V_i \text{ не съдържа 6-клика}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{9.31}$$

Разглеждаме 2-разлагането $V(L_4(p,q,r,s)) = \widetilde{V} \cup V_3$, където $\widetilde{V} = V_1 \cup V_2$. Нека $V(K_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. От условието имаме, че $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \widetilde{V}$.

Ще докажем, че поне две от сеченията

$$E(V_3) \cap E(X), \quad X = C_{2p+1}, C_{2q+1}, C_{2r+1}, C_{2s+1},$$

не са празни (с $E(V_3)$ означаваме множеството на ребрата на подграфа, породен от V_3). Да допуснем противното. Тогава поне три от сеченията

$$E(\widetilde{V}) \cap E(X), \quad X = C_{2p+1}, C_{2q+1}, C_{2r+1}, C_{2s+1},$$

не са празни. Без ограничение на общността можем да предположим, че

$$E(\widetilde{V}) \cap E(X) \neq \emptyset, \quad X = C_{2p+1}, C_{2q+1}, C_{2r+1}. \tag{9.32}$$

Ако допуснем, че $\widetilde{V} \supset V(C_{2p+1})$, тогава от $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \widetilde{V}$ и (9.32) следва, че подграфът, породен от $\widetilde{V}$ съдържа $K_8 + C_{2p+1}$, което противоречи на Следствие 9.2. По същия начин се убеждаваме, че $\widetilde{V} \not\supset V(C_{2q+1})$ и $\widetilde{V} \not\supset V(C_{2r+1})$. Поради това имаме, че

$$V_3 \cap V(X) \neq \emptyset, \quad X = C_{2p+1}, C_{2q+1}, C_{2r+1}. \tag{9.33}$$

Ако $V_3 \supset V(C_{2s+1})$, тогава от (9.33) следва, че породеният от V_3 подграф съдържа $C_3 + C_{2s+1}$. Съгласно Теорема 9.1, този подграф е ребрен $(3,3)$-граф, което е противоречие. В противен случай $\widetilde{V} \cap V(C_{2s+1}) \neq \emptyset$. Понеже $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \widetilde{V}$, от (9.32) и $\widetilde{V} \cap V(C_{2s+1}) \neq \emptyset$ следва, че $\widetilde{V}$ съдържа 11-клика. Следователно едно от подмножествата V_1, V_2 съдържа 6-клика, което противоречи на (9.31).

И така, доказахме, че поне две от сеченията

$$E(V_3) \cap E(X), \quad X = C_{2p+1}, C_{2q+1}, C_{2r+1}, C_{2s+1},$$

не са празни. Без ограничение на общността можем да предположим, че

$$E(V_3) \cap E(C_{2r+1}) \neq \emptyset \ \text{ и } \ E(V_3) \cap E(C_{2s+1}) \neq \emptyset. \tag{9.34}$$

От (9.31) и (9.34) следва, че

$$E(V_3) \cap E(C_{2p+1}) = \emptyset \ \text{ и } \ E(V_3) \cap E(C_{2q+1}) = \emptyset.$$

Поради това

$$E(\widetilde{V}) \cap E(C_{2p+1}) \neq \emptyset \ \text{ и } \ E(\widetilde{V}) \cap E(C_{2q+1}) \neq \emptyset. \tag{9.35}$$

Ще докажем, че $V_3 \cap V(C_{2p+1}) = \emptyset$ и $V_3 \cap V(C_{2q+1}) = \emptyset$. Да допуснем противното и нека, например, $V_3 \cap V(C_{2p+1}) \neq \emptyset$. Тогава от (9.31) и (9.34) следва, че $V_3 \cap V(C_{2q+1}) = \emptyset$. Поради това имаме

$$V(C_{2q+1}) \subset \widetilde{V}. \tag{9.36}$$

Да забележим, че

$$\widetilde{V} \cap V(C_{2r+1}) \neq \emptyset \ \text{ и } \ \widetilde{V} \cap V(C_{2s+1}) \neq \emptyset \tag{9.37}$$

(в противен случай $V_3 \supset V(C_{2r+1})$ или $V_3 \supset V(C_{2s+1})$ и заедно с (9.34), и допускането $V_3 \cap V(C_{2p+1}) \neq \emptyset$ ни дава, че породеният от V_3 подграф съдържа $C_3 + C_{2r+1}$ или $C_3 + C_{2s+1}$, което съгласно Теорема 9.1 е противоречие). От $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \widetilde{V}$, (9.35), (9.36) и (9.37) следва, че породеният от $\widetilde{V}$ подграф съдържа $K_8 + C_{2q+1}$. Понеже $\widetilde{V} = V_1 \cup V_2$ от Следствие 9.2

стигаме до извода, че едно от подмножествата V_1, V_2 поражда подграф, който е ребрен $(3,3)$-граф. С това противоречие доказахме, че $V_3 \cap V(C_{2p+1}) = \emptyset$ и $V_3 \cap V(C_{2q+1}) = \emptyset$. Поради това имаме, че

$$V(C_{2p+1}) \cup V(C_{2q+1}) \subset \widetilde{V}. \tag{9.38}$$

Ако допуснем, че $\widetilde{V} \cap V(C_{2r+1} + C_{2s+1}) \neq \emptyset$, тогава този факт заедно с $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \widetilde{V}$ и (9.38) ни дава, че породеният от $\widetilde{V}$ подграф съдържа $K_5 + C_{2p+1} + C_{2q+1}$. Понеже $|V(K_4) \cap V_i| = 2$, $i = 1, 2$ имаме $V_i \cap V(K_5) \neq \emptyset$, $i = 1, 2$. От Следствие 9.1 получаваме, че единият от подграфите, породени от V_1, V_2, е ребрен $(3,3)$-граф, което е противоречие. И така,

$$\widetilde{V} \cap V(C_{2r+1} + C_{2s+1}) = \emptyset. \tag{9.39}$$

От (9.38) и (9.39) следва, че

$$\widetilde{V} = V(C_{2p+1}) \cup V(C_{2q+1}) \cup V(K_4). \tag{9.40}$$

Поради това $V_3 = V(C_{2r+1}) \cup V(C_{2s+1})$. С това (а) е доказано.

Преминаваме към доказателството на (б). Съгласно (а) е вярно равенството (9.40). Ако допуснем, че (б) не е вярно, тогава от (9.40) имаме

$$|V_2 \cap V(C_{2p+1})| \geq p+1 \ \text{ и } \ |V_2 \cap V(C_{2q+1})| \geq q+1.$$

От тези неравенства следва, че

$$E(V_2) \cap E(C_{2p+1}) \neq \emptyset \ \text{ и } \ E(V_2) \cap E(C_{2q+1}) \neq \emptyset. \tag{9.41}$$

От (9.41) и $|V_2 \cap V(K_4)| = 2$ следва, че V_2 съдържа 6-клика, което противоречи на (9.31).

Лема 9.7 е доказана.

Доказателство на Теорема 9.13. Да допуснем противното и нека

$$E(L_5(p,q,r,s)) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

е $(3,3,3)$-свободно 3-оцветяване. За всеки връх $v \in V(K_5)$ дефинираме

$$A_i(v) = \{w \in V(L_5(p,q,r,s)) : [v,w] \in E_i\}, \ \ i = 1, 2, 3.$$

Нека $V(K_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Ясно е, че

$$L_5(p,q,r,s) - v_i = L_4(p,q,r,s), \ \ i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Поради това

$$A_1(v_i) \cup A_2(v_i) \cup A_3(v_i) = V(L_4(p,q,r,s)), \ \ i = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{9.42}$$

Понеже няма едноцветни 3-клики имаме, че

(9.43) *всяко от подмножествата $A_1(v_i), A_2(v_i), A_3(v_i)$ поражда подграф, който не е ребрен $(3,3)$-граф.*

Наистина, да допуснем, че това не е така и нека, например $A_1(v_i)$ поражда ребрен $(3,3)$-граф. Нека H е подграфът породен от $A_1(v_i)$. Понеже няма едноцветни 3-клики трябва

$$E(H) \subset E_2 \cup E_3.$$

Понеже $H \xrightarrow{e} (3,3)$ следва, че в 2-оцветяването

$$E(H) = (E(H) \cap E_2) \cup (E(H) \cap E_3)$$

има едноцветни 3-клики, което е противоречие. С това (9.43) е доказано.

Ако $E(K_5) \cap E_i \neq \emptyset$, $i = 1,2,3$, тогава, съгласно Лема 9.3, можем да предположим, че от v_1 излизат три различно оцветени ребра. Съгласно (9.42) имаме

$$V(L_4(p,q,r,s)) = A_1(v_1) \cup A_2(v_1) \cup A_3(v_1).$$

Понеже от v_1 излизат ребра от всеки цвят $A_i(v_1) \cap V(K_4) \neq \emptyset$, $i = 1,2,3$. С помощта на Лема 9.6 стигаме до извода, че някое от подмножествата $A_1(v_1)$, $A_2(v_1)$, $A_3(v_1)$ поражда ребрен $(3,3)$-подграф, което противоречи на (9.43).

И така, можем да предположим, че

$$E(K_5) \subset E_1 \cup E_2. \tag{9.44}$$

Съгласно Лема 9.4 имаме

$$|A_1(v_i) \cap V(K_5)| = 2 \text{ и } |A_2(v_i) \cap V(K_5)| = 2, \quad i = 1,2,3,4,5. \tag{9.45}$$

Съгласно (9.42), (9.43) и (9.45), можем да приложим Лема 9.7 (а), откъдето стигаме до извода, че

$$\begin{gathered} A_3(v_i) \textit{ е обединение на две от множествата} \\ V(C_{2p+1}), V(C_{2q+1}), V(C_{2r+1}), V(C_{2s+1}),\ i = 1,2,3,4,5. \end{gathered} \tag{9.46}$$

От Лема 9.7 (б) имаме

$$\begin{gathered} \textit{За всеки връх } v_i \in V(K_5) \textit{ е вярно поне едно от} \\ \textit{неравенствата } |A_1(v_i) \cap V(X)| > \tfrac{1}{2}|V(X)|, \\ \textit{където } X = C_{2p+1}, C_{2q+1}, C_{2r+1}, C_{2p+1}. \end{gathered} \tag{9.47}$$

Съгласно (9.46) можем да предположим, че

$$A_3(v_1) = V(C_{2r+1}) \cup V(C_{2s+1}).$$

Понеже няма едноцветни 3-клики, от последното равенство следва, че

$$E(C_{2r+1} + C_{2s+1}) \subseteq E_1 \cup E_2.$$

Съгласно лема 9.1 можем да предположим още, че

$$E(C_{2r+1}) \subseteq E_1 \text{ и } E(C_{2s+1}) \subseteq E_1. \tag{9.48}$$

Понеже няма едноцветни 3-клики, от (9.48) следва, че

$$|A_1(v_i) \cap V(C_{2r+1})| < r+1 \text{ и } |A_1(v_i) \cap V(C_{2s+1})| < s+1,\ i = 1,2,3,4,5. \tag{9.49}$$

От (9.47) и (9.49) правим извода, че за всяко $i = 1, 2, 3, 4, 5$ е вярно едно от неравенствата

$$|A_1(v_i) \cap V(C_{2p+1})| \geq p+1, \ \ |A_1(v_i) \cap V(C_{2q+1})| \geq q+1.$$

Следователно съществуват $a, b, c \in V(K_5)$, за които е изпълнено едното от тези две неравенства. Нека, например,

$$|A_1(a) \cap V(C_{2p+1})| \geq p+1, \ |A_1(b) \cap V(C_{2p+1})| \geq p+1,$$
$$|A_1(c) \cap V(C_{2p+1})| \geq p+1.$$

Понеже няма едноцветна 3-клика от (9.44) следва, че непременно едно от ребрата на 3-кликата $[a, b, c]$ е от първия цвят. Без ограничение на общността можем да предположим, че $[a, b] \in E_1$. От неравенствата

$$|A_1(a) \cap V(C_{2p+1})| \geq p+1 \ \text{ и } \ |A_1(b) \cap V(C_{2p+1})| \geq p+1$$

следва, че има връх $w \in A_1(a) \cap A_1(b)$. Ясно е, че $[a, b, w]$ е едноцветна 3-клика от първия цвят. С това противоречие Теорема 9.13 е доказана.

Теорема 9.13 е публикувана в [N18].

Тъй като $L_5(1, 1, 1, 1) = K_{17}$ и $L_5(1, 1, 1, 2) = K_{14} + C_5$, Теорема 9.13 е обобщение на (9.18) и (9.19). От (9.19) и Теорема 9.4 следва, че

$$F_e(3, 3, 3, ; 17) = 19, \quad \text{[L1]}.$$

Теорема 9.13 ни дава възможност да пресметнем още няколко от числата $F_e(3, 3, 3; q)$.

Следствие 9.3.

$$F_e(3, 3, 3; 16) = 21, \ \text{[N12]}.$$

Доказателство. От Теорема 9.13 имаме

$$L_5(1, 1, 2, 2) = K_{11} + C_5 + C_5 \xrightarrow{e} (3, 3, 3).$$

От Теорема 9.10 получаваме $F_e(3, 3, 3; 16) = 21$.

Този резултат е публикуван в [N8].

Следствие 9.4.

$$F_e(3, 3, 3; 15) = 23.$$

Доказателство. Съгласно Теорема 9.13 имаме

$$L_5(1, 2, 2, 2,) = K_8 + C_5 + C_5 + C_5 \xrightarrow{e} (3, 3, 3).$$

От Теорема 9.11 (б) следва, че $F_e(3, 3, 3; 15) = 23$.

Този резултат е публикуван в [N17].

Следствие 9.5.

$$F_e(3, 3, 3; 14) = 25.$$

Доказателство. Съгласно Теорема 9.13 имаме

$$L_5(2,2,2,2) = K_5 + C_5 + C_5 + C_5 + C_5 \xrightarrow{e} (3,3,3).$$

От Теорема 9.12 (б) следва $F_e(3,3,3;14) = 25$.

Този резултат е публикуван в [N18].

Следствие 9.6. *Нека H_i, $i = 1,2,3,4$, са графи такива, че $\chi(H_i) \geq 3$. Тогава*

$$K_5 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4 \xrightarrow{e} (3,3,3).$$

Доказателство. Съгласно (5.6) всеки от графите H_i съдържа цикъл с нечетна дължина. Следователно $K_5 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4$ съдържа като подграф граф от вида $L_5(p,q,r,s)$. Поради това от Теорема 9.13 следва, че

$$K_5 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4 \xrightarrow{e} (3,3,3).$$

Накрая на този пункт ще докажем, едно уточнение на теорема 9.13.

Теорема 9.14. *За произволни естествени числа p,q,r и s графът $L_5(p,q,r,s)$ е критичен ребрен $(3,3,3)$-граф в смисъл, че всеки собствен подграф на $L_5(p,q,r,s)$ не е ребрен $(3,3,3)$-граф.*

Доказателство. Тъй като $L_5(p,q,r,s)$ е свързан граф, всеки собствен подграф се съдържа в един от подграфите

$$L_5(p,q,r,s) - e, \;\; e \in E(L_5(p,q,r,s)).$$

Поради това достатъчно е да докажем, че

$$L_5(p,q,r,s) - e \overset{e}{\nrightarrow} (3,3,3), \;\; \forall\, e \in E(L_5(p,q,r,s)).$$

Ще използваме широко известния факт, че ако G_1 е ребрено-критичен $\chi(G_1)$-хроматичен граф (виж Определение 5.1) и G_2 е ребрено-критичен $\chi(G_2)$-хроматичен граф, тогава $G_1 + G_2$ е ребрено-критичен $(\chi(G_1) + \chi(G_2))$-хроматичен граф.

Понеже K_5 е ребрено-критичен 5-хроматичен граф и всеки цикъл с нечетна дължина е ребрено-критичен 3-хроматичен граф, следва че $\chi(L_5(p,q,r,s))$ е ребрено-критичен 17-хроматичен граф, което означава, че

$$\chi(L_5(p,q,r,s) - e) < 17, \;\; \forall\, e \in E(L_5(p,q,r,s)).$$

От Теорема 9.3 и $R(3,3,3) = 17$ следва, че

$$L_5(p,q,r,s) - e \overset{e}{\nrightarrow} (3,3,3), \;\; \forall\, e \in E(L_5(p,q,r,s)),$$

с което Теорема 9.14 е доказана.

ГЛАВА 10

ОБОБЩЕНИ r-ХРОМАТИЧНИ ГРАФИ.

10.1. Уводни бележки.

Ще припомним, че G е r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$, ако

$$V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

където V_i, $i = 1, \ldots, r$ са независими множества. Ако всеки два върха, които принадлежат на различни части са съседни, тогава G се нарича пълен r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$ и се бележи с $K(p_1, \ldots, p_r)$, където $p_i = |V_i|$, $i = 1, \ldots, r$. Ясно е, че

$$K(p_1, \ldots, p_r) = \overline{K}_{p_1} + \cdots + \overline{K}_{p_r}.$$

Очевидно е вярно следното:

Твърдение 10.1. *Нека G е r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$ и $p_i = |V_i|$, $i = 1, \ldots, r$. Тогава:*

(а) $e(G) \leq e(K(p_1, \ldots, p_r))$;

(б) *Равенство в (а) е възможно само когато $G = K(p_1, \ldots, p_r)$.*

Тъй като очевидно

$$e(K(p_1, \ldots, p_r)) = \sum_{1 \leq i < j \leq r} p_i p_j, \tag{10.1}$$

то неравенството (а) дава оценка отгоре за $e(G)$ чрез числата $p_i = |V_i|$, $i = 1, \ldots, r$.

