Увод в аналитичната теория на числата – IV

Д. И. Толев

Записки по едноименния изборен курс, четен от автора
във ФМИ при СУ „Св. Климент Охридски“
през зимния семестър на учебната
2013/2014 г.

София, септември 2014 г.

Съдържание

1 Увод и означения **3**

2 Формулировка на основните хипотези и теореми **7**

3 Леми, нужни за доказателтвото на Теорема 2.14 **14**

3.1 Преобразование на Абел и някои следствия от сумационната формула на Ойлер 14

3.2 Леми относно свойствата на някои мултипликативни функции 15

3.3 Леми за свойствата на сравненията и техни следствия 22

3.4 Известни резултати и хипотези относно разпределението на простите числа и техни следствия 24

3.5 Асимптотични формули за някои суми от стойности на мултипликативни функции 31

4 Доказателство на Теорема 2.14 **43**

4.1 Теоремите на Голдстон–Пинц–Ялдарим и Джанг 43

4.2 Начало на доказателството на Теорема 2.14 45

4.3 Определяне на функцията $w(\mathcal{H}, n)$ 48

4.4 Намиране на асимптотична формула за сумата S_1 49

4.5 Изследване на сумите $S_2^{(\mu)}$ — начало 58

4.6 Изследване на сумите $S_2^{(\mu)}$ — продължение 70

4.7 Намиране на асимптотична формула за сумата S 73

4.8 Оценка отдолу на величината $\mathcal{M}_k$ и край на доказателството 79

1 Увод и означения

В настоящите записки са разгледани резултати от аналитичната теория на числата, получени през последните няколко години и вече считани за класически. Това са теоремите на Голдстон, Пинц, Ялдарим (Теорема 2.11), Джанг (Теорема 2.12), Мейнард и Тао (Теореми 2.13 и 2.14), както и на колектива от математици, обединени под псевдонима D.H.J.Polymath (Теореми 2.15 и 2.16). Всички тези резултати се отнасят до разпределението на простите числа в интервали с ограничени дължини.

На тези, вече станали знаменити, резултати бяха посветени част от лекциите от изборния курс „Увод в аналитичната теория на числата", четен от автора във ФМИ през зимния семестър на учебната 2013/2014 г., както и доклади на семинари в Института по Математика и Информатика при БАН и във Факултета по Математика и Информатика при СУ „Св. Климент Охридски". Там теоремите на Голдстон, Пинц, Ялдарим, Джанг, Мейнард и Тао бяха формулирани и беше изложена схемата на доказателствата, но по понятни причини, пълни доказателства не бяха дадени.

Ще отбележим, че преобладаващата част от техниката, която се използва в работите на Голдстон, Пинц, Ялдарим, Мейнард и Тао е елементарна, така че доказателствата на техните теореми са достъпни и за студенти. (Същото обаче не може да се каже за техниката, използвана от Джанг). Целта на настоящите записки е да бъде разгледана задачата за простите числа в ограничени интервали, като бъдат дадени някои исторически сведения, схеми на доказателството на някои от теоремите, както и пълно и подробно доказателство на една от теоремите на Майнард и Тао.

Структурата на записките е следната. Настоящата първа глава съдържа увод и означения. Във втора глава са формулирани класически хипотези и теореми свързани с проблема за простите числа близнаци, включително и известните теореми на Брун и Чен. Формулирани са и новите теореми на Голдстон, Пинц, Ялдарим, Джанг, Мейнард и Тао.

В трета глава са формулирани всички леми, които по-късно използваме. Някои от тях са доказани в записките на автора „Увод в аналитичната теория на числата" [1] (тези записки цитираме като (УАТЧ-1)) и за тези леми доказателства тук не даваме. Други леми са добре известни, но не са включени в (УАТЧ-1) и затова, за удобство на читателя, привеждаме техните доказателства. Единственият резултат, който използваме без доказателство, е известната теорема на Бомбиери–Виноградов, дадена тук като Лема 3.35.

Най-важната част от настоящите записки е четвърта глава, където е изложено подробното доказателство на Теорема 2.14, принадлежаща на Майнард и Тао. Тук следваме метода (и до голяма степен означенията) на Мейнард, но всички изчисления са извършени значително по-подробно, отколкото в неговата статия [12]. В редица места обаче използваме по-елементарни (макар и изискващи повече пресмятане) съображения, за да може изложението в настоящите записки да бъде колкото се може по-достъпно.

Авторът изказва благодарност на слушателите на неговите доклади и лекции във Факултета по Математика и Информатика при СУ и Института по Математика и Информатика при БАН. Технияt подчертан интерес към теоремите на Голдстон, Пинц, Ялдарим, Джанг, Мейнард и Тао, както и многобройните им въпроси и коментари са основната причина за написването на настоящите записки. Особено полезна беше помощта на Стоян Димитров от Техническия Университет в София, който грижливо прочете предварителния вариант на записките и посочи редица грешки и неточности.

Означения. Както обикновено, множествата на естествените, целите, рационалните, реалните и комплексните числа ще означаваме съответно с буквите $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. С буквата p, с или без индекси, ще означаваме винаги прости числа. Ако простите числа са подредени в нарастваща редица, то p_n ще означава n-тото просто число.

Най-малкото общо кратно, и съответно, най-големия общ делител на числата $n_1, \ldots, n_k$ ще означаваме с $[n_1, \ldots, n_k]$ и $(n_1, \ldots, n_k)$. Понякога (a, b) или $[a, b]$ ще бъдат отворен, съответно затворен интервал, но това няма да доведе до недоразумения, тъй като точният смисъл ще бъде винаги ясен от контекста. Вектор с компоненти $r_1, \ldots, r_k$ ще означаваме чрез $\langle r_1, \ldots, r_k \rangle$. Натурален логаритъм на x ще означаваме с $\log x$ и, както обикновено, $[x]$ и $\{x\}$ ще бъдат цялата част и дробната част на x.

Сума или произведение по естествените числа n, ненадминаващи величината x, ще означаваме накратко с $\sum_{n \le x}$ и съответно $\prod_{n \le x}$. Аналогично, за сума или произведение по простите числа p, ненадминаващи x, ще използуваме означенията $\sum_{p \le x}$, съответно $\prod_{p \le x}$. Сума и произведение по всички прости числа ще означаваме с $\sum_p$ и $\prod_p$. Ако $n \in \mathbb{N}$, то $\sum_{d|n}$ означава сума, в която сумирането се извършва по всички положителни делители на n. Съответно $\sum_{p|n}$ означава сума по простите делители на n. Сума в която сумационните променливи удовлетворяват едно или повече условия се бележат, като се поставят номерата на формулите, определящи тези условия. Например, ако е дадено условието

$$u^2 + v^2 = w^2, \tag{1}$$

то броят на наредените тройки от естествените числа u, v, w, за които е изпълнено (1) може да се означи с

$$\sum_{\substack{u,v,w \in \mathbb{N} \\ (1)}} 1.$$

Ще употребяваме означенията на Ландау $X = O(Y)$ и съответно на Виноградов $X \ll Y$, като и двете са съкратен запис на твърдението „Съществува константа $c > 0$ такава, че $|X| \le cY$”. Ако c зависи от някои други константи, например γ, δ, то ще отразяваме този факт, чрез означенията $X = O_{\gamma,\delta}(Y)$, съответно $X \ll_{\gamma,\delta} Y$. Ако пък константите в знаците $\ll$ или O не зависят от никакви параметри, то ще казваме, че тези константи са абсолютни. Ако едновременно имаме $X \ll Y$ и $Y \ll X$, то ще пишем за по-кратко $X \asymp Y$.

Често ще използваме изрази като „мултипликативна функция”, „канонично разлагане”, „безквадратно число” и други термини от елементарната теория на числата. За справка читателят може да се обърне, например, към записките (УАТЧ-1).

Функцията на Ойлер $\varphi(n)$ се определя като броя на числата $k \in \mathbb{N}$, $k \le n$, за които $(k, n) = 1$.

Обобщената функция на делителите $\tau_k(n)$, където $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$ се определя като броя на k-орките $\langle n_1, \ldots, n_k \rangle \in \mathbb{N}^k$, удовлетворяващи уравнението $n_1 \ldots n_k = n$. При $k = 2$ за простота пишем $\tau(n) = \tau_2(n)$.

Функцията на Мьобиус $\mu(n)$ се определя чрез равенството

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{ако} \quad n = 1, \\ (-1)^l & \text{ако} \quad n = p_1 \dots p_l, \quad p_1 < \dots < p_l, \\ 0 & \text{ако} \quad p^2 \mid n \quad \text{за някое просто} \quad p. \end{cases}$$

Функцията на Манголд $\Lambda(n)$ се определя чрез равенството

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{ако} \quad n = p^l, \quad l \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Определяме функцията $\Theta(n)$ за $n \in \mathbb{N}$ посредством формулата

$$\Theta(n) = \begin{cases} \log n & \text{ако } n \text{ е просто число,} \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases} \tag{2}$$

При $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$ означаваме с $\pi(x)$ броя на простите числа, ненадминаващи x:

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1. \tag{3}$$

Определяме също функциите на Чебишев $\theta(x)$ и $\psi(x)$ при $x \geq 1$ чрез равенствата

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p, \tag{4}$$

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n). \tag{5}$$

При $x \geq 1$, $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ определяме

$$\pi(x, q, a) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod q}} 1, \tag{6}$$

$$\theta(x, q, a) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod q}} \log p, \tag{7}$$

$$\psi(x, q, a) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod q}} \Lambda(n). \tag{8}$$

Със знака $\Box$ ще бележим края на доказателство на някакво твърдение, или отсъствие на доказателство.

2 Формулировка на основните хипотези и теореми

Ако разгледаме таблицата на първите прости числа, ще забележим, че твърде често се появяват двойки прости числа, които се различават с 2. Такива са например двойките 3 и 5, 11 и 13, 17 и 19, 41 и 43, както и още много други. Най-големите прости числа от такъв вид, известни до този момент, са

$$65516468355 \cdot 2^{333333} \pm 1,$$

като всяко от тях притежава 100355 цифри в десетичното си представяне. [1]

Определение 2.1. *Всеки две прости числа, които имат разлика 2, се наричат прости числа близнаци.*

Още в древността е възникнала следната

Хипотеза 2.2 (за простите числа близнаци)**.** *Съществуват безбройно много двойки от прости числа близнаци.*

Тази хипотеза и в настоящия момент не е доказана и се счита за един от най-трудните нерешени проблеми в теорията на числата. Съществува и по-точен вариант на хипотезата за близнаците. Да означим с $\pi^*(x)$ броя на простите числа $p \leq x$ такива, че числото $p+2$ също да е просто. (Очевидно Хипотеза 2.2 е еквивалентна на твърдението $\lim_{x\to\infty} \pi^*(x) = \infty$). Харди и Литлууд, прилагайки формално (т.е. без необходимата математическа прецизност) своя кръгов метод, са стигнали до заключението, че вероятно съществува асимптотична формула за $\pi^*(x)$. По-точно, те са изказали следната

Хипотеза 2.3. *В сила е асимптотичната формула*

$$\pi^*(x) \sim c_0 \frac{x}{\log^2 x} \qquad \text{при} \qquad x \to \infty, \tag{9}$$

където

$$c_0 = 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = 1.3203236\ldots. \tag{10}$$

Константата c_0, определена по-горе чрез (9), е известна като константа на Брун.

Съществува обобщение на хипотезата за близнаците. Нека е даден набор от k на брой цели неотрицателни числа

$$\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}, \qquad 0 \leq h_1 < h_2 < \cdots < h_k. \tag{11}$$

Ще дадем следното

Определение 2.4. *Диаметър на набора $\mathcal{H}$, зададен от* (11)*, наричаме $h_k - h_1$.*

[1] По-подробна информация може да се намери на следната интернет страница: http://primes.utm.edu/primes/page.php?id=89650

Възниква въпросът дали при зададен набор (11) съществуват безбройно много $n \in \mathbb{N}$ такива, че всяко от числата

$$n + h_1, n + h_2, \dots, n + h_k \tag{12}$$

да е просто.

Ако върху набора (11) не са наложени никакви отганичения, това твърдение може и да не е вярно — например при $\mathcal{H} = \{0, 1\}$. Наистина, в този случай точно едно от числата n и $n + 1$ е четно и, ако то е просто, трябва да бъде равно на 2. Оттук виждаме, че съществува точно един набор от две последователни прости числа, а именно 2 и 3. Аналогично се разсъждава в случая $\mathcal{H} = \{0, 2, 4\}$ и установяваме, че съществува точно една тройка от последователни прости числа с разлика 2 и тя е $3, 5, 7$. Ако обаче наборът е $\mathcal{H} = \{0, 2\}$ вече няма очевидни причини, които да възпрепятстват съществуването на безбройно много двойки от прости числа n, $n+2$. Същото може да се каже и за наборите $\mathcal{H} = \{0, 2, 6\}$ и $\mathcal{H} = \{0, 4, 6\}$.

