ЕКСТРЕМАЛНИ ЗАДАЧИ ЗА ОЦВЕТЯВАНЕ НА ГРАФИ

Недялко Ненов

СУ "‘Св. Климент Охридски"’
Факултет по Математика и Информатика

28.06.2005 г.

Основни понятия и означения

Разглеждат се само обикновени графи.

- $\mathrm{V(G)}$ — множеството от върховете на графа G.
- $\mathrm{E(G)}$ — множеството от ребрата на графа G.
- $\overline{\mathrm{G}}$ — допълнителният граф на G, който се дефинира с равенствата

$$\mathrm{V}(\overline{\mathrm{G}}) = \mathrm{V(G)} \qquad [\mathrm{u}, \mathrm{v}] \in \mathrm{E}(\overline{\mathrm{G}}) \iff [\mathrm{u}, \mathrm{v}] \notin \mathrm{E(G)}$$

- $\mathrm{K_n}$ — пълният граф с n върха
- $\mathrm{C_n}$ — прост цикъл с n върха (n-ъгълник)

Суми на графите G_1 и G_2 ($V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$) наричаме граф G, за който

- $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$
- $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup E'$
- $E' = \{[x, y] \mid x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$

Множество от p-върха на графа G се нарича p-клика на G, ако всеки два от тези върхове са съседни.

- $\mathrm{cl}(G)$ — кликово число на G, т.е. максималното p, за което G има p-клика.
- $\alpha(G)$ — числото на независимост на G, което се дефинира с равенството

$$\alpha(G) = \mathrm{cl}(\overline{G})$$

Някои специални характеристики на даден граф

- $\chi(G)$ — хроматичното число на графа G, т.е. най-малкото естествено число r, за което съществува разлагане

$$V(G) = V_1 \cup \cdots \cup V_r, \qquad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

такова че множествата V_i са независими.

- $\pi(G)$ — максималният брой независими графи в G, които можем да изберем.

Исторически обзор

През 1930 година P. Ramsey в [84] доказва едно обобщение на принципа на Дирихле. Частен случай на този резултат се формулира по следния начин:

За произволни естествени числа r и $m \geq 2$ съществува естествено число $N(r, m)$ такова, че ако $n \geq N(r, m)$, тогава при всяко оцветяване на ребрата на пълния граф с n върха в r цвята има подграф $K_m \subset K_n$, всичките ребра на който са оцветени еднакво.

Както и принципа на Дирихле, Теоремата на Ramsey има много приложения. Тези приложения изискват да знаем минималното възможно $N(r, m)$ от формулирания по-горе резултат на Ramsey. Това минимално число се нарича число на Ramsey и се бележи с $R(\underbrace{m, \ldots, m}_{r})$.

Най-малкото известно число на Ramsey е $R(3,3) = 6$. Да припомним, че това означава, че при всяко оцветяване на ребрата на K_6 с два цвята, непременно има едноцветен триъгълник (за краткост това свойство ще отбелязваме със символа $K_6 \longrightarrow (3,3)$) и K_5 няма това свойство. Ясно е, че ако графът G съдържа K_6, тогава $G \longrightarrow (3,3)$.

През 1967 година P. Erdös и A. Hajnal в [17] формулират следния проблем:

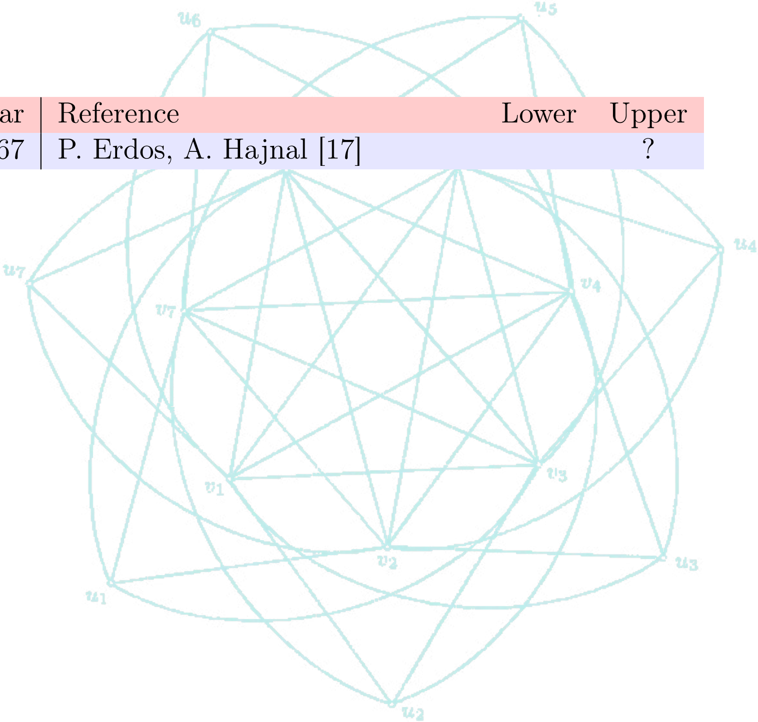
Съществува ли граф $G \longrightarrow (3,3)$, който не съдържа пълния граф с 6 върха K_6?

Положителен отговор на този въпрос почти едновременно дават няколко математици. Най-простия такъв граф (с 8 върха) е построен от R. Graham в [23] през 1968 година. По-нататък Erdös дефинира числата

$$F_e(3,3;5) = \min\{|V(G)| \,:\, G \longrightarrow (3,3) \text{ и } K_5 \not\subset G\};$$

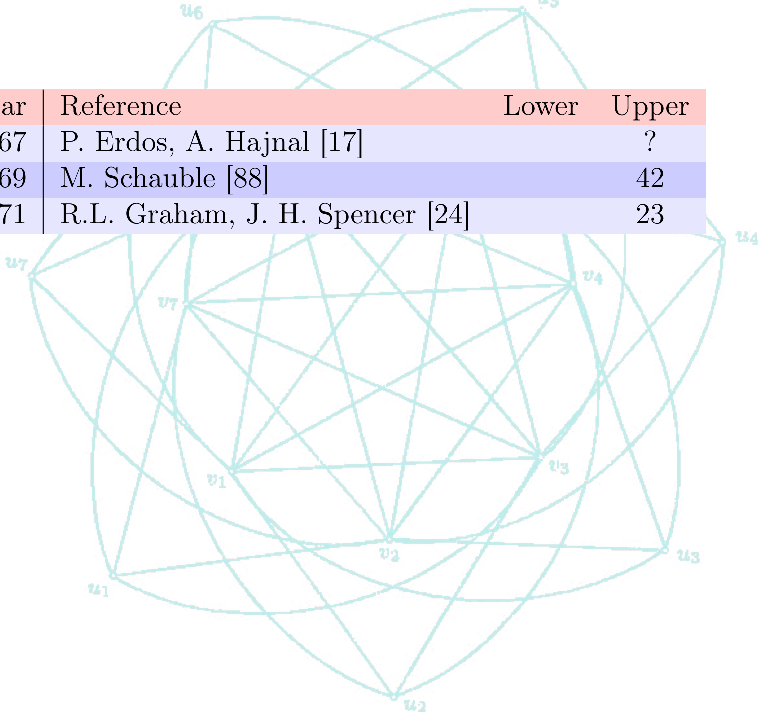
$$F_e(3,3;4) = \min\{|V(G)| \,:\, G \longrightarrow (3,3) \text{ и } K_4 \not\subset G\}$$

и поставя като проблем тяхното пресмятане. Числото $F_e(3,3;5)$ е пресметнато окончателно през 1998 година.



