[29]

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Книга 1 — Математика

Том 86, 1992

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „ST. KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTE DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Livre 1 — Mathématiques

Tome 86, 1992

ОЦЕНКИ СНИЗУ ДЛЯ ЧИСЛА ВЕРШИН НЕКОТОРЫХ ГРАФОВ РАМСЕЯ

НЕДЯЛКО НЕНОВ

Недялко Ненов. ОЦЕНКИ СНИЗУ ДЛЯ ЧИСЛА ВЕРШИН НЕКОТОРЫХ ГРАФОВ РАМСЕЯ

Для данного графа G символ $V(G)$ обозначает множество его вершин. Граф G называется $(p_1,\dots,p_s)$-графом Рамсея, если в любой s-раскраске его ребер существует монохроматическая p_i-клика i-ого цвета для некоторого i, $1 \leqq i \leqq s$. Символ $R(p_1,\dots,p_s)$ обозначает минимальное натуральное число n, для которого полный граф с n вершинами является $(p_1,\dots,p_s)$-графом Рамсея, а символ $N(R(p_1,\dots,p_s))$ — минимальное натуральное число n, для которого существует $(p_1,\dots,p_s)$-граф Рамсея с $|V(G)| = n$ и несодержащий $R(p_1,\dots,p_s)$-клик. В настоящей работе доказываются нижные оценки для чисел $N(R(p_1,\dots,p_s))$.

Nedjalko Nenov. A LOWER BOUND FOR THE NUMBER OF VERTICES OF SOME RAMSEY GRAPHS

A subset $v_1,\dots,v_p$ of vertices of graph is called a p-clique if any two of them are adjacent. The graph G is called a $(p_1,\dots,p_s)$-Ramsey graph, for some set of integers $p_1,\dots,p_s$ if for every s-colouring of the edges of G there exists an i, $1 \leqq i \leqq s$, such that G contains a monochromatic p_i-clique of the i-colour. The symbol $R(p_1,\dots,p_s)$ denotes the minimal natural number n such that the complete graph with n vertices is $(p_1,\dots,p_s)$-Ramsey graph and the symbol $N(R(p_1,\dots,p_s))$ — the minimal natural number n such that there exists a $(p_1,\dots,p_s)$-Ramsey graph with n vertices and without $R(p_1,\dots,p_s)$-cliques. In this paper it is proved a lower bound for the numbers $N(R(p_1,\dots,p_s))$.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ

Будем рассматривать конечные, неориентированные графы, без кратных ребер и петель, т. е. под графом всюду будем понимать упорядоченную пару $G = (V(G), E(G))$, где $V(G)$ — конечное множество, а $E(G)$ — некоторая совокупность 2-элементных подмножеств множества $V(G)$. Элементы $V(G)$ называются вершинами графа G, а элементы $E(G)$ — ребрами графа G. Если $v_1, v_2 \in V(G)$ и $[v_1, v_2] \in E(G)$ будем говорить, что вершины v_1 и v_2 смежные вершины графа G. Дополнение графа G обозначается $\overline{G}$ и определяется следующим образом: $V(G) = V(\overline{G})$ и две вершины смежны в $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда они несмежны в G. Множество вершин v_1, v_2, $\ldots$, v_p графа G называется p-кликой графа G, если любые две из них смежны. Наибольшее натуральное число p, для которого граф G имеет p-клику, называется кликовым числом графа G и обозначается $\mathrm{cl}(G)$. Множество вершин графа называется независимым множеством вершин, если любые две из них несмежны. Наибольшее натуральное число p, для которого граф G имеет p-вершинное независимое множество вершин, называется числом независимости графа G и обозначается $\alpha(G)$. Ясно, что $\alpha(G) = \mathrm{cl}(\overline{G})$. Разложение $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_r$ называется r-хроматическим разложением вершин графа G, если V_i, $i = 1, \ldots, r$ — независимые множества вершин графа G и $V_i \cap V_j = \varnothing$, $i \neq j$. Наименьшее натуральное число r, для которого граф G обладает r-хроматическим разложением, называется хроматическим числом графа G и обозначается $\chi(G)$.

Граф G_1 называется подграфом графа G, если $V(G_1) \subseteq V(G)$ и $E(G_1) \subseteq E(G)$. Пусть $M \subseteq V(G)$. Тогда через $\langle M \rangle$ будем обозначать подграф графа G, порожденный множеством вершин M, т. е. $V(\langle M \rangle) = M$, и две вершины множества M смежны в $\langle M \rangle$ тогда и только тогда, когда они смежны в G. Если $v \in V(G)$, то через $G - v$ будем обозначать подграф, получающийся из G после удаления вершины v, т. е. $G - v = \langle V(G) - v \rangle$. Если $M \subseteq V(G)$, то через $\mathrm{Ad}(M)$ будем обозначать множество всех вершин графа G, которые смежны всем вершинам множества M. Если $|V(G)| = n$ и любые две вершины графа G смежны, тогда этот граф называется полным графом с n вершинами и обозначается K_n. Упорядоченное множество вершин $v_1, v_2, \ldots, v_n$ данного графа G называется простым циклом длины n графа G, если $[v_1, v_2]$, $[v_2, v_3]$, $\ldots$, $[v_{n-1}, v_n]$, $[v_n, v_1] \in E(G)$ и обозначается C_n.

Пусть G_1 и G_2 — два графа без общих вершин. Через $G_1 + G_2$ обозначается граф G, для которого $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ и $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup E'$, где $E' = \{[v_1, v_2] \mid v_1 \in V(G_1),\ v_2 \in V(G_2)\}$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАФОВ РАМСЕЯ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Определение. Любое разложение $E(G) = E_1 \cup \ldots \cup E_s$, $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$, называется s-раскраской ребер графа G.

Определение. Будем говорить, что p-клика P графа G является монохроматической p-кликой i-ого цвета s-раскраски $E(G) = E_1 \cup \ldots \cup E_s$ его ребер, если $E(P) \subseteq E_i$.

Определение. Пусть $p_1, \ldots, p_s$ — натуральные числа, $p_i \geqq 2$. Граф G называется $(p_1, \ldots, p_s)$-графом Рамсея, если в любой s-раскраске его ребер существует монохроматическая p_i-клика i-ого цвета для некоторого i, $1 \leqq i \leqq s$.

Определение. Наименьшее натуральное число n, для которого полный граф с n вершинами K_n является $(p_1, \ldots, p_s)$-графом Рамсея, называется числом Рамсея и обозначается $R(p_1, \ldots, p_s)$.

Существование чисел $R(p_1, \ldots, p_s)$ впервые было доказано Рамсеем в [4]. Очевидно $R(p_1, \ldots, p_s)$ — симметрическая функция, $R(p) = p$ и $R(p_1, \ldots, p_s, 2) = R(p_1, \ldots, p_s)$. Поэтому будем рассматривать только такие числа Рамсея $R(p_1, \ldots, p_s)$, для которых $s \geqq 2$ и $p_i \geqq 3$. Известны только следующие нетривиальные числа Рамсея: $R(3,3) = 6$, $R(3,4) = R(4,3) = 9$, $R(3,5) = R(5,3) = 14$, $R(3,6) = R(6,3) = 18$, $R(3,7) = R(7,3) = 23$, $R(3,9) = R(9,3) = 36$, $R(4,4) = 18$, $R(3,3,3) = 18$. По поводу чисел Рамсея см. [7]. Очевидно, что если $\mathrm{cl}(G) \geqq R(p_1, \ldots, p_s)$, тогда граф G является $(p_1, \ldots, p_s)$-графом Рамсея.