Нека p е някакво просто число и да допуснем, че наборът $\mathcal{H}$, определен от (11) е такъв, че всеки клас от остатъци по модул p съдържа някое от числата h_i. Да допуснем, също така, че $n \in \mathbb{N}$ е такова, че всички числа от (12) са прости. Тогава числата (12) отново ще покриват всички класове от остатъци по модул p, следователно някое от тях ще се дели на p и, щом това число е просто, то ще е равно на p. Оттук следва, че най-много за една стойност на n всички числа (12) могат да са прости. Тези разсъждения дават основание да дадем следното

Определение 2.5. *Ще казваме, че наборът $\mathcal{H}$, зададен чрез* (11)*, е допустим, ако за всяко просто число p съществува $a \in \mathbb{Z}$ такова, че $a \not\equiv h_i \pmod p$ за всяко $i = 1, \dots, k$.*

Ясно е, ако е даден наборът $\mathcal{H}$, зададен чрез (11), то за да съществуват безбройно много n такива, че всяко от числата (12) да е просто е необходимо $\mathcal{H}$ да е допустим. Възниква въпросът дали при произволно зададено k съществува допустим набор с k на брой елементи. За малки стойности на k проверката се извършва на ръка или с помощта на компютър. Например, допустим набор от 105 числа и с диаметър 600 е следният: [2]

0; 10; 12; 24; 28; 30; 34; 42; 48; 52; 54; 64; 70; 72; 78; 82; 90; 94; 100; 112; 114; 118; 120; 124; 132; 138; 148; 154; 168; 174; 178; 180; 184; 190; 192; 202; 204; 208; 220; 222; 232; 234; 250; 252; 258; 262; 264; 268; 280; 288; 294; 300; 310; 322; 324; 328; 330; 334; 342; 352; 358; 360; 364; 372; 378; 384; 390; 394; 400; 402; 408; 412; 418; 420; 430; 432; 442; 444; 450; 454; 462; 468; 472; 478; 484; 490; 492; 498; 504; 510; 528; 532; 534; 538; 544; 558; 562; 570; 574; 580; 582; 588; 594; 598; 600.

За произволно естествено $k \geq 2$ допустим набор от k елемента е построен в доказателството на Лема 3.25 от настоящите записки, като там е оценен отгоре

[2] Този, както и много други допустими набори, са намерени от Т. Енгелсмей. Повече информация може да се намери на страницата
http://primes.utm.edu/bios/page.php?id=219

и диаметъра на този набор. (Въпросът за намирането на набор от k елемента с минимален диаметър е по-сложен и на него няма да се спираме).

Ако един набор е допустим, то няма очевидна причина, която да възпрепятства съществуването на безбройно много $n \in \mathbb{N}$ такива, че всяко от числата (12) да е просто. Поради това още през 19-ти век (виж енциклопедичната монография [3] на Диксон) е изказана следната

Хипотеза 2.6. *Нека наборът $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_k\}$ е допустим. Тогава съществуват безбройно много $n \in \mathbb{N}$ такива, че всяко от числата $n + h_1, \ldots . n + h_k$ е просто.*

Ако е даден наборът $\mathcal{H}$, определен от (11), да означим с $\nu(\mathcal{H}, p)$ броя на класовете остатъци по модул p, които се определят от числата $h_1, \ldots, h_k$. Непосредствено се вижда, че $\mathcal{H}$ е допустим точно когато за всяко просто число p е изпълнено условието $\nu(\mathcal{H}, p) < p$. Определяме величината

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H}) = \prod_p \left(1 - \frac{\nu(\mathcal{H}, p)}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-k}. \tag{13}$$

Ако наборът $\mathcal{H}$ е допустим, то всички множители в дясната страна на (13) са различни от нула, а сходимостта на безкрайното произведение е доказана в Лема 3.29. Следователно за допустим набор ще имаме $\mathfrak{S}(\mathcal{H}) \asymp_k 1$. Ако пък наборът не е допустим, то $\mathfrak{S}(\mathcal{H}) = 0$, тъй като в произведението има нулев множител.

През двадесетте години на 20-ти век Харди и Литлууд са предложили по-точен вариант на Хипотеза 2.6, а именно, те са формулирали следната

Хипотеза 2.7. *Нека наборът $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_k\}$ е допустим. Тогава, ако с $\pi(\mathcal{H}, x)$ означим броя на числата $n \le x$ такива, че всяко от числата $n + h_1, \ldots, n + h_k$ е просто, то е в сила асимптотичната формула*

$$\pi(\mathcal{H}, x) \sim \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \frac{x}{(\log x)^k} \qquad \text{\textit{при}} \qquad x \to \infty. \tag{14}$$

Да отбележим, че ако $\mathcal{H} = \{0, 2\}$, то $\pi(\mathcal{H}, x) = \pi^*(x)$, а стойността на произведението $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, зададено чрез (13) е равно на константата на Брун c_0, определена чрез формула (10).

Хипотеза 2.7 все още не е доказана и се счита, че намирането на нейно доказателство е извън възможностите на съвременната математика.

Ще опишем някои известни резултати, които в един или друг аспект са приближение към хипотезата за близнаците. Първият нетривиален резултат за $\pi^*(x)$ е получен от Брун, който е установил за тази величина оценка отгоре, при това съгласувана с Хипотеза 2.3. В сила е следната

Теорема 2.8 (Брун, 1917). *При $x \ge 2$ е изпълнено*

$$\pi^*(x) \ll \frac{x}{\log^2 x}. \tag{15}$$

По-късно алтернативни доказателства на Теорема 2.8 са намерени от Селберг и от други математици. Ще отбележим, че установяването на формула (15) с колкото се може по-малка константа в знака на Виноградов също е интересна и трудна задача. В настоящия момент е известно, че ако x е достатъчно голямо, тази константа може да се вземе равна на $3.5\,c_0$, където c_0 е константата на Брун, определена чрез (10).

Брун е получил първоначално малко по-слаб вариант на Теорема 2.8, като в израза в дясната страна на (15) присъства допълнителен множител $(\log\log x)^2$. Като следсвие Брун получава, че редът, съставен от реципрочните стойности на простите числа близнаци е сходящ. (Тези резултати са формулирани като Теорема 5.12 и Следствие 5.13 от записките (УАТЧ-3) и там са подробно доказани).

Нетривиална оценка отдолу за $\pi^*(x)$ засега не е намерена. Ясно е, че ако е вярна Хипотеза 2.3, то ще е изпълнено $\pi^*(x) \gg \frac{x}{\log^2 x}$. Брун е доказал теорема, която, в известен смисъл, е приближение към горната оценка. Нека за $r \in \mathbb{N}$ означим с $\mathcal{P}_r$ множеството от естествени числа, притежаващи в каноничното си разлагане не повече от r на брой прости множителя, всеки броен толкова пъти, колкото е кратността му. [3] По-нататък, за произволни $r, l \in \mathbb{N}$ определяме

$$\Pi_{r,l}(x) = \#\left\{n \in \mathbb{N} \,:\, n \le x,\ n \in \mathcal{P}_r,\ n+2 \in \mathcal{P}_l\right\}.$$

При това означение имаме $\Pi_{1,1}(x) = \pi^*(x) + 1$.

Използувайки усъвършенстван вариант на своето решето, през 1917 г. Брун е доказал следната

Теорема 2.9 (Брун, 1917)**.** *При* $x \ge 2$ *е изпълнено*

$$\Pi_{7,7}(x) \gg \frac{x}{\log^2 x}.$$

Резултатът на Теорема 2.9 е подобряван многократно, докато се стигне до следната знаменита

Теорема 2.10 (Чен, 1973)**.** *При* $x \ge 2$ *е изпълнено*

$$\Pi_{1,2}(x) \gg \frac{x}{\log^2 x}.$$

От Теорема 2.10 се вижда, че съществуват безбройно много прости числа p такива, че $p+2$ притежава в каноничното си разлагане най-много два прости множителя. Теоремата на Чен е едно от най-значимите постижения в аналитичната теория през 20-ти век. Интересуващият се читател може да намери нейното доказателство в някоя от монографиите [8], [9] или [13].

[3] Например, $\mathcal{P}_1$ е множеството от простите числа заедно с единицата, а $\mathcal{P}_2$ е множеството от числата от $\mathcal{P}_1$, заедно с числата, които квадрат на просто число, или са произведение на две различни прости числа. Числата от $\mathcal{P}_r$ се наричат *почти прости от ред* r.

Както вече споменахме, настоящите записки са посветени на фундаментални резултати, получени неотдавна, и които представляват друг вид приближение към хипотезата за близнаците. Ако p_n означава n-тото просто число, то Хипотеза 2.2 е еквивалентна на твърдението, че съществуват безбройно много n, за които

$$p_{n+1} - p_n = 2. \tag{16}$$

Още през двадесетте години на миналия век редица математици са се опитвали да установят, че за безбройно много n разликата $p_{n+1} - p_n$ е „малка". Да отбележим, че от асимптотичния закон за разпределение на простите числа може да се направи заключението, че очакваната средна стойност на тази разлика е $\log p_n$. Затова можем да считаме, че въпросната разлика е малка, ако тя не надминава $c \log p_n$ за някаква положителна константа $c < 1$.

В продължение на повече от 80 години, прогресът в това направление е незначителен, въпреки че в работата вземат участие видни учени като Харди, Литлууд, Ердьош, Селберг, Бомбиери, Хаксли, Мотохаши и много други. До 2005 г. най-силният резултат от такъв тип е този на Майер [11], който доказва, че

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n} \le 0.2484. \tag{17}$$

Първото съществено подобрение на горния резултат е направено през 2006 г. от Голдстон, Пинц и Ялдарим [6], които установяват равенството

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n} = 0. \tag{18}$$

По-късно същите учени в работата [7] подобряват оценката (18), като показват, че

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\sqrt{\log p_n}\,(\log\log p_n)^2} < \infty. \tag{19}$$

В работата [6] Голдстон, Пинц и Ялдарим получават също условно доказателство на много по-силен резултат. Тези математици установяват, че ако редицата от простите числа притежава ниво на разпределение $\theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ (виж Определение 3.33), то разликата $p_{n+1} - p_n$ е ограничена за безбройно много n. По-точно, имаме

Теорема 2.11 (Голдстон – Пинц – Ялдарим, 2006)**.** *Да допуснем, че редицата от простите числа притежава ниво на разпределение $\theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Тогава съществува $C = C(\theta) > 0$ такова, че за безбройно много n е изпълнено*

$$p_{n+1} - p_n \le C. \tag{20}$$

Някои кратки обяснения на доказателство на тази теорема ще дадем в Глава 4

Голдстон, Пинц и Ялдарим намират също явна връзка между нивото на разпределение на редицата от простите числа θ и величината $C(\theta)$. Например, при

$\theta \geq 0.971$ може да се вземе $C(\theta) = 16$. Ако обаче $\theta = \frac{1}{2} + \varepsilon$ за някое малко $\varepsilon > 0$, то за да е изпълнено (20) за безбройно много n, трябва $C(\theta)$ да е голямо, като тази стойност клони към безкрайност, когато $\varepsilon \to 0$. От друга страна, както е известно (виж Следствие 3.36), всяко число $\theta < \frac{1}{2}$ е ниво на разпределение на редицата на простите числа. Така че, както картинно се изразяват в статията си Голдстон, Пинц и Ялдарим, те се намират само на коръм разстояние от безусловното доказателство на съществуването на константа C, за която (20) е вярно при безбройно много стойности на n.

Решаващият пробив за задачата за съществуването на безбройно много двойки прости числа в ограничени интервали е направен от У. Джанг [16], който намира безусловно доказателство на следната

Теорема 2.12 (Джанг, юни 2013). *Съществуват безбройно много n такива, че*

$$p_{n+1} - p_n < 7 \cdot 10^7.$$

Съвсем кратко описание на метода на Джанг ще дадем в Глава 4. Ще отбележим, че доказателтвото е много сложно и в него се използват дълбоки резултати от алгебричната геометрия.