Year	Reference	Lower	Upper
1967	P. Erdos, A. Hajnal [17]		?

Year	Reference	Lower	Upper
1967	P. Erdos, A. Hajnal [17]		?
1969	M. Schauble [88]		42

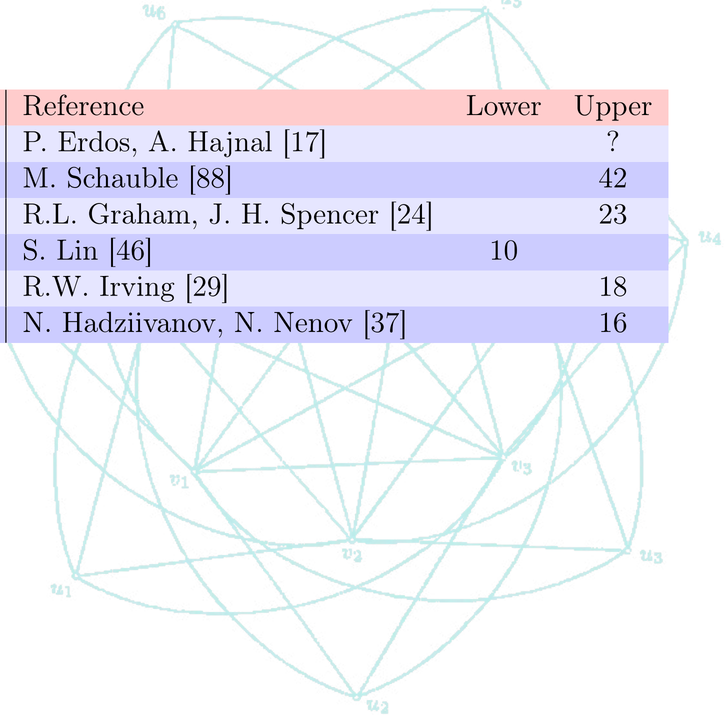


Year	Reference	Lower	Upper
1967	P. Erdos, A. Hajnal [17]		?
1969	M. Schauble [88]		42
1971	R.L. Graham, J. H. Spencer [24]		23

Year	Reference	Lower	Upper
1967	P. Erdos, A. Hajnal [17]		?
1969	M. Schauble [88]		42
1971	R.L. Graham, J. H. Spencer [24]		23
1972	S. Lin [46]	10	

Year	Reference	Lower	Upper
1967	P. Erdos, A. Hajnal [17]		?
1969	M. Schauble [88]		42
1971	R.L. Graham, J. H. Spencer [24]		23
1972	S. Lin [46]	10	
1973	R.W. Irving [29]		18

Year	Reference	Lower	Upper
1967	P. Erdos, A. Hajnal [17]		?
1969	M. Schauble [88]		42
1971	R.L. Graham, J. H. Spencer [24]		23
1972	S. Lin [46]	10	
1973	R.W. Irving [29]		18
1979	N. Hadziivanov, N. Nenov [37]		16



Year	Reference	Lower	Upper
1967	P. Erdos, A. Hajnal [17]		?
1969	M. Schauble [88]		42
1971	R.L. Graham, J. H. Spencer [24]		23
1972	S. Lin [46]	10	
1973	R.W. Irving [29]		18
1979	N. Hadziivanov, N. Nenov [37]		16
1980	N. Nenov [55]	11	

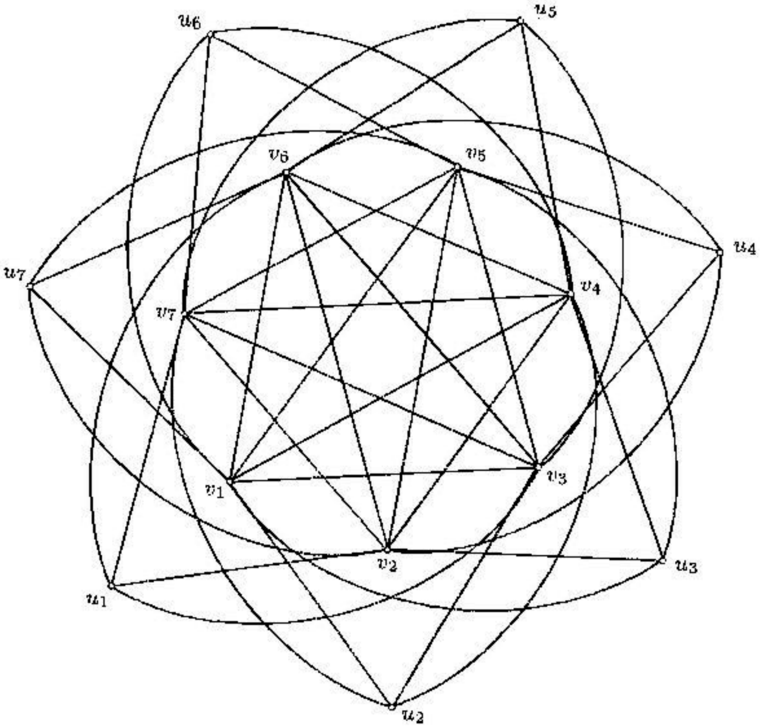
Year	Reference	Lower	Upper
1967	P. Erdos, A. Hajnal [17]		?
1969	M. Schauble [88]		42
1971	R.L. Graham, J. H. Spencer [24]		23
1972	S. Lin [46]	10	
1973	R.W. Irving [29]		18
1979	N. Hadziivanov, N. Nenov [37]		16
1980	N. Nenov [55]	11	
1981	N. Nenov [59]		15

Year	Reference	Lower	Upper
1967	P. Erdos, A. Hajnal [17]		?
1969	M. Schauble [88]		42
1971	R.L. Graham, J. H. Spencer [24]		23
1972	S. Lin [46]	10	
1973	R.W. Irving [29]		18
1979	N. Hadziivanov, N. Nenov [37]		16
1980	N. Nenov [55]	11	
1981	N. Nenov [59]		15
1985	N. Hadziivanov, N. Nenov [79]	12	

Year	Reference	Lower	Upper
1967	P. Erdos, A. Hajnal [17]		?
1969	M. Schauble [88]		42
1971	R.L. Graham, J. H. Spencer [24]		23
1972	S. Lin [46]	10	
1973	R.W. Irving [29]		18
1979	N. Hadziivanov, N. Nenov [37]		16
1980	N. Nenov [55]	11	
1981	N. Nenov [59]		15
1985	N. Hadziivanov, N. Nenov [79]	12	
1993	M. Erikson [16]		17

Year	Reference	Lower	Upper
1967	P. Erdos, A. Hajnal [17]		?
1969	M. Schauble [88]		42
1971	R.L. Graham, J. H. Spencer [24]		23
1972	S. Lin [46]	10	
1973	R.W. Irving [29]		18
1979	N. Hadziivanov, N. Nenov [37]		16
1980	N. Nenov [55]	11	
1981	N. Nenov [59]		15
1985	N. Hadziivanov, N. Nenov [79]	12	
1993	M. Erikson [16]		17
1994	J. Bukor [8]		16