Определение. Пусть $p_1, \ldots, p_s$ — натуральные числа. Наименьшее натуральное число n, для которого существует $(p_1, \ldots, p_s)$-граф Рамсея G с n вершинами и $\mathrm{cl}(G) < R(p_1, \ldots, p_s)$, обозначается $N(R(p_1, \ldots, p_s))$.

Числа $N(R(p_1, \ldots, p_s))$ существуют, см. [5]. В [6] доказано, что $N(R(3,3)) = 8$, $N(R(3,5)) = 17$ и $N(R(4,4)) = 20$. Тоже в [6] доказано неравенство

$$N(R(p_1, \ldots, p_s)) \geqq R(p_1, \ldots, p_s) + 2.$$

Это неравенство точное, так что без дополнительных условий усилить его нельзя. В [3] доказана следующая:

Теорема А. *Пусть полный граф с $R(p_1, \ldots, p_s)$ вершинами обладает s-раскраской ребер, в которой для некоторого i, $1 \leqq i \leqq s$, существует единственная монохроматическая p_i-клика i-ого цвета и в которой нет монохроматической p_j-клики j-ого цвета при $i \neq j$. Тогда*

$$N(R(p_1, \ldots, p_s)) \geqq R(p_1, \ldots, p_s) + 3.$$

Если еще потребовать $p_i \geqq 4$, тогда

$$N(R(p_1, \ldots, p_s)) \geqq R(p_1, \ldots, p_s) + 4.$$

В настоящей работе теорема А усиливается следующим образом:

Основная теорема. *Пусть $p_1, \ldots, p_s$ — натуральные числа, $s \geqq 2$, $p_i \geqq 3$. Предположим, что полный граф с $R(p_1, \ldots, p_s)$ вершинами обладает*

s-раскраской ребер со следующими свойствами: для некоторого i, $1 \leqq i \leqq s$, существует единственная монохроматическая p_i-клика i-ого цвета и не существует монохроматическая p_j-клика j-ого цвета при $i \neq j$. Тогда:

а) *если $p_i = 3$, либо граф $K_{R-4} + \overline{C}_7$ является $(p_1, \ldots, p_s)$-графом Рамсея, либо $N(R(p_1, \ldots, p_s)) \geqq R(p_1, \ldots, p_s) + 4$;*

б) *если $p_i \geqq 4$, либо граф $K_{R-5} + \overline{C}_9$ является $(p_1, \ldots, p_s)$-графом Рамсея, либо $N(R(p_1, \ldots, p_s)) \geqq R(p_1, \ldots, p_s) + 5$ $(R = R(p_1, \ldots, p_s))$.*

В [1] доказано, что $N(R(3,4)) = 14$, так, что последнее неравенство точное.

Определение. Будем говорить, что k-хроматическое разложение

$$V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_k$$

множества вершин графа G является t-плотным хроматическим разложением, если объединение любых t из подмножеств V_i, $1 \leqq i \leqq k$, порождает подграф с кликовым числом, равным t.

Очевидно, что:

Предложение 1. *Если некоторое хроматическое разложение множества вершин данного графа не является t-плотным, тогда оно не является и $(t+1)$-плотным.*

Для дальнейшего будет нужно и:

Предложение 2. *Если $\chi(G) = r$, тогда граф G обладает $(r+1)$-хроматическим разложением, которое не является t-плотным для любого t.*

Доказательство. Пусть $V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_r$ является r-хроматическим разложением вершин графа G. Добавляя к этому разложению пустое множество, получаем $(r+1)$-хроматическое разложение, которое очевидно не является t-плотным для любого t.

Для доказательства основной теоремы будет нужна следующая:

Теорема В. *Пусть любое $(r+1)$-хроматическое разложение вершин графа G является 4-плотным и $\mathrm{cl}(G) \leqq r$. Тогда либо $G = K_{r-4} + \overline{C}_9$, либо $|V(G)| \geqq r + 6$.*

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ В И НЕСКОЛЬКИХ НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ЭТОГО ЛЕММ

Лемма 1 ([2]). *Пусть G — граф, $|V(G)| = r + 4$, $r \geqq 3$, $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ и $\chi(G) \geqq r + 1$. Тогда либо $G = K_{r-3} + G_1$, где $\mathrm{cl}(G_1) = 3$ и $\chi(G_1) = 4$, либо существует вершина $v \in V(G)$ такая, что $G - v = K_{r-2} + C_5$.*

Лемма 2. *Пусть $|V(G)| \leqq r + 4$ и $\mathrm{cl}(G) \leqq r$. Тогда граф G обладает $(r+1)$-хроматическим разложением вершин, которое не является 4-плотным.*

Доказательство. Добавлением изолированных вершин можно добиться $|V(G)| = r + 4$. Если $r \leqq 2$, тогда граф G обладает 3-хроматическим разложением вершин и утверждение леммы очевидно. Если $\chi(G) \leqq r$, тогда лемма 2 вытекает из предложения 2. Предположим теперь, что

$r \geqq 3$ и $\chi(G) \geqq r+1$. Тогда для графа можно применить лемму 1. Представляются две возможности:

Случай 1. $G = K_{r-3} + G_1$, где $\chi(G_1) = 4$ и $\mathrm{cl}(G_1) < 4$.

Пусть $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ является 4-хроматическим разложением графа G_1 и $V(K_{r-3}) = \{z_1, \ldots, z_{r-3}\}$. Тогда

$$V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup \{z_1\} \cup \ldots \cup \{z_{r-3}\}$$

является $(r+1)$-хроматическим разложением графа G. Из $\mathrm{cl}(G_1) < 4$ вытекает, что это разложение не является 4-плотным.

Случай 2. Существует вершина $v \in V(G)$ такая, что $G - v = K_{r-2} + C_5$.

Очевидно $\chi(C_5) = 3$. Пусть $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ является 3-хроматическим разложением графа C_5 и $V(K_{r-2}) = \{z_1, \ldots, z_{r-2}\}$. Тогда

$$V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \{z_1\} \cup \ldots \cup \{z_{r-2}\} \tag{1}$$

является $(r+1)$-хроматическим разложением графа $G - v$. Так как $\mathrm{cl}(C_5) = 2$, то это разложение не является 3-плотным и согласно предположению 2 не является и 4-плотным. Если вершина v несмежна некоторой вершине z_i, $1 \leqq i \leqq r-2$, тогда, групируя вершину v с этой вершиной из (1), получим $(r+1)$-хроматическое разложение вершин графа G, которое не является 3-плотным. Если вершина v смежна всем вершинам z_i, $1 \leqq i \leqq r-2$, тогда попадаем в условия случая 1.

Лемма 3. *Пусть u и v несмежные вершины графа G и $\mathrm{Ad}(u) \subseteq \mathrm{Ad}(v)$. Если $|V(G)| = r+5$ и $\mathrm{cl}(G) \leqq r$, тогда граф G обладает $(r+1)$-хроматическим разложением, которое не является 4-плотным.*

Доказательство. Согласно лемме 2 подграф $G - u$ обладает $(r+1)$-хроматическим разложением вершин $V_1 \cup \ldots \cup V_{r+1}$, которое не является 4-плотным. Добавим вершину u к тому из множеств V_i, $1 \leqq i \leqq r+1$, которому принадлежит вершина v. Из $\mathrm{Ad}(u) \subseteq \mathrm{Ad}(v)$ следует, что таким образом получается $(r+1)$-хроматическое разложение вершин графа G. Ясно, что это разложение тоже не является 4-плотным.