Нека G е n-върхов пълен r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$ и $p_i = |V_i|$, $i = 1, \ldots, r$. Ако $|p_i - p_j| \leq 1$, $\forall\, i, j$, тогава казваме, че G е r-хроматичен n-върхов граф на Туран. Ако $n = rq + \nu$, $0 \leq \nu \leq r - 1$, тогава от $|p_i - p_j| \leq 1$ следва, че ν от частите V_i се състоят от $\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil = q + 1$ върха, а останалите $r - \nu$ части имат $\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor = q$ върха. Следователно, (с точност до изоморфизъм) r-хроматичният n-върхов граф на Turan е определен еднозначно. По-нататък този граф ще бележим с $T_r(n)$. От направените разсъждения става ясно, че

$$T_r(n) = \underbrace{\overline{K}_{q+1} + \cdots + \overline{K}_{q+1}}_{\nu} + \underbrace{\overline{K}_q + \cdots + \overline{K}_q}_{r-\nu}.$$

От това равенство непосредствено се пресмята, че

$$e(T_r(n)) = \frac{(n^2 - \nu^2)(r-1)}{2r} + \binom{\nu}{2}. \tag{10.2}$$

От (10.2) след елементарни преобразувания получаваме

$$e(T_r(n)) = \frac{n^2(r-1)}{2r} - \frac{\nu(r-\nu)}{2r}. \tag{10.3}$$

От (10.3) става ясно, че

Твърдение 10.2. *Вярно е неравенството*

$$e(T_r(n)) \leq \frac{n^2(r-1)}{2r},$$

и равенство се достига само когато $n \equiv 0 \pmod r$.

Следващата лема е широко известна. За пълнота на изложението ще я докажем.

Лема 10.1. *Нека* $p_1, \dots, p_r$ *са неотрицателни цели числа и нека* $n = p_1 + \cdots + p_r$. *Тогава*

(а) $e(K(p_1, \dots, p_r)) \leq (T_r(n))$;

(б) *Равенство в (а) се достига тогава и само тогава, когато* $K(p_1, \dots, p_r) = T_r(n)$, *т.е. когато* $|p_i - p_j| \leq 1$, $\forall\, i, j$.

Доказателство. Да допуснем, че

$$\max\{p_1, \dots, p_r\} - \min\{p_1, \dots, p_r\} \geq 2$$

и нека, например $p_1 - p_2 \geq 2$. От (10.1) получаваме

$$e(K(p_1 - 1, p_2 + 1, p_3, \dots, p_r)) - e(K(p_1, \dots, p_r)) = p_1 - p_2 - 1.$$

Понеже $p_1 - p_2 - 1 > 0$, от последното равенство получаваме

$$e(K(p_1 - 1, p_2 + 1, p_3, \dots, p_r)) > e(K(p_1, \dots, p_r)).$$

С това разсъждение доказахме, че $e(K(p_1, \dots, p_r))$ е най-голямо само тогава, когато $|p_i - p_j| \leq 1$, $\forall\, i, j$, т.е. когато $K(p_1, \dots, p_r) = T_r(n)$.

Лема 10.1 е доказана.

Нека $2 \leq r \leq n$ и $V_1, \dots, V_{r-1}$ са частите на $(r-1)$-хроматичния граф $T_{r-1}(n)$. Тогава $T_{r-1}(n)$ е r-хроматичен граф с части $V_1, \dots, V_{r-1}$, $\emptyset$. Понеже $r \leq n$, някое от множествата V_i има поне два елемента. Поради това $T_{r-1}(n) \neq T_r(n)$ и от Лема 9.1 следва, че

$$e(T_{r-1}(n)) < e(T_r(n)), \quad \text{ако } 2 \leq r \leq n. \tag{10.4}$$

От твърдение 10.1 и Лема 10.1 по очевиден начин получаваме:

Твърдение 10.3. *Нека* G *е* n*-върхов* r*-хроматичен граф с части* $V_1, \dots, V_r$. *Тогава:*

(а) $e(G) \leq e(T_r(n))$;

(б) *равенство в (а) е възможно само тогава, когато* G *е* r*-хроматичният граф на Turan* $T_r(n)$ *с части* $V_1, \dots, V_r$.

През 1941 година в [T2] *P. Turan* обобщава Твърдение 10.3 по следния начин:

Теорема на Turan. *Нека* G *е* n*-върхов граф и* $cl(G) \leq r$. *Тогава:*

(а) $e(G) \leq e(T_r(n))$;

(б) $e(G) = e(T_r(n))$ *само когато* $G = T_r(n)$.

Теоремата на Turan обобщава Твърдение 10.2, понеже r-хроматичните графи не съдържат $(r+1)$-клики. Тъй като има графи G с $cl(G) \le r$, които не са r-хроматични, Теоремата на Turan съществено обобщава Твърдение 10.2. В тази глава ще обобщим Теоремата на Turan за още по-широк клас от графи. За тази цел ще обобщим r-хроматичните графи. Преди всичко ще дефинираме важното за по-нататък понятие δ-множество.

Определение 10.1. *Нека G е граф и $V \subseteq V(G)$. Казваме, че V е δ-множество в графа G, ако*

$$d(v) \le |V(G)| - |V|, \ \ \forall\, v \in V.$$

Пример 10.1. *Всяко независимо множество V от върхове на графа G е δ-множество, защото $\Gamma(v) \subseteq V(G)\backslash V$.*

Пример 10.2. *Ако $W \subseteq V(G)$ и $|W| \ge \max\{d(w),\ v \in V(G)\}$, тогава $V = V(G)\backslash W$ е δ-множество, защото*

$$d(v) \le \max\{d(v),\ v \in V(G)\} \le |W|.$$

Пример 10.3. *Нека $cl(G) = s$.*

Измежду всички подмножества на $V(G)$, които не съдържат s-клики, избираме множеството W така че да има най-много върхове. Тогава $V(G)\backslash W$ е δ-множество. Наистина, нека v е връх с максимална степен на G. Понеже $cl(G) = s$, $\Gamma(v)$ не съдържа s-клика. Следователно, $d(v) = |\Gamma(v)| \le |W|$. От Пример 10.2 правим извода, че $V(G)\backslash W$ е δ-множество.

Вече можем да дефинираме основното за тази глава понятие.

Определение 10.2. *Казваме, че графът G е обобщен r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$, ако*

$$V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_r, \ \ V_i \cap V_j = \emptyset, \ \ i \neq j$$

и всяко от множествата V_i, $i = 1, \ldots, r$ е δ-множество в G. Ако

$$d(v) = |V(G)| - |V_i|, \ \ \forall\, v \in V_i, \ \ i = 1, \ldots, r$$

тогава казваме, че графът G е обобщен пълен r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$.

Определение 10.3. *Нека G е n-върхов граф. Казваме, че G е обобщен r-хроматичен n-върхов граф на Turan с части $V_1, \ldots, V_r$, ако G е обобщен пълен r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$ и $|p_i - p_j| \le 1$, $\forall\, i, j$, където $p_i = |V_i|$, $i = 1, \ldots, r$.*

За разлика от графа на Turan $T_r(n)$, обобщените r-хроматични n-върхови графи на Turan не са определени еднозначно от r и n и представляват клас от графи (при фиксирани r и n).

Пример 10.4. *Нека G_1 и G_2 са две дизюнктни копия на K_n и $V(G_i) = \{u_1^i, \ldots, u_n^i\}$, $i = 1, 2$. Дефинираме графа G с равенствата*

$$V(G) = V(G_1) \cup V(G_2), \ \ E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{[u_i^1, u_i^2],\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Ясно е, че G е обобщен 2-хроматичен $2n$-върхов граф на Turan с части $V(G_1)$ и $V(G_2)$ и $G \neq T_2(2n)$.

Важни примери на обобщени r-хроматични графи дава следното:

Твърдение 10.4. *Нека G е n-върхов граф и r е естествено число, $1 \leq r \leq n$ и*

$$d(v) \leq \frac{n(r-1)}{r}, \quad \forall\, v \in V(G).$$

Тогава G е обобщен r-хроматичен граф.

Доказателство. Нека

$$V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

е r-разлагане на G такова, че $\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \leq |V_i| \leq \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$, $i = 1, \ldots, r$. Ясно е, че такова r-разлагане съществува. Тъй като

$$d(v) \leq \frac{n(r-1)}{r} = n - \frac{n}{r}, \quad \forall\, v \in V(G)$$

имаме, че $d(v) \leq n - \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil \leq n - \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$. Поради това $d(v) \leq n - |V_i|$, $i = 1, \ldots, r$, което означава, че G е обобщен r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$.

Ще ни е необходима следната:

Лема 10.2. *Нека G е граф и $V(G) = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, където A е δ-множество в G. Ако подграфът $G[B]$ е обобщен $(r-1)$-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_{r-1}$, тогава G е обобщен r-хроматичен граф с части $A, V_1, \ldots, V_{r-1}$.*

Доказателство. Понеже A е δ-множество в G, остава да проверим, че множествата V_i, $i = 1, \ldots, r-1$ (които са δ-множества в $G[B]$) са δ-множества в G. Полагаме $G[B] = H$. Нека $v \in V_i$. Очевидно е, че

$$\Gamma_G(v) \subseteq \Gamma_H(v) \cup A.$$

Следователно, $d_G(v) \leq d_H(v) + |A|$. Понеже V_i е δ-множество в H имаме

$$d_H(v) \leq |B| - |V_i|.$$

От последните две неравенства получаваме

$$d_G(v) \leq |B| + |A| - |V_i| = |V(G)| - |V_i|,$$

т.е. V_i е δ-множество в G.

Лема 10.2 е доказана.

Както отбелязахме и по-горе, от $cl(G) = r$ не следва, че G е r-хроматичен граф. Вярно е обаче, че:

Твърдение 10.5. *Нека G е граф и $cl(G) = r$. Тогава G е обобщен r-хроматичен граф.*

Доказателство. Ще докажем това твърдение по индукция относно r с база $r = 1$. От $cl(G) = 1$ следва, че $E(G) = \emptyset$ и поради това G е 1-хроматичен граф.

Нека $r \geq 2$ и $v \in V(G)$ е връх с максимални степени на G. Тогава (виж Пример 10.2) $V(G) \backslash \Gamma(v)$ е δ-множество. Понеже $cl(G) = r$ в $\Gamma(v)$ няма r-клики. Съгласно индуктивната хипотеза $G[\Gamma(v)]$ е обобщен $(r-1)$-хроматичен граф. От Лема 10.2 следва, че G е обобщен r-хроматичен граф.

Забележка 10.1. *В* [E6] *P. Erdős доказва, че ако $cl(G) = r$, тогава съществува r-хроматичен граф H и биективно изображение*

$$V(G) \xrightarrow{\varphi} V(H),$$

такова че $d_G(v) \leq d_H(\varphi(v))$, $\forall\, v \in V(G)$. Лесно се съобразява, че този резултат на Erdős и твърдение 10.4 са еквивалентни. Поради това, първите обобщени r-хроматични графи възникват неявно в [E6] *през 1970 година. Следващите обобщени r-хроматични графи се появяват (също неявно) в работите* [K17], [K20] *и* [N41]. *В следващите пунктове на тази глава ще разгледаме подробно резултатите от тези работи.*

Ще разширим Твърдение 10.1 по следния начин:

Теорема 10.1. *Нека графът G е обобщен r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$, където $|V_i| = p_i$, $i = 1, \ldots, r$. Тогава:*

(а) $e(G) \leq e(K(p_1, \ldots, p_r))$;

(б) $e(G) = e(K(p_1, \ldots, p_r))$ *само когато графът G е обобщен пълен r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$.*

Доказателство. Нека $|V(G)| = n$. Понеже V_i, $i = 1, \ldots, r$, са δ-множества в G, имаме

$$d(v) \leq n - p_i, \quad \forall\, v \in V_i, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{10.5}$$

Понеже $V_1, \ldots, V_r$ са дизюнктни множества от очевидното равенство

$$2e(G) = \sum_{v \in V(G)} d(v)$$

получаваме

$$2e(G) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{v \in V_i} d(v).$$

Това равенство, заедно с (10.5) и (10.1) ни дават, че

$$2e(G) \leq 2e(K(p_1, \ldots, p_r)),$$

с което неравенство (а) е доказано. Равенство в (а) имаме тогава и само тогава, когато

$$d(v) = n - p_i, \;\; \forall\, v \in V, \;\; i = 1, \ldots, r,$$

т.е когато G е обобщен пълен r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$. Теорема 10.1 е доказана.

Теорема 10.1 е публикувана в [K35].

С помощта на Теорема 10.1 ще получим следното разширение на теоремата на Turan:

Теорема 10.2. *Нека графът G е обобщен r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$ и $|V(G)| = n$. Тогава:*

(а) $e(G) \ \le \ e(T_r(n))$;

(б) $e(G) = e(T_r(n))$ *само когато графът G е обобщен r-хроматичен граф на Turan с части $V_1, \ldots, V_r$.*

Доказателство. Нека $p_i = |V_i|$, $i = 1, \ldots, r$. Съгласно Теорема 10.1 имаме

$$e(G) \le e(K(p_1, \ldots, p_r)).$$

От това неравенство и Лема 10.1 (а) следва $e(G) \le e(T_r(n))$. Нека $e(G) = e(T_r(n))$. Тогава

$$e(G) = e(K(p_1, \ldots, p_r)) \ \text{ и } \ e(K(p_1, \ldots, p_r)) = e(T_r(n)).$$

От първото равенство и Теорема 10.1 (б) следва, че G е обобщен пълен r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$. От второто равенство и Лема 10.1 (б) следва $|p_i - p_j| \le 1$, $\forall\, i, j$. Следователно G е обобщен r-хроматичен граф на Туран с части $V_1, \ldots, V_r$. Теорема 10.2 е доказана.

Теорема 10.2 е публикувана в [K35].

Пример 10.5. *От $e(G) \le e(T_r(n))$ не следва, че графът G е обобщен r-хроматичен граф.*

Нека $G = K_3 + C_5$. Очевидно $e(G) = 23 < e(T_4(8))$. Ще докажем, че G не е обобщен 4-хроматичен граф. Да допуснем противното и нека G е обобщен 4-хроматичен граф с части V_1, V_2, V_3, V_4. Нека $V(K_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$. Ако $v_i \in V_j$, тогава от $d(v_i) \le 8 - |V_j|$ и $d(v_i) = 7$ следва $|V_j| = 1$, т.е. $V_j = \{v_i\}$. Поради това можем да предположим, че $V_i = \{v_i\}$, $i = 1, 2, 3$ и $V_4 = V(C_5)$. Нека $v \in V(C_5)$. Тогава $d(v) = 5 > 8 - |V_4| = 3$, което е противоречие, защото предполагаме, че V_4 е δ-множество.

Забележка 10.2. *Съгласно Твърдение 10.5, Теорема 10.2 (а) обобщава твърдението (а) на Теоремата на Turan. Екстремалните графи в Теорема 10.2 (б) са класа на обобщените r-хроматични графи на Turan, докато в Теоремата на Turan (б) има единствен екстремален граф.*

10.2. Оценка отгоре за броя на ребрата на граф с помощта на δ-множество.

Със следващата теорема ще покажем, че всяко δ-множество в даден граф дава възможност да се получи оценка отгоре за броя на ребрата му.

Теорема 10.3. *Нека A е δ-множество в n-върховия граф G и нека $B = V(G)\backslash A$. Тогава:*

(а) $e(G) \le s(n-s) + e(G[B])$, *където* $s = |A|$;

(б) *Равенство в (а) се достига само когато A е независимо множество и всеки връх на A е съседен на всеки връх на B, т.е. когато $G = \overline{K}_s + G[B]$.*

Доказателство. Нека l е броят на ребрата на G, които имат поне един връх в A. Тогава

$$e(G) = l + e(G[B]). \tag{10.6}$$

Ясно е, че

$$l \le \sum_{v\in A} d(v). \tag{10.7}$$

Равенство в (10.7) се достига само когато A е независимо множество. Понеже A е δ-множество

$$d(v) \le |B| = n - s, \ \ \forall\, v \in A. \tag{10.8}$$

От (10.6), (10.7) и (10.8) получаваме неравенството (а). Нека

$$e(G) = s(n-s) + e(G[B]).$$

Тогава в (10.7) и във всяко от неравенствата (10.8) имаме равенство. От равенството в (10.7) следва, че A е независимо множество. От този факт и равенствата в (10.8) става ясно, че всеки връх на A е съседен на всеки връх на B. Поради това $G = \overline{K}_s + G[B]$. Теорема 10.3 е доказана.

Специалният случай на Теорема 10.3, когато $B = \Gamma(v)$, където v е връх с максимална степен в G, е публикуван през 1976 година в [K17] и [K20]. Специалният случай, когато $|B| \ge \Gamma(v)$, където v е връх с максимална степен, е публикуван в [N41]. Тези частни случаи на Теорема 10.3 са помощни твърдения в съответните статии. Трети частен случай, съответстващ на Пример 10.3 е междинен резултат в доказателството на основната теорема в [N38]. В окончателен вариант теорема 10.3 е публикувана в [K30].

Ще извлечем две следствия от Теорема 10.3.

Следствие 10.1. *Нека A е δ-множество в n-върховия граф G и нека $B = V(G)\backslash A$. Ако $e(G[B]) \le e(T_{r-1}(n-s))$, където $s = |A|$, тогава:*

(а) $e(G) \le e(T_r(n))$;

(б) *Равенство в (а) се достига тогава и само тогава, когато*

$$G = \overline{K}_s + G[B],$$

където $e(G[B]) = e(T_{r-1}(n-s))$ *и* $s = \left\lfloor \dfrac{n}{r} \right\rfloor$ *или* $s = \left\lceil \dfrac{n}{r} \right\rceil$.

Доказателство. От $e(G[B]) \le e(T_{r-1}(n-s))$ и Теорема 10.3 (а) следва, че

$$e(G) \le s(n-s) + e(T_{r-1}(n-s)). \tag{10.9}$$

От Теорема 10.3 (б) следва, че равенство в (10.9) имаме само когато

$$G = \overline{K}_s + G[B]$$

и $e(G[B]) = e(T_{r-1}(n-s))$.