Year	Reference	Lower	Upper
1967	P. Erdos, A. Hajnal [17]		?
1969	M. Schauble [88]		42
1971	R.L. Graham, J. H. Spencer [24]		23
1972	S. Lin [46]	10	
1973	R.W. Irving [29]		18
1979	N. Hadziivanov, N. Nenov [37]		16
1980	N. Nenov [55]	11	
1981	N. Nenov [59]		15
1985	N. Hadziivanov, N. Nenov [79]	12	
1993	M. Erikson [16]		17
1994	J. Bukor [8]		16
1998	Piwakowski et'al. [85]	15	



u_6
u_5
v_6
v_5
u_4
u_7
v_4
v_7
v_3
v_1
v_2
u_3
u_1
u_2

Числото $\mathrm{F_e}(3,3;4)$ все още не е пресметнато. За сега знаем само, че

$$\mathrm{F_e}(3,3;4) \leq 3 \times 10^9 \qquad \text{Spencer 1988}$$

Числата $\mathrm{F_e}(3,3;5)$ и $\mathrm{F_e}(3,3;4)$, които съответсвуват на числото на Ramsey $\mathrm{R}(3,3) = 6$, по аналогичен начин се обобщават за произволни числа на Ramsey и се наричат Фолкманови числа.

Дефиниция на върховите Фолкманови числа

За даден граф G r-разлагане (r-оцветяване) на върховете на G наричаме всяко разлагане

$$(1) \qquad \mathrm{V(G)} = \mathrm{V}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{V}_\mathrm{r}, \quad \mathrm{V}_\mathrm{i} \cap \mathrm{V}_\mathrm{j} = \emptyset, \quad \mathrm{i} \neq \mathrm{j}.$$

Казваме, че това r-разлагането е $(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{r})$-свободно, ако V_i не съдържа a_i-клика за всяко $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{r}$.Символът

$$\mathrm{G} \xrightarrow{\mathrm{v}} (\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{r})$$

означава, че G няма $(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{r})$-свободно r-разлагане.

За произволни естествени числа $a_1, \ldots, a_r$ и q дефинираме

$$H_v(a_1, \ldots, a_r; q) = \{G \mid G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r) \ \text{ и } \ cl(G) < q\}.$$

Първата екстремална задача, която разглеждаме, е определянето на минимума на броя на върховете на графите от $H_v(a_1, \ldots, a_r; q)$. Във връзка с тази задача дефинираме

$$F_v(a_1, \ldots, a_r; q) = \min\{|V(G)| : G \in H_v(a_1, \ldots, a_r; q)\}.$$

През 1970 J. Folkman доказва, че

(2) $\quad F_v(a_1, \ldots, a_r; q)$ съществува $\iff q > \max\{a_1, \ldots, a_r\}$.

Числата $F_v(a_1, \ldots, a_r; q)$ се наричат върхови числа на Folkman.

За естествените числа $a_1, \ldots, a_r$ дефинираме

$$(3) \qquad p = \max\{a_1, \ldots, a_r\} \text{ и } m = \sum_{i=1}^{r}(a_i - 1) + 1.$$

Очевидно е, че

$$K_m \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r) \text{ и } K_{m-1} \overset{v}{\nrightarrow} (a_1, \ldots, a_r),$$

където K_m е пълният граф с m върха. Следователно, ако $cl(G) \geq m$, тогава $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$. От тези разсъждения става ясно, че

$$(4) \qquad F_v(a_1, \ldots, a_r; q) = m, \quad \text{ако} \quad q > m.$$

Поради това, интересни са тези числа на Folkman $F_v(a_1, \ldots, a_r; q)$, за които $q \leq m$. През 1996 Luczak и Urbanski доказват, че

$$(5) \qquad F_v(a_1, \ldots, a_r; m) = m + \max\{a_1, \ldots, a_r\}.$$

За числата $F_v(a_1, \ldots, a_r; q)$, $q \leq m - 1$ знаем много малко. В тази дисертация ние получаваме оценки за някои от числата $F_v(a_1, \ldots, a_r; q)$, $q \leq m - 1$, като в някои специални ситуации разглежданите върхови числа на Folkman са пресметнати точно.

Дефиниция на ребрените Фолкманови числа

Всяко разлагане

$$(6) \qquad E(G) = E_1 \cup \ldots \cup E_r, \quad E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

се нарича r-оцветяване на ребрата на графа G. Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа и $a_i \geq 2$, $i = 1, \ldots, r$. Ако K е клика на G и $E(K) \subseteq E_i$, казваме че K е едноцветна клика от i-тия цвят. Казваме, че (6) е $(a_1, \ldots, a_r)$-свободно r-разлагане, ако за всяко $i \in \{1, \ldots, r\}$ не съществува едноцветна a_i-клика от i-тия цвят. Символът $G \xrightarrow{e} (a_1, \ldots, a_r)$ означава, че G няма $(a_1, \ldots, a_r)$-свободно r-оцветяване на ребрата. Дефинираме

$$H_e(a_1, \ldots, a_r; q) = \{G \mid G \xrightarrow{e} (a_1, \ldots, a_r) \text{ и } cl(G) < q\}.$$

Втората основна задача, която разглеждаме е намирането на минимума на броя на върховете на графите от $\mathrm{H_e}(a_1,\ldots,a_r;q)$. Във връзка с тази задача дефинираме

$$\mathrm{F_e}(a_1,\ldots,a_r;q)=\min\{|\mathrm{V(G)}| : \mathrm{G}\in\mathrm{H_e}(a_1,\ldots,a_r;q)\}.$$

Вярно е, че

$$\text{(7)}\quad \mathrm{F_e}(a_1,\ldots,a_r;q) \text{ съществува } \iff q>\max\{a_1,\ldots,a_r\}.$$

В случая $r=2$, твърдението (7) е доказано от J. Folkman в [19], а в общия случай това твърдение е доказано от J. Nešetřil и V. Rödl в [81]. Числата $\mathrm{F_e}(a_1,\ldots,a_r;q)$ се наричат ребрени числа на Folkman.