Лемма 4. *Пусть $|V(G)| = r+2$, $\mathrm{cl}(G) \leqq r$, $r \geqq 2$ и $\alpha(G) = 2$. Тогда дополнение $\overline{G}$ графа G имеет два ребра без общей вершины.*

Доказательство. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ следует, что в G есть две несмежные вершины v_1 и v_2. Если две из остальных вершин $v_3, \ldots, v_{r+2}$ несмежны, тогда лемма доказана. Предположим, что любые две из вершин $v_3, \ldots, v_{r+2}$ — смежны. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ следует, что v_1 несмежна некоторой вершине v_i, $3 \leqq i \leqq r+2$. Тоже самое относится и к вершине v_2. Из $\alpha(G) = 2$ следует, что v_1 и v_2 несмежны разным вершинам множества $\{v_3, \ldots, v_{r+2}\}$. Этим лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $|V(G)| = r+5$, $\mathrm{cl}(G) \leqq r$, $r \geqq 3$ и $\alpha(G) = 2$. Тогда дополнение $\overline{G}$ графа G имеет четыре ребра, любые два из которых не имеют общую вершину.*

Доказательство. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ следует, что в G есть вершины $v_1, v_2, \ldots, v_6$ такие, что $[v_1, v_2] \notin E(G)$, $[v_3, v_4] \notin E(G)$ и $[v_5, v_6] \notin E(G)$. Остальные вершины графа G обозначим через $v_7, \ldots, v_{r+5}$. Положим $T = \{v_7, \ldots, v_{r+5}\}$. Если две вершины множества T несмежны, то утверждение доказано.

Предположим, что любые две вершины множества T — смежны, т. е. $\langle T\rangle = K_{r-1}$. Если $v_1 \notin \mathrm{Ad}\,(T)$ и $v_2 \notin \mathrm{Ad}\,(T)$, тогда из $\alpha(G) = 2$ следует, что v_1 и v_2 несмежны разным вершинам множества T и утверждение доказано. Следовательно можно предположить, что $v_1 \in \mathrm{Ad}\,(T)$. Из аналогичных соображений можно предположить еще, что $v_3 \in \mathrm{Ad}\,(T)$ и $v_5 \in \mathrm{Ad}\,(T)$. Так как $\langle T\rangle = K_{r-1}$ и $\mathrm{cl(G)} \leqq \mathrm{r}$, то $\{v_1, v_3, v_5\}$ — независимое множество вершин графа G, что противоречит условию $\alpha(G) = 2$.

Лемма 6. *Пусть* $|V(G)| = r + 5$, $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ *и* $\alpha(G) \geqq 3$. *Тогда граф* G *обладает* $(r+1)$*-хроматическим разложением вершин, которое не является 4-плотным.*

Доказательство. Если $\chi(G) \leqq r$, лемма 6 вытекает из предложения 2. Если $r \leqq 3$, тогда граф G очевидно обладает $(r+1)$-хроматическим разложением. Так как $\mathrm{cl}(G) \leqq r \leqq 3$, то это разложение не является 4-плотным. Предположим, что $r \geqq 4$ и $\chi(G) > r$. Пусть $V(G) = \{v_1, \ldots, v_{r+5}\}$. Так как $\alpha(G) \geqq 3$, то можно предположить, что $\{v_1, v_2, v_3\}$ — независимое множество. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ следует, что $\alpha(\langle v_4, \ldots, v_{r+5}\rangle) \geqq 2$ и, поэтому представляются две возможности:

Случай 1. $\alpha(\langle v_4, \ldots, v_{r+5}\rangle) \geqq 3$. Предположим, что $\{v_4, v_5, v_6\}$ — независимое множество, тогда

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} \cup \{v_7\} \cup \ldots \cup \{v_{r+5}\} \tag{2}$$

является $(r+1)$-хроматическим разложением вершин графа G. Положим $T = \{v_7, \ldots, v_{r+5}\}$. Если в T есть несмежные вершины, группируя две такие вершины, из (2) получим r-хроматическое разложение, что противоречит допущению $\chi(G) \geqq r+1$. Предположим, что любые две вершины множества T — смежны, т. е. $\langle T\rangle = K_{r-1}$. Из $\chi(G) \geqq r+1$ вытекает, что одна из вершин v_1, v_2, v_3 смежна всем вершинам множества T (иначе группируя v_1, v_2, v_3 с несмежными им вершинами множества T, из (2) получим r-хроматическое разложение). Аналогичным образом заключаем, что и одна из вершин v_4, v_5, v_6 смежна всем вершинам множества T. Итак, можно предположить, что $v_1 \in \mathrm{Ad}\,(T)$ и $v_4 \in \mathrm{Ad}\,(T)$. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ и $\langle T\rangle = K_{r-1}$ следует, что $[v_1, v_4] \notin E(G)$. Если вершины v_5 и v_6 несмежны вершине v_1, тогда $\mathrm{Ad}\,(v_1) \subseteq \mathrm{Ad}\,(v_4)$ и лемма 6 вытекает из леммы 3. Предположим, что хотя бы одна из вершин v_5, v_6 смежна v_1 и пусть например $[v_1, v_5] \in E(G)$. Из аналогичных соображений можно предположить еще, что $[v_4, v_2] \in E(G)$. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ и $\langle T\rangle = K_{r-1}$ следует, что $v_2 \notin \mathrm{Ad}\,(T)$ и $v_5 \notin \mathrm{Ad}\,(T)$. Поэтому для вершин v_2 и v_5 представляются две возможности:

Подслучай 1.a. В T нет вершины, несмежной одновременно вершинам v_2 и v_5 (и следовательно они несмежны разным вершинам множества T). Без ограничения общности можно предположить, что $[v_2, v_7] \notin E(G)$ и $[v_5, v_8] \notin E(G)$. Из условия рассматриваемого подслучая вытекает, что $[v_5, v_7] \in E(G)$, $[v_2, v_8] \in E(G)$. Если $[v_6, v_7] \in E(G)$, тогда $\mathrm{Ad}\,(v_2) \subseteq \mathrm{Ad}\,(v_7)$ и лемма 6 вытекает из леммы 3. Если $[v_3, v_8] \in E(G)$, тогда $\mathrm{Ad}\,(v_5) \subseteq \mathrm{Ad}\,(v_8)$ и опять лемма 6 вытекает из леммы 3. Если $[v_3, v_8] \notin E(G)$ и $[v_6, v_7] \notin E(G)$, тогда $(\mathrm{Ad}\,(v_7) \cap \mathrm{Ad}\,(v_8)) \setminus T = \{v_1, v_4\}$ и так как $[v_1, v_4] \notin E(G)$, то первые четыре подмножества $(r+1)$-хроматического разложения (2) порождают подграф без 4-клик и следовательно оно не является 4-плотным.