Разглеждаме графа $\overline{K}_s + T_{r-1}(n-s)$. Ясно е, че този граф е r-хроматичен. Поради това, от Твърдение 10.3 получаваме, че

$$e(\overline{K}_s + T_{r-1}(n-s)) \le e(T_r(n)) \tag{10.10}$$

и равенство в (10.10) имаме само когато

$$\overline{K}_s + T_{r-1}(n-s) = T_r(n),$$

т.е. когато $s = \left\lfloor \dfrac{n}{r} \right\rfloor$ или $s = \left\lceil \dfrac{n}{r} \right\rceil$. Тъй като

$$e(\overline{K}_s + T_{r-1}(n-s)) = (n-s)s + e(T_{r-1}(n-s)),$$

от (10.9) и (10.10) следва неравенството (а). Нека $e(G) = e(T_r(n))$. Тогава имаме равенства в (10.9) и (10.10). Съгласно Теорема 10.3 (б) от равенството в (10.9) следва $G = \overline{K}_s + G[B]$ и $e(G[B]) = e(T_{r-1}(n-s))$.
От равенството в (10.10) следва, че и Твърдението 10.3

$$\overline{K}_s + T_{r-1}(n-s) = T_r(n),$$

откъдето $s = \left\lfloor \dfrac{n}{r} \right\rfloor$ или $s = \left\lceil \dfrac{n}{r} \right\rceil$. Следствие 10.1 е доказано.

Следствие 10.1 е публикувано в [K30].

Следствие 10.2. *Нека v е връх с максимална степен d на n-върховия граф G и $G_v = G[\Gamma(v)]$. Ако $e(G_v) \le e(T_{r-1}(d))$, тогава:*

(а) $e(G) \le e(T_r(n))$;

(б) *Равенство в (а) имаме само когато*

$$G = \overline{K}_{n-d} + G_v,\ e(G_v) = e(T_{r-1}(d)) \text{ и } d = n - \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor.$$

Доказателство. Понеже $V(G) \backslash \Gamma(v)$ е δ-множество (виж Пример 10.2) неравенството (а) следва от Следствие 10.1 (а). Ако $e(G) = e(T_r(n))$, тогава от Следствие 10.1 (б) получаваме

$$G = \overline{K}_{n-d} + G_v,\ e(G_v) = e(T_{r-1}(d)) \text{ и } \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor \le n - d \le \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil.$$

Остава да изясним, че $n - d = \left\lfloor \dfrac{n}{r} \right\rfloor$. Ако $n \equiv 0 \pmod r$, това е ясно. Нека $n \not\equiv 0 \pmod r$. Да допуснем, че $n - d \ne \left\lfloor \dfrac{n}{r} \right\rfloor$. Тогава $n - d = \left\lceil \dfrac{n}{r} \right\rceil$, т.е.

$d = n - \left\lceil \dfrac{n}{r} \right\rceil$. Тъй като $n - \left\lceil \dfrac{n}{r} \right\rceil$ е минималната степен на върховете на $T_r(n)$, стигаме до извода, че $e(G) < e(T_r(n))$, което е противоречие. Следствие 10.2 е доказано.

Следствие 10.2 е публикувано в [K30]. Следствие 10.2 (a) е междинен резултат в доказателството на основната теорема в [K18] от 1977 година. През 1983 година A. Bondy повтаря Следствие 10.2 (a) в [B12]. Цялото Следствие 10.2 е повторено от B. Bollobas през 1999 година в [B6] като Теорема 2, а в монографията му [B7]– като Теорема 5. Ще отбележим още, че в обзорната статия [B11], тези резултати отново се цитират като резултати на Bondy и Bollobas (виж стр. 791). Това е много странно, тъй като единия от авторите на [B11] е ученик на проф. Н. Хаджииванов и знае, че тези резултати са получени съвместно от Н. Хаджииванов и Н. Ненов. Тези обстоятелства наложиха публикуването на критични бележки в [K30] на страница 237 и критичното писмо [K39]. По-подобно претенциите на B. Bollobas и A. Bondy, свързани със Следствие 10.2, са отхвърлени в края на статията ни [K35].

10.3. α-редици в графи.

Определение 10.4. *Нека G е граф и $v_1, \dots, v_r \in V(G)$. Казваме, че редицата $v_1, \dots, v_r$ е наследствена, ако*

$$v_i \in \Gamma_G(v_1, \dots, v_{i-1}), \quad i = 2, \dots, r. \tag{10.11}$$

Ясно е, че всяка наследствена редица е клика. Наследствените редици възникват в различните алгоритми за намиране на максимални клики в граф (виж например [Z4], страница 65).

Определение 10.5. *Нека $v_1, \dots, v_r$ е наследствена редица от върхове в графа G. Дефинираме*

$$V_1 = V(G) \backslash \Gamma_G(v_1),\ V_i = \Gamma_G(v_1, \dots, v_{i-1}) \backslash \Gamma_G(v_i),\ i = 2, \dots, r-1$$

$$V_r = \Gamma_G(v_1, \dots, v_{r-1}).$$

Редицата от подмножества $V_1, \dots, V_r$ се нарича разслоение на $V(G)$, породено от наследствената редица $v_1, \dots, v_r$. Множеството V_i се нарича i-ти слой на това разслоение.

Твърдение 10.6. *Нека G е граф, $v_1, \dots, v_r \in V(G)$ е наследствена редица в G и $V_1, \dots, V_r$ е разслоението на $V(G)$ породено от тази редица. Тогава:*

(а) $v_i \in V_i,\ \ i = 1, \dots, v_r$;

(б) $V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset,\ \ i \neq j$.

Доказателство. Полагаме $\Gamma_0 = V(G)$ и $\Gamma_{i-1} = \Gamma_G(v_1, \dots, v_{i-1})$, $2 \leq i \leq r$. По определение $V_r = \Gamma_{r-1}$. Поради това $v_r \in V_r$. Нека $1 \leq i \leq r-1$. Тъй като $v_i \in \Gamma_{i-1}$ и $v_i \notin \Gamma_G(v_i)$ имаме $v_i \in \Gamma_{i-1} \backslash \Gamma_G(v_i)$. С това (а) е доказано.

Нека v е произволен връх на G. Ако $v \in V_r$ и $i < r$, тогава $v \in \Gamma_{i-1}$ и $v \in \Gamma_G(v_i)$. Следователно, $v \notin V_i = \Gamma_{i-1} \backslash \Gamma_G(v_i)$, $i < r$. Нека $v \notin V_r$ и i е най-малкото естествено число, за което v и v_i не са съседни. Тогава $v \in \Gamma_{i-1}$ и $v \notin \Gamma_G(v_i)$, откъдето следва $v \in V_i$. Ако $j < i$, тогава $v \in \Gamma_{j-1}$ и $v \in \Gamma_G(v_j)$. Поради това $v \notin \Gamma_{j-1} \backslash \Gamma_G(v_j) = V_j$. Ако $j > i$, тогава $v \notin \Gamma_{j-1}$, понеже v и v_i не са съседни. Следователно $v \notin \Gamma_{j-1} \backslash \Gamma_G(v_j) = V_j$. Доказахме, че всеки връх $v \in V(G)$ принадлежи на точно едно от множествата V_i, $i = 1, \dots, r$, с което твърдението (б) е доказано.

По-нататък нашата цел е да изберем наследствена редица $v_1, \dots, v_r$ така, че слоевете на разслоението, породено от тази редица, да бъдат δ-множества.

Определение 10.6. *Нека G е граф и $v_1, \dots, v_r \in V(G)$. Казваме, че редицата $v_1, \dots, v_r$ е α-редица на графа G, ако тя удовлетворява следните условия:*

(i) *$v_1, \dots, v_r$ е наследствена редица в G;*

(ii) *v_1 е връх с максимална степен в G;*

(iii) *Ако $2 \leq i \leq r$, тогава v_i има максимална степен в графа $G[\Gamma_G(v_1, \dots, v_{i-1})]$.*

В еквивалентни форми α-редиците се срещат в някои алгоритми за намиране на максимално независими множества в граф (виж например [H6]). В екстремалната теория на графите α-редиците са въведени през 1976 година в съвместните с Н. Хаджииванов работи [K17] и [K20]. Много по-късно α-редиците са преоткрити в [B8] под името *"hammer algorithm"*, а в [B6], [B7] и [B12] – под името *"degree-greedy algorithm"*. Съвсем скоро в [Z2], α-редиците са наречени *"s–stable algorithm"*. В нито една от тези работи не се споменават нашите статии [K17] и [K20]. Разслоението на върховете на граф, породено от дадени наследствени редици, се дефинира за пръв път в [K17] и [K20].

За α-редиците ще докажем следната:

Теорема 10.4. *Нека $v_1, \dots, v_r$ е α-редица в n-върховия граф G и $V_1, \dots, V_r$ е разслоението, породено от тази редица, където $p_i = |V_i|$, $i = 1, \dots, r$. Ако V_r е δ-множество в G, тогава:*

(а) *G е обобщен r-хроматичен граф с части $V_1, \dots, V_r$;*

(б) *$e(G) \le e(K(p_1, \dots, p_r))$ и равенство се достига само когато G е обобщен пълен r-хроматичен граф;*

(в) *$e(G) \le (T_r(n))$ и равенство се достига само когато G е обобщен r-хроматичен граф на Turan.*

Доказателство. Тъй като V_r е δ-множество, остава да докажем, че всеки от останалите слоеве V_i, $1 \le i \le r-1$, е δ-множество. Първият слой $V_1 = V(G) \backslash \Gamma_G(v_1)$ е δ-множество съгласно Пример 10.2. Нека $2 \le i \le r-1$. Полагаме $H = G[\Gamma_G(v_1, \dots, v_{i-1})]$. Ясно е, че

$$\Gamma_G(v) \subset \Gamma_H(v) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{i-1} V_j \Big), \ \ \forall\, v \in V_i.$$

Следователно

$$d_G(v) \le d_H(v) + \sum_{j=1}^{i-1} p_j, \ \ \forall\, v \in V_i. \tag{10.12}$$

Да забележим, че е вярно равенството

$$\Gamma_H(v_i) = \bigcup_{j=i+1}^{r} V_j,$$

от където намираме, че

$$d_H(v_i) = p_{i+1} + \cdots + p_r. \tag{10.13}$$

Съгласно дефиницията на α-редици имаме

$$d_H(v) \le d_H(v_i), \ \ \forall\, v \in V(H).$$

Поради това от (10.13) следва, че

$$d_H(v) \le p_{i+1} + \cdots + p_r, \ \ \forall\, v \in V_i.$$

От последното неравенство и (10.2) се вижда, че

$$d_G(v) \leq p_1 + \cdots + p_{i-1} + p_{i+1} + \cdots + p_r = n - p_i, \ \ \forall\, v \in V_i,$$

което означава, че V_i е δ-множество. С това доказахме, че G е обобщен r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$, т.е. доказахме (а). Твърдението (б) следва от Теорема 10.1, а твърдението (в), от Теорема 10.2.

Теорема 10.4 е публикувана в [K40].

За даден граф G дефинираме числото $\varphi(G)$ като най-малкото естествено число r, за което съществува r-членна редица $v_1, \ldots, v_r$ такава, че $\Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1})$ е δ-множество.

Следствие 10.3. *Нека G е граф, който не е обобщен r-хроматичен граф. Тогава $\varphi(G) \geq r + 1$.*

Доказателство. Нека $\varphi(G) = s$ и $v_1, \ldots, v_s$ е α-редица такава, че $\Gamma_G(v_1, \ldots, v_{s-1})$ е δ-множество. Съгласно Теорема 10.4 графът G е обобщен s-хроматичен граф. Понеже G не е обобщен r-хроматичен граф $s > r$.

Следствие 10.4. *Нека G е n-върхов граф и $e(G) \geq e(T_r(n))$, $1 \leq r \leq n$. Тогава:*

(а) $\varphi(G) \geq r$;

(б) *Равенството $\varphi(G) = r$ се достига само когато G е обобщен r-хроматичен граф на Turan.*

Доказателство. Нека $\varphi(G) = s$ и $v_1, \ldots, v_s$ е α-редица такава, че $\Gamma_G(v_1, \ldots, v_{s-1})$ е δ-множество. Съгласно Теорема 10.4 (в), $e(G) \leq e(T_s(n))$. И така,

$$e(T_r(n)) \leq e(G) \leq e(T_s(n)).$$

Понеже $r \leq n$, от тези неравенства и (10.4) получаваме $s \geq r$. Ако $r = s$, тогава $e(G) = e(T_s(n)) = e(T_r(n))$. От Теорема 10.4 (в), следва че G е обобщен r-хроматичен граф на Turan.

Следствие 10.4 е публикувано в [K40].

Ако условието $\Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1})$ да е δ-множество в Теорема 10.4 заменим с по-силното условие $\Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1})$ да е независимо множество, тогава е вярна следната:

Теорема 10.5. *Нека G е n-върхов граф и $v_1, \ldots, v_r$ е α-редица в G, която не се съдържа в $(r+1)$-клики на G (или, което е еквивалентно, $\Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1})$ е независимо множество). Нека $V_1, \ldots, V_r$ е разслоението, породено от тази α-редица и $p_i = |V_i|$, $i = 1, \ldots, r$. Тогава*

(а) *графът G е обобщен r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$ и $e(G) \leq e(K(p_1, \ldots, p_r))$;*

(б) *Равенство в (а) е възможно само когато $G = K(p_1, \ldots, p_r)$.*

Доказателство. Полагаме $H = G[\Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1})]$. Понеже $v_1, \ldots, v_r$ не се съдържа в $(r+1)$-клика, $\Gamma_G(v_1, \ldots, v_r) = \emptyset$. Поради това $d_H(v_r) = 0$. От дефиницията на α-редици имаме

$$d_H(v) \leq d_H(v_r), \quad \forall\, v \in V(H).$$

Следователно $d_H(v) = 0$, $\forall\, v \in V(H)$, т.е. $\Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1})$ е независимо множество в графа G. Съгласно Пример 10.1, $\Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1})$ е δ-множество. От Теорема 10.4 (б) получаваме неравенството

$$e(G) \leq e(K(p_1, \ldots, p_r)),$$

с което (а) е доказано.

Преминаваме към доказателството на (б). Нека $e(G) = e(K(p_1, \ldots, p_r))$. Тогава (виж (10.1)) имаме

$$e(G) = p_1(n - p_1) + e(K(p_2, \ldots, p_r)). \tag{10.14}$$

Дефинираме

$$\widetilde{G} = G[\Gamma(v_1)] = G[V_2 \cup \ldots \cup V_r].$$

Преди всичко да забележим, че $v_2, \ldots, v_r$ е α-редица на $\widetilde{G}$ и разслоението, което тя поражда в $\widetilde{G}$ е $V_2, \ldots, V_r$. Понеже $v_1, \ldots, v_r$ не се съдържа в $(r+1)$-клика на G, $v_2, \ldots, v_r$ не се съдържа в r-клика на $\widetilde{G}$. Съгласно (а)

$$e(\widetilde{G}) \leq (K(p_2, \ldots, p_r)). \tag{10.15}$$

Доказателството на (б) ще направим по индукция относно r с база $r = 1$. Ако $r = 1$, тогава $G = \overline{K}_n$ и твърдението е очевидно. Нека $r \geq 2$. Понеже V_1 е δ-множество в G (виж Пример 10.2), от Теорема 10.3 получаваме

$$e(G) \leq p_1(n - p_1) + e(\widetilde{G}) \tag{10.16}$$

и равенство в (10.16) се достига само тогава, когато $G = \overline{K}_{p_1} + \widetilde{G}$. От (10.16), (10.15) и (10.14) стигаме до неравенствата

$$e(G) \leq p_1(n - p_1) + e(\widetilde{G}) \leq p_1(n - p_1) + e(K(p_2, \ldots, p_r)) = e(G).$$

Следователно

$$e(G) = p_1(n - p_1) + e(\widetilde{G})$$

и

$$e(\widetilde{G}) = e(K(p_2, \ldots, p_r)).$$

Съгласно теорема 10.3, от първото равенство имаме

$$G = \overline{K}_{p_1} + \widetilde{G}. \tag{10.17}$$

Тъй като $v_2, \ldots, v_r$ е α-редица в $\widetilde{G}$ и $V_2, \ldots, V_r$ е разслоението на $V(\widetilde{G})$, което тази редица поражда, от второто равенство и индуктивната хипотеза следва, че

$$\widetilde{G} = K(p_2, \ldots, p_r). \tag{10.18}$$

От (10.17) и (10.18) получаваме желаното равенство $G = K(p_1, \ldots, p_r)$, с което Теорема 10.5 е доказана.

Теорема 10.5 (в еквивалентна формулировка) е публикувана в [K20]. В същата еквивалентна формулировка Твърдението (а) е повторено в [H6] и [M4]. В настоящата формулировка Теорема 10.5 е публикувана в [K35].

Следващата теорема съществено обобщава Теоремата на *Turan*.

Теорема 10.6. *Нека $v_1, \ldots, v_r$ е α-редица в графа G, която не се съдържа в $(r+1)$-клика на G. Тогава:*

(а) *$e(G) \le e(T_r(n))$, където $n = |V(G)|$;*

(б) *Равенството $e(G) = e(T_r(n))$ е възможно само в случая когато $G = T_r(n)$.*

Доказателство. Нека $V_1, \ldots, V_r$ е разслоението на $V(G)$, породено от α-редицата $v_1, \ldots, v_r$ и $|V_i| = p_i$, $i = 1, \ldots, r$. От Теорема 10.5 (а) и Лема 10.1 имаме

$$e(G) \le e(K(p_1, \ldots, p_r)) \le e(T_r(n)).$$

Нека $e(G) = e(T_r(n))$. Тогава

$$e(G) = e(K(p_1, \ldots, p_r)) \text{ и } e(K(p_1, \ldots, p_r)) = e(T_r(n)).$$

Съгласно Теорема 10.5 (б), от първото равенство следва

$$G = K(p_1, \ldots, p_r),$$

а съгласно Лема 10.1 (б), от второто равенство следва

$$K(p_1, \ldots, p_r) = T_r(n).$$

Доказахме $G = T_r(n)$, с което доказателството на Теорема 10.6 е завършено.

Теорема 10.6 е публикувана в [K20] (виж Следствие 1, стр, 121). Теорема 10.6 може да се формулира и по следния еквивалентен начин:

Ако G е n-върхов граф и $e(G) \ge e(T_r(n))$, $n \le r$, тогава всяка максимална (в смисъл на включване) α-редица има поне $r+1$ члена, или $G = T_r(n)$.