След публикуването на статията на Джанг със задачата за заменяне на константата $7 \cdot 10^7$ с по-малка се заемат редица математици и след няколко месеца е публикувана колективната работа [14], в която константата е намалено до 4680. През месец ноември 2013 г. съществен напредък в това направление правят Джеймс Мейнард и (независимо) Теренс Тао. Техният метод позволява не само да бъде получен резултат от типа на Теорема 2.12 и с много по-малка константа, но и по значително по-лесен начин. В сила е следната

Теорема 2.13 (Мейнард – Тао, ноември 2013). *Съществуват безбройно много n такива, че*

$$p_{n+1} - p_n < 600.$$

За доказателството на тази забележителна теорема се прилага многомерен вариант на решетото на Голдстон, Пинц и Ялдарим, като методът е елементарен. Единственият по-дълбок резултат от аналитичната теория на числата, който се използва, е теоремата на Бомбиери-Виноградов (виж Лема 3.35). Методът на доказателството е интересен и с това, че за да се получи подобен резултат не е необходимо да се използва теоремата на Бомбиери и Виноградов в пълната и сила. Достатъчно е да се знае, че някакво фиксирано (макар и много малко) $\theta > 0$ е ниво на разпределение на редицата от простите числа. Да отбележим, все пак, че при по-голяма стойност на θ се получава по-малка числена стойност на константата C, стояща в дясната страна на (20), така че най-добре е да се използва теоремата на Бомбиери-Виноградов, а не някой неин по-слаб вариант.

Друга важна особеност на метода на Майнард–Тао е, че с негова помощ може да се докаже не само съществуването на безбройно много двойки прости числа в интервали с ограничена дължина, но даже, при произволно $m \in \mathbb{N}$, съществуването на безбройно много m-орки от прости числа в такива интервали. С методите от работите на Голдстон, Пинц, Ялдарим и Джанг това не може да бъде направено. В сила е следната

Теорема 2.14 (Мейнард – Тао, ноември 2013). *Нека е дадено произволно $m \in \mathbb{N}$. Съществува константа $C > 0$ такава, че за безбройно много $n \in \mathbb{N}$ имаме*

$$p_{n+m} - p_n < Cm^3 e^{4m}. \tag{21}$$

В настоящите записки ще изложим пълно и подробно доказателство на горната Теорема 2.14. Единствения резултат, който ще използваме наготово, е теоремата на Бомбиери-Виноградов (Теорема 3.35), а всички останали леми, дори и по-елементарните, ще докажем.

След публикуването на работата на Мейнард, както и появата на доказателството на Тао в неговия блог[4] са получени и по-точни резултати. Група от математици, обединени под псевдонима D.H.J. Polymath, създават статията [15], в която са изложени най-силните резултати, които могат да бъдат получени чрез съчетаване и оптимално използване на методите на Голдстон, Пинц, Ялдарим, Джанг, Мейнард и Тао. Ще цитираме два резултата от тази статия. Първият е по-силен вариант на Теорема 2.13. В сила е следната

Теорема 2.15 (D.H.J. Polymath, 2014). *Съществуват безбройно много $n \in \mathbb{N}$ такива, че*

$$p_{n+1} - p_n \leq 246.$$

Друг резултат от [15] представлява усилване на Теорема 2.14. Имаме

Теорема 2.16 (D.H.J. Polymath, 2014). *Нека е дадено произволно $m \in \mathbb{N}$. Съществува константа $C > 0$ такава, че за безбройно много $n \in \mathbb{N}$ имаме*

$$p_{n+m} - p_n < C\, m\, e^{\left(4 - \frac{52}{283}\right)m}.$$

Доказателства на тези резултати няма да излагаме и препоръчваме на интересуващия се читател да се запознае с тях от статията [15]. Там е показано, че при допускане верността на хипотезата на Елиот и Халберстам (Хипотеза 3.34), както и нейни обобщения, са изпълнени и по-силни твърдения, но на този въпрос в настоящите записки няма да се спираме.

[4] Виж страницата http://terrytao.wordpress.com/

3 Леми, нужни за доказателтвото на Теорема 2.14

В тази глава са събрани всички леми, които се използват при доказателството на теоремата на Мейнард–Тао. Част от тях са доказани в записките (УАТЧ-1), но за удобство на читателя, тук ги формулираме отново. Други леми, които не са разглеждани в (УАТЧ-1), даваме заедно с техните доказателства.

3.1 Преобразование на Абел и някои следствия от сумационната формула на Ойлер

Ще започнем със следната проста, но много полезна

Лема 3.1 (Преобразование на Абел). *Нека* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *е строго растяща редица от реални числа, за която* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ *и нека* $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ *е произволна редица,* $g_n \in \mathbb{C}$. *Нека* $f(x)$ *е непрекъснато диференцируема функция в интервала* $[a, b]$. *Ако*

$$S = \sum_{a<\lambda_n\le b} g_n\, f(\lambda_n),$$

където сумирането се извършва по всички n, *за които* $a < \lambda_n \le b$, *то е в сила тъждеството*

$$S = f(b) \sum_{a<\lambda_n\le b} g_n - \int\limits_a^b \left(\sum_{a<\lambda_n\le t} g_n \right) f'(t)\, dt.$$

Доказателство. Това е Лема 2.1 (УАТЧ-1).

□

В следващата лема се съдържат асимптотични формули, които са просто следствие от сумационната формула на Ойлер (Лема 2.4 (УАТЧ-1)).

Лема 3.2. *Нека* $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \ge 2$, $\alpha > -1$, $\beta > 1$. *В сила са следните асимптотични формули:*

$$\sum_{n\le x} n^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O_{\alpha}\left(\max\left(1, x^{\alpha}\right)\right), \tag{22}$$

$$\sum_{n>x} \frac{1}{n^{\beta}} = \frac{x^{1-\beta}}{\beta-1} + O_{\beta}\left(x^{-\beta}\right), \tag{23}$$

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n} = \log x + O(1). \tag{24}$$

Доказателство. Това е Лема 2.6 (УАТЧ-1).

□

3.2 Леми относно свойствата на някои мултипликативни функции

Започваме с тъждеството на Ойлер, което стои в основата на съвремената теория на числата.

Лема 3.3 (Тъждество на Ойлер)**.** *Ако функцията $\lambda(n)$ е мултипликативна и ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)$ е абсолютно сходящ, то е в сила тъждеството*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) = \prod_{p} \left(1 + \lambda(p) + \lambda(p^2) + \dots\right).$$

Ако, освен това, функцията $\lambda(n)$ е напълно мултипликативна, то имаме

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) = \prod_{p} \left(1 - \lambda(p)\right)^{-1}.$$

Доказателство. Това е Теорема 3.45 (УАТЧ-1).

□

Следващата лема ни дава явна формула за сумата от стойностите на мултипликативна функция, взета по делителите на някакво число, при условие че знаем каноничното разлагане на това число.

Лема 3.4. *Нека функцията $\lambda(n)$ е мултипликативна и нека числото n притежава канонично разлагане $n = p_1^{l_1} \dots p_s^{l_s}$. Тогава е в сила равенството*

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \lambda(p_i) + \lambda(p_i^2) + \dots + \lambda(p_i^{l_i})\right). \tag{25}$$

Доказателство. Получава се като разкрием скобите в произведението от дясната страна на (25) и използваме мултипликативността на $\lambda(n)$, както и основната теорема на аритметиката (Теорема 3.10 (УАТЧ-1)).

□

Следващото равенство следва непосредствено от тъждеството на Ойлер и представлява частен случай на формулата, която дава представяне на дзета-функцията на Риман чрез безкрайно произведение по прости числа.

Лема 3.5. *В сила е равенството*

$$\frac{6}{\pi^2} = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Доказателство. Виж доказателството на Лема 3.59 (УАТЧ-1).

□

Следващата лема ни дава връзка между стойностите на мултипликативна функция за числата n_1, n_2 и стойностите за най-малкото им общо кратно $[n_1, n_2]$ и най-големия им общ делител n_1, n_2.

Лема 3.6. *Ако функцията $f(n)$ е мултипликативна, то за всеки $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ имаме*

$$f([n_1, n_2])f((n_1, n_2)) = f(n_1)f(n_2).$$

Доказателство. Равенството се проверява непосредствено, като се сравнят каноничните разлагания на числата от двете му страни и се използват изразите за $[n_1, n_2]$ и (n_1, n_2), ако са известни каноничните разлагания на числата n_1 и n_2 (виж Лема 3.15 (УАТЧ-1)).

□

В следващата лема е дадено основното свойство на функцията на Мьобиус.

Лема 3.7. *За всяко $n \in \mathbb{N}$ имаме*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n = 1, \\ 0 & \text{при} \quad n > 1. \end{cases}$$

Доказателство. Това е Лема 3.34 (УАТЧ-1).

□

Следващата лема ни дава тъждество за функцията $\mu^2(n)$, която представлява характеристичната функция на множеството от числата, свободни от квадрати.

Лема 3.8. *За всяко $n \in \mathbb{N}$ имаме*

$$\mu^2(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d),$$

като сумирането е по естествените числа d, за които $d^2 \mid n$.

Доказателство. Това е Лема 3.44 (УАТЧ-1).

□

Следващата лема е известна, като *формула на Мъобиус за обръщане.*

Лема 3.9. *За всяка аритметична функция $f(n)$ съществува, и то единствена аритметична функция $g(n)$, такава че*

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d). \tag{26}$$

При това равенството (26) *е еквивалентно на*

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right). \tag{27}$$

Накрая, ако едната от функциите f, g е мултипликативна, то и другата е такава.

Доказателство. Виж Следствие 3.31 (УАТЧ-1), Лема 3.35 (УАТЧ-1), както и Лема 3.37 (УАТЧ-1).

□

Следващата лема представлява вариант на формулата на Мьобиус за обръщане, но за аритметични функции на много променливи.

Лема 3.10. *Нека $R > 0$ и нека $L(d_1, \dots, d_k)$ е функция, определена за $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{N}$ и такава, че $L(d_1, \dots, l_k) = 0$ ако някое d_i не е безквадратно, или ако $d_1 \dots d_k > R$. При $h_1, \dots, h_k \in \mathbb{N}$ определяме функцията*

$$Y(h_1, \dots, h_k) = \mu(h_1) \dots \mu(h_k) \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ d_i \equiv 0 \pmod{h_i} \\ i=1,\dots,k}} L(d_1, \dots, d_k). \tag{28}$$

Тогава е в сила равенството

$$L(d_1, \dots, d_k) = \mu(d_1) \dots \mu(d_k) \sum_{\substack{h_1, \dots, h_k \\ h_i \equiv 0 \pmod{d_i} \\ i=1,\dots,k}} Y(h_1, \dots, h_k). \tag{29}$$

Доказателство. Равенството (29) е очевидно ако някое от числата d_i не е безквадратно. Сега да разгледаме случая, когато $\mu^2(d_i) = 1$ за всяко i.

Означаваме с F израза от дясната страна на (29) и заместваме в него стойността на Y, определена от (28). Получаваме

$$F = \mu(d_1) \dots \mu(d_k) \sum_{\substack{h_1, \dots, h_k \\ h_i \equiv 0 \pmod{d_i} \\ i=1,\dots,k}} \mu(h_1) \dots \mu(h_k) \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k \\ m_i \equiv 0 \pmod{h_i} \\ i=1,\dots,k}} L(m_1, \dots, m_k).$$

$$= \mu(d_1) \dots \mu(d_k) \sum_{h_1, \dots, h_k} \mu(d_1 h_1) \dots \mu(d_k h_k) \sum_{n_1, \dots, n_k} L(d_1 h_1 n_1, \dots, d_k h_k n_k).$$

Ако в последния израз имаме $(d_i, h_i) > 1$ за някое i, то числото $d_i h_i n_i$ няма да е безквадатно и тогава L ще се анулира. Тогава можем да считаме, че $(d_i, h_i) = 1$ за всяко i, откъдето $\mu(d_i h_i) = \mu(d_i)\mu(h_i)$. Като вземем също предвид, че $\mu^2(d_i) = 1$, получаваме

$$F = \sum_{h_1, \dots, h_k} \mu(h_1) \dots \mu(h_k) \sum_{n_1, \dots, n_k} L(d_1 h_1 n_1, \dots, d_k h_k n_k).$$

Групираме събираемите в горната сума съобразно стойностите на произведенията $h_i n_i$ и виждаме, че

$$F = \sum_{l_1, \dots, l_k} \sum_{h_1, \dots, h_k} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_k \\ h_i n_i = l_i \\ i=1,\dots,k}} \mu(h_1) \dots \mu(h_k) \, L(d_1 h_1 n_1, \dots, d_k h_k n_k)$$

$$= \sum_{l_1, \dots, l_k} L(d_1 l_1, \dots, d_k l_k) \sum_{h_1 n_1 = l_1} \mu(h_1) \cdots \sum_{h_k n_k = l_k} \mu(h_k).$$

Ако имаме $l_i > 1$ за някое i, то според Лема 3.7 е изпълнено $\sum_{h_i n_i = l_i} \mu(h_i) = 0$. Тогава в последната сума остава единствено събираемото, отговарящо на $l_1 = \cdots = l_k = 1$ и то е равно на $L(d_1, \ldots, d_k)$. С това лемата е доказана.