Подслучай 1.6. В T есть вершина, которая несмежна одновременно v_2 и v_5. Пусть например $[v_2, v_7] \notin E(G)$ и $[v_5, v_7] \notin E(G)$. Для пар $[v_3, v_7]$ и $[v_6, v_7]$ представляются следующие возможности:

I. $[v_3, v_7] \notin E(G)$ и $[v_6, v_7] \notin E(G)$. В этой ситуации $\mathrm{Ad}(v_7) \setminus T = \{v_1, v_4\}$. Так как $[v_1, v_4] \notin E(G)$, то первые три подмножества $(r+1)$-хроматического разложения (2) порождают подграф без 3-клик и следовательно это разложение не является 3-плотным. Согласно предложению 1 разложение (2) не является и 4-плотным.

II. Одна из вершин v_3, v_6 смежна v_7, а другая — нет. Пусть например $[v_6, v_7] \in E(G)$ и $[v_3, v_7] \notin E(G)$. Если v_6 несмежна некоторой вершине из множества $\{v_8, \ldots, v_{r+5}\}$, например $[v_6, v_8] \notin E(G)$, тогда $(\mathrm{Ad}(v_7) \cap \mathrm{Ad}(v_8)) \setminus T = \{v_3, v_4\}$. Как уже было отмечено выше, из этого вытекает, что первые четыре подмножества $(r+1)$-хроматического разложения (2) порождают подграф без 4-клик и следовательно оно не является 4-плотным. Если $v_6 \in \mathrm{Ad}(T)$, тогда из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ следует, что $\{v_1, v_4, v_6\}$ — независимое множество. Так как $\mathrm{Ad}(v_7) \setminus T = \{v_1, v_4, v_6\}$, то из этого вытекает, что первые три подмножества разложения (2) пораждают подграф без 3-клик и следовательно оно не является 3-плотным. Из предложения 1 вытекает, что это разложение не является 4-плотным.

III. $[v_3, v_7] \in E(G)$ и $[v_6, v_7] \in E(G)$. Если v_3 и v_6 несмежны разным вершинам множества $\{v_8, \ldots, v_{r+5}\}$ и например — $[v_3, v_8], [v_6, v_9] \notin E(G)$, тогда из разложения (2) получаем новое $(r+1)$-хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_7\} \cup \{v_8, v_3\} \cup \{v_9, v_6\} \cup \ldots,$$

в котором первые три подмножества порождают подграф без 3-клик. Согласно предложению 1 новополученное $(r+1)$-хроматическое разложение не является 4-плотным. Если v_3 и v_6 несмежны одной и той же вершине множества $\{v_8, \ldots, v_{r+5}\}$ и например $[v_3, v_8]$, $[v_6, v_8] \notin E(G)$, тогда $(\mathrm{Ad}(v_7) \cap \mathrm{Ad}(v_8)) \setminus T = \{v_1, v_4\}$. Так как $[v_1, v_4] \notin E(G)$, то первые четыре подмножества разложения (2) порождают подграф без 4-клик. Остается рассмотреть ситуацию когда хотя бы одна из вершин v_3, v_6 смежна всем вершинам множества T. Без ограничения общности можно предположить, что $v_3 \in \mathrm{Ad}(T)$. Если еще $v_6 \in \mathrm{Ad}(T)$, тогда из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ вытекает, что $\{v_1, v_3, v_4, v_6\}$ — независимое множество вершин графа G. Из этого вытекает, что первые три подмножества разложения (2) порождают подграф без 3-клик и согласно предложению 1 это разложение не является 4-плотным. Если вершина $v_6 \notin E(G)$ и например $[v_6, v_8] \notin E(G)$, тогда $(\mathrm{Ad}(v_7) \cap \mathrm{Ad}(v_8)) \setminus T = \{v_1, v_3, v_4\}$. Так как $\{v_1, v_3, v_4\}$ — независимое множество вершин графа G (иначе $\mathrm{cl}(G) > r$), то из последнего равенства вытекает, что первые четыре подмножества разложения (2) порождают подграф без 4-клик.

Случай 2. $\alpha(\langle v_4, \ldots, v_{r+5} \rangle) = 2$. Применяя лемму 4 к подграфу $\langle v_4, \ldots, v_{r+5} \rangle$, заключаем, что можно предположить $[v_4, v_5] \notin E(G)$ и

$[v_6, v_7] \notin E(G)$. Тогда

(3) $$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \ldots \cup \{v_{r+5}\}$$

является $(r+1)$-хроматическим разложением вершин графа G. Положим $T = \{v_8, \ldots, v_{r+5}\}$. Так как $r \geqq 4$, то $T \neq \varnothing$. Рассуждая так же как и для разложения (2), заключаем, что из $\chi(G) > r$ вытекает $\langle T \rangle = K_{r-2}$ и что можно предположить $v_1, v_4, v_6 \in \mathrm{Ad}\,(T)$. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ следует, что $\{v_1, v_4, v_6\}$ не является 3-кликой графа G. Для вершин v_5 и v_7 представляются следующие возможности:

Подслучай 2.a. В T есть вершина, которая несмежна вершинам v_5 и v_7. Предположим для определенности, что $[v_5, v_8] \notin E(G)$ и $[v_7, v_8] \notin E(G)$. В этой ситуации для вершин v_2 и v_3 есть следующие возможности:

I. $[v_2, v_8] \notin E(G)$ и $[v_3, v_8] \notin E(G)$. Ясно, что $\mathrm{Ad}\,(v_8) \backslash T = \{v_1, v_4, v_6\}$. Так как $\{v_1, v_4, v_6\}$ не является 3-кликой, то объединение первых четырех подмножеств разложения (3) порождает подграф без 4-клик и следовательно это разложение не является 4-плотным.

II. Одна из вершин v_2, v_3 смежна v_8, а другая — нет. Пусть например $[v_2, v_8] \notin E(G)$ и $[v_3, v_8] \in E(G)$. Если вершина v_3 несмежна некоторой из вершин $v_9, \ldots, v_{r+5}$ и например $[v_3, v_9] \notin E(G)$, тогда из (3) получаем новое $(r+1)$-хроматическое разложение вершин графа G

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \{v_3, v_9\} \cup \ldots,$$

в котором объединение первых четырех подмножеств порождает подграф без 4-клик и следовательно это разложение не является 4-плотным. Если $v_3 \in \mathrm{Ad}\,(T)$, тогда из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ следует, что $\langle v_1, v_3, v_4, v_6 \rangle$ не содержит 3-клик. Так как $\mathrm{Ad}\,(v_8) \backslash T = \{v_1, v_3, v_4, v_6\}$, то объединение первых четырех подмножеств разложения (3) порождает подграф без 4-клик.

III. Вершина v_8 смежна вершинам v_2 и v_3. Если $v_2 \in \mathrm{Ad}\,(T)$ и $v_3 \in \mathrm{Ad}\,(T)$, тогда из $\langle T \rangle = K_{r-2}$ и $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ следует, что $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6\} = \mathrm{Ad}\,(v_8) \setminus T$ не содержит 3-клик и следовательно объединение первых четырех подмножеств разложения (3) порождает подграф без 4-клик. Если $v_2 \in \mathrm{Ad}\,(T)$ и $v_3 \notin E(G)$ и например $[v_3, v_9] \notin E(G)$, тогда из разложения (3) получаем новое $(r+1)$-хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \{v_3, v_9\} \cup \ldots,$$

в котором объединение первых четырех подмножеств порождает подграф без 4-клик. Если $v_2 \notin \mathrm{Ad}\,(T)$ и $v_3 \notin \mathrm{Ad}\,(T)$, тогда группируя v_2 и v_3 с несмежными им вершинами множества T, из разложения (3) получаем новое $(r+1)$-хроматическое разложение, в котором объединение первых четырех подмножеств порождает подграф без 4-клик.