В тази еквивалентна форма Теорема 10.6 е повторена от B. Bollobas в [B6] (виж Теорема 5, стр, 163) и в монографията [B7] (виж Теорема 6, стр. 109). Това обстоятелство наложи публикуването на критичното писмо [K39].

Ако в един граф има връх с максимална степен, който не се съдържа в $(r+1)$-клика, тогава всяка α-редица с първи член този връх също не се съдържа в $(r+1)$-клика. Поради това от Теорема 10.6 получаваме:

Следствие 10.5. *Нека G е n-върхов граф и $e(G) \ge T_r(n)$, $r \le n$. Тогава всеки връх с максимална степен в G се съдържа в $(r+1)$-клика или $G = T_r(n)$.*

Доказателство. Нека $v_1 \in V(G)$ е връх с максимална степен в G, който не се съдържа в $(r+1)$-клика. От $e(G) \ge e(T_r(n))$ и Следствие 10.4 правим извода, че съществува r-членна α-редица с първи член v_1. Тази α-редица не се съдържа в $(r+1)$-клика и поради това, от Теорема 10.6, следва $e(G) \le e(T_r(n))$. От условието $e(G) \ge e(T_r(n))$ получаваме $e(G) = e(T_r(n))$. От Теорема 10.6 (б) следва $G = T_r(n)$. Следствие 10.5 е доказано.

Следствие 10.5 е публикувано в [K20].

Теорията на α-редиците, която развихме в тази глава, дава възможност да докажем и следния резултат:

Теорема 10.7. *Нека G е n-върхов граф и $e(G) > e(T_r(n))$, $r \ge 2$. Тогава всяка $(r-1)$-членна α-редица на G се съдържа поне в две $(r+1)$-клики или съществува $e \in E(G)$ такова, че $G - e = T_r(n)$.*

Доказателство. Нека $v_1, \ldots, v_{r-1}$ е произволна $(r-1)$-членна α-редица на графа G (такава α-редица съществува съгласно Следствие 10.4). Дефинираме $H = G[\Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1})]$. От Теорема 10.4 (в) и $e(G) > e(T_r(n))$ следва, че $\Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1})$ не е δ-множество. Поради това $e(H) \geq 1$. Ако $e(H) \geq 2$, тогава очевидно $v_1 \ldots, v_{r-1}$ се съдържа в две $(r+1)$-клика. Остава да разгледаме ситуацията, когато $e(H) = 1$. Нека $E(H) = \{[u, w]\}$. Разглеждаме графа $\widetilde{G} = G - [u, w]$. Ясно е, че $v_1 \ldots, v_{r-1}, u$ е α-редица в $\widetilde{G}$, която не се съдържа в $(r+1)$-клика на $\widetilde{G}$. Съгласно теорема 10.6 (а), $e(\widetilde{G}) \leq e(T_r(n))$. От условието $e(G) > e(T_r(n))$ имаме $e(\widetilde{G}) \geq e(T_r(n))$. Следователно $e(\widetilde{G}) = e(T_r(n))$. От Теорема 10.6 (б) стигаме до извода, че $\widetilde{G} = G - [u, w] = T_r(n)$.

Теорема 10.7 е доказана.

10.4. Две теореми за обобщена r-хроматичност на графи.

Нека $v_1, \dots, v_r$ е α-редица в графа G. Разглеждаме подграфите

$$G_1 = G \text{ и } G_i = G[\Gamma_G(v_1, \dots, v_{i-1})], \ \ 2 \le i \le r.$$

Дефинираме

$$d'_i = d_{G_i}(v_i), \quad i = 1, \dots, r$$

и

$$t_G(v_1, \dots, v_r) = d'_1 + \dots + d'_r.$$

От следващите две теореми става ясно, че числото $t_G(v_1, \dots, v_r)$ е важна характеристика на графа G.

Теорема 10.8. *Нека G е n-върхов граф и $v_1, \dots, v_r$ е α-редица в G такава, че за някое s, $1 \le s \le r$ имаме*

$$t_G(v_1, \dots, v_s) \le \frac{n}{r}\left(\binom{r}{2} - \binom{r-s}{2}\right). \tag{10.19}$$

Тогава G е обобщен r-хроматичен граф.

Доказателство. Ще докажем теорема 10.8 по индукция относно s с база $s = 1$. При $s = 1$ от (10.19) следва $d'_1 \le \dfrac{(r-1)n}{r}$. Тъй като $d'_1 = d_G(v_1)$ е максималната степен на графа G имаме

$$d(v) \le \frac{(r-1)n}{r} \quad \forall v \in V(G).$$

Съгласно Твърдение 10.4, G е обобщен r-хроматичен граф. С това базата на индукцията е доказана.

Нека $s \ge 2$ и да предположим, че твърдението е вярно за $s - 1$. Очевидно е, че $v_2, \dots, v_r$ е α-редица в графа $G_1 = G[\Gamma(v_1)]$. Лесно се вижда, че $t_{G_1}(v_2, \dots v_s) = d'_2 + \dots + d'_s$. Ще разгледаме два случая:

Случай 1. $t_{G_1}(v_2, \dots, v_s) \le \dfrac{d'_1}{r-1}\left(\dbinom{r-1}{2} - \dbinom{r-s}{2}\right)$.

Съгласно индуктивната хипотеза G_1 е обобщен $(r-1)$-хроматичен граф. Нека $W_2, \dots, W_r$ са частите на този обобщен $(r-1)$-хроматичен граф. Съгласно Пример 10.2, $W_1 = V(G) \backslash \Gamma(v_1)$ е δ-множество на G. Поради това, от Лема 10.2, следва че G е обобщен r-хроматичен граф с части $W_1, \dots, W_r$.

Случай 2. $t_{G_1}(v_2, \dots, v_s) > \dfrac{d'_1}{r-1}\left(\dbinom{r-1}{2} - \dbinom{r-s}{2}\right)$.

В тази ситуация от (10.19) следва

$$d'_1 + \frac{d'_1}{r-1}\left(\binom{r-1}{2} - \binom{r-s}{2}\right) < \frac{n}{r}\left(\binom{r}{2} - \binom{r-s}{2}\right).$$

След елементарни преобразования от последното неравенство получаваме

$$\frac{d'_1}{r-1}\left(\binom{r}{2} - \binom{r-s}{2}\right) < \frac{n}{r}\left(\binom{r}{2} - \binom{r-s}{2}\right). \tag{10.20}$$

Понеже $2 \le s \le r$, имаме че

$$\left(\binom{r}{2} - \binom{r-s}{2}\right) > 0.$$

Поради това от (10.20) следва, че

$$d_1' \le \frac{n(r-1)}{r}, \quad \forall\, v \in V(G).$$

Съгласно Твърдение 10.4, G е обобщен r-хроматичен граф, с което Теорема 10.8 е доказана.

Теорема 10.8 е публикувана в [K40].

Забележка 10.3. *Ако $n \equiv 0 \pmod r$ и $w_1 \ldots, w_s$, $1 \le s \le r$, е α-редица на графа на Turan $T_r(n)$, тогава*

$$t_{T_r(n)}(w_1 \ldots, w_s) = \frac{n}{r}\left(\binom{r}{2} - \binom{r-s}{2}\right).$$

Поради това в случая $n \equiv 0 \pmod r$, Теорема 10.8 твърди, че ако

$$t_G(v_1 \ldots, v_s) \le t_{T_r(n)}(w_1 \ldots, w_s),$$

тогава G е обобщен r-хроматичен граф.

От Теорема 10.8 и Теорема 10.2 получаваме

Следствие 10.6. *Нека G е n-върхов граф и $v_1 \ldots, v_r$ е α-редица в G такава, че за някое s, $1 \le s \le r$ имаме*

$$t_G(v_1 \ldots, v_s) \le \frac{n}{r}\left(\binom{r}{2} - \binom{r-s}{2}\right).$$

Тогава $e(G) \le e(T_r(n))$.

Теорема 10.9. *Нека G е n-върхов граф, в който има α-редица $v_1, \ldots, v_k$ такава, че*

$$t_G(v_1, \ldots, v_k) \le \frac{k\, e(G)}{n}.$$

Тогава G е обобщен k-хроматичен граф.

Доказателство. Ако $k = 1$, от условието имаме $d_1' \le \dfrac{e(G)}{n}$. Понеже d_1' е максималната степен на G имаме, че $e(G) \le \dfrac{d_1' n}{2}$. От тези две неравенства следва $d_1' = 0$. Поради това G е 1-хроматичен граф.

Нека $k \ge 2$. Тогава от условието имаме

$$d_2' + \cdots + d_k' \le \frac{k\, e(G)}{n} - d_1'.$$

От това неравенство и неравенството $e(G) \le \dfrac{nd_1'}{2}$ получаваме

$$d_2' + \cdots + d_k' \le \frac{(k-2)d_1'}{2} = \frac{d_1'}{k-1}\binom{k-1}{2}.$$

Разглеждаме графа $G_1 = G[\Gamma_G(v_1)]$. Ясно е, че $v_2, \ldots, v_k$ е α-редица на G_1 и

$$t_{G_1}(v_2, \ldots, v_k) = d'_2 + \cdots + d'_k.$$

Поради това имаме

$$t_{G_1}(v_2, \ldots, v_k) \leq \frac{d'_1}{k-1}\binom{k-1}{2}.$$

От последното неравенство и Теорема 10.8 (с $r = k-1$ и $s = k-1$), стигаме до извода, че G_1 е обобщен $(k-1)$-хроматичен граф. Нека $W_2, \ldots, W_k$ са частите на този обобщен r-хроматичен граф. Съгласно Пример 10.2,

$$W_1 = V(G)\backslash\Gamma_G(v_1)$$

е δ-множество в G. От Лема 10.2 следва, че G е обобщен r-хроматичен граф с части $W_1, \ldots, W_r$. С това Теорема 10.9 е доказана.

Теорема 10.9 е публикувана в [K40].

10.5. β-редици в графи.

В [F1] *R. Faudree* въвежда следната модификация на α-редиците:

Определение 10.7. *Нека G е граф и $v_1, \ldots, v_r \in V(G)$. Казваме, че редицата $v_1, \ldots, v_r$ е β-редица в графа G, ако тя удовлетворява следните условия:*

(i) *$v_1, \ldots, v_r$ е наследствена редица;*

(ii) *v_1 е връх с максимална степен в G;*

(iii) *Ако $2 \le i \le r$, тогава $d_G(v_i) = \max\{d_G(v) \,|\, v \in \Gamma_G(v_1, \ldots, v_{i-1})\}$.*

Съгласно условието (i) всяка β-редица е клика. Следващата теорема е аналог за β-редици на Теорема 10.4.

Теорема 10.10. *Нека $v_1, \ldots, v_r$ е β-редица в графа G, V_i е i-тия слой на разслоението на $V(G)$, породено от тази β-редица и $|V_i| = p_i$, $i = 1, \ldots, r$. Ако $\Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1})$ е δ-множество в G, тогава:*

(а) *G е обобщен r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$;*

(б) *$e(G) \le e(K(p_1, \ldots, p_r))$ и равенство се достига само когато G е обобщен пълен r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$;*

(в) *$e(G) \le (T_r(n))$, където $n = |V(G)|$ и равенство се достига само когато G е обобщен r-хроматичен граф на Turan с части $V_1, \ldots, V_r$.*

Доказателство. Понеже $V_r = \Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1})$ е δ-множество по условие, за да докажем (а), остава да проверим, че всеки от останалите слоеве V_i, $1 \le i \le r-1$ е δ-множество в G. Слоят V_1 е δ-множество съгласно Пример 10.2.

Нека $2 \le i \le r$. От $V_i = \Gamma_G(v_1, \ldots, v_{i-1}) \backslash \Gamma_G(v_i)$ следва, че v_i не е съседен на никой от останалите върхове в V_i. Поради това $\Gamma_G(v_i) \subseteq V(G) \backslash V_i$. От това включване става ясно, че $d_G(v_i) \le n - p_i$. Поради това (виж Определение 10.7 (iii)) имаме $d_G(v) \le n - p_i, \forall\, v \in V_i$. т.е. V_i е δ-множество. Доказахме, че всеки от слоевете $V_1, \ldots, V_r$ е δ-множество. С което (а) е доказано. Твърдението (б) следва от Теорема 10.1, а твърдението (в) следва от Теорема 10.2. Теорема 10.10 е доказана.

Теорема 10.10 е публикувана в [K40].

Следващият резултат е аналог при β-редици на Теоремите 10.5 и 10.6.

Следствие 10.7. *Нека $v_1, \ldots, v_r$ е β-редица в n-върховия граф G, която не се съдържа в $(r+1)$-клика на G. Тогава са верни твърденията (а), (б) и (в) на Теорема 10.10.*

Доказателство. Понеже $v_1, \ldots, v_r$ не се съдържа в $(r+1)$-клика, имаме $\Gamma_G(v_1, \ldots, v_r) = \emptyset$. Поради това

$$\Gamma_G(v_r) \subseteq V(G) \backslash \Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1}).$$

От последното включване имаме

$$G(v_r) \leq n - |V_r|,$$

където $V_r = \Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1})$. Понеже

$$d_G(v_r) = \max\{d(v) \mid v \in \Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1}) = V_r\}$$

имаме

$$d_G(v) \leq n - |V_r|, \quad \forall\, v \in V_r,$$

т.е $\Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1})$ е δ-множество в G. Поради това твърденията (а), (б) и (в) на Теорема 10.10 са верни, с което Следствие 10.7 е доказано.

Следствие 10.7 е публикувано в [K35].

От условието на теорема 10.10 става ясно, че е целесъобразно за даден граф G да се дефинира числото $\psi(G)$ като най-малкото естествено число r, за което съществува β-редица $v_1, \ldots, v_r$ в G такава, че $\Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1})$ е δ-множество в G. От Теорема 10.10 следва, че ако G не е обобщен r-хроматичен граф, тогава $\psi(G) \geq r + 1$. Ще отбележим специално още едно следствие за $\psi(G)$ от Теорема 10.10.

Следствие 10.8. *Нека G е n-върхов граф и $e(G) \geq e(T_r(n))$, $1 \leq r \leq n$. Тогава:*

(а) $\psi(G) \geq r$;

(б) *Равенството $\psi(G) = r$ е възможно само когато G е обобщен r-хроматичен граф на Turan.*

Доказателство. Нека $\psi(G) = s$ и $v_1, \ldots, v_s$ е β-редица в G, такава че $\Gamma_G(v_1, \ldots, v_{s-1})$ е δ-множество в G. Съгласно Теорема 10.10 (в) имаме $e(G) \leq e(T_s(n))$. От това неравенство и условието получаваме

$$e(T_r(n)) \leq e(G) \leq e(T_s(n)).$$

Понеже $r \leq n$, от (10.4) следва $s \geq r$, с което (а) е доказано. Нека

$$\psi(G) = s = r.$$

Тогава $e(G) = e(T_s(n))$. От Теорема 10.10 (в) следва, че G е обобщен r-хроматичен граф на Turan, с което Следствие 10.8 е доказано.

Следствие 10.8 е публикувано в [K40].

Да забележим, че в Теорема 10.10 и Следствие 10.7 от

$$e(G) = e(K(p_1, \ldots, p_r))$$

не следва $G = K(p_1, \ldots, p_r)$. Поради това, по-нататък ще наложим още по-силни изисквания към графа G.

Определение 10.8. *Нека v_1 е връх с максимална степен на графа G. С $l_G(v_1)$ означаваме максималната дължина на β-редиците с първи член v_1.*

Теорема 10.11. *Нека $v_1, \ldots, v_r$ е β-редица в n-върховия граф G и $l_G(v_1) = r$. Нека V_i е i-тия слой на разслоението на $V(G)$, породено от тази β-редица и $|V_i| = p_i$, $i = 1, \ldots, r$. Тогава:*

(а) *G е обобщен r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$;*

(б) *$e(G) \le e(K(p_1, \ldots, p_r))$ и равенство е възможно само когато*

$$G = K(p_1, \ldots, p_r);$$

(в) *$e(G) \le e(T_r(n))$ и равенство е възможно само когато*

$$G = T_r(n).$$

Доказателство. От $l_G(v_1) = r$ следва, че не съществува връх на G, който да е съседен на всичките върхове на β-редицата $v_1, \ldots, v_r$, т.е. $v_1, \ldots, v_r$ не се съдържа в $(r+1)$-клика. От Следствие 10.7 следва верността на (а) и неравенството $e(G) \le e(K(p_1, \ldots, p_r))$. Нека

$$e(G) = e(K(p_1, \ldots, p_r)). \tag{10.21}$$

От Следствие 10.7 имаме, че

(10.22) G е обобщен пълен r-хроматичен граф с части $V_1, \ldots, V_r$.

Равенството $G = K(p_1, \ldots, p_r)$ ще докажем по индукция относно r с база $r = 1$. Ако $r = l_G(v_1) = 1$, тогава $d_G(v_1) = 0$. Понеже v_1 е връх с максимална степен, $E(G) = \emptyset$. Следователно $G = \overline{K}_n = \overline{K}_{p_1}$, с което базата на индукцията е доказана.

Нека $r \ge 2$ и да предположим, че твърдението е вярно за $r-1$. Най-напред ще докажем, че

(10.23) $\Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1}) = V_r$ е независими множество.

Съгласно (10.22) имаме

$$d_G = n - p_r, \quad \forall\, v \in V_r. \tag{10.24}$$

Да допуснем, че (10.23) не е вярно и нека $u_1, u_2 \in V_r$ и $[u_1, u_2] \in E(G)$. Ясно е, че $v_1, \ldots, v_{r-1}$ е β-редица в G. Тъй като $u_1 \in \Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1})$, от (10.24) правим извода, че $v_1, \ldots, v_{r-1}, u_1$ е β-редица в G. От $u_1, u_2 \in \Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1})$ и $[u_1, u_2] \in E(G)$ следва, че $u_2 \in \Gamma_G(v_1, \ldots, v_{r-1}, u_1)$. Поради това от (10.24) следва, че $v_1, \ldots, v_{r-1}, u_1, u_2$ е β-редица в G, което противоречи на условието $l_G(v_1) = r$. С това (10.23) е доказано. От (10.23) и (10.24) стигаме до извода, че всеки връх на V_r е съседен на всеки връх на $V(G) \backslash V_r$, т.е.