□

В следващата лема е дадено равенство, което позволява да се изчислява функцията $\tau(n)$, ако ни е известно каноничното разлагане на числото n.

Лема 3.11. *Ако числото $n \in \mathbb{N}$ притежава канонично разлагане $n = p_1^{l_1} \ldots p_k^{l_k}$, то имаме*

$$\tau(n) = (1 + l_1) \ldots (1 + l_k).$$

Доказателство. Това е Лема 3.32 (УАТЧ-1).

□

Следващата лема показва, че $\tau(n)$ е малко в сравнение с n.

Лема 3.12. *При $n \in \mathbb{N}$ и за произволно малко $\varepsilon > 0$ имаме*

$$\tau(n) \ll_\varepsilon n^\varepsilon.$$

Доказателство. Това е Лема 3.33 (УАТЧ-1).

□

Следващата лема ни дава оценка отгоре за средната стойност на функцията $\tau_k(n)$, когато n пробягва числата ненадминаващи зададена величина. Ще отбележим, че са известни и много по-точни резултати за тази средна стойност, но за нашите цели даденият тук е достатъчен.

Лема 3.13. *Нека $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$. Тогава е в сила оценката*

$$\sum_{n \leq x} \tau_k(n) \ll_k x\,(\log x)^{k-1}. \tag{30}$$

Доказателство. Първо да отбележим, че от определението на $\tau_k(n)$ следва, че

$$\sum_{n \leq x} \tau_k(n) = \sum_{n_1 \ldots n_k \leq x} 1. \tag{31}$$

Ще докажем твърдението с индукция по k. При $k = 2$ неравенството (30) е тривиално следствие от Теорема 4.4 (УАТЧ-1). Да допуснем, че (30) е вярно за някое $k \geq 2$. Тогава, като използваме (31) и формула (24) от Лема 3.2, получаваме

$$\sum_{n \leq x} \tau_{k+1}(n) = \sum_{n_1 \ldots n_k n_{k+1} \leq x} 1 = \sum_{n \leq x} \sum_{n_1 \ldots n_k \leq \frac{x}{n}} 1 \ll \sum_{n \leq x} \frac{x}{n} (\log x)^{k-1} \ll x (\log x)^k,$$

с което лемата е доказана.

□

Следва оценка за средната стойност на обобщената функция на делителите $\tau_k(n)$. Известни са и много по-точни формули за същата величина, но за нашите цели и настоящата е достатъчно силна.

Лема 3.14. *Нека $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$. Тогава е в сила оценката*

$$\sum_{n \leq x} \frac{\tau^k(n)}{n} \ll_k (\log x)^{2^k}. \tag{32}$$

Доказателство. Нека $k = 1$. Използваме определението на функцията $\tau(n)$, както и формула (24) от Лема 3.2 и получаваме

$$\sum_{n \leq x} \frac{\tau(n)}{n} = \sum_{lm \leq x} \frac{1}{l\,m} \leq \left(\sum_{m \leq x} \frac{1}{m} \right)^2 \ll (\log x)^2.$$

Да допуснем, че (32) е изпълнено при някое k. Тогава, като вземем предвид неравенсвтото $\tau(km) \leq \tau(k)\,\tau(m)$, което следва непосредствено от Лема 3.11, и използваме също индукционното предположение, получаваме

$$\sum_{n \leq x} \frac{\tau^{k+1}(n)}{n} = \sum_{n \leq x} \frac{\tau^k(n)\,\tau(n)}{n} = \sum_{lm \leq x} \frac{\tau^k(l\,m)}{l\,m} \leq \sum_{lm \leq x} \frac{\tau^k(l)\,\tau^k(m)}{l\,m}$$

$$\leq \left(\sum_{m \leq x} \frac{\tau^k(m)}{m} \right)^2 \ll \left((\log x)^{2^k} \right)^2 = (\log x)^{2^{k+1}}.$$

С това лемата е доказана.

$\square$

В следващите две леми са дадени тъждества за функцията на Ойлер. Първата ни дава добре известната формула за изчисляване на $\varphi(n)$, ако са известни простите множители на n, както и следствие от тази формула.

Лема 3.15. *Функцията на Ойлер $\varphi(n)$ е мултипликативна и удовлетворява*

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p} \right) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}. \tag{33}$$

Освен това, за всяко $n \in \mathbb{N}$ имаме

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d). \tag{34}$$

Доказателство. Мултипликативността на $\varphi(n)$, както и първото равенство са установени в Лема 3.38, Лема 3.39 и Лема 3.40 (УАТЧ-1). Равенството (34) следва от (33) и Лема 3.9.

$\square$

Следващата лема е полезна, когато трябва да изследваме изрази, в които участва реципрочната стойност на $\varphi(n)$.

Лема 3.16. *При $n \in \mathbb{N}$ имаме*

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}.$$

Доказателство. Това е Лема 3.41 (УАТЧ-1).

□

В следващата лема е дадена оценка отдолу за функцията на Ойлер. От тази оценка се вижда, че при големи стойности на аргумента, стойността на $\varphi(n)$ по порядък е незначително по-малка от n.

Лема 3.17. *При $n \in \mathbb{N}$ имаме*

$$\varphi(n) \gg \frac{n}{\log\log(10n)}.$$

Доказателство. Това е Лема 5.15 (УАТЧ-1).

□

Следващата лема ни дава оценки отгоре за средните стойности на функциите $\varphi(n)^{-1}$ и $\varphi(n)^{-2}$, когато n пробягва числата, ненадминаващи зададено x.

Лема 3.18. *При $x \geq 2$ са в сила оценките*

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{\varphi(n)} \ll \log x, \tag{35}$$

$$\sum_{n>x} \frac{1}{\varphi^2(n)} \ll \frac{1}{x}. \tag{36}$$

Доказателство. Първо ще докажем (35). От формула (24) на Лема 3.2, Лема 3.16 и Лема 3.17 имаме

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{\varphi(n)} = \sum_{n\leq x} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} = \sum_{d\leq x} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} \sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv 0 \pmod d}} \frac{1}{n}$$

$$\leq \sum_{d\leq x} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)\, d} \sum_{n\leq \frac{2x}{d}} \frac{1}{n} \ll (\log x) \sum_{d\leq x} \frac{\log\log(10d)}{d^2} \ll \log x,$$

тъй като редът $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\log\log(10d)}{d^2}$ е сходящ.

Сега ще установим (36). Като използваме Лема 3.16, намираме

$$\sum_{n>x} \frac{1}{\varphi^2(n)} = \sum_{n>x} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} \right)^2 = \sum_{n>x} \frac{1}{n^2} \sum_{d_1,d_2|n} \frac{\mu^2(d_1)\, \mu^2(d_2)}{\varphi(d_1)\, \varphi(d_2)}.$$

Сменяме реда на сумиране и използваме, че n се дели на d_1 и d_2 точно когато се дели на най-малкото им общо кратно $[d_1, d_2]$. Получаваме

$$\begin{aligned}
\sum_{n>x} \frac{1}{\varphi^2(n)} &= \sum_{d_1,d_2=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d_1)\,\mu^2(d_2)}{\varphi(d_1)\,\varphi(d_2)} \sum_{\substack{n>x \\ n\equiv 0 \pmod{[d_1,d_2]}}} \frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{d_1,d_2=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d_1)\,\mu^2(d_2)}{\varphi(d_1)\,\varphi(d_2)\,[d_1,d_2]^2} \sum_{n>\frac{x}{[d_1,d_2]}} \frac{1}{n^2} \\
&= \Sigma_1 + \Sigma_2, \qquad (37)
\end{aligned}$$

където Σ_1 съдържа събираемите, за които $[d_1, d_2] < x$, а Σ_2 е приносът на останалите събираеми.

За да оценим Σ_1 използваме формула (23) от Лема 3.2 и получаваме

$$\Sigma_1 \ll \sum_{d_1,d_2=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d_1)\,\mu^2(d_2)}{\varphi(d_1)\,\varphi(d_2)\,[d_1,d_2]^2}\,\frac{[d_1,d_2]}{x} \ll \frac{1}{x}\,\Sigma', \qquad (38)$$

където

$$\Sigma' = \sum_{d_1,d_2=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(d_1)\,\varphi(d_2)\,[d_1,d_2]}. \qquad (39)$$

От Лема 3.6 и Лема 3.17 и от очевидното неравенство $(d_1, d_2) \le \sqrt{d_1 d_2}$ намираме

$$\Sigma' = \sum_{d_1,d_2=1}^{\infty} \frac{(d_1,d_2)}{\varphi(d_1)\,\varphi(d_2)\,d_1\,d_2} \ll \sum_{d_1,d_2=1}^{\infty} \frac{\log\log(10d_1)\,\log\log(10d_2)}{d_1^{\frac{3}{2}}\,d_2^{\frac{3}{2}}} \ll 1. \qquad (40)$$

Сега разглеждаме Σ_2. Като вземем предвид, че редът $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ е сходящ, както и формули (39) и (40), получаваме

$$\Sigma_2 \ll \sum_{\substack{d_1,d_2=1 \\ [d_1,d_2]\ge x}}^{\infty} \frac{\mu^2(d_1)\,\mu^2(d_2)}{\varphi(d_1)\,\varphi(d_2)\,[d_1,d_2]^2} \ll \frac{1}{x}\,\Sigma' \ll \frac{1}{x}. \qquad (41)$$

От (37), (38), (40) и (41) следва (36), с което лемата е доказана.

□

Лема 3.19. *Нека е дадено крайно множество $I \subset \mathbb{N}$ и нека P е множеството от всички прости делители на числата от I. Нека функцията $f(n)$ е мултипликативна и неотрицателна и*

$$\Sigma = \sum_{n\in I} \mu^2(n) f(n), \qquad \Pi = \prod_{p\in P} \left(1 + f(p)\right).$$

Тогава е изпълнено неравенството

$$\Sigma \le \begin{cases} \Pi & \text{ако} \quad 1 \in I, \\ \Pi - 1 & \text{ако} \quad 1 \notin I. \end{cases} \qquad (42)$$

Доказателство. Нека простите числа от P са $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Като разкрием скобите и използваме мултипликативността на $f(n)$, както и основната теорема на аритметиката, получаваме

$$\Pi = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_s \in \{0,1\}} f\left(p_1^{\nu_1}\right) \ldots f\left(p_s^{\nu_s}\right) = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_s \in \{0,1\}} f\left(p_1^{\nu_1} \ldots p_s^{\nu_s}\right). \tag{43}$$

В случая $1 \in I$ сумата от дясната страна на (43) съдържа всяко от събираемите на сумата Σ и, евентуално, още неотрицателни събираеми, следователно $\Pi \geq \Sigma$. Аналогично се вижда, че в случая $1 \notin I$ имаме $\Pi - 1 \geq \Sigma$, с което лемата е доказана. □

Следващата лема съдържа едно от основните свойства на функцията на Манголд.

Лема 3.20. *За всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено*

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n.$$

Доказателство. Това е Лема 3.42 (УАТЧ-1). □

3.3 Леми за свойствата на сравненията и техни следствия

Следващата лема се отнася до разрешимостта на линейно сравнение.

Лема 3.21. *Нека $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ и $(a, n) = 1$. Тогава сравнението*

$$ax + b \equiv 0 \pmod{n}$$

е разрешимо относно x и притежава точно едно решение по модул n.

Доказателство. Това е Лема 3.57 (УАТЧ-1). □

Следва едно от основните свойства на системите от сравнения.

Лема 3.22 (Китайска теорема за остатъците)**.** *Нека при $k \geq 2$ са дадени числата $q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{N}$, които са две по две взаимно прости и нека $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$. Тогава съществува $b \in \mathbb{Z}$, което е единствено по модул $q_1 \ldots q_k$ и е такова, че системата от сравнения*

$$n \equiv a_i \pmod{q_i}, \qquad i = 1, \ldots, k \tag{44}$$

е еквивалентна на сравнението

$$n \equiv b \pmod{q_1 \ldots q_k}. \tag{45}$$

Освен това, ако е изпълнено $(a_i, q_i) = 1$ при $i = 1, \ldots, k$, то $(b, q_1 \ldots q_k) = 1$.