Подслучай 2.б. Вершины v_5 и v_7 несмежны разным вершинам множества T. Пусть например $[v_5, v_8] \notin E(G)$ и $[v_7, v_9] \notin E(G)$. Можно предположить еще, что $[v_5, v_9] \in E(G)$ и $[v_7, v_8] \in E(G)$ так как иначе попадаем в условиях подслучая 2.a. Если $[v_4, v_6] \notin E(G)$, тогда $\langle v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9 \rangle$ не содержит 4-клик и следовательно $(r+1)$-хроматическое разложение (3) вершин графа G не является 4-плотным. Предположим, что $[v_4, v_6] \in E(G)$.

Но тогда либо $[v_1, v_6] \notin E(G)$, либо $[v_1, v_4] \notin E(G)$, так как $\{v_1, v_4, v_6\}$ не является 3-кликой. Без ограничения общности можно предположить, что $[v_1, v_4] \notin E(G)$. Для вершин v_2 и v_3 представляются следующие возможности:

I. $[v_2, v_8] \notin E(G)$ и $[v_3, v_8] \notin E(G)$. В этой ситуации объединение вершины v_8 с первыми двумя подмножествами разложения (3) порождает подграф без 3-клик и следовательно это разложение не является 3-плотным. Согласно предложению 1 разложение (3) не является и 4-плотным.

II. Одна из вершин v_2, v_3 смежна вершине v_8, а другая — нет. Пусть например $[v_2, v_8] \notin E(G)$ и $[v_3, v_8] \in E(G)$. Если вершина v_3 несмежна некоторой вершине множества $\{v_9, \ldots, v_{r+5}\}$, тогда группируя v_3 с такой вершиной, из разложения (3) получаем новое $(r+1)$-хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \ldots$$

Так как $\langle v_1, v_2, v_4, v_5, v_8 \rangle$ не содержит 3-клик, то последнее $(r+1)$-хроматическое разложение не является 3-плотным. Согласно предложению 1 это разложение не является и 4-плотным. Если $v_3 \in \mathrm{Ad}\,(T)$ из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ и $\langle T \rangle = K_{r-2}$ следует, что $\{v_3, v_4, v_6\}$ не является 3-кликой. Так как $[v_4, v_6] \in E(G)$, то либо $[v_3, v_4] \notin E(G)$, либо $[v_3, v_6] \notin E(G)$. Если $[v_3, v_4] \notin E(G)$, тогда вершина v_8 вместе с первыми двумя подмножествами разложения (3) порождают подграф без 3-клик. Согласно предложению 1 $(r+1)$-хроматическое разложение (3) не является 4-плотным. Если $[v_3, v_6] \notin E(G)$, тогда из разложения (3) получаем новое $(r+1)$-хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_8\} \cup \{v_3, v_6\} \cup \{v_7, v_9\} \cup \ldots,$$

в котором первые три подмножества порождают подграф без 3-клик. Согласно предложению 1 последнее $(r+1)$-хроматическое разложение не является 4-плотным.

III. $[v_2, v_8] \in E(G)$ и $[v_3, v_8] \in E(G)$. В этой ситуации очевидно, что $\mathrm{Ad}\,(v_5) \subseteq \mathrm{Ad}\,(v_8)$ и лемма 6 вытекает из леммы 3.

Подслучай 2.в. Одна из вершин v_5, v_7 принадлежит $\mathrm{Ad}\,(T)$, а другая — нет. Пусть например $v_7 \in \mathrm{Ad}\,(T)$ и $[v_5, v_8] \notin E(G)$. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ следует, что $\langle v_1, v_4, v_6, v_7 \rangle$ не содержит 3-клик. Если $[v_2, v_8] \in E(G)$ и $[v_3, v_8] \in E(G)$, тогда $\mathrm{Ad}\,(v_5) \subseteq \mathrm{Ad}\,(v_8)$ и лемма 6 вытекает из леммы 3. Если $[v_2, v_8] \notin E(G)$ и $[v_3, v_8] \notin E(G)$, тогда $\mathrm{Ad}\,(v_8) \setminus T = \{v_1, v_4, v_6, v_7\}$. Так как $\{v_1, v_4, v_6, v_7\}$ не содержит 4-клик, то объединение первых четырех подмножеств разложения (3) порождает подграф без 4-клик. Если $[v_2, v_8] \notin E(G)$ и $[v_3, v_8] \in E(G)$, тогда для v_3 представляются две возможности:

I. Вершина v_3 несмежна некоторой из вершин $v_9, \ldots, v_{r+5}$. Пусть например $[v_3, v_9] \notin E(G)$. Тогда из (3) получаем новое $(r+1)$-хроматическое разложение

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \{v_3, v_9\} \cup \ldots,$$

в котором объединение первых четырех подмножеств порождает подграф без 4-клик.

II. $v_3 \in \mathrm{Ad}(T)$. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ и $\langle T\rangle = K_{r-2}$ следует, что $\langle v_1, v_3, v_4, v_6, v_7\rangle$ не содержит 3-клик. Так как $\mathrm{Ad}(v_8) \setminus T = \{v_1, v_3, v_4, v_6, v_7\}$, то первые четыре подмножества разложения (3) порождают подграф без 4-клик.

Подслучай 2.г. $v_5 \in \mathrm{Ad}(T)$ и $v_7 \in \mathrm{Ad}(T)$. Если $v_2 \notin \mathrm{Ad}(T)$ и $[v_2, v_i] \notin E(G)$, $8 \leqq i \leqq r+5$, тогда $\mathrm{Ad}(v_2) \subseteq \mathrm{Ad}(v_i)$ и лемма 6 вытекает из леммы 3. Если $v_3 \notin \mathrm{Ad}(T)$ рассуждаем аналогично. Если $v_2 \in \mathrm{Ad}(T)$ и $v_3 \in \mathrm{Ad}(T)$, тогда из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ и $\langle T\rangle = K_{r-2}$ следует, что объединение первых трех подмножеств $(r+1)$-хроматического разложения (3) порождает подграф без 3-клик. Согласно предложению 1 разложение (3) не является 4-плотным.

Лемма 6 доказана.