(10.25) $G = H + \overline{K}_{p_r}$, където $H = G[V_1 \cup \ldots \cup V_{r-1}]$.

От (10.21) и (10.1) получаваме

$$e(G) = e(K(p_1, \ldots, p_{r-1})) + p_r(n - p_r),$$

а от (10.25) получаваме

$$e(G) = e(H) + p_r(n - p_r).$$

От последните две равенства виждаме, че

$$e(H) = e(K(p_1, \ldots, p_{r-1})). \tag{10.26}$$

Съгласно (10.24) е вярно равенството

$$\Gamma_G(M) = \Gamma_H(M) \cup V_r, \ \ \forall M \subset V(H). \tag{10.27}$$

От последното равенство следва

$$d_G(v) = d_H(v) + p_r, \ \ \forall v \in V(H). \tag{10.28}$$

От (10.27) и (10.28) следва, че $v_1, \dots, v_{r-1}$ е β-редица в H. Поради това $s = l_H(v_1) \geq r-1$. Ще докажем, че $s = r-1$. Да предположим противното и нека $v_1, u_2, \dots, u_s$ е β-редица в H, където $s \geq r$. Ще докажем, че $v_1, u_2, \dots, u_s, v_r$ е β-редица в G. От (10.27) и (10.28) се вижда, че $v_1, u_2, \dots, u_s$ е β-редица в G. От $s = l_H(v_1)$ имаме, че

$$\Gamma_H(v_1, u_2, \dots, u_s) = \emptyset.$$

Това равенство и (10.27) ни дават, че $\Gamma_G(v_1, u_2, \dots, u_s) = V_r$. Понеже $v_r \in V_r$ имаме

$$v_r \in \Gamma_G(v_1, u_2, \dots, u_s).$$

Тъй като $d_G(v_r) = \max\{d_G(v) \,|\, v \in V_r\}$ доказахме, че $v_1, u_2 \dots, u_s, v_r$ е β-редица в G. Понеже $s \geq r$, това противоречи на условието $l_G(v_1) = r$. И така, $l_H(v_1) = r - 1$. От (10.27) става ясно, че i-тия слой на разслоението, породено от редицата $v_1, \dots, v_r$ в G съвпада с i-тия слой на разслоението, породено от β-редицата $v_1, \dots, v_{r-1}$ в H, $i = 1, \dots, r-1$. Поради това, от (10.26) и индуктивната хипотеза имаме $H = K(p_1, \dots, p_{r-1})$. От последното равенство и (10.25) получаваме желаното равенство $G = K(p_1, \dots, p_r)$. С това (б) е доказано.

От $e(G) \leq e(K(p_1, \dots, p_r))$ и Лема 10.1 следва $e(G) \leq e(T_r(n))$. Нека $e(G) = e(T_r(n))$. Тогава

$$e(G) = e(K(p_1, \dots, p_r)) \ \text{ и } \ e(K(p_1, \dots, p_r)) = e(T_r(n)).$$

От първото равенство и (б) имаме $G = K(p_1, \dots, p_r)$. От второто равенство и Лема 10.1 (б) получаваме $K(p_1, \dots, p_r) = T_r(n)$. Доказахме (в), с което доказателството на Теорема 10.11 е завършено.

Теорема 10.11 е публикувана в [К34].

10.6. Едно достатъчно условие за обобщена r-хроматичност на графи.

Нека $v_1 \dots, v_r$ е β-редица в n-върховия граф G и $V_1 \dots, V_r$ е разслоението на $V(G)$, което тази β-редица поражда, където $|V_i| = p_i$, $i = 1, \dots, r$. Ако графът G е обобщен r-хроматичен граф с части слоевете $V_1 \dots, V_r$, тогава като сумираме неравенствата

$$d(v_i) \le n - p_i, \ \ i = 1, \dots, r$$

получаваме

$$d(v_1) + \dots + d(v_r) \le (r-1)n. \tag{10.29}$$

В този пункт ще докажем, че неравенството (10.29) е достатъчно за да бъде G обобщен r-хроматичен граф. Частите на този обобщен r-хроматичен граф обаче, могат и да не бъдат слоевете $V_1 \dots, V_r$.

Ще ни е необходимо следното:

Твърдение 10.7. *Нека $v_1, \dots, v_r$ е β-редица и $d(v_1) + \dots + d(v_k) \le A$ за някое k, $1 \le k \le r$. Тогава*

$$d(v_1) + \dots + d(v_r) \le \frac{A.r}{k}.$$

Доказателство. Понеже $d(v_1) \ge \dots \ge d(v_r)$ имаме

$$d(v_i) \le \frac{A}{k}, \quad i = k, \dots, n.$$

Поради това

$$d(v_1) + \dots + d(v_r) \le A + \frac{A}{k}(r-k) = \frac{A.r}{k}.$$

Следващата теорема е аналог на Теорема 10.8 за β-редици.

Теорема 10.12. *Нека G е n-върхов граф и $v_1, \dots, v_r$ е β-редица в G такава, че*

$$d(v_1) + \dots + d(v_k) \le \frac{k(r-1)n}{r}, \text{ за някое } k, \ 1 \le k \le r. \tag{10.30}$$

Тогава

(а) *G е обобщен r-хроматичен граф;*

(б) *Ако неравенството (10.30) е строго, тогава G не е обобщен пълен r-хроматичен граф.*

Доказателство. Ще докажем Теорема 10.12 по индукция относно r с база $r = 1$. Ако $r = 1$, тогава непременно $k = 1$. От (10.30) получаваме $d(v_1) = 0$. Понеже v_1 е връх с максимална степен в G, имаме $e(G) = 0$. Следователно G е 1-хроматичен граф. С това базата на индукцията е доказана.

Нека $r \ge 2$ и твърдението е вярно за $r-1$ и всяко k, $1 \le k \le r-1$. От (10.30) и Твърдение 10.7 получаваме

$$d(v_1) + \dots + d(v_r) \le (r-1)n. \tag{10.31}$$

Ще разгледаме два случая:

Случай 1. $d(v_1) + \cdots + d(v_{r-1}) \leq (r-2)n$.

В тази ситуация β-редицата $v_1, \ldots, v_{r-1}$ удовлетворява условието на Теорема 10.12 при $k = r-1$. Съгласно индуктивната хипотеза G е обобщен $(r-1)$-хроматичен граф и следователно G е обобщен r-хроматичен граф. С това (а) е доказано. Тъй като G е обобщен $(r-1)$-хроматичен граф Твърдението (б) също е доказано.

Случай 2. *Вярно е неравенството*

$$d(v_1) + \cdots + d(v_{r-1}) > (r-2)n. \tag{10.32}$$

Нека $V_1 \ldots, V_r$ е разслоението на $V(G)$, породено от β-редицата $v_1, \ldots, v_r$. Тъй като

$$V_i = \Gamma(v_1, \ldots, v_{i-1}) \backslash \Gamma(v_i) \subset V(G) \backslash \Gamma(v_i), \ \ i = 1, \ldots, r-1$$

имаме

$$|V_i| \leq n - d(v_i), \quad i = 1, \ldots, r-1. \tag{10.33}$$

От (10.33) и (10.32) имаме

$$|V_r| = n - \sum_{i=1}^{r-1} |V_i| \geq \sum_{i=1}^{r-1} d(v_i) - (r-2)n > 0. \tag{10.34}$$

Нека V_r' е подмножество на V_r такова, че

$$|V_r'| = \sum_{i=1}^{r-1} d(v_i) - (r-2)n. \tag{10.35}$$

От (10.34) следва, че такова подмножество V_r' съществува. Нека $W = V(G) \backslash V_r'$. От (10.35) се вижда, че

$$|W| = \sum_{i=1}^{r-1} (n - d(v_i)). \tag{10.36}$$

Тъй като $V_i \subseteq W$, $i = 1, \ldots, r-1$ и V_i са дизюнктни, от (10.33) и (10.36) се убеждаваме, че съществуват дизюнктни $V_i' \subseteq W$, $i = 1, \ldots, r-1$, такива, че $V_i' \supseteq V_i$ и $|V_i'| = n - d(v_i)$, $i = 1, \ldots, r-1$. Съгласно (10.36) имаме

$$W = \bigcup_{i=1}^{r-1} V_i'.$$

Следователно

$$V(G) = V_1' \cup \cdots \cup V_r', \ \ V_i' \cap V_j' = \emptyset, \ \ i \neq j.$$

От $|V_i'| = n - d(v_i)$ имаме

$$d(v_i) = n - |V_i'|, \ \ i = 1, \ldots, r-1. \tag{10.37}$$

Понеже v_1 е връх с максимална степен, от (10.37) имаме $d(v) \leq n - |V_1'|$, $\forall\, v \in V_1'$. Нека $2 \leq i \leq r-1$. Тъй като $V_i \subset \Gamma(v_1, \ldots, v_{i-1})$ и

$$V_i' \backslash V_i \subset V_r = \Gamma(v_1, \ldots, v_{r-1}) \subset \Gamma(v_1, \ldots, v_{i-1})$$

имаме, че $V_i' \subset \Gamma(v_1, \ldots, v_{i-1})$. Поради това (от дефиницията на β-редици) следва, че $d(v) \leq d(v_i)$, $\forall\, v \in V_i'$. От последното неравенство и (10.37) виждаме, че $d(v) \leq n - |V_i'|$, $\forall\, v \in V_i'$. Доказахме, че V_i', $i = 1, \ldots, r-1$ са δ-множества в графа G. От (10.31) получаваме

$$d(v_r) \leq \sum_{i=1}^{r-1} (n - d(v_i)) = \sum_{i=1}^{r-1} |V_i'| = n - |V_r'|.$$

Понеже $V_r' \subset V_r$, от последното неравенство следва, че $d(v) \leq n - |V_r'|$, $\forall\, v \in V_r'$, т.е. V_r' също е δ-множество. Доказахме, че G е обобщен r-хроматичен граф с части $V_1', \ldots, V_r'$. С това Теорема 10.12 е доказана.

Теорема 10.12 е публикувана в [K36].

Определение 10.9. *За даден n-върхов граф G, числото $\xi(G)$ дефинираме като най-малкото естествено число r, за което съществува β-редица $v_1, \ldots, v_r$ такава, че $d(v_1) + \cdots + d(v_r) \leq (r-1)n$.*

От Теорема 10.12 следва, че ако G не е обобщен r-хроматичен граф, тогава $\xi(G) \geq r+1$. Ще отбележим още едно следствие от Теорема 10.12.

Следствие 10.9. *Нека G е n-върхов граф и $e(G) \geq e(T_r(n))$, $1 \leq r \leq n$. Тогава:*

(а) $\xi(G) \geq r$;

(б) *Равенството $\xi(G) = r$ е възможно само когато G е обобщен r-хроматичен граф на Turan.*

Доказателство. Нека $\xi(G) = s$. Съгласно Теорема 10.12, G е обобщен s-хроматичен граф. Поради това, от Теорема 10.2 (а) имаме $e(G) \leq e(T_s(n))$. От това неравенство и условието имаме

$$e(T_r(n)) \leq e(G) \leq e(T_s(n)).$$

От (10.4) следва $s \geq r$, с което (а) е доказано. Ако $s = r$, тогава от Теорема 10.2 (б) следва, че G е обобщен r-хроматичен граф на *Turan*. Следствие 10.9 е доказано.

Накрая на Глава 10 ще сравним Следствие 10.8 и Следствие 10.9. Поточно ще докажем следното:

Твърдение 10.8. *За всеки граф G е вярно неравенството*

$$\xi(G) \leq \psi(G).$$

Доказателство. Нека $\psi(G) = s$ и $v_1, \ldots, v_s$ е β-редица такава, че $\Gamma(v_1, \ldots, v_{s-1})$ е δ-множество. Нека V_i е i-тия слой на разслоението на $V(G)$, породено от $v_1, \ldots, v_s$ и $p_i = |V_i|$, $i = 1, \ldots, s$. Съгласно Теорема 10.10, всеки слой V_i е δ-множество на G. Поради това

$$d(v_i) \leq n - p_i, \quad \text{където} \quad n = |V(G)|,\ i = 1, \ldots, s.$$

Като съберем тези неравенства получаваме, че

$$d(v_1) + \cdots + d(v_s) \leq (s-1)n,$$

което означава, че $s \geq \xi(G)$. Твърдение 10.8 е доказано.

От Твърдение 10.8 става ясно, че Следствие 10.8 следва от Следствие 10.9.

ГЛАВА 11

БАЛАНСИРАНИ И НАСИТЕНИ β-РЕДИЦИ В ГРАФИ.

11.1. Уводни бележки.

Нека G е граф и $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Числото

$$\frac{d(v_1) + \cdots + d(v_n)}{n}$$

се нарича средна степен на графа G. От очевидното равенство

$$d(v_1) + \cdots + d(v_n) = 2e(G) \tag{11.1}$$

получаваме, че

$$\frac{d(v_1) + \cdots + d(v_n)}{n} = \frac{2e(G)}{n}. \tag{11.2}$$

Определение 11.2. *Нека G е граф и $V' = \{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq V(G)$. Казваме, че множеството V' е балансирано, ако*

$$\frac{d(v_1) + \cdots + d(v_r)}{r} = \frac{2e(G)}{n}.$$

Казваме, че множеството V' е наситено, ако

$$\frac{d(v_1) + \cdots + d(v_r)}{r} > \frac{2e(G)}{n}.$$

Пример 11.1. В *регулярните графи (т.е. графи, в които всичките върхове имат равни степени) всяко множество от върхове е балансирано.*

Пример 11.2. *Всеки връх с максимална степен е или наситен, или балансиран. Нещо повече, ако връх от максимална степен е балансиран, т.е. степента му е равна на $\frac{2e(G)}{n}$, тогава графът е регулярен.*

Пример 11.3, [F1]. *Ако G е граф, който има поне едно ребро, тогава G непременно има балансирано или наситено ребро.*

Наистина, от добре известното равенство

$$\sum_{[u,v] \in E(G)} (d(u) + d(v)) = \sum_{v \in V(G)} d^2(v)$$

и неравенството между средно аритметично и средно квадратично

$$\sum_{v \in V(G)} d^2(v) \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{v \in V(G)} d(v) \right)^2 \text{ където } n = |V(G)|,$$

получаваме

$$\sum_{[u,v]\in E(G)} (d(u)+d(v)) \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{v\in V(G)} d(v)\right)^2.$$

От последното неравенство и (11.2) виждаме, че

$$\sum_{[u,v]\in E(G)} (d(u)+d(v)) \geq \frac{4(e(G))^2}{n}. \tag{11.3}$$

Нека

$$[u_0, v_0] \in E\,(G) \;\text{ и }\; d(u_0)+d(v_0) = \max_{[u,v]\in E(G)} \{d(u)+d(v)\}.$$

Тогава от (11.3) следва

$$\frac{d(u_0)+d(v_0)}{2} \geq \frac{2e(G)}{n},$$

което означава, че реброто $[u_0, v_0]$ е балансирано или наситено.

Пример 11.4. *Да добавим към графа $K(3,3)$ една 3-клика, която няма общи върхове с $K(3,3)$. Понеже върховете на $K(3,3)$ имат степен 3, а върховете на 3-кликата имат степен 2, средната степен на получения граф е по-голяма от 2. Поради това единствената 3-клика не е балансирана и не е наситена.*

Пример 11.5. *Дефинираме*

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-2)}{4}, & \text{ако } n \text{ е четно;} \\ \dfrac{(n-1)^2}{4}, & \text{ако } n \text{ е нечетно.} \end{cases}$$

В [37] е доказано, че ако G е n-върхов граф и $e(G) > f(n)$, тогава всеки връх с максимална степен е край на балансирано или наситено ребро. Казано по друг начин – всяка 2-членна β-редица е наситена или балансирана.

Пример 11.6. *Дефинираме*

$$g(n) = \begin{cases} \dfrac{(4n-3)n}{12}, & \text{ако } n \equiv 0 \; (mod\, 3); \\ \dfrac{(4n-1)n}{12}, & \text{ако } n \equiv 1 \; (mod\, 3); \\ \dfrac{(2n-1)n}{6}, & \text{ако } n \equiv 2 \; (mod\, 3). \end{cases}$$

В [K37] е доказано, че ако G е n-върхов граф и $e(G) > g(n)$, тогава всяка 3-членна β-редица в G е наситена или балансирана.

Целта на тази глава е да обобщим твърденията на Пример 11.5 и Пример 11.6. По-точно ще докажем, че ако един граф има достатъчно много ребра, тогава всяка r-членна β-редица е или наситена, или балансирана. От резултатите, които ще получим следва изненадващият факт, че ако един граф има достатъчно много ребра, тогава всичките му β-редици с дължина r са наситени, или всичките му β-редици с дължина r са балансирани. При доказателството на тези факти, съществено се използва теорията на обобщените r-хроматични графи и разслоенията, породени от дадена наследствена редица, изложени в Глава 10.

11.2. β-редици, които не са наситени.