Припомняме, че числото на Ramsey $\mathrm{R}(a_1,\ldots,a_r)$ се дефинира като най-малкото естествено число n, за което $K_n \xrightarrow{e} (a_1,\ldots,a_r)$. От тази дефиниция става ясно, че

$$\text{(8)}\quad \mathrm{F_e}(a_1,\ldots,a_r;q)=\mathrm{R}(a_1,\ldots,a_r), \text{ ако } q>\mathrm{R}(a_1,\ldots,a_r).$$

Поради това, числата на Ramsey са специален случай на ребрените числа на Folkman. Известни са много малко от числата $F_e(a_1, \dots, a_r)$ даже в ситуацията, когато $R(a_1, \dots, a_r)$ е пресметнато. В тази дисертация ние излагаме нашия принос (неравенството $F_e(3, 3; 5) \leq 15$) към решаването на проблем на
P. Erdös за пресмятането на точнана стойност на $F_e(3, 3; 5)$.
Пресмятаме още четири ребрени числа на Folkman, а именно числата

$$F_e(3, 4; 9) = 14, \qquad F_e(3, 3, 3; 16) = 21,$$

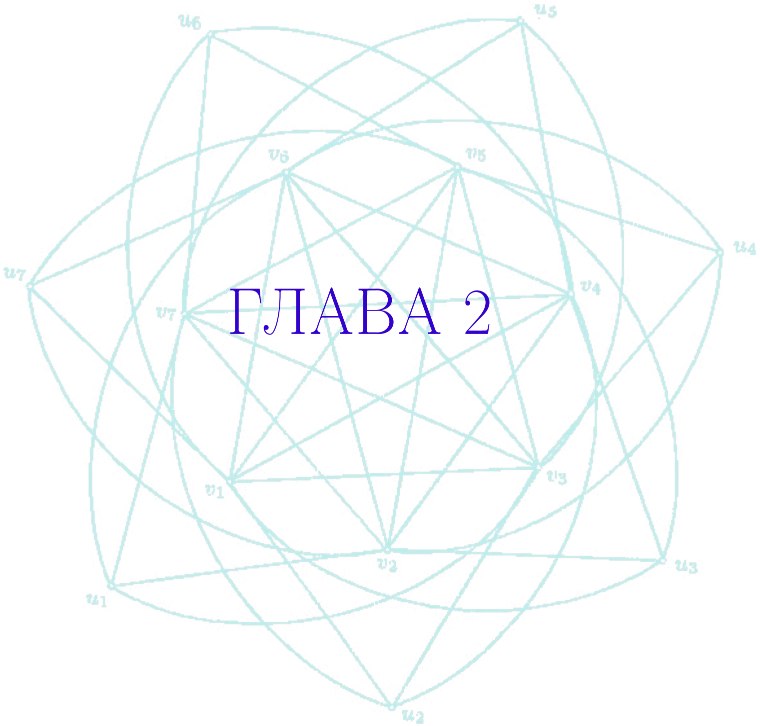
$$F_e(3, 3, 3; 15) = 23, \quad F_e(3, 3, 3; 14) = 25.$$

Описание на резултатите

ГЛАВА 1

Дефинират се необходимите понятия и означения от Теория на графите.

ГЛАВА 2



Казваме, че r-разлагането

$$\mathrm{V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j}$$

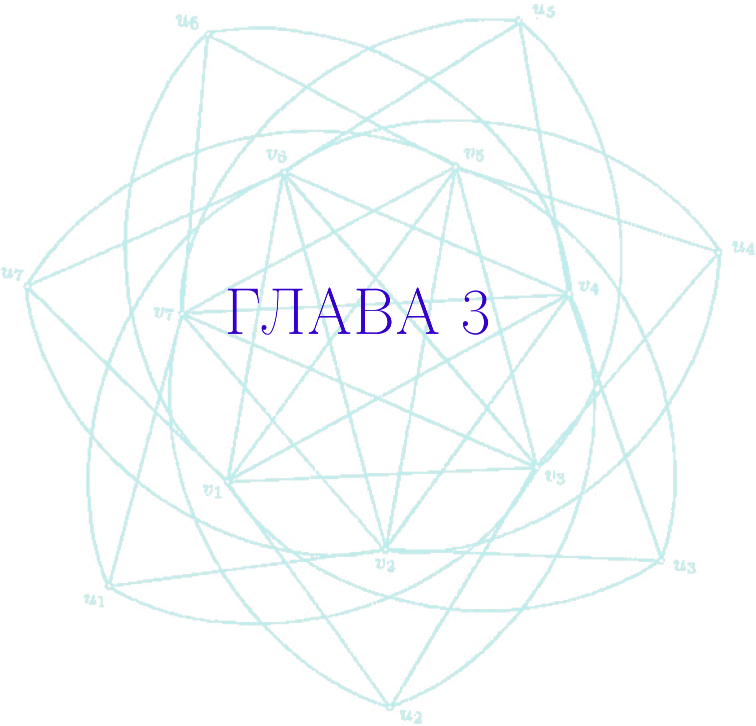
е p-плътно, ако обединението на всеки p от множествата $\mathrm{V_i}$ съдържа p-клика. Казваме, че графът G е p-плътен, ако всяко χ(G)-хроматично разлагане, където χ(G) е хроматичното число на G, е p-плътно.
Основният резултат във втора глава е следната:

Теорема 2.2

Нека G е граф, такъв че $\chi(G) = r$ и $cl(G) < r$. Ако G е p-плътен, тогава
(а) $|V(G)| \geq r + p$;
(б) от $|V(G)| = r + p$ следва $G = K_{r-p-1} + \overline{C}_{2p+1}$.

С C_n означаваме простия цикъл с дължина n. Теорема 2.2 в случая $p = 2$ е доказана от G. Dirac през 1956 г. Тази теорема играе важна роля в ГЛАВА 9 при пресмятането на числото $F_e(3, 4; 9)$.

ГЛАВА 3



Изследват се върховите графи на Folkman и се доказват някои основни техни свойства. По-точно доказани са следните теореми:

Теорема 3.1.

Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа и числата m и p са дефинирани с равенствата (3). Нека G е граф и $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$. Тогава $\chi(G) \geq m$ и ако $\chi(G) = m$, графът G е p-плътен.

Теорема 3.4.

Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа. Нека G е граф, такъв че $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$ и $cl(G) < m$. Тогава е вярно неравенството $\pi(\overline{G}) \geq p$.

Числото $\pi(G)$ означава максималния брой независими (без общ връх) ребра, които можем да изберем в G.

Основният резултат в трета глава е:

Теорема 3.5.

Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа и G е граф с $cl(G) < m - 1$ и $G \xrightarrow{v} (a_1, \ldots, a_r)$. Тогава

- (a) $|V(G)| \geq m + p + \alpha(G) - 1$;
- (в) Ако $|V(G)| = m + p + \alpha(G) - 1$, тогава G съдържа като подграф графа $K_{m-p-2} + L_p$. Поради това $|V(G)| \geq m + 3p$.

Числата m и p се дефинират с равенствата

$$p = \max\{a_1, \ldots, a_r\} \text{ и } m = \sum_{i=1}^{r}(a_i - 1) + 1,$$

а L_p е конкретен граф, дефиниран в ГЛАВА 3.

През 2001 г. Luczak, Rucinski, Urbanski доказват неравенството:

$$F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1) \geq m + p + 1.$$

Това неравенство не е точно, тъй като доказваме следната:

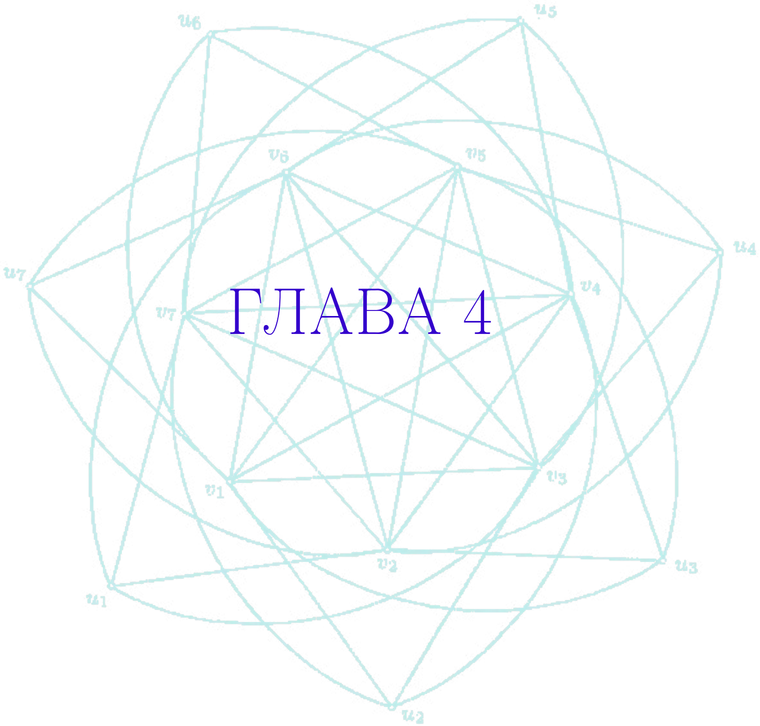
Теорема 3.6.

Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа и $m \geq p + 2$. Тогава

$$F(a_1, \ldots, a_r; m-1) \geq m + p + 2.$$

В специалния случай $a_1 = \cdots = a_r = 2$, $r \geq 5$, неравенството от Теорема 3.6 е точно.

ГЛАВА 4



Числото

$$\mathrm{F_v}(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{r}; \mathrm{m}-1) \quad \text{съществува} \Longleftrightarrow \mathrm{m} \geq \mathrm{p}+2,$$

Числата m и p са дефинирани с равенствата (3). В тази глава разглеждаме граничния случай $\mathrm{m} = \mathrm{p} + 2$. В уводната част на ГЛАВА 4 изясняваме, че от $\mathrm{m} = \mathrm{p} + 2$ следва, че числата $\mathrm{F_v}(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{r}; \mathrm{m}-1)$ са следните:

$$\mathrm{F_v}(2,2,2;3); \quad \mathrm{F_v}(2,2,\mathrm{p};\mathrm{p}+1) \ \text{ и } \ \mathrm{F_v}(3,\mathrm{p};\mathrm{p}+1) \ \text{ при } \ \mathrm{p} \geq 3.$$

През 1955 г. J. Mycielski доказва, че $\mathrm{F_v}(2,2,2;3) \leq 11$, а през 1974 г. V. Chvatal доказва, че $\mathrm{F_v}(2,2,2;3) \geq 11$. Така, че $\mathrm{F_v}(2,2,2;3) = 11$.

В тази глава разглеждаме останалите числа $\mathrm{F_v}(2,2,\mathrm{p};\mathrm{p}+1)$ и $\mathrm{F_v}(3,\mathrm{p};\mathrm{p}+1)$, където $\mathrm{p} \geq 3$.

През 2001 г. Luczak, Rucinski, Urbanski доказват, че

$$2\mathrm{p} + 3 \leq \mathrm{F_v}(3, \mathrm{p}; \mathrm{p} + 1) \leq 2\mathrm{p}^2 + 1.$$

Ние усилваме този резултат като доказваме, че:

Теорема 4.1

За всяко естествено число $\mathrm{p} \geq 3$ са верни неравенствата

$$2\mathrm{p} + 4 \leq \mathrm{F_v}(2, 2, \mathrm{p}; \mathrm{p} + 1) \leq \mathrm{F_v}(3, \mathrm{p}; \mathrm{p} + 1) \leq 4\mathrm{p} + 2.$$

От Теорема 4.1 следва, че $\mathrm{F_v}(2, 2, 2; 4) \leq 14$ и $\mathrm{F_v}(3, 3; 4) \leq 14$. Това неравенство доказваме през 1981 година. С помощта на компютър през 1999 година Piwakowski, Radziszowski, Urbanski доказват, че $\mathrm{F_v}(3, 3; 4) \geq 14$. Така, че $\mathrm{F_v}(3, 3; 4) = 14$.

През март 2005 година проф. Radziszowski и неговият ученик Coles доказват, че $F(2,2,3;4) = 14$.
За някои от числата $F_v(2,2,p;p+1)$ получаваме друга оценка отгоре с помощта на:

Следствие 4.1.

Верни са неравенствата

$$F_v(2,2,4;5) \leq 13;$$

$$F_v(2,2,6;7) \leq 22;$$

$$F_v(2,2,7;8) \leq 27;$$

$$F_v(2,2,8;9) \leq 32;$$

$$F_v(2,2,9;10) \leq 40, \quad \text{ако} \quad R(3,10) \neq 40.$$

По-нататък се пресмятат още две числа от разглеждания тип:

$$\mathrm{F_v}(2, 2, 4; 5) = 13 \;\; \text{(Теорема 4.4)} \;\; \text{и}$$

$$\mathrm{F_v}(3, 4; 5) = 13 \;\; \text{(Следствие 4.2)}.$$

В края на ГЛАВА 4 разглеждаме и числата от вида

$$\mathrm{F_v}(\underbrace{2, \ldots, 2}_{r}, p; r + p - 1) = \mathrm{F_v}(2_r, p; r + p - 1)$$

$$\mathrm{F_v}(\underbrace{3, \ldots, 3}_{r}, p; 2r + p - 1 = \mathrm{F_v}(3_r, p; 2r + p - 1).$$

За тези числа доказваме:

Теорема 4.6

За всеки две естествени числа $p \geq 3$ и $r \geq 2$ са верни неравенствата

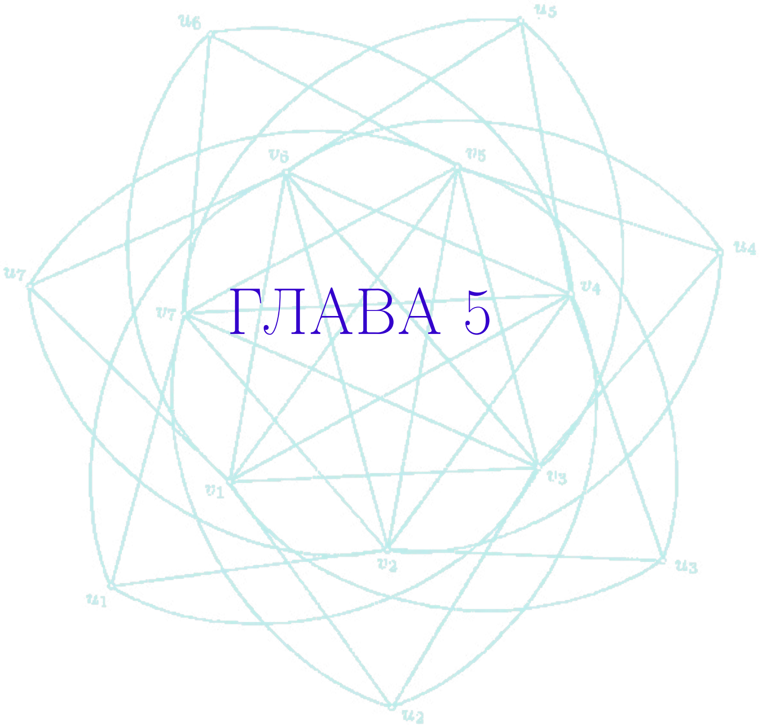
$$2p + r + 2 \leq F_v(2_r, p; r + p - 1) \leq 4p + r.$$

Теорема 4.7

Нека $p \geq 3$ и $r \geq 1$ са естествени числа. Тогава

$$2p + 2r + 2 \leq F_v(3_r, p; 2r + p - 1) \leq 4p + 2r.$$

ГЛАВА 5



Разглеждат се числата на Folkman $F_v(a_1, \dots, a_r; q)$, когато $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 2$, т.е. числата

$$F_v(\underbrace{2, \dots, 2}_{r}; q) = F_v(2_r; q).$$

От принципа на Дирихле имаме $F_v(2_r; q) = r + 1$, ако $q > r + 1$. От споменатия във втора глава резултат на Дирак имаме $F_v(2_r; r + 1) = r + 3$. За следващото число $F_v(2_r; r)$ доказваме:

Теорема 5.1

Верни са равенствата

$$F_v(2_r; r) = \begin{cases} 11, & \text{ако } r = 3 \text{ или } r = 4; \\ r + 5, & \text{ако } r \geq 5. \end{cases}$$

Ние доказваме Теорема 5.1 при $r \geq 4$.