Доказательство теоремы B. Допустим, что $|V(G)| \leqq r+5$. Докажем, что $G = K_{r-4} + \overline{C}_9$. Согласно лемме 2 $|V(G)| = r+5$, а согласно предложению 2

$$\chi(G) \geqq r+1. \tag{4}$$

Согласно лемме 6 $\alpha(G) = 2$. Из $\alpha(G) = 2$ и $R(3,3) = 6$ вытекает $\mathrm{cl}(G) \geqq 3$. Так как $\mathrm{cl}(G) \leqq r$, то $r \geqq 3$. Сделанные рассуждения показывают, что граф G удовлетворяет условиям леммы 5 и следовательно существуют вершины $v_1, \ldots, v_8 \in V(G)$ такие, что $[v_1, v_2] \notin E(G)$, $[v_3, v_4] \notin E(G)$, $[v_5, v_6] \notin E(G)$, $[v_7, v_8] \notin E(G)$. Остальные вершины графа G обозначим $T = \{v_9, \ldots, v_{r+5}\}$. Тогда

$$V(G) = \{v_1, v_2\} \cup \{v_3, v_4\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \{v_7, v_8\} \cup \{v_9\} \cup \ldots \cup \{v_{r+5}\} \tag{5}$$

является $(r+1)$-хроматическим разложением вершин графа G. Заметим, что $T \neq \varnothing$, т. е. $r \geqq 4$ (иначе $r = 3$ и так как $\mathrm{cl}(G) \leqq r$, граф G не содержит 4-клик и следовательно разложение (5) не является 4-плотным). Любые две вершины множества T смежны, т. е. $\langle T\rangle = K_{r-3}$ (иначе группируя две несмежные вершины множества T, из (5) получим r-хроматическое разложение графа G, что противоречит неравенству (4)). Одна из вершин v_1, v_2 смежна всем вершинам множества T (иначе группируя v_1 и v_2 с несмежными им вершинами множества T, из (5) получим r-хроматическое разложение, что сново противоречит неравенству (4)). Без ограничения общности можно предположить, что $v_1 \in \mathrm{Ad}(T)$. Из аналогичных соображений можно предположить еще, что $v_3, v_5, v_7 \in \mathrm{Ad}(T)$. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ и $\langle T\rangle = K_{r-3}$ следует, что $\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ не является 4-кликой. Прежде всего докажем, что две из вершин v_2, v_4, v_6, v_8 принадлежат $\mathrm{Ad}(T)$, а другие две — нет. Допустим, что это не так. Тогда для вершин v_2, v_4, v_6, v_8 представляются следующие возможности:

Случай 1. $v_2, v_4, v_6, v_8 \notin \mathrm{Ad}(T)$. Так как $\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ не является 4-кликой графа G, то можно предположить, что $[v_1, v_3] \notin E(G)$. Если в T есть вершина, которая несмежна вершинам v_2 и v_4 и например $[v_2, v_9]$, $[v_4, v_9] \notin E(G)$, тогда $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_9\rangle$ не содержит 3-клик и следовательно разложение (5) не является 3-плотным. Это противоречит предложению 1. Если v_2 и v_4 несмежны разным вершинам множества T и например $[v_2, v_9] \notin E(G)$, $[v_4, v_{10}] \notin E(G)$, тогда $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_9, v_{10}\rangle$ не содержит

4-клик. Получили, что разложение (5) не является 4-плотным, что является противоречием.

Случай 2. Одна из вершин v_2, v_4, v_6, v_8 принадлежит $\mathrm{Ad}(T)$, а остальные три — нет. Пусть например $v_2, v_4, v_6 \notin \mathrm{Ad}(T)$ и $v_8 \in \mathrm{Ad}(T)$. Если хотя бы одна из пар $[v_1, v_3]$, $[v_1, v_5]$, $[v_3, v_5]$ не является ребром графа G, повторяя буквально рассуждения случая 1, достигаем до противоречия. Поэтому предположим, что $\{v_1, v_3, v_5\}$ является 3-кликой графа G. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ и $\langle T \rangle = K_{r-3}$ вытекает $v_7 \notin \mathrm{Ad}(v_1, v_3, v_5)$ и $v_8 \notin \mathrm{Ad}(v_1, v_3, v_5)$. Вершины v_7 и v_8 несмежны разным вершинам 3-клики $\{v_1, v_3, v_5\}$, так как иначе $\alpha(G) \geqq 3$, что противоречит условию $\alpha(G) = 2$. Без ограничения общности можно предположить, что $[v_1, v_7] \notin E(G)$ и $[v_3, v_8] \notin E(G)$. Для вершин v_2 и v_4 представляются две возможности:

I. Некоторая вершина множества T несмежна вершинам v_2 и v_4. Пусть например $[v_2, v_9]$, $[v_4, v_9] \notin E(G)$. Тогда $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8, v_9 \rangle$ не содержит 4-клик, т. е. разложение (5) не является 4-плотным, что является противоречием.

II. Вершины v_2 и v_4 несмежны разным вершинам множества T. Пусть например $[v_2, v_9] \notin E(G)$ и $[v_4, v_{10}] \notin E(G)$. Тогда

$$\{v_1, v_7\} \cup \{v_3, v_8\} \cup \{v_2, v_9\} \cup \{v_4, v_{10}\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \ldots$$

является r-хроматическим разложением вершин графа G, что противоречит неравенству (4).

Случай 3. Три из вершин v_2, v_4, v_6, v_8 принадлежат $\mathrm{Ad}(T)$, а четвертая — нет. Пусть например $v_4, v_6, v_8 \in \mathrm{Ad}(T)$ и $[v_2, v_9] \notin E(G)$. В этом случае $\mathrm{Ad}(v_2) \subseteq \mathrm{Ad}(v_9)$, что противоречит лемме 3.

Случай 4. $v_2, v_4, v_6, v_8 \in \mathrm{Ad}(T)$. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ и $\langle T \rangle = K_{r-3}$ вытекает, что $\langle v_1, v_2, \ldots, v_8 \rangle$ не содержит 4-клик и следовательно разложение (5) не является 4-плотным.

Итак, доказано, что две из вершин v_2, v_4, v_6, v_8 принадлежат $\mathrm{Ad}(T)$, а другие две — нет. Без ограничения общности можно предположить, что $v_2, v_4 \notin \mathrm{Ad}(T)$ и $v_6, v_8 \in \mathrm{Ad}(T)$. В этой ситуации из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ и $\langle T \rangle = K_{r-3}$ следует, что подграф $\langle v_1, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8 \rangle$ не содержит 4-клик. Покажем, что из этого вытекает, что v_2 и v_4 несмежны одной и той же вершине множества T. Допустим, что это неверно и пусть например $[v_2, v_9] \notin E(G)$ и $[v_4, v_{10}] \notin E(G)$. Тогда из (5) получаем новое $(r+1)$-хроматическое разложение

$$\{v_1\} \cup \{v_3\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \{v_7, v_8\} \cup \{v_2, v_9\} \cup \{v_4, v_{10}\} \cup \ldots,$$

в котором первые четыре подмножества порождают подграф без 4-клик. Итак, можно предположить, что $[v_2, v_9] \notin E(G)$ и $[v_4, v_9] \notin E(G)$. Вершина v_9 вместе с первыми тремя подмножествами разложения (5) порождает подграф, содержащий 4-клику. Из этого вытекает, что либо $\{v_1, v_3, v_5\}$, либо $\{v_1, v_3, v_6\}$ является 3-кликой графа G. Без ограничения общности можно предположить, что $\{v_1, v_3, v_5\}$ является 3-кликой графа G. Из аналогичных рассуждений можно предположить, что $\{v_1, v_3, v_7\}$ тоже является 3-кликой графа G. Из $\mathrm{cl}(G) \leqq r$ вытекает $[v_5, v_7] \notin E(G)$, а из последнего и $\alpha(G) = 2$ следует $[v_5, v_8] \in E(G)$ и $[v_6, v_7] \in E(G)$. Так как подграф $\langle v_1, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\rangle$ не содержит 4-клик, то $\{v_1, v_3, v_5, v_8\}$ и $\{v_1, v_3, v_6, v_7\}$ не являются 4-кликами. Вместе с $[v_5, v_8]$, $[v_6, v_7] \in E(G)$ это дает, что $v_6, v_8 \notin \mathrm{Ad}(v_1, v_3)$. Представляются две возможности:

I. Вершины v_6 и v_8 несмежны одновременно хотя бы одной из вершин v_1, v_3. Пусть например $[v_1, v_6] \notin E(G)$ и $[v_1, v_8] \notin E(G)$. Тогда $\langle v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\rangle$ не содержит 4-клик. Это означает, что разложение (5) не является 4-плотным.