Доказателство. Ще докажем твърдението чрез индукция по k. Нека $k = 2$ и нека е дадена системата

$$n \equiv a_i \pmod{q_i}, \qquad i = 1, 2$$

където $(q_1, q_2) = 1$. От първото сравнение получаваме, че $n = mq_1 + a_1$ за някое $m \in \mathbb{Z}$. Като заместим във второто сравнение, виждаме, че m трябва да удовлетовява

$$mq_1 \equiv a_2 - a_1 \pmod{q_2}.$$

Тъй като q_1 и q_2 са взаимно прости, то по силата на Лема 3.21 последното сравнение притежава единствено решение (по модул q_2) относно m, което можем да запишем във вида $m \equiv (a_2 - a_1)\overline{q_1} \pmod{q_2}$, където $\overline{q_1}$ е обратният на q_1 по модул q_2, т.е. единственото цяло число, за което е изпълнено

$$1 \le \overline{q_1} \le q_2, \qquad q_1\overline{q_1} \equiv 1 \pmod{q_2}.$$

Тогава, ако положим $b = (a_2 - a_1)\,\overline{q_1}\,q_1 + a_1$, виждаме, че $n \equiv b \pmod{q_1 q_2}$.

Да допуснем, че сме доказали твърдението за някое k. Нека сега са дадени $a_1, \dots, a_{k+1} \in \mathbb{Z}$, както и две по две взаимно прости числа $q_1, \dots, q_{k+1} \in \mathbb{N}$. Вземаме първите k на брой сравнения от системата

$$n \equiv a_i \pmod{q_i}, \qquad i = 1, \dots, k+1 \tag{46}$$

и, съгласно допускането, намираме $b_0 \in \mathbb{Z}$ такова, че тези сравнения са еквивалентни на $n \equiv b_0 \pmod{q_1 \dots q_k}$. Тогава системата (46) е еквивалентна на

$$n \equiv b_0 \pmod{q_1 \dots q_k}, \qquad n \equiv a_{k+1} \pmod{q_{k+1}},$$

а тъй като $(q_1 \dots q_k, q_{k+1}) = 1$, съществува $b \in \mathbb{Z}$ такова, че последните две сравнения са еквивалентни на сравнението $n \equiv b \pmod{q_1 \dots q_{k+1}}$, с което първата част от твърдението на лемата е доказано.

Единствеността на числото b по модул $q_1 \dots q_k$ е очевидна.

Нека сега числата всяко от числата a_i, участващи в (44), имаме $(a_i, q_i) = 1$. Ако допуснем, че за някое просто p имаме $p \mid b$ и $p \mid q_1 \dots q_k$, то ще имаме $p \mid q_\nu$ за някое ν, следователно от (45) ще следва, че $p \mid n$. Но тогава от (44) ще имаме $p \mid a_\nu$, т.е. $(a_\nu, q_\nu) > 1$, което противоречи на нашето условие. Тогава $(b, q_1 \dots q_k) = 1$, с което лемата е доказана.

□

Следващата лема ни дава приближена формула за броя на числата, които принадлежат на аритметична прогресия и лежат в даден интервал.

Лема 3.23. *Нека $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $q \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$. Тогава имаме*

$$\sum_{\substack{\alpha < n \le \beta \\ n \equiv a \pmod{q}}} 1 = \frac{\beta - \alpha}{q} + O(1),$$

като константата в знака O е абсолютна.

Доказателство. Следва от Лема 3.56 (УАТЧ-1).

□

3.4 Известни резултати и хипотези относно разпределението на простите числа и техни следствия

Ще започнем с една лема от елементарната теория на простите числа.

Лема 3.24. *Нека p_n означава n-тото просто число. Тогава имаме*

$$p_n \asymp n \log n.$$

Доказателство. Това е Лема 5.14 (УАТЧ-1).

□

Следващата лема гарантира съществуването на допустими набори с произволен брой елементи и също дава оценка отгоре за диаметрите на тези набори (виж Определение 2.4 и Определение 2.5).

Лема 3.25. *Съществува константа $B > 0$ такава, че за произволно $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ може да се намери допустим набор от k на брой числа, диаметърът на който не надминава $B\, k \log k$.*

Доказателство. Нека q_1 е най-малкото просто число, за което $k < q_1$ и нека $q_2, \ldots, q_k$ са следващите прости числа, наредени по големина, т.е. $q_1 < q_2 < \cdots < q_k$. Твърдим, че наборът $\mathcal{H} = \{q_1, \ldots, q_k\}$ е допустим. Наистина, нека p е просто чиско. Ако $p \leq k$, то p не може да дели никое от числата q_j, тъй като те са прости, следователно в класовете от остатъци по модул p, определени от числата от набора, отсъства нулевият клас. Ако пък имаме $p > k$, то наборът $\mathcal{H}$ отново не може да породи всички класове от остатъци по модул p, тъй като броят на класовете, които $\mathcal{H}$ определя е по-малък от p.

Сега остана да оценим отгоре диаметъра $q_k - q_1$ на получения допустим набор. Броят на простите числа, по-малки от q_1 е равен на $\pi(k)$. (Виж формула (3)). Следователно, ако p_n е n-тото просто число, то $q_k = p_{\pi(k)+k}$. Тогава, като вземем предвид Лема 3.24, за диаметъра $q_k - q_1$ на получения набор имаме

$$q_k - q_1 \leq p_{\pi(k)+k} - k \ll k \log k.$$

С това лемата е доказана.

□

Следващата лема съдържа една от формулите на Мертенс.

Лема 3.26. *При $x \geq 2$ е изпълнено*

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

Доказателство. Това е Лема 5.10 (УАТЧ-1).

□

Следващата лема представлява обобщение на една от теоремите на Мертенс.

Лема 3.27. *Ако $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x > \max(2, \alpha + \beta)$, то е в сила асимптотичната формула*

$$\prod_{\alpha+\beta<p\leq x}\left(1-\frac{\alpha}{p-\beta}\right)=\frac{\varkappa(\alpha,\beta)}{(\log x)^{\alpha}}\left(1+O_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{\log x}\right)\right),$$

където $\varkappa(\alpha, \beta) > 0$ и не зависи от x.

Доказателство. Провежда се по същия начин, както доказателството на формулата на Мертенс от Лема 5.12 (УАТЧ-1).

□

Следващата лема ни дава асимптотична формула за безкрайно произведение по прости числа.

Лема 3.28. *Нека $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\gamma > 1$, $A = \max\left(2, \beta + \alpha^{\frac{1}{\gamma}}\right)$ и нека $\xi(p)$ са реални числа, определени за всяко просто p и удовлетворяващи $|\xi(p)| \leq \alpha$. Ако $x > A$ то безкрайното произведение*

$$P(x)=\prod_{p>x}\left(1+\frac{\xi(p)}{(p-\beta)^{\gamma}}\right), \tag{47}$$

е абсолютно сходящо и е изпълнено

$$P(x)=1+O_{\alpha,\beta,\gamma}\left(x^{1-\gamma}\right). \tag{48}$$

Доказателство. Абсолютната сходимост на произведението следва непосредствено от основните свойства на безкрайните произведения. За да докажем формулата (48), логаритмуваме (47) и използваме оценката $\log(1+t) \ll |t|$, както и формула (23) от Лема 3.2. Получаваме

$$\log P(x)=\sum_{p>x}\log\left(1+\frac{\xi(p)}{(p-\beta)^{\gamma}}\right)\ll\sum_{n>x}\frac{1}{(n-\beta)^{\gamma}}\ll x^{1-\gamma},$$

като константата в знака $\ll$ в последната формула зависи от α, β и γ. Тъй като $e^t = 1 + O(|t|)$, когато t е в околност на нулата, имаме

$$P(x)=e^{\log P(x)}=1+O\left(|\log P(x)|\right)=1+O\left(x^{1-\gamma}\right),$$

с което лемата е доказана.

В следващата лема е установена коректността на определението на величината $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, определена чрез (13) и отговаряща на допустим набор $\mathcal{H}$ (виж Определение 2.5).

Лема 3.29. *Нека $\mathcal{H} = \{h_1, \dots, h_k\}$ е допустим набор и нека*

$$\mathfrak{S}(\mathcal{H}) = \prod_p \left(1 - \frac{\nu(\mathcal{H}, p)}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-k},$$

където $\nu(\mathcal{H}, p)$ е броят на класовете от остатъци по модул p, определени от числата $h_1, \dots, h_k$. Тогава произведението $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ е сходящо.

Доказателство. По условие наборът $\mathcal{H}$ е допустим и тогава от определението на $\nu(\mathcal{H}, p)$ се вижда, че всички множители в произведението определящо $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ са различни от нула и че при достатъчно големи p ще имаме $\nu(\mathcal{H}, p) = k$. Следователно достатъчно е да установим сходимостта на произведението

$$\prod_{p>k} \left(1 - \frac{k}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-k}.$$

Общият множител на това произведение се представя във вида

$$\left(1 - \frac{k}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-k} = \left(1 - \frac{k}{p}\right) \left(1 + \frac{k}{p} + O_k\left(\frac{1}{p^2}\right)\right) = 1 + O_k\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

и остава да приложим Лема 3.28.

□

Следва една полезна оценка за специално произведение по простите делители на зададено число.

Лема 3.30. *Нека $H \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 0$. Тогава е в сила оценката*

$$\prod_{\substack{p|H \\ p>\beta}} \left(1 + \frac{\alpha}{p - \beta}\right) \ll_{\alpha,\beta} (\log\log(10H))^{\alpha}. \tag{49}$$

Доказателство. Първо доказваме (49) при $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Наистина, в този случай прилагаме Лема 3.15 и Лема 3.17 и получаваме

$$\prod_{p|H} \left(1 + \frac{1}{p}\right) < \prod_{p|H} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \frac{H}{\varphi(H)} \ll \log\log(10H). \tag{50}$$

Да разгледаме случая $\alpha = 1$, $\beta > 0$. Имаме

$$\prod_{\substack{p|H \\ p>\beta}} \left(1 + \frac{1}{p - \beta}\right) = \Pi_1 \, \Pi_2, \tag{51}$$

където

$$\Pi_1 = \prod_{\substack{p|H \\ p>\beta}} \left(1 + \frac{1}{p}\right), \qquad \Pi_2 = \prod_{\substack{p|H \\ p>\beta}} \left(1 + \frac{1}{p - \beta}\right) \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}$$

От (50) виждаме, че

$$\Pi_1 \ll_\beta \log\log(10H), \tag{52}$$

а за Π_2 според Лема 3.28 имаме

$$\Pi_2 = \prod_{\substack{p|H \\ p>\beta}} \left(1 + \frac{\beta}{(p+1)(p-\beta)}\right) \ll_\beta 1. \tag{53}$$

От (51) – (53) виждаме, че (49) е вярно и при $\alpha = 1$, $\beta > 0$.

Накрая, в общия случай, оценката (49) също е изпълнена, тъй като при $x > 0$ и $\alpha > 1$ имаме $1 + \alpha x \le (1+x)^\alpha$.

С това лемата е доказана.

$\square$

Следващата лема ни дава оценка за специални суми по делителите на зададено число.

Лема 3.31. *При $H \in \mathbb{N}$ са в сила оценките*

$$\sum_{n|H} \frac{1}{n} \ll \log\log(10H), \tag{54}$$

$$\sum_{n|H} \frac{\log n}{n} \ll (\log\log(10H))^2. \tag{55}$$

Доказателство. Първо ще докажем (54). Ако за всяко просто p означим с l_p степента с която p влиза в каноничното разлагане на H, то като приложим Лема 3.4, Лема 3.15 и Лема 3.17, получаваме

$$\sum_{n|H} \frac{1}{n} = \prod_{p|H} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^{l_p}}\right) < \prod_{p|H} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \frac{H}{\varphi(H)} \ll \log\log(10H).$$

Сега ще докажем (55). Използваме тъждеството от Лема 3.20, както и (54), и получаваме

$$\sum_{n|H} \frac{\log n}{n} = \sum_{n|H} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{d|H} \Lambda(d) \sum_{\substack{n|H \\ n \equiv 0 \pmod d}} \frac{1}{n} = \sum_{d|H} \frac{\Lambda(d)}{d} \sum_{m|\frac{H}{d}} \frac{1}{m}$$

$$\ll (\log\log(10H)) \sum_{d|H} \frac{\Lambda(d)}{d}. \tag{56}$$

По-нататък, като използваме определението на функцията на Манголд, имаме

$$\sum_{d|H} \frac{\Lambda(d)}{d} = \sum_{\substack{l\in\mathbb{N},\, p \\ p^l|H}} \frac{\log p}{p^l} = \Sigma_1 + \Sigma_2, \tag{57}$$

където

$$\Sigma_1 = \sum_{p|H} \frac{\log p}{p}, \qquad \Sigma_2 = \sum_{\substack{l\geq 2,\, p \\ p^l|H}} \frac{\log p}{p^l}.$$

Очевидно

$$\Sigma_2 \leq \sum_p \log p \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{p^l} = \sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} \ll 1. \tag{58}$$

За да оценим сумата Σ_1 я разделяме на две части и използваме Лема 3.26. Получаваме

$$\Sigma_1 = \sum_{\substack{p|H \\ p\leq \log(10H)}} \frac{\log p}{p} + \sum_{\substack{p|H \\ p>\log(10H)}} \frac{\log p}{p}$$

$$\leq \sum_{p\leq \log(10H)} \frac{\log p}{p} + \frac{1}{\log(10H)} \sum_{p|H} \log p \ \leq \sum_{p\leq \log(10H)} \frac{\log p}{p} + 1$$

$$\ll \log\log(10H). \tag{59}$$

От (57) – (59) следва, че

$$\sum_{d|H} \frac{\Lambda(d)}{d} \ll \log\log(10H)$$

и като заместим тази оценка в (56) получаваме (55).