Резултатите от тази глава ще получим с помощта на следната:

Теорема 11.1. *Нека G е n-върхов граф и $v_1, \dots, v_r$, $r \geq 2$ е β-редица в G, която не е наситена, но $v_1, \dots, v_{r-1}$ е наситена. Тогава*

$$d(v_1) + \dots + d(v_{r-1}) \leq \frac{(r-1)^2 n}{r}. \tag{11.4}$$

Ако в (11.4) имаме равенство, тогава:

(а) *$v_1, \dots, v_r$ е балансирана;*

(б) *$n \equiv 0\,(mod\ r)$ и G е обобщен (непълен) r-хроматичен граф с части $V_1', \dots, V_r'$ такива, че*

$$|V_i'| = \frac{n}{r}, \quad i = 1, \dots, r; \tag{11.5}$$

$$d(v) = \frac{(r-1)n}{r}, \quad \forall\, v \in \bigcup_{i=1}^{r-1} V_i'; \tag{11.6}$$

$$d(v) = \frac{2e(G)r}{n} - \frac{(r-1)^2 n}{r}, \quad \forall\, v \in V_r'. \tag{11.7}$$

(в) *Верни са неравенствата*

$$\frac{(r-1)^2 n^2}{r^2} + \frac{(r-1)n}{2r} \leq e(G) \leq \frac{(r-1)n^2}{2r} - \frac{n}{2r} \tag{11.8}$$

и ако в дясното неравенство в (11.8) имаме равенство, тогава

$$d(v) = \frac{(r-1)n}{r} - 1, \quad \forall\, v \in V_r'.$$

Доказателство. Очевидно

$$(r-2)n < \frac{(r-1)^2 n}{r}.$$

Следователно, ако $d(v_1) + \dots + d(v_{r-1}) \leq (r-2)n$, тогава неравенството (11.4) е изпълнено и то строго. Поради това ще предполагаме, че

$$d(v_1) + \dots + d(v_{r-1}) > (r-2)n. \tag{11.9}$$

Нека V_i, $i = 1, \dots, r$ е i-тия слой на разслоението, породено от разглежданата β-редица $v_1, \dots, v_r$. Тъй като $V_i \subset V(G) \backslash \Gamma(v_i)$, $i = 1, \dots, r-1$ имаме

$$|V_i| \leq n - d(v_i), \quad i = 1, \dots, r-1. \tag{11.10}$$

От (11.10) имаме

$$|V_r| = n - \sum_{i=1}^{r-1} |V_i| \geq \sum_{i=1}^{r-1} d(v_i) - (r-2)n. \tag{11.11}$$

Нека V_r' е подмножество на V_r такова, че

$$|V_r'| = \sum_{i=1}^{r-1} d(v_i) - (r-2)n. \tag{11.12}$$

От (11.11) и (11.9) следва, че такова подмножество V_r' съществува. Нека $W = V(G)\backslash V_r'$. От (11.12) получаваме

$$|W| = \sum_{i=1}^{r-1}(n - d(v_i)). \tag{11.13}$$

Тъй като $V_r' \subseteq V_r$ имаме $V_i \subset W$, $i = 1, \ldots, r-1$. Поради това, съгласно (11.10), съществуват дизюнктни множества V_i', $i = 1, \ldots, r-1$, такива, че $V_i \subseteq V_i' \subset W$ и

$$|V_i'| = n - d(v_i), \;\; i = 1, \ldots, r-1. \tag{11.14}$$

От (11.13) и (11.14) следва, че $W = \bigcup_{i=1}^{r-1} V_i'$, откъдето става ясно, че

$$V(G) = V_1' \cup \ldots \cup V_r', \;\; V_i' \cap V_j' = \emptyset, \;\; i \neq j. \tag{11.15}$$

Да забележим, че

$$d(v) \leq d(v_i), \;\; \forall\, v \in V_i', \; i = 1, \ldots, r. \tag{11.16}$$

Наистина, ако $i = 1$ неравенството (11.16) е изпълнено, понеже v_1 има максимална степен в G. Ако $2 \leq i \leq r-1$ имаме

$$V_i \subset \Gamma(v_1, \ldots, v_{i-1}) \;\text{ и }\; V_i'\backslash V_i \subset V_r = \Gamma(v_1, \ldots, v_{r-1}) \subset \Gamma(v_1, \ldots, v_{i-1}).$$

Поради това $V_i' \subset \Gamma(v_1, \ldots, v_{i-1})$ и $d(v) \leq d(v_i)$, $\forall\, v \in V_i'$. Неравенството (11.16) е вярно и при $i = r$, понеже $V_r' \subset V_r$.

И така, вярно е (11.16). От (11.1) и (11.15) се вижда, че

$$2e(G) = \sum_{v \in V(G)} d(v) = \sum_{v \in V_1'} d(v) + \cdots + \sum_{v \in V_r'} d(v).$$

Нека $d(v_i) = d_i$, $i = 1, \ldots, r$. Последното равенство заедно с (11.14), (11.12) и (11.16) ни дават

$$2e(G) \leq \sum_{i=1}^{r-1} d_i(n - d_i) + \left(\sum_{i=1}^{r-1} d_i - (r-2)n\right) d_r. \tag{11.17}$$

Равенство в (11.17) имаме тогава и само тогава, когато

$$d(v) = d_i, \quad \forall\, v \in V_i', \quad i = 1, \ldots, r.$$

Полагаме $\sigma = d_1 + \cdots + d_{r-1}$. Понеже $v_1, \ldots, v_r$ не е наситена, имаме

$$\frac{\sigma + d_r}{r} \leq \frac{2e(G)}{n}.$$

От последното неравенство получаваме

$$d_r \le \frac{2re(G)}{n} - \sigma. \tag{11.18}$$

От (11.17) и (11.18) стигаме до извода, че

$$2e(G) \le n\sigma - \sum_{i=1}^{r-1} d_i^2 + (\sigma - (r-2)n)\left(\frac{2re(G)}{n} - \sigma\right). \tag{11.19}$$

От неравенството между средно аритметично и средно квадратично имаме

$$\sum_{i=1}^{r-1} d_i^2 \ge \frac{\sigma^2}{r-1}. \tag{11.20}$$

и равенство в (11.20) се достига тогава и само тогава, когато

$$d_1 = d_2 = \dots = d_{r-1}.$$

От (11.19) и (11.20) получаваме

$$2e(G) \le n\sigma - \frac{\sigma^2}{r-1} + (\sigma - (r-2)n)\left(\frac{2re(G)}{n} - \sigma\right).$$

Последното неравенство е еквивалентно на

$$\frac{2e(G)}{n}\Big((r-1)^2 n - r\sigma\Big) \le \frac{\sigma}{r-1}\left((r-1)^2 n - r\sigma\right). \tag{11.21}$$

Равенство в (11.21) се достига тогава и само тогава, когато едновременно имаме равенство в (11.17), (11.18) и (11.20), т.е. когато

$$\begin{cases} d(v) = d_i = d_1, & \forall\, v \in V_i', \qquad i = 1, \dots, r-1 \\ d(v) = d_r = \dfrac{2re(G)}{n} - \sigma, & \forall\, v \in V_r'. \end{cases} \tag{11.22}$$

Тъй като $v_1, \dots, v_{r-1}$ е наситена, имаме

$$\frac{\sigma}{r-1} > \frac{2e(G)}{n}.$$

Поради това неравенството (11.21) е еквивалентно на $\sigma \le \dfrac{(r-1)^2 n}{r}$. С това неравенството (11.4) е доказано. Остава да разгледаме ситуацията, когато в (11.4) се достига равенство.

И така, нека

$$\sigma = \frac{(r-1)^2 n}{r}. \tag{10.23}$$

Понеже σ е естествено число, следва $n \equiv 0 (mod\, r)$. От (11.23) става ясно, че в (11.21) имаме равенство. Поради това са изпълнени равенствата (11.22). От (11.22) и (11.23) изчисляваме, че

$$d(v) = \frac{(r-1)n}{r}, \quad \forall\, v \in V_i', \;\; i = 1, \dots, r-1 \tag{11.24}$$

и

$$d(v) = \frac{2re(G)}{n} - \frac{(r-1)^2 r}{n}, \ \ \forall\, v \in V_r'. \tag{11.25}$$

От (11.24) и (11.25) пресмятаме, че

$$\frac{d_1 + \cdots + d_r}{r} = \frac{2e(G)}{n}, \tag{11.26}$$

с което доказахме (а). Тъй като $v_1, \ldots, v_{r-1}$ не е наситена, от (11.26) имаме

$$\frac{d_1 + \cdots + d_{r-1}}{r-1} > \frac{d_1 + \cdots + d_r}{r}$$

От последното неравенство и (11.24) следва, че $d_r < \dfrac{(r-1)n}{r}$. Това неравенство и (11.16) ни дават, че

$$d(v) < \frac{(r-1)n}{r}, \ \ \forall\, v \in V_r'. \tag{11.27}$$

От (11.14), (11.12) и (11.24) изчисляваме

$$|V_i'| = \frac{n}{r}, \ \ = 1, \ldots, r.$$

От тези равенства, (11.24) и (11.27) стигаме до извода, че G е обобщен (но непълен) r-хроматичен граф с части $V_1', \ldots, V_r'$. С това доказателството на (б) е завършено.

Преминаваме към доказателството на (в). Тъй като $n \equiv 0 (mod\ r)$, от (11.27) следва

$$d(v) \le \frac{(r-1)n}{r} - 1, \ \ \forall\, v \in V_r'.$$

От последното неравенство, (11.26) и (11.24) получаваме

$$\frac{2e(G)}{n} \le \frac{\dfrac{(r-1)^2 n}{r} + \dfrac{(r-1)n}{r} - 1}{r} = \frac{(r-1)n - 1}{r},$$

откъдето следва, че

$$e(G) \le \frac{(r-1)n^2}{2r} - \frac{n}{2r}.$$

Равенство в последното неравенство е възможно само когато, освен (11.24) имаме

$$d(v) = \frac{(r-1)n}{r} - 1, \ \ \forall\, v \in V_r'.$$

От $v \in \Gamma(v_1, \ldots, v_{r-1})$ следва, че $d(v) \ge r - 1$. Поради това от (10.25) стигаме до неравенството

$$e(G) \ge \frac{(r-1)^2 n^2}{2r^2} + \frac{(r-1)n}{2r}.$$

С това доказателството на Теорема 11.1 е завършено.

Теорема 11.1 е публикувана в [K40].

11.3. β-редици, които не са балансирани и не са наситени.

Следващата теорема е основния резултат в тази глава.

Теорема 11.2. *Нека G е n-върхов граф и $v_1, \dots, v_r$ е β-редица, която не е балансирана и не е наситена. Тогава:*

(а) $d(v_1) + \cdots + d(v_{r-1}) < \dfrac{(r-1)^2 n}{r}$;

(б) *G е обобщен r-хроматичен граф;*

(в) $e(G) < e(T_r(n))$.

Доказателство. Тъй като $v_1, \dots, v_r$ не е балансирана, G не е регулярен. Поради това v_1 е наситен връх. Понеже $v_1, \dots, v_r$ не е наситена, съществува k, $1 \le k \le r-1$, такова че $v_1, \dots, v_k$ е наситена, но $v_1, \dots, v_{k+1}$ не е наситена. Възможни са два случая:

Случай 1. *$v_1, \dots, v_{k+1}$ е балансирана.*
Понеже $v_1, \dots, v_r$ не е балансирана, $k+1 < r$. От Теорема 11.1 имаме

$$d(v_1) + \cdots + d(v_k) \le \frac{k^2.n}{k+1}$$

От Твърдение 10.7 и $k+1 < r$ следва

$$d(v_1) + \cdots + d(v_{r-1}) \le \frac{k(r-1)n}{k+1} < \frac{(r-1)^2 n}{r}.$$

Случай 2. *$v_1, \dots, v_{k+1}$ не е балансирана.*
От Теорема 11.1 имаме

$$d(v_1) + \cdots + d(v_{k+1}) < \frac{k^2 n}{k+1}.$$

Понеже $1 \le k \le r-1$, от Твърдение 10.7 следва

$$d(v_1) + \cdots + d(v_{r-1}) < \frac{k(r-1)n}{k+1} \le \frac{(r-1)^2 n}{r}.$$

Твърдението (а) е доказано. Твърденията (б) и (в) на Теорема 11.2 следват от (а) и Теорема 10.12. С това Теорема 11.2 е доказана.
Теорема 11.2 е публикувана в [K36].

Следствие 11.1. *Нека G е n-върхов граф и r е естествено число, $1 \le r \le n$. Ако $e(G) \ge e(T_r(n))$, тогава всяка r-членна β-редица в G е балансирана или наситена.*
Следствие 11.1 е публикувано в [K36].

В следващия пункт ще уточним Следствие 11.1, като докажем, че ако $e(G) \ge e(T_r(n))$, тогава или всяка r-членна β-редица е наситена, или всяка r-членна β-редица е балансирана.

Нека n и r са естествени числа и $2 \leq r \leq n$. За тези числа дефинираме

$$f(n,r) = \begin{cases} \dfrac{n^2(r-1)}{2r} - \dfrac{n}{2(r-1)}, & \text{ако } n \equiv 0 \pmod{r}; \\ \dfrac{n^2(r-1)}{2r} - \dfrac{\nu n}{2r(r-1)}, & \text{ако } n \equiv \nu \pmod{r},\ 1 \leq \nu \leq r-1. \end{cases}$$

В следващата теорема ще използваме числата $\psi(G)$ и $\xi(G)$, които са дефинирани в Глава 10.

Теорема 11.3. *Нека G е n-върхов граф и нека r е естествено число, $2 \leq r \leq n$. Ако $e(G) > f(n,r)$, тогава:*

(а) $\xi(G) \geq r$;

(б) *Всяка r-членна β-редица в G е балансирана или наситена.*

Доказателство. Нека $2 \leq r \leq n$. Лесно се проверяват равенствата

$$f(n,r) - \frac{n^2(r-2)}{2(r-1)} = \frac{n}{2(r-1)}\left(\frac{n}{r} - 1\right), \text{ ако } n \equiv 0 \pmod{r}$$

$$f(n,r) - \frac{n^2(r-2)}{2(r-1)} = \frac{n(n-\nu)}{2r(r-1)}, \text{ ако } n \equiv \nu \pmod{r},\ 1 \leq \nu \leq r-1.$$

Десните части на тези равенства очевидно са неотрицателни. Поради това

$$f(n,r) \geq \frac{n^2(r-2)}{2(r-1)}, \quad 2 \leq r \leq n. \tag{11.28}$$

От (11.28) и Твърдение 10.2 имаме $f(n,r) \geq e(T_{r-1}(n))$. Понеже $e(G) > f(n,r)$, получаваме

$$e(G) > e(T_{r-1}(n)),\ \ 2 \leq r \leq n. \tag{11.29}$$

От неравенството (11.29) и Следствие 10.9 следва $\xi(G) > r-1$. С това (а) е доказано.

Да предположим, че (б) не е вярно и нека $v_1, \ldots, v_r$ е β-редица, която не е наситена и не е балансирана. Съгласно Теорема 11.2 (а)

$$d(v_1) + \cdots + d(v_{r-1}) \ < \ \frac{(r-1)^2 n}{r}. \tag{11.30}$$

От (11.29) и Следствие 11.1 следва, че $v_1, \ldots, v_{r-1}$ е балансирана или наситена β-редица, Поради това

$$\frac{d(v_1) + \cdots + d(v_{r-1})}{r-1} \ \geq \frac{2e(G)}{n}. \tag{11.31}$$

Ще разгледаме два случая:

Случай 1. $n \equiv 0 \pmod{r}$.

Тъй като $\dfrac{(r-1)^2n}{r}$ е цяло положително число, от (11.30)) следва, че

$$d(v_1)+\cdots+d(v_{r-1})\leq\frac{(r-1)^2n}{r}-1. \tag{11.32}$$

От (11.32) и (11.31) става ясно, че $e(G)\leq f(n,r)$, което противоречи на условието $e(G)>f(n,r)$.

Случай 2. $n=rq+\nu$, $1\leq\nu\leq r-1$.

От (11.30) правим извода, че

$$d(v_1)+\cdots+d(v_{r-1})\leq\left\lfloor\frac{(r-1)^2n}{r}\right\rfloor. \tag{11.33}$$

Като използваме равенството $n=rq+\nu$ получаваме

$$\frac{(r-1)^2n}{r}=(r-1)^2q+(r-2)\nu+\frac{\nu}{r}.$$

Понеже $0<\dfrac{\nu}{r}<1$, от последното равенство виждаме, че

$$\left\lfloor\frac{(r-1)^2n}{r}\right\rfloor=(r-1)^2q+(r-2)\nu=\frac{(r-1)^2(n-\nu)}{r}+\nu(r-2).$$

Последното равенство и (11.33) ни дават

$$d(v_1)+\cdots+d(v_{r-1})\leq\frac{(r-1)^2(n-\nu)}{r}+\nu(r-2). \tag{11.34}$$

От (11.34) и (11.31) следва, че $e(G)\leq f(n,r)$, което противоречи на условието $e(G)>f(n,r)$. С това Теорема 11.3 е доказана.

Теорема 11.3 е публикувана в [K36].

Забележка 11.1. *Ако* $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ r)$*, тогава, съгласно Твърдение 10.2 имаме*

$$e(T_r(n))=\frac{n^2(r-1)}{2r}.$$

От това равенство става ясно, че имаме $f(n,r)<e(T_r(n))$. Следователно, ако $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ r)$, Теорема 11.3 (б) е по-силна от Следствие 11.1. Ако $n\equiv\nu\ (\mathrm{mod}\ r)$, $1\leq\nu\leq r-1$, тогава от дефиницията на $f(n,r)$ и (10.3) следва, че неравенството $f(n,r)<e(T_r(n))$ е изпълнено само когато

$$\frac{\nu(r-\nu)}{2r}\ <\ \frac{\nu n}{2r(r-1)}$$

т.е. $f(n,r)<e(T_r(n))$, ако $n>(r-\nu)(r-1)$. Поради това, ако $n\equiv\nu\ (\mathrm{mod}\ r)$, $1\leq\nu\leq r-1$ и $n>(r-\nu)(r-1)$, тогава Следствие 11.2 може да се получи и от Теорема 11.3. Казано по друг начин, след като сме доказали Теорема 11.3, Следствие 11.2 е интересно само когато $n\equiv\nu\ (\mathrm{mod}\ r)$, $1\leq\nu\leq r-1$ и $n\leq(r-\nu)(r-1)$.

11.4. Балансирани β-редици.

Следващата теорема уточнява и допълва Следствие 11.1.

Теорема 11.4. *Нека G е n-върхов граф и r е цяло число, $1 \le r \le n$. Нека $e(G) \ge e(T_r(n))$ и за някое цяло число s, $1 \le s \le r$, съществува балансирана β-редица $v_1, \dots, v_s \in V(G)$. Тогава G е регулярен граф.*

Доказателство. Ще докажем Теорема 11.4 по индукция относно s с база $s = 1$. Ако $s = 1$, тогава $d(v_1) = \dfrac{2e(G)}{n}$. Понеже v_1 е връх с максимална степен, от това равенство следва, че G е регулярен (виж равенството (11.2)).