II. Одна из вершин v_6, v_8 несмежна вершине v_1, а другая — вершине v_3. Без ограничения общности можно предположить, что $[v_1, v_6] \notin E(G)$ и $[v_3, v_8] \notin E(G)$. В этой ситуации упорядоченное подмножество $\{v_1, v_2, v_9, v_4, v_3, v_8, v_7, v_5, v_6\}$ вершин графа G является 9-циклом его дополнения $\overline{G}$. Этим доказано, что $G \subseteq K_{r-4} + \overline{C}_9$.

Осталось доказать, что $G = K_{r-4} + \overline{C}_9$. Для этого достаточно доказать, что после удаления произвольного ребра графа $K_{r-4} + \overline{C}_9$ получается подграф, обладающий $(r+1)$-хроматическим разложением вершин, которое не является 4-плотным. Из-за существующих симметрий графа $K_{r-4} + \overline{C}_9$ достаточно рассмотреть только следующие случаи:

Случай 1. От графа $K_{r-4} + \overline{C}_9$ удаляется ребро подграфа K_{r-4}. Пусть $V(K_{r-4}) = \{w_1, \ldots, w_{r-4}\}$ и $\overline{C}_9 = \{u_1, \ldots, u_9\}$ (рис. 1). Без ограничения общности можно предположить, что удаляется ребро $[w_1, w_2]$. Тогда

$$\{u_1, u_2\} \cup \{u_3, u_4\} \cup \{u_5, u_6\} \cup \{u_7, u_8\} \cup \{u_9\} \cup \{w_1, w_2\} \cup \{w_3\} \cup \ldots \cup \{w_{r-4}\}$$

является r-хроматическим разложением полученного подграфа. Согласно

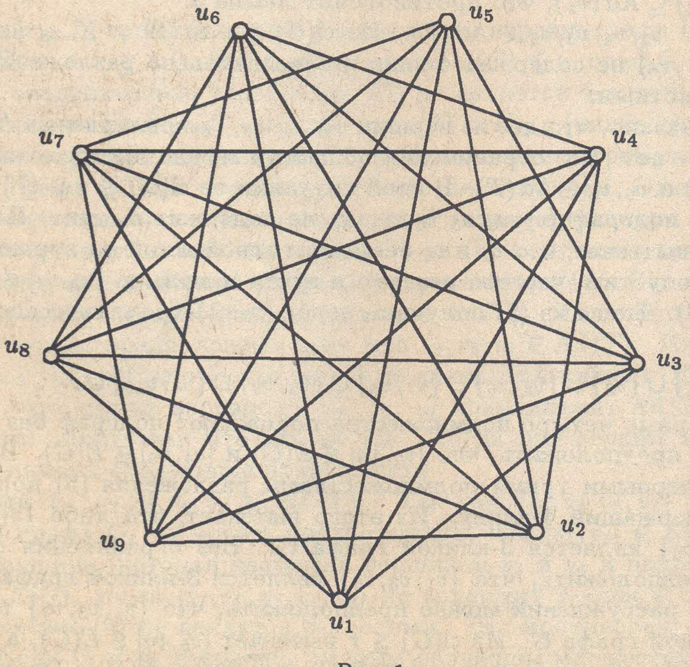

Рис. 1

предложению 2 этот подграф обладает $(r+1)$-хроматическим разложением, которое не является 4-плотным.

Случай 2. Удаляется ребро вида $[w_i, u_j]$, $1 \leqq i \leqq r-4$, $1 \leqq j \leqq 9$. Без ограничения общности можно предположить, что удаляется ребро $[w_1, u_1]$. Тогда

$$\{w_1, u_1\} \cup \{u_2, u_3\} \cup \{u_4, u_5\} \cup \{u_6, u_7\} \cup \{u_8, u_9\} \cup \{w_2\} \cup \ldots \cup \{w_{r-4}\}$$

является r-хроматическим разложением полученного подграфа. Согласно предложению 2 этот подграф обладает $(r+1)$-хроматическим разложением, которое не является 4-плотным.

Случай 3. Удаляется ребро $[u_1, u_3]$. Тогда

$$\{u_1, u_2, u_3\} \cup \{u_4, u_5\} \cup \{u_6, u_7\} \cup \{u_8, u_9\} \cup \{w_1\} \cup \ldots \cup \{w_{r-4}\}$$

является r-хроматическим разложением полученного подграфа. Согласно предложению 2 этот подграф обладает $(r+1)$-хроматическим разложением, которое не является 4-плотным.

Случай 4. От графа $K_{r-4} + \overline{C}_9$ удаляется ребро $[u_1, u_4]$. В этом случае

$$\{u_1, u_4\} \cup \{u_5, u_6\} \cup \{u_7, u_8\} \cup \{u_9\} \cup \{u_2, u_3\} \cup \{w_1\} \cup \ldots \cup \{w_{r-4}\}$$

является $(r+1)$-хроматическим разложением полученного подграфа. Первые четыре подмножества этого разложения порождают $\overline{C}_7$. Очевидно $\overline{C}_7$ не содержит 4-клик, так что это $(r+1)$-хроматическое разложение не является 4-плотным.

Случай 5. От графа $K_{r-4} + \overline{C}_9$ удаляется ребро $[u_1, u_5]$. В этом случае

$$\{u_1, u_2\} \cup \{u_3, u_4\} \cup \{u_5\} \cup \{u_6, u_7\} \cup \{u_8, u_9\} \cup \{w_1\} \cup \ldots \cup \{w_{r-4}\}$$

является $(r+1)$-хроматическим разложением вершин полученного подграфа. Первые три подмножества этого разложения порождают подграф, изоморфный $\overline{C}_5$. Так как $\overline{C}_5$ не содержит 3-клик, то полученное $(r+1)$-хроматическое разложение не является 3-плотным. Согласно предложению 1 оно не является и 4-плотным.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Пусть $p_1, \ldots, p_s$ — натуральные числа, $s \geqq 2$, $p_i \geqq 3$, $1 \leqq i \leqq s$. Для краткости положим $R = R(p_1, \ldots, p_s)$. Будут нужны следующие леммы:

Лемма 7 ([5]). *Если* $\chi(G) < R(p_1, \ldots, p_s)$, *тогда граф* G *не является* $(p_1, \ldots, p_s)$-*графом Рамсея.*

Лемма 8. *Пусть* G *является* $(p_1, \ldots, p_s)$-*графом Рамсея с* $\mathrm{cl}(G) < R$ *и* $|V(G)| \leqq R + 4$. *Тогда* $\chi(G) = R$.