□

Следващата лема съдържа един от най-важните резултати от теорията на числата.

Лема 3.32 (Асимптотичен закон за разпределението на простите числа)**.** *За функциите* $\pi(x)$*,* $\theta(x)$*,* $\psi(x)$*, определени съответно чрез* (3)*,* (4) *и* (5) *имаме*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \qquad \theta(x) \sim x, \qquad \psi(x) \sim x \qquad \text{\textit{при}} \qquad x \to \infty.$$

Доказателство. Виж Теорема 5.34 и Лема 5.35 (УАТЧ-1).

□

Нека $\theta(x, q, a)$ е функцията на Чебишев, зададена чрез (7). Определяме $\Delta(x, q, a)$ чрез равенството

$$\theta(x, q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} + \Delta(x, q, a). \tag{60}$$

Според известната теорема на Зигел (виж Глава 5 от [10]), ако $D > 0$ е произволна константа, то имаме

$$\Delta(x, q, a) \ll x e^{-c\sqrt{\log x}} \qquad \text{при} \qquad q \leq (\log x)^D, \qquad (a, q) = 1.$$

За някои приложения горната оценка е достатъчно добра, но има и задачи, за решаването на които е нужно да разполагаме с асимптотчина формула за $\theta(x,q,a)$ и при по-големи стойности на q, например от порядък x^θ за някоя константа $\theta \in (0,1)$. Дали обаче в този случай такава формула е налице, към настоящия момент не е известно. При някои задачи обаче е достатъчно да знаем, че остатъчният член $\Delta(x,q,a)$ е малък при почти всички стойности на q от зададен интервал. По-точно, да разгледаме сумата

$$\Sigma_\theta(x) = \sum_{q \le x^\theta} \max_{y \le x} \max_{(a,q)=1} |\Delta(y,q,a)| \,. \tag{61}$$

Ако използваме (7) и (60), то при $q < x$ лесно получаваме тривиалната оценка $\Delta(x,q,a) \ll \frac{x \log x}{q}$, от която следва, че $\Sigma_\theta(x) \ll x \log^2 x$. Оказва се, че е твърде полезно за някоя константа $\theta \in (0,1)$ да разполагаме с оценка за сумата $\Sigma_\theta(x)$, която да е по-добра от тривиалната. Поради това даваме следното

Определение 3.33. *Нека $\theta \in (0,1)$ е константа. Казваме, че редицата от простите числа притежава ниво на разпределение θ, ако за всяко $A > 0$ за сумата (61) е в сила оценката*

$$\Sigma_\theta(x) \ll \frac{x}{(\log x)^A}. \tag{62}$$

От определението се вижда, че ако θ е ниво на разпределение на редицата от простите числа, то всяко $\theta' \in (0,\theta)$ също е ниво на разпределение на тази редица. [5] Елиот и Халберстам [4] са формулирали следната

Хипотеза 3.34 (Елиот и Халберстам)**.** *Всяко $\theta \in (0,1)$ е ниво на разпределение на редицата от простите числа.*

Към настоящия момент тази хипотеза не е доказана. Най-добрият резултат който е известен до момента, е следната фундаментална

Лема 3.35 (Теорема на Бомбиери–Виноградов, 1965)**.** *За всяко $A > 0$ може да се намери $B = B(A) > 0$ такова, че*

$$\sum_{q \le \frac{\sqrt{x}}{(\log x)^B}} \max_{y \le x} \max_{(a,q)=1} |\Delta(y,q,a)| \ll_A \frac{x}{(\log x)^A}. \tag{63}$$

□

Това е единственият резултат в настоящите записки, който използваме наготово, без да даваме доказателство. Читателят може да се запознае с такова, например от монографията на Иваниец и Ковалски [10].

Следствие 3.36. *Всяко число $\theta < \frac{1}{2}$ е ниво на разпределение на редицата от простите числа.*

[5] В някои книги определението е малко по-различно, а именно, ниво на разпределение се нарича точната горна граница на множеството от числата θ, за които е изпълнено (62).

Доказателство. Следва непосредствено от Определение 3.33 и Лема 3.35.

$\square$

В приложенията често се срещат суми подобни на тази от (61) и от следващата лема се вижда, че и за някои от тях съществуват нетривиални оценки.

Лема 3.37. *Да допуснем, че числото $\theta \in (0,1)$ е ниво на разпределение на редицата от простите числа и нека $k \in \mathbb{N}$. Тогава за всяко $A > 0$ имаме*

$$\sum_{q \le x^\theta} \tau^k(q) \max_{y \le x} \max_{(a,q)=1} |\Delta(y,q,a)| \ll_{A,k} \frac{x}{(\log x)^A}. \tag{64}$$

Доказателство. Да означим с Γ сумата в лявата страна на (64). От (7), (60) и от Лема 3.17 непосредствено следва, че

$$\Delta(y,q,a) \ll q^{-1}\, x \log x \qquad \text{при} \qquad q < x, \quad y \le x. \tag{65}$$

Като приложим неравенството на Коши, получаваме

$$\Gamma \le (\Gamma_1 \, \Gamma_2)^{\frac{1}{2}}, \tag{66}$$

където

$$\Gamma_1 = \sum_{q \le x^\theta} \tau^{2k}(q) \max_{y \le x} \max_{(a,q)=1} |\Delta(y,q,a)|,$$

$$\Gamma_2 = \sum_{q \le x^\theta} \max_{y \le x} \max_{(a,q)=1} |\Delta(y,q,a)|$$

От (65) и Лема 3.14 следва

$$\Gamma_1 \ll x(\log x) \sum_{q \le x} \frac{\tau^{2k}(q)}{q} \ll_k x\, (\log x)^{2^{2k}+1}. \tag{67}$$

Да разгледаме сумата Γ_2. При зададено $A > 0$ определяме

$$A_1 = 2A + 2^{2k} + 1 \tag{68}$$

и, като използваме Определение 3.33, виждаме, че

$$\Gamma_2 \ll_{A,k} \frac{x}{(\log x)^{A_1}}. \tag{69}$$

Тогава от (66) – (69) получаваме (64).

$\square$

3.5 Асимптотични формули за някои суми от стойности на мултипликативни функции

Ще започнем с лема, която представлява обобщение на Лема 3.61 (УАТЧ-1).

Лема 3.38. *Ако* $y \in \mathbb{R}, y \geq 1$ *и* $H \in \mathbb{N}$*, то е в сила асимптотичната формула*

$$\sum_{\substack{n \leq y \\ (n,H)=1}} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2}\, y \prod_{p \mid H} \frac{p}{p+1} + O\left(\tau(H)\sqrt{y}\,\right). \tag{70}$$

Доказателство. Първо ще установим една спомагателна асимптотична формула. Използваме Лема 3.7 и намираме

$$\sum_{\substack{n \leq y \\ (n,H)=1}} 1 = \sum_{n \leq y} \sum_{d \mid (n,H)} \mu(d) = \sum_{d \mid H} \mu(d) \sum_{\substack{n \leq y \\ n \equiv 0 \pmod d}} 1 = \sum_{d \mid H} \mu(d) \left[\frac{y}{d}\right]$$

$$= \sum_{d \mid H} \mu(d) \left(\frac{y}{d} + O(1)\right) = y \sum_{d \mid H} \frac{\mu(d)}{d} + O\left(\tau(H)\right).$$

Сега, като приложим Лема 3.15, получаваме

$$\sum_{\substack{n \leq y \\ (n,H)=1}} 1 = \frac{\varphi(H)}{H} y + O\left(\tau(H)\right). \tag{71}$$

Като използваме Лема 3.8 и формула (71), виждаме, че

$$\sum_{\substack{n \leq y \\ (n,H)=1}} \mu^2(n) = \sum_{\substack{n \leq y \\ (n,H)=1}} \sum_{d^2 \mid n} \mu(d) = \sum_{d \leq \sqrt{y}} \mu(d) \sum_{\substack{n \leq y \\ (n,H)=1 \\ n \equiv 0 \pmod{d^2}}} 1$$

$$= \sum_{\substack{d \leq \sqrt{y} \\ (d,H)=1}} \mu(d) \sum_{\substack{m \leq \frac{y}{d^2} \\ (m,H)=1}} 1 = \sum_{\substack{d \leq \sqrt{y} \\ (d,H)=1}} \mu(d) \left(\frac{\varphi(H)}{H} \frac{y}{d^2} + O\left(\tau(H)\right)\right)$$

$$= \frac{\varphi(H)}{H}\, y \sum_{\substack{d \leq \sqrt{y} \\ (d,H)=1}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(\tau(H)\sqrt{y}\,\right). \tag{72}$$

В сумата по d в горната формула разпространяваме сумирането до всички $d \in \mathbb{N}$, за които $(d, H) = 1$. Тогава, като използваме формула (23) от Лема 3.2, Лема 3.3 и

Лема 3.5, получаваме

$$\sum_{\substack{d\le\sqrt{y}\\(d,H)=1}} \frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{\substack{d=1\\(d,H)=1}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(\sum_{d>\sqrt{y}} \frac{1}{d^2}\right) = \prod_{p\nmid H}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) + O\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) \prod_{p|H}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \prod_{p|H}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1} + O\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{6}{\pi^2}\frac{H}{\varphi(H)}\prod_{p|H}\frac{p}{p+1} + O\left(y^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Заместваме последния израз в (72) и получаваме (70).

□

Следващата лема се отнася до средната стойност на функцията $\mu^2(n)\varphi(n)^{-1}$.

Лема 3.39. *Ако $y\in\mathbb{R}, y>1$ и $H\in\mathbb{N}$, то е в сила асимптотичната формула*

$$\sum_{\substack{n\le y\\(n,H)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} = \frac{\varphi(H)}{H}\log y + O\left(\tau(H)\right). \tag{73}$$

Доказателство. Първо ще разгледаме сумата

$$\Gamma(y) = \sum_{\substack{n\le y\\(n,H)=1}} \frac{\mu^2(n)\,n}{\varphi(n)}. \tag{74}$$

Прилагаме Лема 3.16 и получаваме

$$\Gamma(y) = \sum_{\substack{n\le y\\(n,H)=1}} \mu^2(n) \sum_{d|n}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} = \sum_{\substack{d\le y\\(d,H)=1}} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} \sum_{\substack{n\le y\\(n,H)=1\\n\equiv 0 \pmod d}} \mu^2(n)$$

$$= \sum_{\substack{d\le y\\(d,H)=1}} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} \sum_{\substack{m\le \frac{y}{d}\\(md,H)=1}} \mu^2(md) = \sum_{\substack{d\le y\\(d,H)=1}} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} \sum_{\substack{m\le \frac{y}{d}\\(m,dH)=1}} \mu^2(m).$$

Сега към сумата по m прилагаме Лема 3.38 и намираме

$$\Gamma(y) = \sum_{\substack{d\le y\\(d,H)=1}} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} \left(\frac{6}{\pi^2}\frac{y}{d}\prod_{p|dH}\frac{p}{p+1} + O\left(\tau(dH)\sqrt{\frac{y}{d}}\right)\right)$$

$$= \frac{6}{\pi^2}\,y\prod_{p|H}\frac{p}{p+1}\sum_{\substack{d\le y\\(d,H)=1}}\lambda(d) + O\left(\tau(H)\sqrt{y}\sum_{d\le y}\frac{\tau(d)}{\varphi(d)\sqrt{d}}\right), \tag{75}$$

където сме означили

$$\lambda(d) = \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)\,d} \prod_{p|d} \frac{p}{p+1}. \tag{76}$$

От Лема 3.12 и Лема 3.17 следва, че

$$\sum_{d\le y} \frac{\tau(d)}{\varphi(d)\,\sqrt{d}} \ll \sum_{d=1}^{\infty} d^{-\frac{4}{3}} \ll 1,$$

така че остатъчният член в (75) е равен на $O\left(\tau(H)\,\sqrt{y}\,\right)$.