Разгледани са и числата на Folkman $F_v(2_r; r-1)$ и $F_v(2_r; r-2)$. Доказани са следните две теореми:

Теорема 5.7

Нека r е естествено число и $r \geq 4$. Тогава

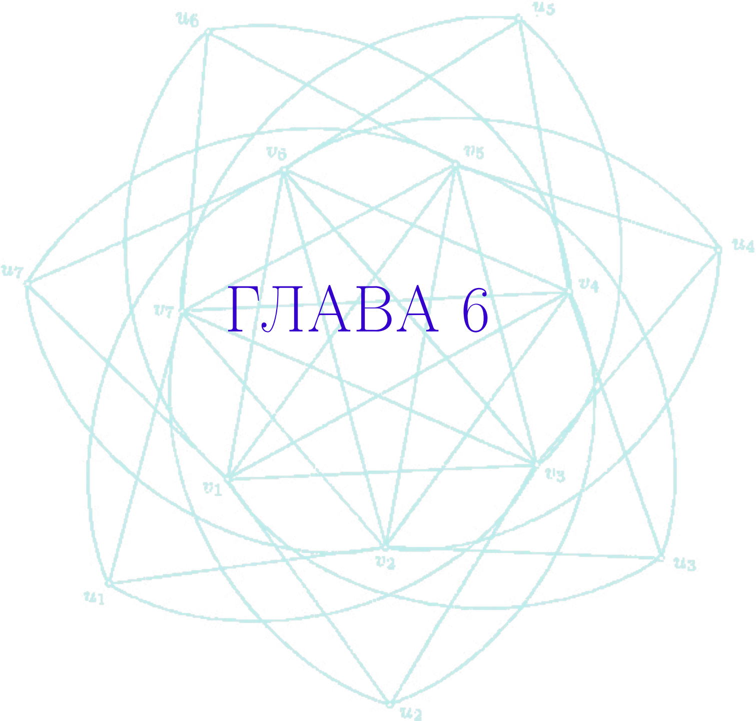
- (а) $F_v(2_r; r-1) \geq r+7$;
- (в) $F_v(2_r; r-1) = r+7$, $r \geq 8$.

Теорема 5.9

Нека $r \geq 5$ е естествено число. Тогава

- (а) $F_v(2_r, r-2) \geq r+9$;
- (в) $F_v(2_r, r-2) = r+9$, ако $r \geq 11$.

ГЛАВА 6



Разглеждат се числата $F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1)$, когато $\max\{a_1, \ldots, a_r\} = 3$, 4 или 5.

Ако $\max\{a_1, \ldots, a_r\} = 3$, съгласно (2) числото $F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1)$ съществува тогава и само тогава, когато $m \geq 5$. В граничния случай $m = 5$ има две такива числа: $F_v(3,3;4)$ и $F_v(2,2,3;4)$ и както вече отбелязахме те са равни на 14.

Ако $\max\{a_1, \ldots, a_r\} = 3$ и $m \geq 6$, тогава доказваме

Теорема 6.7.

Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа, за които p и m са дефинирани с равенствата (3). Ако $p = 3$ и $m \geq 6$, тогава

$$F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1) = m + 6.$$

Числата $F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1)$, $\max\{a_1, \ldots, a_r\} = 4$, съществуват тогава и само тогава, когато $m \geq 6$. С разработената в тази глава техника пресмятаме тези числа.

Теорема 6.8.

Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа, за които p и m са дефинирани с равенствата (3). Ако $p = 4$ и $m \geq 6$, тогава

$$F_v(a_1, \ldots, a_r; m-1) = m + 7.$$

Накрая на 6-та глава се разглеждат и числата $F_v(a_1, \dots, a_r; m-1)$, когато $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 5$. Тези числа съществуват тогава и само тогава, когато $m \geq 7$. През 2001 г. Luczak, Rucinski, Urbanski доказват, че

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) \leq m + 25, \quad \text{ако} \quad m \geq 12$$

и анонсират без доказателство неравенството

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) \leq 77 - 3m, \quad 8 \leq m \leq 11.$$

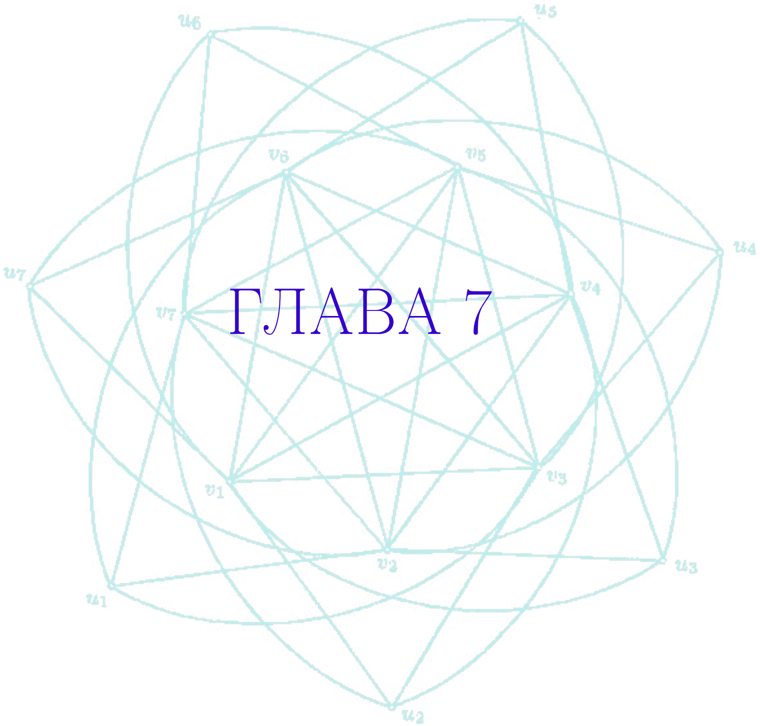
Ние подобрявяме тези оценки като доказваме, че:

Теорема 6.9

Нека $a_1, \dots, a_r$ са естествени числа, за които $m \geq 7$ и $\max\{a_1, \dots, a_r\} = 5$. Тогава

$$F_v(a_1, \dots, a_r; m-1) \leq m + 15.$$

ГЛАВА 7



Да си припомним, че

$$F_v(a_1, \dots, a_r; q) \text{ съществува } \iff q \geq \max\{a_1, \dots, a_r\} + 1.$$