Доказательство. Добавлением изолированных вершин можно добиться $|V(G)| = R + 4$. Согласно лемме 7 достаточно доказать неравенство $\chi(G) \leqq R$. Пусть $V(G) = \{v_1, \ldots, v_{R+4}\}$. Рассмотрим два случая:

Случай 1. $\alpha(G) \geqq 3$. Пусть $\{v_1, v_2, v_3\}$ независимое множество вершин графа G. Если $\alpha(\langle v_4, \ldots, v_{R+4}\rangle) \geqq 3$ и $\{v_4, v_5, v_6\}$ тоже независимое множество, тогда

$$\{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5, v_6\} \cup \{v_7\} \cup \ldots \cup \{v_{R+4}\}$$

является R-хроматическим разложением графа G и следовательно $\chi(G) \leqq R$. Если $\alpha(\langle v_4, \ldots, v_{R+4}\rangle) = 2$, тогда применяя лемму 4 к подграфу $\langle v_4, \ldots, v_{R+4}\rangle$, где $r = R - 1$, убеждаемся, что можно предположить $[v_4, v_5]$, $[v_6, v_7] \notin E(G)$. Разложение

$$\{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5\} \cup \{v_6, v_7\} \cup \{v_8\} \cup \ldots \cup \{v_{R+4}\}$$

является R-хроматическим разложением вершин графа G и следовательно $\chi(G) \leqq R$.

Случай 2. $\alpha(G) = 2$. Согласно лемме 5 ($r = R - 1$) можно предположить, что $[v_1, v_2]$, $[v_3, v_4]$, $[v_5, v_6]$ и $[v_7, v_8]$ не являются ребрами графа G. Но тогда

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_3, v_4\} \cup \{v_5, v_6\} \cup \{v_7, v_8\} \cup \{v_9\} \cup \ldots \cup \{v_{R+4}\}$$

является R-хроматическим разложением вершин и следовательно $\chi(G) \leqq R$.

Лемма 9. *Пусть $p_1, \ldots, p_s$ — натуральные числа, $p_i \geqq 3$, $s \geqq 2$ и полный граф с $R = R(p_1, \ldots, p_s)$ вершинами обладает s-раскраской ребер со следующим свойством: для некоторого i, $1 \leqq i \leqq s$, существует единственная монохроматическая p_i-клика i-ого цвета и не существует монохроматическая p_j-клика j-ого цвета при $i \neq j$. Тогда, если граф G является $(p_1, \ldots, p_s)$-графом Рамсея и $\chi(G) = R$, то любое R-хроматическое разложение вершин графа G является p_i-плотным.*

Доказательство. Рассмотрим s-раскраску ребер K_R, в которой существует единственная монохроматическая p_i-клика i-ого цвета и не существует монохроматическая p_j-клика j-ого цвета при $i \neq j$. Пусть $V(K_R) = \{z_1, \ldots, z_R\}$ и предположим, что $\{z_1, \ldots, z_{p_i}\}$ является единственной p_i-кликой i-ого цвета. Допустим, что существует R-хроматическое разложение

$$V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_R$$

вершин графа G, которое не является p_i-плотным. Без ограничения общности можно предположить, что первые p_i подмножества этого R-хроматического разложения порождают подграф без p_i-клик, т. е. $\mathrm{cl}(\langle V_1 \cup \ldots \cup V_{p_i}\rangle) < p_i$. Рассмотрим отображение $\varphi : V(G) \longrightarrow V(K_R)$, определенное следующим образом: если $v \in V_i$, тогда $\varphi(v) = z_i$. При помощи отображения φ и данной s-раскраски ребер K_R строим s-раскраску ребер графа G следующим образом: ребро $[v_i, v_j] \in E(G)$ имеет такой же цвет, что и ребро $[\varphi(v_i), \varphi(v_j)]$ графа K_R. Покажем, что полученная s-раскраска ребер графа G не содержит монохроматическая p_k-клика k-ого цвета для любого k, $1 \leqq k \leqq s$. Допустим противное, т. е. для некоторого k существует монохроматическая p_k-клика k-ого цвета Q. Тогда $\varphi(Q)$ является монохроматической p_k-кликой k-ого цвета данной s-раскраски ребер K_R. Из свойств этой раскраски вытекает, что $k = i$ и $\varphi(Q) = \{z_1, \ldots, z_{p_i}\}$. Это означает, что $Q \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_{p_i}$, что является противоречием, так как мы предположили, что подграф $\langle V_1 \cup \ldots \cup V_{p_i}\rangle$ не содержит p_i-клик.

Доказательство основной теоремы. Предположим, что выполнено требование $p_i = 3$ подусловия а). Допустим, что существует $(p_1, \ldots, p_s)$-граф Рамсея G с $\mathrm{cl}(G) < R$ и $|V(G)| \leqq R + 3$. Добавлением изолированных вершин можно добиться $|V(G)| = R+3$. Из леммы 8 вытекает $\chi(G) = R$. Согласно лемме 9 любое R-хроматическое разложение вершин графа G является 3-плотным. С другой стороны, согласно лемме 1 ($r = R-1$) либо существует вершина $v \in V(G)$, такая что $G-v = K_{R-3}+C_5$, либо $G = K_{R-4} + G_1$. Пусть $G - v = K_{R-3} + C_5$. В этом случае G обладает R-хроматическим разложением, которое не яляется 3-плотным (см. доказательство леммы 2). Пусть теперь $G = K_{R-4} + G_1$. В [2] доказано, что либо G_1 является подграфом графа $\overline{K}_2 + C_5$, либо $G_1 = \overline{C}_7$. Если $G \subseteq \overline{K}_2 + C_5$, тогда $G \subseteq K_{R-4} + \overline{K}_2 + C_5$. Граф $K_{R-4} + \overline{K}_2 + C_5$ очевидно обладает R-хроматическим разложением вершин, которое не является 3-плотным. Но тогда и G обладает таким R-хроматическим разложением. Окончательно получаем $G = K_{R-4} + \overline{C}_7$.

Предположим, что выполнено требование $p_i \geqq 4$ подусловия б). Допустим, что существует $(p_1, \ldots, p_s)$-граф Рамсея G с $\mathrm{cl}(G) < R$ и $|V(G)| \leqq R+4$. Добавлением изолированных вершин можно добиться $|V(G)| = R+4$. Согласно лемме 8 $\chi(G) = R$. Согласно лемме 9 любое R-хроматическое разложение вершин графа G является p_i-плотным и так как $p_i \geqq 4$, то оно является 4-плотным. Согласно теореме B ($r = R-1$) граф $G = K_{R-5} + \overline{C}_9$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н е н о в, Н. О (3, 4)-графах Рамсея без 9-клик. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и инф., **85**, 1991,71–81.
2. Н е н о в, Н. Некоторые применения чисел Зыкова в теорию Рамсея. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **74**, 1980, 25–50.
3. Н е н о в, Н. Усиление неравенств Лина, относящихся к теорию Рамсея. — Докл. БАН, **34**, 1981, 307—310.
4. R a m s e y, P. On a problem of formal logic. — London Math. Soc., **30**, 1930, 264–286.
5. L i n, S. On Ramsey numbers and K_r-coloring of graphs. — J. Combin. Theory, Ser. B, **12**, 1972, 82–92.
6. N e s e t r i l, J., V. R ö d l. Partition theory and its applications. — London Math. Soc., Lecture Note Series, **38**, 1979, 96–149.
7. G r i n s t e a d, C., S. R o b e r t s. On the Ramsey numbers $R(3,8)$ and $R(3,9)$. — J. Combin. Theory, Ser. B, **33**, 27–51.

Поступила 2.02.1993