Сега да разгледаме сумата по d в (75). Първо отбелязваме, че от (76), Лема 3.15 и Лема 3.28 следва оценката

$$\lambda(d) = \frac{\mu^2(d)}{d^2} \prod_{p|d} \frac{p^2}{(p-1)(p+1)} = \frac{\mu^2(d)}{d^2} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p^2-1}\right) \ll \frac{1}{d^2}. \tag{77}$$

Тогава, като разпространим сумирането до всички естествени числа d взаимно прости с H и използваме формула (23) от Лема 3.2, Лема 3.3 и (76), намиране

$$\sum_{\substack{d\le y\\(d,H)=1}} \lambda(d) = \sum_{\substack{d=1\\(d,H)=1}}^{\infty} \lambda(d) + O\left(\sum_{d>y} \frac{1}{d^2}\right) = \prod_{p\nmid H} (1+\lambda(p)) + O\left(y^{-1}\right)$$

$$= \prod_{p\nmid H} \left(1 + \frac{1}{p^2-1}\right) + O\left(y^{-1}\right). \tag{78}$$

От (75) и (78) следва

$$\Gamma(y) = \frac{6}{\pi^2}\, y \prod_{p|H} \frac{p}{p+1} \prod_{p\nmid H} \left(1 + \frac{1}{p^2-1}\right) + O\left(\tau(H)\,\sqrt{y}\,\right).$$

От Лема 3.5 имаме

$$\frac{6}{\pi^2} = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \prod_{p|H} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \prod_{p\nmid H} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \tag{79}$$

следователно

$$\Gamma(y) = y \prod_{p|H} \frac{p-1}{p} + O\left(\tau(H)\,\sqrt{y}\,\right).$$

Сега, като приложим Лема 3.15, получаваме

$$\Gamma(y) = \frac{\varphi(H)}{H} y + O\left(\tau(H)\,\sqrt{y}\,\right). \tag{80}$$

Сега ще докажем формула (73). Като използваме (74), (80) и Лема 3.1, получаваме

$$\sum_{\substack{n\le y\\(n,H)=1}}\frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}=-\int\limits_1^y\Gamma(t)\,\left(t^{-1}\right)'\,dt+\Gamma(y)y^{-1}$$

$$=\int\limits_1^y\left(\frac{\varphi(H)}{H}t+O\left(\tau(H)\sqrt{t}\right)\right)\,\frac{dt}{t^2}+\left(\frac{\varphi(H)}{H}y+O\left(\tau(H)\sqrt{y}\,\right)\right)y^{-1}$$

$$=\frac{\varphi(H)}{H}\,\log y+O\left(\tau(H)\right),$$

с което лемата е доказана.

□

Следващата лема ни дава асимптотична формула подобна на тази от Лема 3.39, но с друга оценка за остатъчния член. Това е необходимо, тъй като в някои части от доказателството на Теорема 2.14, оценката за остатъчния член от Лема 3.39 е недостатъчно силна.

Лема 3.40. *Ако $y\in\mathbb{R}$, $y>1$ и $H\in\mathbb{N}$, то е в сила асимптотичната формула*

$$\sum_{\substack{n\le y\\(n,H)=1}}\frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}=\frac{\varphi(H)}{H}\log y+O\left(\left(\log\log(10H)\right)^2\right). \tag{81}$$

Доказателство. Да означим с S сумата от лявата страна на (81). Като използваме Лема 3.7, намираме

$$S=\sum_{n\le y}\frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}\sum_{d|(n,H)}\mu(d)=\sum_{d|H}\mu(d)\sum_{\substack{n\le y\\ n\equiv 0\pmod d}}\frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}$$

$$=\sum_{d|H}\mu(d)\sum_{n\le\frac{y}{d}}\frac{\mu^2(nd)}{\varphi(nd)}=\sum_{d|H}\mu(d)\sum_{\substack{n\le\frac{y}{d}\\(n,d)=1}}\frac{\mu^2(n)\,\mu^2(d)}{\varphi(n)\,\varphi(d)}$$

$$=\sum_{d|H}\frac{\mu(d)}{\varphi(d)}\sum_{\substack{n\le\frac{y}{d}\\(n,d)=1}}\frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}.$$

Да отбележим, че сумирането по d се извършва всъщност по числа, за които $d\le y$, тъй като в противен случай вътрешната сума в горната формула ще е празна. Сега прилагаме Лема 3.39 и получаваме

$$S=\sum_{\substack{d|H\\d\le y}}\frac{\mu(d)}{\varphi(d)}\left(\frac{\varphi(d)}{d}\log\frac{y}{d}+O\left(\tau(d)\right)\right)=\sum_{\substack{d|H\\d\le y}}\frac{\mu(d)}{d}\log\frac{y}{d}+O\left(\Delta_0\right), \tag{82}$$

където

$$\Delta_0 = \sum_{d|H} \frac{\mu^2(d)\tau(d)}{\varphi(d)}.$$

За да оценим Δ_0 използваме Лема 3.4, Лема 3.11, Лема 3.15 и Лема 3.30 и получаваме

$$\Delta_0 = \prod_{p|H} \left(1 + \frac{2}{p-1}\right) \ll (\log\log(10H))^2 .$$

Заместваме горната оценка в (82) и получаваме

$$S = \sum_{\substack{d|H \\ d\le y}} \frac{\mu(d)}{d} (\log y - \log d) + O\left((\log\log(10H))^2\right)$$

$$= (\log y) \sum_{\substack{d|H \\ d\le y}} \frac{\mu(d)}{d} - \Delta_1 + O\left((\log\log(10H))^2\right), \tag{83}$$

където

$$\Delta_1 = \sum_{\substack{d|H \\ d\le y}} \frac{\mu(d)\, \log d}{d}.$$

Но от формула (55) от условието на Лема 3.31 следва

$$\Delta_1 \ll \sum_{d|H} \frac{\log d}{d} \ll (\log\log(10H))^2 .$$

От последната оценка, от (83) и от Лема 3.15 получаваме

$$S = (\log y) \sum_{\substack{d|H \\ d\le y}} \frac{\mu(d)}{d} + O\left((\log\log(10H))^2\right)$$

$$= (\log y) \sum_{d|H} \frac{\mu(d)}{d} - \Delta_2 + O\left((\log\log(10H))^2\right)$$

$$= \frac{\varphi(H)}{H} \log y - \Delta_2 + O\left((\log\log(10H))^2\right), \tag{84}$$

където

$$\Delta_2 = (\log y) \sum_{\substack{d|H \\ d> y}} \frac{\mu(d)}{d}.$$

От формула (55) от условието на Лема 3.31 следва

$$\Delta_2 \ll \sum_{d|H} \frac{\log d}{d} \ll (\log\log(10H))^2$$

и, като заместим тази оценка в (84), получаваме (81).

□

Следващата лема е аналогична на Лема 3.39, но се отнася за средната стойност на друга аритметична функция.

Лема 3.41. *Нека $g(n)$ е аритметична функция, дефинирана за безквадратни числа n чрез формулата*

$$g(n) = \prod_{p|n} (p-2). \tag{85}$$

Нека $y \in \mathbb{R}, y > 1$, $H \in \mathbb{N}$, $2 \mid H$. Тогава е в сила асимптотичната формула

$$\sum_{\substack{n \le y \\ (n,H)=1}} \frac{\mu^2(n)\,\varphi^2(n)}{g(n)\,n^2} = \frac{\varphi(H)}{H}\,\beta(H)\,\log y + O\left(\tau(H)\right), \tag{86}$$

където

$$\beta(H) = \prod_{p \nmid H} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 + \frac{1}{p(p+1)(p-2)}\right). \tag{87}$$

Доказателство. Първо да отбележим, че според Лема 3.28 произведението (87) е сходящо.

За всяко безквадратно и нечетно число n имаме

$$\frac{\varphi^2(n)}{g(n)\,n} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{d\,g(d)}. \tag{88}$$

Наистина, функцията $g(n)$, определена от (85) е мултипликативна, така че достатъчно е да проверим (88) само за прости стойности на аргумента, а тази проверка се извършва непосредствено. Да означим

$$\Phi(y) = \sum_{\substack{n \le y \\ (n,H)=1}} \frac{\mu^2(n)\,\varphi^2(n)}{g(n)\,n}. \tag{89}$$

Като използваме (88), получаваме

$$\Phi(y) = \sum_{\substack{n \le y \\ (n,H)=1}} \mu^2(n) \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{d\,g(d)} = \sum_{\substack{d \le y \\ (d,H)=1}} \frac{\mu^2(d)}{dg(d)} \sum_{\substack{n \le y \\ (n,H)=1 \\ n \equiv 0 \pmod d}} \mu^2(n)$$

$$= \sum_{\substack{d \le y \\ (d,H)=1}} \frac{\mu^2(d)}{dg(d)} \sum_{\substack{n \le \frac{y}{d} \\ (n,dH)=1}} \mu^2(n).$$

Сега към вътрешната сума прилагаме Лема 3.38 и намираме

$$\Phi(y) = \sum_{\substack{d\le y \\ (d,H)=1}} \frac{\mu^2(d)}{dg(d)} \left(\frac{6}{\pi^2} \, \frac{y}{d} \prod_{p|dH} \frac{p}{p+1} + O\left(\tau(dH) \sqrt{\frac{y}{d}}\, \right) \right)$$

$$= \frac{6}{\pi^2} \, y \prod_{p|H} \frac{p}{p+1} \sum_{\substack{d\le y \\ (d,H)=1}} \psi(d) + O\left(\tau(H)\sqrt{y}\,\right), \tag{90}$$

където

$$\psi(d) = \frac{\mu^2(d)}{g(d)\,d^2} \prod_{p|d} \frac{p}{p+1}. \tag{91}$$

От (85) и (91) непосредствено следва, че функцията $\psi(d)$ е мултипликативна и удовлетворява $\psi(d) \ll d^{-2}$. Тогава, като приложим формула (23) от Лема 3.2, както и Лема 3.3, получаваме

$$\sum_{\substack{d\le y \\ (d,H)=1}} \psi(d) = \sum_{\substack{d=1 \\ (d,H)=1}}^{\infty} \psi(d) + O\left(\sum_{d>y} d^{-2} \right) = \prod_{p\nmid H} \left(1+\psi(p)\right) + O\left(y^{-1}\right)$$

$$= \prod_{p\nmid H} \left(1 + \frac{1}{p(p+1)(p-2)} \right) + O\left(y^{-1}\right).$$

Заместваме последния израз в (90) и като използваме (79), (87) и (91), след прости пресмятания, които оставяме на читателя, получаваме

$$\Phi(y) = \frac{\varphi(H)}{H}\, \beta(H)\, y + O\left(\tau(H)\sqrt{y}\,\right). \tag{92}$$

За да получим формулата (86) остава да приложим Лема 3.1 и да работим, както в края на доказателството на Лема 3.39. Пресмятанията оставяме на читателя.

$\square$

В следващата лема се дава асимптотична формула за сума, подобна на тази от Лема 3.41. Имаме

Лема 3.42. *Нека $g(n)$ е аритметична функция, дефинирана за безквдратни n чрез формулата* (85)*. Нека $y \in \mathbb{R}, y > 1$, $H \in \mathbb{N}$, $2 \mid H$ и $\beta(H)$ е определено чрез* (87)*. Тогава, ако $G(t)$ е частично непрекъснато диференцируема функция в интервала* $[0, 1]$, *то е в сила асимптотичната формула*

$$\sum_{\substack{n\le y \\ (n,H)=1}} \frac{\mu^2(n)\,\varphi^2(n)}{g(n)\,n^2}\, G\left(\frac{\log n}{\log y}\right) = \frac{\varphi(H)}{H}\, \beta(H)(\log y) \int\limits_0^1 G(t)\,dt + O\left(\tau(H)\right), \tag{93}$$

където констатната в знака O зависи само от функцията G.