Нека $s \ge 2$. Тъй като $v_1, \dots, v_s$ е балансирана, имаме

$$\frac{d(v_1) + \cdots + d(v_s)}{s} = \frac{2e(G)}{n}. \tag{11.35}$$

От (11.35) и $d(v_1) \ge \ldots \ge d(v_s)$ следва, че

$$\frac{d(v_1) + \cdots + d(v_{s-1})}{s-1} \ge \frac{2e(G)}{n}. \tag{11.36}$$

От (11.36) следва, че $v_1, \dots, v_{s-1}$ е или балансирана, или наситена. Ще докажем, че $v_1, \dots, v_{s-1}$ е балансирана. Да допуснем противното. Тогава $v_1, \dots, v_{s-1}$ е наситена. Съгласно Теорема 11.1, е вярно неравенството

$$d(v_1) + \cdots + d(v_{s-1}) \le \frac{(s-1)^2 n}{s}. \tag{11.37}$$

Съгласно Теорема 10.12 ($r = s$ и $k = s-1$), от (11.37) следва, че G е обобщен s-хроматичен граф. Ако (11.37) е строго неравенство, тогава от Теорема 10.12 имаме $e(G) < e(T_s(n))$. Понеже $s \le r \le n$, от (10.4) стигаме до неравенството $e(G) < e(T_r(n))$, което противоречи на условието $e(G) \ge e(T_r(n))$. Нека сега в (11.37) имаме равенство. Тогава $n \equiv 0 \pmod{s}$ и съгласно Теорема 11.1 (в) имаме

$$e(G) \le \frac{(s-1)n^2}{2s} - \frac{n}{2s}. \tag{11.38}$$

Понеже $n \equiv 0 \pmod{s}$, от Твърдение 10.2 имаме

$$T_s(n) = \frac{(s-1)n^2}{2s}.$$

От това равенство и (11.38) получаваме $e(G) < e(T_s(n))$. Тъй като $s \le r \le n$, съгласно (10.4), $e(G) < e(T_r(n))$, което противоречи на условието $e(G) \ge e(T_r(n))$. Полученото противоречие доказва, че $v_1, \dots, v_{s-1}$ е балансирана. Съгласно индуктивната хипотеза G е регулярен. Теорема 11.4 е доказана.

Теорема 11.4 е публикувана в [K40].

Нека n и r са естествени числа и $1 \le r \le n$. Дефинираме

$$g(n,r) = \frac{n^2(r-1)}{2r} - \frac{n}{2r}, \text{ ако } n \equiv 0 \pmod{r};$$

$$g(n,r) = \frac{n^2(r-1)}{2r} - \frac{\nu n}{2r(r-1)}, \text{ ако } n \equiv \nu \pmod{r}, \ \ 1 \le \nu \le r-1.$$

Следващите три свойства на $g(n,r)$ са очевидни.

$$g(n,1) = -\frac{n}{2}. \tag{11.39}$$

$$g(n,r) < \frac{n^2(r-1)}{2r}. \tag{11.40}$$

$$g(n,r) \geq f(n,r), \quad r \geq 2, \tag{11.41}$$

където $f(n,r)$ е дефинирана в пункт 11.3. От (11.41) и (11.28) имаме

$$g(n,r) \geq \frac{(r-2)n^2}{2(r-1)}, \quad r \geq 2. \tag{11.42}$$

Съгласно (11.40) имаме

$$g(n,r-1) < \frac{n^2(r-2)}{2(r-1)}, \quad r \geq 2.$$

От последното неравенство и (11.42) става ясно, че

$$g(n,r-1) < g(n,r), \quad 2 \leq r \leq n. \tag{11.43}$$

Ще разширим Теорема 11.4 по следния начин:

Теорема 11.5. *Нека G е n-върхов граф и r е естествено число, $1 \leq r \leq n$, такова че $e(G) > g(n,r)$. Нека за някое s, $1 \leq s \leq r$, съществува балансирана β-редица $v_1, \ldots, v_s$ в G. Тогава G е регулярен.*

Доказателство. Ще докажем, че G е регулярен по индукция относно s с база $s = 1$. Ако $s = 1$, тогава $d(v_1) = \dfrac{2e(G)}{n}$. Понеже v_1 има максимална степен и $\dfrac{2e(G)}{n}$ е средната степен на G, следва че G е регулярен (виж равенство (11.2)).

Нека $s \geq 2$. Тъй като $d(v_1) \geq \ldots \geq d(v_r)$, от това, че $v_1, \ldots, v_s$ е балансирана, следва че $v_1, \ldots, v_{s-1}$ е балансирана или наситена. Ще докажем, че $v_1, \ldots, v_{s-1}$ е балансирана. Да допуснем противното. Тогава $v_1, \ldots, v_{s-1}$ е наситена, т.е.

$$\frac{d(v_1) + \cdots + d(v_{s-1})}{s-1} > \frac{e(G)}{n}. \tag{11.44}$$

От Теорема 11.1 следва, че

$$d(v_1) + \cdots + d(v_{s-1}) \leq \frac{(s-1)^2 n}{s}. \tag{11.45}$$

Ако в (11.45) имаме равенство тогава, съгласно Теорема 11.1 (в), $e(G) \leq g(n,s)$. Тъй като $s \leq r \leq n$, от (11.43) следва $e(G) \leq g(n,r)$, което противоречи на условието $e(G) > g(n,r)$. Нека сега (11.45) е строго. Ще разгледаме два случая.

Случай 1. $n \equiv 0 \pmod{s}$.

Понеже (11.45) е строго и $\dfrac{(s-1)^2 n}{s}$ е цяло положително число имаме

$$d(v_1) + \cdots + d(v_{s-1}) \leq \frac{(s-1)^2 n}{s} - 1.$$

От последното неравенство и (11.44) следва, че $e(G) \leq f(n,s)$. Съгласно (11.41), $e(G) \leq g(n,s)$. От последното неравенство и (11.43) следва $e(G) \leq g(n,r)$, което противоречи на условието $e(G) > g(n,r)$.

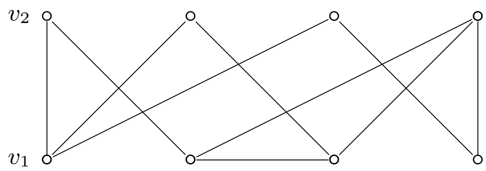
Случай 2. $n = rq + \nu$, $1 \leq \nu \leq r-1$.

Повтаряйки разсъжденията на Случай 2 от доказателството на Теорема 11.4, стигаме до извода, че $e(G) \leq g(n,s)$. Понеже $s \leq r \leq n$, от (11.43) следва $e(G) \leq g(n,r)$, което противоречи на условието $e(G) > g(n,r)$.

Получените и в двата случая противоречия доказват, че $v_1, \ldots, v_{s-1}$ е балансирана. Съгласно индуктивната хипотеза G е регулярен. С това Теорема 11.5 е доказана.

Теорема 11.5 е публикувана в [K40].

Пример 11.7. *На Фигура 11.1 е даден граф, който има балансирана β-редица $\{v_1, v_2\}$, Този граф обаче не е регулярен, Следователно, условието $e(G) > g(n,r)$ в Теорема 11.5 е съществено.*



Фигура 11.1

Забележка 11.2. *Нека* $n = rq + \nu$, $0 \leq \nu \leq r-1$.

Повтаряйки разсъжденията от Забележка 11.1, стигаме до извода, че като изключим ситуацията, когато $1 \leq \nu \leq r-1$ и $n \leq (r-\nu)(r-2)$, Теорема 11.5 е по-силна от Теорема 11.4.

Забележка 11.3. *Неравенството $e(G) > g(n,r)$ в условието на Теорема 11.5 не може да се замени с по-слабото условия $e(G) \geq g(n,r)$, защото ако $e(G) = g(n,r)$, има графи, които не са регулярни и имат балансирана r-членна β-редица. Съгласно Теорема 11.1, такива графи G имат следните свойства*

$$V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_r, \quad \text{където } |V_i| = \frac{n}{r}, \;\; i = 1, \ldots, r$$

$$d(v) = \frac{n(r-1)}{r}, \quad \forall\, v \in \bigcup_{i=1}^{r-1} V_i$$

$$d(v) = \frac{n(r-1)}{r} - 1, \quad \forall\, v \in V_r.$$

Следователно, всеки граф G, който има балансирани r-членни β-редици и $e(G) = g(n, r)$ е почти регулярен в смисъл, че разликата между максималната и минимална степен е 1.

Литература

[A1] Avis D.
On minimal 5-chromatic triangle-free graphs.
J. Graph Theory 3, (1979), 397-400.

[B1] Baginski P.
A generalization of Ramsey – type theorem on hypermatchings.
http://www.andrew.cmu.edu/~paulb2/Papers/Idaho.pdf

[B2] Belyi S.G.
Solution of certain combinatorial problems in Ramsey theory for graphs using computer. (in Russian)
Kibernetika (Kiev) 1985, 116-118.

[B3] Belyi S.G.
Upper estimations for distributions of monochromatic subgraphs. (in Russian)
Issled. Oper. ASU 32, (1988), 64-67.

[B4] Belyi S.G.
Triangular Ramsey numbers, triangular Ramsey graphs, triangular multiplicities and distributions of monochromatic triangles. (in Russian)
Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst Kibernetika Kiev 17 (1990), 1-5.

[B5] Berge C.
Graphs and Hypergraphs.
Matematical Library, 6, North-Holland, 1976.

[B6] Bollobas B.
Turan's Theorem and Maximal Degrees.
J. Combin. Theory Ser. B, 75 (1999), 160-164.

[B7] Bollobas B.
Modern Graph Theory.
Springer Verlag, New York, 1998.

[B8] Bollobas B., Thomason A.
Random graphs of small order.
Ann Discrete Math., 28 (1985), 47-97.

[B9] Bollobas B.
Extremal Graph Theory.
Academic Press Inc., London-New York, 1978, xx+488 pp.

[B10] Bollobas B., Erdős P.

Unsolved problems.

Proc. Fifth Brit. Comb. Conf. (Univ. Aberdeen, Aberdeen, 1975), Winnipeg, Util. Math. Publ., 675-680.

[B11] Bollobas B., Nikiforov V.

Extremal Graph Theory.

in [G12]

[B12] Bondy J.A.

Large dense neighborhoods and Turan's theorem.

J. Combin. Theory Ser. B, 34 (1983), 109-111.

[B13] Brown J., Rődl V.

Folkman numbers for graphs of small order. (English)

Ars Comb. 35A, (1993), 11-27.

[B14] Brown J., Rődl V.

A new construction of k-Folkman graphs.

Ars Comb. 29, (1990), 265-269.

[B15] Braβ P.

Zbl. 0813.05046

[B16] Bukor J.

A note on the Folkman number $F(3, 3; 5)$.

Math. Slovaca 44 (1994), 479-480.

[B17] Burr S., Rosta V.

On the Ramsey multiplities of Graphs – Problems and recent results.

Journal of Graph Theory, Vol. 4 (1980), 347-361.

[C1] Chvatal V.

The minimality of the Mycielski graph.

Lecture Notes in Math. 406 (1974), 243-246.

[C2] Chung F.

On the Ramsey number $N(3, \dots, 3; 2)$.

Discrete Math. 5 (1973), 316-321.

[C3] Chung F., Graham R.

Erdős on Graphs: His Legacy of unsolved problems.

New York; A. K. Peters, 1998.

[C4] Coles J.
Algorithms for Bounding Folkman number
Master's Thesis Proposal
http://www.jpcoles.com/uni/rit/thesis/proposal
(август, 2004)

[C5] Coles J., Radziszowski S.
Computing the Vertex Folkman Number $F_v(2, 2, 3; 4)$.
http://www.jpcoles.com/papers/
(ноември, 2004)

[D1] Dirac G.
Map colour theorems related to the Heawood color formula.
J. London Math. Soc., 31, (1956), 460-471.

[E1] Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics.
http://members.aol.com/jeff570/g.html-32K-2001-07-11

[E2] Edwards C.
The largest vertex degree sun for a triangle in a graph.
Bull. Lond. Math. Soc., 9 (1977), 203-208.

[E3] Edwards C.
Complete subgraphs with largest sum of vertex degrees.
Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976), Vol. I, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 18, North-Holland, Amsterdam – New York, 1978, pp. 293-306.

[E4] Erickson M.
An upper bound for the Folkman number *F* (3, 3; 5).
J. Graph Theory 17 (1993), 679-681.

[E5] Erdős P.
On the number of complete subgraphs contained in certain graphs.
Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. VII, Ser. A3 (1962), 459-464.

[E6] Erdős P.
On the graph theorem of Turan (Hungarian).
Math. Lapok 21 (1970), 249-251.

[E7] Erdős P., Hajnal A.
Research problem 2-5.
J. Combin. Theory 2 (1967), 104.

[E8] Erdős P., Szekeres G.
A combinatorial problem in geometry.
Compositio Math., 2 (1935), 463-470.

[E9] Exoo G.
Some constructions related to Ramsey multiplicity.
Ars Comb. 26, (1988), 233-242.

[F1] Faudree R.
Complete subdraphs with large degree sums.
J. Graph Theory, 16 (1992), 327-334.

[F2] Folkman J.
Graphs with monochromatic complete subgraph in every edge coloring.
SIAM J. Appl. Math., 18 (1970), 19-24.

[F3] Frankl P., Rődl V.
Large triangle-free subgraphs in graphs without K_4.
Graphs and Combinatorics 2 (1986), 135-144.

[G1] Gallai T.
Kritische graphen II.
Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 8 (1963), 373-395.

[G2] Gallai T.
Critical graphs in: Theory of Graphs and its Applications, Proceedings of the Symposium held in Smolenice in June 1963, Czechoslovak Akad. Sciences, Prague, 1964, pp. 43-45.

[G3] Gardner M.
Ramsey graph theory (in Russian).
Kvant, 4, 1988, 15-20.

[G4] Gian – Carlo Rota (edit.)
Encyclopedia of Mathematics and its applications, V. 20, pp. 326.

[G5] Giraud G.
Sur un probleme d'Erdős et Hajnal
Annals of Discrete Math., 17 (1983), 303-306.

[G6] Goodman A.
On sets of acquaintances and strangers at any party.
Amer. Math. Monthy, 66 (1959), 778-783.

[G7] Graham R., Luczak T., Rődl V., Ruciński A.
Ramsey properties of families of graphs.
J. Combin. Th., Ser. B, 86 (2002), 413-419.

[G8] Graham R. L.
On edgewise 2-coloerd graphs with monochromatic triangles containing no complete hexagon.
J. Combin. Theory 4 (1968), 300.

[G9] Graham R. L., Spencer J. H.
On small graphs with forced monochromatic triangles.
Recent Trends in Graph Theory, *Lecture Notes in Math.* 186 (1971), 137-141.

[G10] Graver J., Yackel J.
Some Graph Theoretic Results Associated with Ramsey's Theorem.
Journal of Combinatorial Theory, 4 (1968), 125-175.

[G11] Grinstead C., Roberts S.,
On the Ramsey Numbers $R(3,8)$ and $R(3,9)$.
Journal of Combinatorial Theory, B 33 (1982), 27-51.

[G12] Gross J., Yellen J. (editors)
Handbook of Graph Theory.
CRC PRESS, 2003.

[G13] Guta P.
On the structure of k-chromatic-critical graphs of order $k+p$.
Stud. Cerc. Math., 50 (1998), № 3 – 4, 169-173.

[G14] Greenwood R., Gleason A.
Combinatorial relation and chromatic graphs.
Canad. J, Math., 7 (1955), 1 – 7.

[H1] Hajnal A.
A theorem on k-saturated graphs.
Canad. Math. J., 17 (1965), 720-724.

[H2] Hanson D.,MacGillivray G., Youngs D.
The size of a minimum five-chromatic K_4 – free graph.
Discrete Math., 1 – 3 (1993), 353-355.

[H3] Harary F., Prins G.
Generalized Ramsey theory for graphs. IV: The Ramsey multiplicity of a graph.
Networks 4 (1974), 163-173.

[H4] Harary F.
Graph Theory. Addison – Wesley (1969).

[H5] Hall P.

On representatives of subsets.

J. London Math. Soc., 10 (1935), 26-30.

[H6] Halldorsson M., Radhakrishnan J.

Greed is good: Approximating independent sets in sparse and bounded-degree graphs.

Algorithmica 18 (1), 1997, 145-163.

[I1] Irving R. W.

On a bound of Graham and Spencer for graph-coloring constant.

J. Combin. Theory 15 (1973), 200-203.

[J1] Jacobson M.

A note on Ramsey multiplicity.

Discrete Math., 29 (1980), 201-203.

[J2] Jacobson M.

A note on Ramsey multiplicity for stars. (English)

Discrete Math., 42 (1982), 63-66.

[J3] Jensen T., Royle G.

Small graphs with chromatic number 5: a computer search.

J. Graph Theory 19 (1995), 107-116.

[J4] Jensen T., Toft B.

Graph coloring problems.

New York, NY: John Wiley & Sons, xix (1995), 295.

[J5] Jensen T., Toft B.

25 pretty graph colouring problems.

Discrete Math. 229 (2001), № 1 – 3, 167-169.

[K1] Kery G.

On a theorem of Ramsey.

Math. Lapok 15 (1964), 204-224. (in Hungarian)

[K2] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.

A generalization of Turán's theorem on graphs. (in Russian)

C. R. Acad. Bulgare Sci. 29 (1976), № 11, 1567-1570.

[K3] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.

Maximum of a multilinear form of integer variables, and its application in the theory of extremal graphs. (in Russian)

C. R. Acad. Bulgare Sci. 30 (1977), № 10, 1373-1376.

[K4] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nikoforov V.

Solution of a problem of P. Erdős about the maximum number of triangles with a common edge in a graph. (in Russian)

C. R. Acad. Bulgare Sci. 32 (1979), № 10, 1315-1318

[K5] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.