Най-трудни за пресмятане $F_v(a_1, \dots, a_r; q)$ са в граничния случай
$q = \max\{a_1, \dots, a_r\} + 1$. В ГЛАВА 7 се разглеждат числата $F_v(p, p; p+1)$. За тези числа са известни следните две общи оценки:

$$(10) \qquad F_v(p, p; p+1) \leq \lfloor 2p\,!\,(e-1) \rfloor - 1, \quad [48].$$

$$(11) \qquad F_v(p, p; p+1) \leq \lfloor p\,!\,e \rfloor - 2, \quad p \geq 3, \quad [65].$$

Знаем точните стойности само на две от числата $F_v(p, p; p+1)$. Първото е $F_v(2, 2; 3) = 5$ и е очевидно. Второто е $F_v(3, 3; 4) = 14$ и е разглеждано в глава 4. Неравенството $F_v(3, 3; 4) \leq 14$ е получено в [59] и е доказано подробно в ГЛАВА 4. За следващото число $F_v(4, 4; 5)$ от (10) имаме $F_v(4, 4; 5) \leq 81$, а от (11) следва, че $F_v(4, 4; 5) \leq 63$.

Ние подобряваме тези оценки като доказваме, че

Теорема 7.1

$16 \le \mathrm{F_v}(4, 4; 5) \le 35.$

Доказваме и рекурентното неравенство:

Теорема 7.2

За всяко естествено число $\mathrm{p} \ge 2$ е вярно неравенството

$$\mathrm{F_v}(\mathrm{p}+1, \mathrm{p}+1; \mathrm{p}+2) \le (\mathrm{p}+1)\mathrm{F_v}(\mathrm{p}, \mathrm{p}; \mathrm{p}+1).$$

От последното неравенство очевидно следва

$$\mathrm{F_v}(\mathrm{p}, \mathrm{p}; \mathrm{p}+1) \le \frac{\mathrm{p}\,!}{24}.\mathrm{F_v}(4, 4 : 5), \quad \mathrm{p} \ge 4.$$

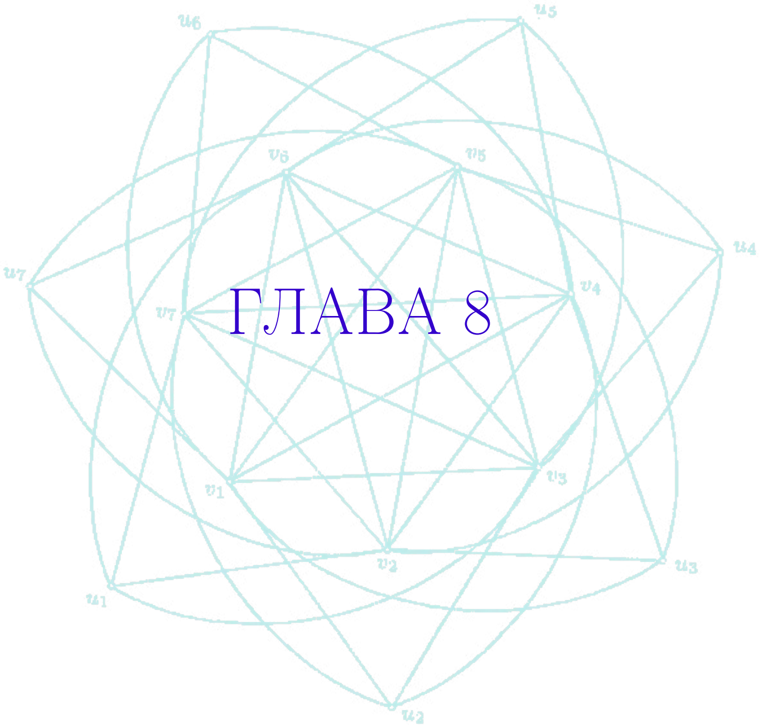
Тъй като $\mathrm{F_v}(4, 4 : 5) \le 35$ получаваме

Следствие 7.1

За всяко естествено число $\mathrm{p} \ge 4$ е вярно неравенството

$$\mathrm{F_v}(\mathrm{p}, \mathrm{p}; \mathrm{p}+1) < 1.46\mathrm{p}!\,.$$

ГЛАВА 8



В тази глава се разглеждат оцветявания на ребрата на пълния граф с n върха K_n. Нека γ е r-оцветяване на ребрата на пълния граф с $R(a_1, \ldots, a_r)$ върха. С $t(a_i)$ означаваме броя на едноцветните a_i-клики от i-тия цвят. Дефинираме $t(\gamma) = t(a_1) + \cdots + t(a_r)$. С $M(a_1, \ldots, a_r)$ означаваме $\min t(\gamma)$ по всички r-оцветявания γ на ребрата на пълния граф с $R(a_1, \ldots, a_r)$ върха. Числото $M(a_1, \ldots, a_r)$ се нарича кратност на Ramsey съответствуваща на числото на Ramsey $R(a_1, \ldots, a_r)$.

Доказани са следните теореми:

Теорема 8.1 (съвм. с Н. Хаджииванов)

- (а) $M(3,4) = 1$;
- (в) съществува единствено (с точност до изоморфизъм) 2-оцветяване на $E(K_9)$, в което няма едноцветни 3-клики от първия цвят и има единствена едноцветна 4-клика от втория цвят.

Теорема 8.2.

Нека $a_1, \ldots, a_r$ са естествени числа, $a_i \geq 3$, $i = 1, \ldots, r$, такива, че

$$R(a_1, \ldots, a_r) = R_1 + \cdots + R_r + 2 - r, \tag{12}$$

където $R_1 = R(a_1 - 1, a_2, \ldots, a_r), \ldots, R_r = R(a_1, a_2, \ldots, a_r - 1)$.
Тогава $M(a_1, a_2, \ldots, a_r) \geq 2$.

Полагаме

$$\mathrm{R}(\underbrace{3,\ldots,3}_{\mathrm{r}}) = \mathrm{R_r}(3) \quad \text{и} \quad \mathrm{M}(\underbrace{3,\ldots,3}_{\mathrm{r}}) = \mathrm{M_r}(3).$$

Теорема 8.3 (съвм. с Н. Хаджииванов)

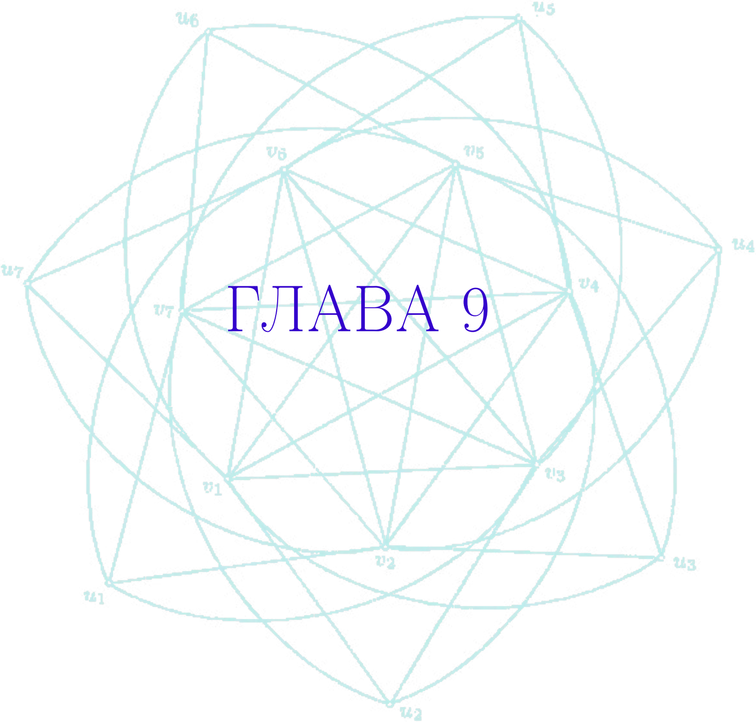
Нека F е крайно поле и $|\mathrm{F}| \geq \mathrm{R_n}(3)$. Тогава уравнението $\mathrm{x^n + y^n = z^n}$ има в полето F поне

$$\frac{|\mathrm{F}|(|\mathrm{F}|-1)\mathrm{M_n}(3)}{\mathrm{n\, R_n}(3)(\mathrm{R_n}(3)-1)(\mathrm{R_n}(3)-2)}$$

абсолютно ненулеви решения.

Тази теорема съществено обобщава резултата на I. Shur от 1916 г.

ГЛАВА 9



Тази глава е посветена на пресмятането на някои ребрени числа на Folkman.
Най-напред доказваме:

Теорема 9.2.

$$F_e(3,3;5) \leq 15.$$

През 1972 г. Lin пресмята, че

$$F_e(3,3;6) = 8, F_e(3,5;14) = 16, F_e(4,4;18) = 20, F_e(3,3,3;17) = 19.$$

Най-малкото число от вида

$$F_e(a_1,\dots,a_r;\ R(a_1,\dots,a_r)),$$

което не може да се пресметне по метода на Lin е $F_e(3,4;9)$.
Ние пресмятаме това число като доказваме

Теорема 9.7.

$F_e(3, 4; 9) = 14.$

В края на ГЛАВА 9 пресмятаме числата:

$$F_e(3, 3, 3; 16) = 21 \quad \text{(Следствие 9.3);}$$

$$F_e(3, 3, 3; 15) = 23 \quad \text{(Следствие 9.4);}$$

$$F_e(3, 3, 3; 14) = 25 \quad \text{(Следствие 9.5).}$$

Дефинираме графа

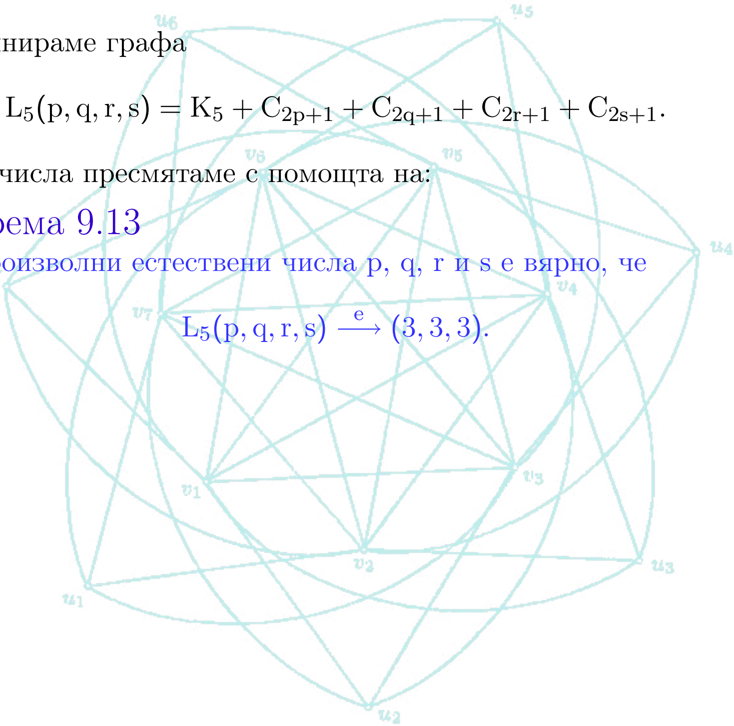
$$L_5(p, q, r, s) = K_5 + C_{2p+1} + C_{2q+1} + C_{2r+1} + C_{2s+1}.$$

Тези числа пресмятаме с помощта на:

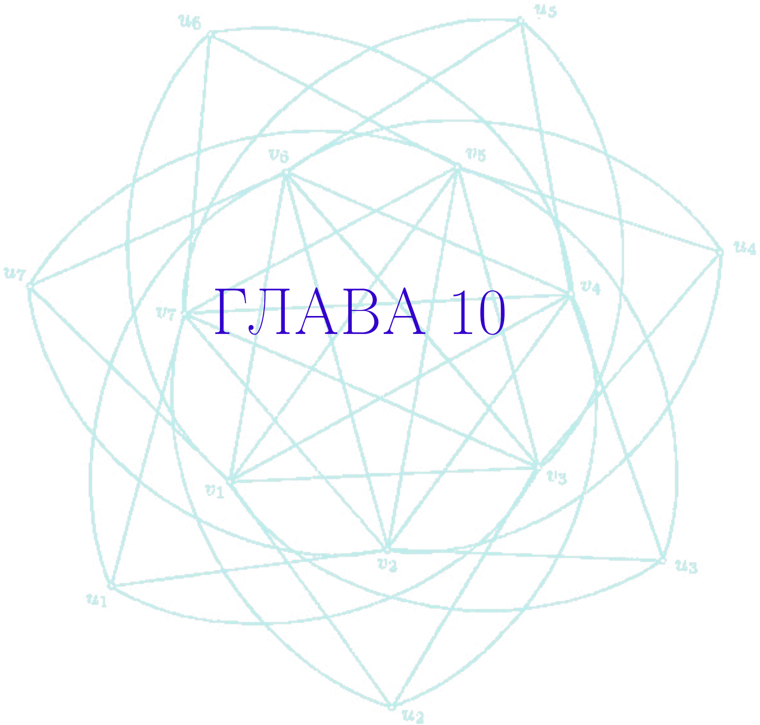
Теорема 9.13

За произволни естествени числа p, q, r и s е вярно, че

$$L_5(p, q, r, s) \xrightarrow{e} (3, 3, 3).$$



ГЛАВА 10



Казваме, че графът G е обобщен r-хроматичен граф, ако съществува r-разлагане

$$V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

на V(G) такова, че

$$d(v) \leq |V(G)| - |V_i|, \quad \forall\, v \in V_i, \quad i = 1, \ldots, r,$$

където d(v) е степента на върха v.

Ако V_i е независимо множество, тогава неравенството (9) е изпълнено, тъй като ако $v \in V_i$, съседите му принадлежат на $V(G) \setminus V_i$. При фиксирани естествени числа n и r пресмятаме максимума на броя на ребрата на n-върховите обобщени r-хроматични графи. Получените резултати разширяват, обобщават и допълват класическата теорема на Turan, тъй като класът на обобщените r-хроматични графи включва в себе си класа на графите, които не съдържат $(r+1)$-клика.

Благодаря за вниманието