Turan's graph Theorem. (in Bulgarian)

Narodna prosveta Press., Sofia, 1980.

[K6] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.

On the maximum number of triangles of a graph. (in Russian)

PLISKA Stud. Math. Bulgar. 2 (1981), 137-142.

[K7] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.

Ramsey numbers. (in Bulgarian)

Narodna prosveta Press., Sofia, 1982.

[K8] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.

An extremal property of Turán graphs. I. (in Russian)

Godishnik Vissh. Uchebn. Zaved. Prilozhna Math. 20 (1984), № 2, 141-152 (1985).

[K9] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.

Graphs with a given number of edges and with a maximum number of triangles. (in Russian)

Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Méc. 79 (1985), № 1, 313-321 (1989).

[K10] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.

An extremal problem for graphs. (in Bulgarian)

Fiz.-Mat. Spis. Bulgar. Akad. Nauk. 26 (61) (1986), № 4, 283-288 (1987).

[K11] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.

On the maximum number of triangles with a common edge. (in Russian)

Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. 82 (1988), 37-52 (1991).

[K12] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.

On the maximum number of edges in a graph. (in Russian)

Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. 82 (1988), 25-35 (1991).

[K13] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.

Extremal graph theory. (in Bulgarian)

"Kliment Ohridski" University Press, Sofia, 1990.

[K14] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.
On K_4' – graphs. (in Russian)
Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. 87 (1993), № 1-2, 271-277 (1999).

[K15] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Pashov I.
Ramsey multiplicity $M(3, 6)$ is 2.
God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Inform. 83, № 1 (Mat.), 17-28 (1989).

[K16] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Pashov I.
On the Ramsey $(3, 4)$ multiplicity. (in Russian)
God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Inform. 86 (1994), № 1 (Mat.), 87-93 (1992).

[K17] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
On the maximum number of edges of a graph. (in Russian)
C. R. Acad. Bulg. Sci. 29 (1976), 1575-1578.

[K18] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Maximum of the number of cliques of some graphs. (in Russian)
God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Mekh. 70 (1975/76), 23-26 (1981).

[K19] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Inequalities connected with graphs. (in Russian)
C. R. Acad. Bulg. Sci. 30 (1977), 635-638.

[K20] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Extremal problems for s-graphs and a theorem of Turan. (in Russian)
Serdica 3, (1977), 117-125.

[K21] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
p-sequences of graphs and extremal properties of Turan graphs. (in Russian)
C. R. Acad. Bulg. Sci. 30 (1977), 475-478.

[K22] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Sharpening of a theorem of Greenwood and Gleason on the colorings of the edges of a complete graph with nine vertices. (in Russian)
C. R. Acad. Bulgare Sci. 31 (1978), 631-633.

[K23] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
On the Graham-Spencer number. (in Russian)
C. R. Acad. Bulg. Sci. 32 (1979), 155-158.

[K24] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.

On the number of nontrivial solutions of Fermat's equation $x^n + y^n = z^n$ in a Galois field. (in Russian)

C. R. Acad. Bulg. Sci. 32 (1979), 557-560.

[K25] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.

Relations and graphs. (in Bulgarian)

Fiz.-Mat. Spis. 27 (60), (1985), 314-318.

[K26] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.

On the minimum of the number of 3-anticliques in n-vertex graphs without 3-cliques. (in Russian)

Serdika 11 (1985), 251-258.

[K27] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.

On two-colorings of the edges of complete graphs with a minimal number of monochromatic triangles.

Godishnik Vissh. Uchebn. Zaved. Prilozhna Math. 21 (1985), 181-188.

[K28] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.

On colourings of edges of complete graphs where the monochromatic triangles do not cover the set of all vertices. (in Russian)

C. R. Acad. Bulg. Sci. 39 (1986), № 6, 31-34.

[K29] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.

An example of the 16-vertex Ramsey $(3, 3)$ – graph with clique number 4. (in Russian)

Serdica 9, (1983), 73-78.

[K30] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.

On the generalized Turan's theorem and on an extension of this theorem. (in Russian)

God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Mekh. 77 (1983), № 1, 231-242 (1988).

[K31] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.

On Ramsey graphs. (in Russian)

God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Mech. 78 (1984), 211-214.

[K32] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.

On the relation of p-non-adjacency on graphs. (in Russian)

God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Mekh. 78 (1984), № 1, 68-72 (1988).

[K33] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.

On the number of triples with no acquaintance. (in Bulgarian)

Fiz.-Mat. Spis. 26 (59), (1984), 360-365.

[K34] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Sequences of maximal degree vertices in graphs.
Serdika Math. J., 30 (2004), 96-102.

[K35] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Generalized r-partite graphs and Turan's Theorem.
C. R. Acad. Bulgare. Sci., 57 (2004), № 2, 19-24.

[K36] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Saturated β-sequences in graphs.
C. R. Acad. Bulgare. Sci., 57 (2004), 6, 49-54.

[K37] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Saturated edges and triangles in graphs.
МАТЕМАТИКА ПЛЮС, № 2 (2004), 46-51.

[K38] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Generalized Turan's graphs theorem.
Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. 96 (2004), 69-73.

[K39] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Turan's Theorem and maximal degrees.
Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. 96 (2004), 173-174.

[K40] Khadzhiivanov (Hadziivanov) N., Nenov N.
Balanced vertex sets in graphs.
*Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.*97, (2005), 50-64.

[K4] Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.
Leipzig, 1936.

[L1] Lin S.
On Ramsey numbers and $\overrightarrow{K}_r$-coloring of graphs.
J. Combin. Theory Ser. B 12 (1972), 82-92.

[L2] Lovasz L.
Combinatorial problems and exercises.
Akademiai Kaido, Budapest, 1979.

[L3] Luczak T., Urbanski S.
A note on restricted vertex Ramsey numbers.
Period. Math. Hungar. 33 (1996), 101-103.

[L4] Luczak T., Rucinski A., Urbanski S.
On minimal vertex Folkman graphs.
Discrete Math. 236 (2001), 245-262.

[L5] Luczak T., Rucinski A., Urbanski S.
Vertex Ramsey properties of families of graphs.
J. Combin. Theory Ser. B 84 (2002), 240-248.

[M1] Mahadev N., Reed B.
A note on vertex orders for stability number.
J. Graph Theory 30 (1999), 2, 113-120.

[M2] Mckay B.
Nauty User's Guide (version 1.5), Technical report TR-CS-90-02, Computer Science Department, Australian National University, 1990.
WWW reference: http://cs.anu.edu.au/people/bdm/

[M3] Mengersen I.
Minimal Ramsey – Graphen.
Habilitations schrift .TU Braunschweig, 1982.

[M4] Mycielski J.
Sur le coloriage des graphs.
Colloq. Math. 3 (1955), 161-162.

[M5] Murphy O.
Lower bounds on the stability number of graphs computed in terms of degrees.
Discrete Mathematics, 90 (1991), 207-211.

[N1] Nedialkov E., Nenov N.
Each 11-vertex graph without 4-cliques has a triangle-free 2-partition of vertices.
Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. 91 (1997), 127-147.

[N2] Nedialkov E., Nenov N.
On the number of independence of a class of graphs. (English)
C. R. Acad. Bulg. Sci. 53 (2000), № 3, 21-24.

[N3] Nedialkov E., Nenov N.
Computation of the vertex Folkman numbers $F(2,2,2,4;6)$ and $F(2,3,4;6)$.
Electron. J. Combin. 9 (2002), #R9.

[N4] Nedialkov E., Nenov N.
Computation of the vertex Folkman number $F(4,4;6)$.
Proceedings of the Thrid Euro Workshop on Optimal Codes and related topics, Sunny Beach, Bulgaria, 11 – 16 June 2001, 123-128.

[N5] Nenov N.
On the Ramsey $(3,4)$ – graphs. (in Russian)
God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Mekh. 73 (1979), 185-190 (1986).

[N6] Nenov N.

Up to isomorphism there exists only one minimal t-graph with nine vertices. (in Russian)

God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Mekh. 73 (1979), 169-184 (1986).

[N7] Nenov N.

On the existence of a minimal t-graph with a given number of vertices. (in Russian)

Serdica 6 (1980), 270-274.

[N8] Nenov N.

On an assumption of Lin about Ramsey–Graham–Spencer numbers. (in Russian)

C. R. Acad. Bulg. Sci. 33 (1980), 9, 1171-1174.

[N9] Nenov N.

A new estimation from below for the Graham–Spencer number $N(3,5)$. (in Russian)

Serdika 6, (1980), 373-383.

[N10] Nenov N.

On the independence number of minimal t-graphs. (in Russian)

Mathematics and education in mathematics, Proc. 9th Spring Conf., Sunny Beach/Bulg. 1980, 74-78 (1980)

[N11] Nenov N.

Some applications of Zykov's numbers in Ramsey's theory. (in Russian with English summary)

God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Mekh. 74 (1980), 29-50 (1986).

[N12] Nenov N.

Ramsey graphs and some constants related to them. (in Bulgarian)

Ph.D. Thesis, University of Sofia, Sofia, 1980.

[N13] Nenov N.

Certain remarks on Ramsey multiplicities. (in Russian)

Mathematics and education in mathematics, Proc. 10th Spring Conf. Union Bulg. Math., Sunny Beach 1981, 176-179 (1981).

[N14] Nenov N.

Sharpening of Lin's inequalities relating to Ramsey theory. (in Russian)

C. A. Acad. Bulg. Sci. 34 (1981), 307-310.

[N15] Nenov N.

On a certain constant connected with Ramsey $(3,4)$-graphs. (in Russian)

Serdika 7 (1981), 366-371.

[N16] Nenov N.

An example of a 15-vertex Ramsey $(3, 3)$-graph with clique number 4. (in Russian)

C. A. Acad. Bulg. Sci. 34 (1981), 1487-1459.

[N17] Nenov N.

Generalization of a certain theorem of Greenwood and Gleason on three-color colorings of the edges of a complete graph with 17 vertices. (in Russian)

C. A. Acad. Bulg. Sci. 34 (1981), 1209-1212.

[N18] Nenov N.

Lower estimates for some constants related to Ramsey graphs. (in Russian)

God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Mekh. 75 (1981), 27-38 (1984).

[N19] Nenov N.

On proper 3-coloring of the edges of complete graphs. (in Russian)

Mathematics and education in mathematics, Proc. 11th Spring Conf. Union Bulg. Math., Sunny Beach 1982, 242-247 (1982).

[N20] Nenov N.

On the Zykov numbers and some its applications to Ramsey theory.

Serdika Bulg. Math. Publ. 9 (1983), 161-167. (in Russian)

[N21] Nenov N.

On a Ramsey type property for the 10-vertices graphs. (in Russian)

Mathematics and education in mathematics, Proc. 13th Spring Conf. Union Bulg. Math., Sunny Beach 1984, 165-172 (1984).

[N22] Nenov N.

The chromatic number of an arbitrary 10-vertex graph without 4-cliques is not larger than 4. (in Russian)

C. A. Acad. Bulg. Sci. 37 (1984), 301-304.

[N23] Nenov N.

Application of the corona-product of two graphs in Ramsey theory.

Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. 79 (1985), 349-355. (in Russian)

[N24] Nenov N.

A problem of Erdős and Hajnal in Ramsey theory. (in Bulgarian)

Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. 79 (1985), 5-13.

[N25] Nenov N.

Lower bounds for the number of vertices of some Ramsey graphs. (in Russian)

Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. 86 (1992), 11-15

[N26] Nenov N.
On the $(3,4)$-Ramsey graphs without 9-cliques. (in Russian)
God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Infor. 85 (1993), № 1 (Mat.), 71-81 (1991).

[N27] Nenov N.
On the small graphs with chromatic number 5 without 4-cliques.
Discrete Math. 188 (1998), 297-298.

[N28] Nenov N.
On a class of vertex Folkman graphs.
Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. 94 (2000), 15-25.

[N29] Nenov N.
A generalization of a result of Dirac.
Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. 95 (2001), 59-69.

[N30] Nenov N.
On the 3-coloring vertex Folkman number $F(2,2,4)$.
Serdika Math. J. 27 (2001), 131-136.

[N31] Nenov N.
On the vertex Folkman number $F(3,4)$.
C. A. Acad. Bulgare Sci. 54, 2 (2001), 23-26.

[N32] Nenov N.
Computation of the vertex Folkman numbers $F(2,2,2,3;5)$ and $F(2,3,3;5)$.
Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. 95 (2001), 71-82.

[N33] Nenov N.
Lower bound for a number of vertices of some vertex Folkman graphs.
C. A. Acad. Bulg. Sci. 55, 4 (2002), 33-36.

[N34] Nenov N.
On a class of vertex Folkman numbers.
Serdika Math. J. 28 (2002), 219-232.

[N35] Nenov N.
Bounds on the vertex Folkman numbers $F(4,4;5)$.
Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. 96 (2004), 75-83.

[N36] Nenov N.
Lower Bounds for some Ramsey numbers.
Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. 96 (2004), 85-87.

[N37] Nenov N.
On the triangle vertex Folkman numbers.
Discrete mathematics 271 (2003), 327-334.

[N38] Nenov N., Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.

A new proof of a theorem about the maximum number of p-cliques of graphs. (in Russian)

God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Mekh. 70 (1975/76), 93-98 (1981).

[N39] Nenov N., Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.

On some colorings in two colors of the edges of the complete graph with nine vertices. (in Russian)

God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Mekh. 71 (1976/1977), Part II, 92-115(1986).

[N40] Nenov N., Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.

On edgewise 2 – colored graphs containing a monochromatic triangle. (in Russian)

Serdica 5 (1979), 303-305.

[N41] Nenov N., Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.

Extremal problems for graphs with filters. (in Russian)

PLISKA, Stud. Math. Bulg. 1981, № 2, 119-123 (1981).

[N42] Nenov N., Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.

Description of the graphs with 13 vertices having a unique triangle a unique 5-anticlique. (in Russian)

God. Sofij. Univ., Fak. Mat. Mekh. 76 (1982), 91-107 (1987).

[N43] Nenov N., Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.

Every Ramsey graph without 5-cliques has more than 11 vertices. (in Russian)

Serdica 11 (1985), 341-356.

[N44] Nešetřil J., Rődl V.

The Ramsey property for graphs with forbidden complete subgraphs.

J. Combin. Theory Ser. B 20 (1976), 243-249.

[N45] Nenov N., Khadzhiivanov (Hadziivanov) N.

On minimal t-graphs.

Serdica 6 (1980), 128-142.

[P1] Pashov I.

An 18 vertex graph with two 3-cliques and without 6-anticliques.

C. A. Acad. Bulg. Sci. 41(1988), 12, 35-36.

[P2] Pashov I.

Ramsey multiplicity in the case of 2-colorings of edges of a complete graph with fourteen vertices. (in Russian)

Serdica 10 (1984), 192-197.

[P3] Piwakowski K., Radziszowski S., Urbański S.
Computation of the Folkman number $F_e(3,3;5)$.
J. Graph Theory 32 (1999), 41-49.

[P4] Piwakowski K., Radziszowski S.
The Ramsey multiplicity of K_4.

[P5] Pashov I.
Кратности и реализации на Рамзи.
Ph. D. Thesis, University of Sofia, 1985.

[R1] Radziszowski S.
Small Ramsey numbers.
*Electronic J. of Combinatorics, DS*1 (version #8), 2001, 38.

[R2] Radziszowski S.
Small Ramsey numbers.
Electronic J. of Combinatorics, Dynamic Survey, 1, 2002.
http://www.combinatorics.org/Surveys/

[R3] Ramsey P.
On a problem of formal logic.
Proc. London Math. Soc., 30 (1930), 264-268.

[R4] Roman S.
The maximum numbers of q-cliques in a graph with no p-clique.
Discrete Math. 14 (1976), 365-371.

[R5] Rosta V., Suranyi L.
A note on the Ramsey-multiplicity of the circuit.
Period. Math. Hung. 7, (1977), 223-227.

[R6] Рыбников (редактор)
Комбинаторный анализ,
Москва, "Наука", 1982

[R7] Robertson A.
New Lower Bound for Multicolored Ramsey Numbers.
Electronic J. of Combinatorics, 9, #R13, 2002.

[R8] Rowlinson P.
Certain 3-decompositions of complete graphs, with an application to finite Fields.
Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A, 99 (1985), 277-281.

[S1] Sauer N.

A generalization of Turan's theorem.

J. Combin. Theory Ser B 10 (1971), 109-112.

[S2] Schäuble M.

Zu einem Kantenfarbungsproblem. Remerkungen zu einer Note von R. L. Graham.

Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilmenau 15 (1969), Heft 2, 55-58.

[S3] Schur I.

Uber die Kongruenz $x^n + y^n \equiv z^n \pmod{p}$.

Jahr. Deutsch. Math. Verein 25 (1916), 114-117.

[S4] Spencer J.

Three hundred million points suffice.

J. Combin. Theory Ser. A 49 (1988), 210-217. See erratum in Vol. 50, p. 323.

[T1] Toft B.

75 graph – colourings.

Proc. Conf., Milton Keynes/UK 1988, Pitman Res. Notes Math. Ser. 218 (1990), 9-35.

[T2] Turan P.

On an extremal problem in graph theory.

Mat. Fiz. Lapok, 48 (1941), 436-452.

[U1] Urbański S.

Remarks on 15-vertex $(3, 3)$ – Ramsey graphs not containing K_5.

Disc. Math. Graph Theory 16 (1996), 173-179.

[U2] Urbański S.

Folkman numbers.

Ph. D. 1999, UAM, Poland.

[V1] Vizing V., Melnikov L.

Solution of a Toft problem.

Diskret. Analiz, 19 (1971), 11-14. (in Russian)

[Z1] Zbl. 0788. 05044

[Z2] Zverovich I.

Minimum degree algorithms for stability number.

Discrete Appl. Math. 132 (2003), 1 – 3, 211-216.

[Z3] Zykov A.
On Some Properties of Linear Complexes. (in Russian).
Math. Sb. 28 (1949), 163-188.

[Z4] Zykov A.
Fundamentals of graph theory.
"Nauka", Moscow (1987).