Доказателство. По условие функцията $G(t)$ е частично непрекъснато диференцируема в интервала $[0, 1]$, следователно съществува разбиване на този интервал на краен брой части посредством точките

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_l = 1, \tag{94}$$

а в интервала $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$ съществува непрекъснато диференцируема функция $\psi_j(t)$, такава, че

$$\psi_j(t) = G(t) \qquad \text{при} \qquad t \in (\alpha_j, \alpha_{j+1}), \qquad j = 0, \ldots, l-1. \tag{95}$$

Полагаме

$$\gamma_j = y^{\alpha_j}, \qquad j = 0, \ldots, l-1 \tag{96}$$

и означаваме за краткост

$$f(n) = \begin{cases} \frac{\mu^2(n)\,\varphi^2(n)}{g(n)\,n^2} & \text{при} \quad (n, H) = 1, \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases} \tag{97}$$

Нека S е сумата в лявата страна на (93). Имаме

$$S = G(0) + \sum_{j=0}^{l-1} S_j, \tag{98}$$

където

$$S_j = \sum_{\gamma_j < n \le \gamma_{j+1}} f(n)\, G\left(\frac{\log n}{\log y}\right). \tag{99}$$

Тъй като $G(t)$ се различава от $\psi_j(t)$ евентуално само в краищата на интервала $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$, то

$$S_j = S'_j + O(1), \tag{100}$$

където

$$S'_j = \sum_{\gamma_j < n \le \gamma_{j+1}} f(n)\, \psi_j\left(\frac{\log n}{\log y}\right).$$

Сега прилагаме (96), Лема 3.1 и Лема 3.41 и получаваме

$$\begin{aligned} S'_j &= -\int_{\gamma_j}^{\gamma_{j+1}} \left(\sum_{\gamma_j < n \le t} f(n)\right) \frac{d}{dt}\psi_j\left(\frac{\log t}{\log y}\right) dt + \psi_j\left(\alpha_{j+1}\right) \sum_{\gamma_j < n \le \gamma_{j+1}} f(n) \\ &= -\int_{\gamma_j}^{\gamma_{j+1}} \left(\frac{\varphi(H)}{H}\,\beta(H)(\log t - \log \gamma_j) + O\left(\tau(H)\right)\right) \frac{d}{dt}\psi_j\left(\frac{\log t}{\log y}\right) dt \\ &\quad + \psi_j\left(\alpha_{j+1}\right)\left(\frac{\varphi(H)}{H}\,\beta(H)(\log \gamma_{j+1} - \log \gamma_j) + O\left(\tau(H)\right)\right). \end{aligned} \tag{101}$$

Да означим с S_j^* и съответно Δ_j приноса на главните, съответно остатъчните, членове в горната формула, така че имаме

$$S_j' = S_j^* + \Delta_j. \tag{102}$$

Ясно е, че

$$\Delta_j \ll \tau(H)\left(1 + \int\limits_{\gamma_j}^{\gamma_{j+1}} \left|\frac{d}{dt}\psi_j\left(\frac{\log t}{\log y}\right)\,dt\right|\right) \ll \tau(H)\left(1 + \int\limits_{\gamma_j}^{\gamma_{j+1}} \frac{dt}{(\log y)\,t}\right) \ll \tau(H). \tag{103}$$

Имаме

$$S_j^* = \frac{\varphi(H)}{H}\,\beta(H)\left(\psi_j\left(\alpha_{j+1}\right)\left(\log\gamma_{j+1} - \log\gamma_j\right) - \int\limits_{\gamma_j}^{\gamma_{j+1}} \left(\log t - \log\gamma_j\right)\frac{d}{dt}\psi_j\left(\frac{\log t}{\log y}\right)\,dt\right)$$

и, като интегрираме по части и вземем предвид (95) и (96), получаваме

$$S_j^* = \frac{\varphi(H)}{H}\,\beta(H)\int\limits_{\gamma_j}^{\gamma_{j+1}} \psi_j\left(\frac{\log t}{\log y}\right)\frac{dt}{t} = \frac{\varphi(H)}{H}\,\beta(H)\int\limits_{\gamma_j}^{\gamma_{j+1}} G\left(\frac{\log t}{\log y}\right)\frac{dt}{t}.$$

Сега извършваме смяна на променливата $t = y^u$ и намитаме

$$S_j^* = \frac{\varphi(H)}{H}\,\beta(H)\,(\log y)\int\limits_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} G(u)\,du. \tag{104}$$

От (94), (98), (100), (102) – (104) следва

$$S = \frac{\varphi(H)}{H}\,\beta(H)\,(\log y)\sum_{j=0}^{l-1}\int\limits_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} G(u)\,du + O\left(\tau(H)\right)$$

$$= \frac{\varphi(H)}{H}\,\beta(H)\,(\log y)\int\limits_{0}^{1} G(u)\,du + O\left(\tau(H)\right).$$

С това лемата е доказана.

□

Следващата лема представлява аналог на Лема 3.42, но се отнася за функцията $\mu^2(n)\varphi(n)^{-1}$.

Лема 3.43. *Нека $y \in \mathbb{R}, y > 1$ и $H \in \mathbb{N}$. Тогава, ако $G(t)$ е частично непрекъснато диференцируема функция в интервала $[0,1]$, то е в сила асимптотичната формула*

$$\sum_{\substack{n\le y\\(n,H)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)}\,G\left(\frac{\log n}{\log y}\right) = \frac{\varphi(H)}{H}\,(\log y)\int\limits_{0}^{1} G(t)\,dt + O\left(\tau(H)\right), \tag{105}$$

където констатната в знака O зависи само от функцията G.

Доказателство. Получава се чрез дословно повторение на доказателството на Лема 3.42, но вместо Лема 3.41 използваме Лема 3.39.

□

В някои части от доказателството на нашата основна теорема асимптотичната формула (105) е удобна за употреба, но в други, остатъчният член $O(\tau(H))$ дава твърде голям принос. Поради тази причина имаме нужда от следния вариант на предишната лема.

Лема 3.44. *Нека $y \in \mathbb{R}, y > 1$ и $H \in \mathbb{N}$. Тогава, ако $G(t)$ е частично непрекъснато диференцируема функция в интервала $[0, 1]$, то е в сила асимптотичната формула*

$$\sum_{\substack{n \le y \\ (n,H)=1}} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} G\left(\frac{\log n}{\log y}\right) = \frac{\varphi(H)}{H} (\log y) \int_0^1 G(t)\,dt + O\left((\log\log(10H))^2\right), \tag{106}$$

където констатната в знака O зависи от функцията G.

Доказателство. В началото ще работим както при доказателството на Лема 3.42 и, за удобство на читателя, отново излагаме подробно съответните разсъждения.

По условие функцията $G(t)$ е частично непрекъснато диференцируема в интервала $[0, 1]$, следователно съществува разбиване на този интервал на краен брой части посредством точките

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_l = 1, \tag{107}$$

а в интервала $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$ съществува непрекъснато диференцируема функция $\psi_j(t)$, такава, че

$$\psi_j(t) = G(t) \qquad \text{при} \qquad t \in (\alpha_j, \alpha_{j+1}), \qquad j = 0, \ldots, l-1. \tag{108}$$

Полагаме

$$\gamma_j = y^{\alpha_j}, \qquad j = 0, \ldots, l-1 \tag{109}$$

и означаваме за краткост

$$f(n) = \begin{cases} \frac{\mu^2(n)}{\varphi(n)} & \text{при} \quad (n, H) = 1, \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases} \tag{110}$$

Нека S е сумата в лявата страна на (106). Имаме

$$S = G(0) + \sum_{j=0}^{l-1} S_j, \tag{111}$$

където

$$S_j = \sum_{\gamma_j < n \le \gamma_{j+1}} f(n)\, G\left(\frac{\log n}{\log y}\right). \tag{112}$$

Тъй като $G(t)$ се различава от $\psi_j(t)$ евентуално само в краищата на интервала $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$, то
$$S_j = S'_j + O(1), \tag{113}$$
където
$$S'_j = \sum_{\gamma_j < n \le \gamma_{j+1}} f(n)\, \psi_j \left(\frac{\log n}{\log y} \right).$$

Като използваме Лема 3.1 и (109) получаваме
$$S'_j = - \int\limits_{\gamma_j}^{\gamma_{j+1}} \left(\sum_{\gamma_j < n \le t} f(n) \right) \frac{d}{dt} \left(\psi_j \left(\frac{\log t}{\log y} \right) \right) dt + \psi_j\left(\alpha_{j+1}\right) \sum_{\gamma_j < n \le \gamma_{j+1}} f(n) \tag{114}$$

От Лема 3.40 следва, че
$$\sum_{\gamma_j < n \le t} f(n) = \Xi_1(t) + O\left((\log\log(10H))^2 \right), \tag{115}$$
където
$$\Xi_1(t) = \frac{\varphi(H)}{H} \left(\log t - \log \gamma_j \right). \tag{116}$$

От (114) и (115) следва
$$S'_j = S^*_j + \Delta_j \tag{117}$$
където
$$S^*_j = - \int\limits_{\gamma_j}^{\gamma_{j+1}} \Xi_1(t)\, \frac{d}{dt} \left(\psi_j \left(\frac{\log t}{\log y} \right) \right) dt + \psi_j\left(\alpha_{j+1}\right) \Xi_1(\gamma_{j+1}), \tag{118}$$
а с Δ_j сме означили приноса към S'_j, който идва от остатъчния член в (115).

Ясно е, че
$$\begin{aligned}
\Delta_j &\ll (\log\log(10H))^2 \left(1 + \int\limits_{\gamma_j}^{\gamma_{j+1}} \left| \frac{d}{dt} \left(\psi_j \left(\frac{\log t}{\log y} \right) \right| dt \right) \right) \\
&\ll (\log\log(10H))^2 \left(1 + \int\limits_{\gamma_j}^{\gamma_{j+1}} \frac{dt}{t \log y} \right) \\
&\ll (\log\log(10H))^2 .
\end{aligned} \tag{119}$$

Да разгледаме величината S_j^*. От (116) и (118) следва

$$S_j^* = -\frac{\varphi(H)}{H} \int\limits_{\gamma_j}^{\gamma_{j+1}} (\log t - \log \gamma_j) \, \frac{d}{dt} \left(\psi_j \left(\frac{\log t}{\log y} \right) \right) \, dt$$

$$+ \frac{\varphi(H)}{H} \psi_j \left(\alpha_{j+1} \right) \left(\log \gamma_{j+1} - \log \gamma_j \right)$$

и, като интегрираме по части и вземем предвид (109), получаваме

$$S_j^* = \frac{\varphi(H)}{H} \int\limits_{\gamma_j}^{\gamma_{j+1}} \psi_j \left(\frac{\log t}{\log y} \right) \, \frac{dt}{t}.$$

Сега извършваме смяна на променливата $t = y^u$ и имайки предвид (108) и (109) виждаме, че

$$S_j^* = \frac{\varphi(H)}{H} (\log y) \int\limits_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \psi_j(u) \, du = \frac{\varphi(H)}{H} (\log y) \int\limits_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} G(u) \, du. \tag{120}$$

От (117), (119) и (120) следва

$$S_j' = \frac{\varphi(H)}{H} (\log y) \int\limits_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} G(t) \, dt + O \left((\log \log (10H))^2 \right).$$

От последната формула и от (107) и (111) получаваме

$$S = \frac{\varphi(H)}{H} (\log y) \int\limits_{0}^{1} G(t) \, dt + O \left((\log \log (10H))^2 \right).$$

С това лемата е доказана.

$\square$

4 Доказателство на Теорема 2.14

4.1 Теоремите на Голдстон–Пинц–Ялдарим и Джанг

Тук съвсем накратко и без да излагаме доказателства ще обсъдим схемите на доказателствата на Теорема 2.11 и Теорема 2.12.

Нека $\mathcal{H} = \{h_1, \dots, h_k\}$ е допустим набор (Виж Определение 2.5) и нека x е достатъчно голямо. Разглеждаме сумата

$$V = \sum_{x<n\leq 2x} \left(\sum_{i=1}^{k} \Theta(n+h_i) - \log(3x) \right) w\left(\mathcal{H}, n\right), \tag{121}$$

където $\Theta(n)$ е функцията, определена от (2) и

$$w\left(\mathcal{H}, n\right) \geq 0 \qquad \text{при} \qquad n \in (x, 2x]. \tag{122}$$

Ако докажем, че

$$V > 0, \tag{123}$$

то ще съществува $n \in (x, 2x]$ такова, че поне две от числата

$$n + h_1, \dots n + k_k \tag{124}$$

ще са прости. Наистина, ако за всяко цяло $n \in (x, 2x]$ най-много едно от числата (124) е просто, то

$$\sum_{i=1}^{k} \Theta(n+h_i) \leq \log(n+h_k) \leq \log(2x+h_k) < \log(3x)$$

и тогава всички събираеми на сумата V ще бъдат неположителни, следователно ще имаме $V \leq 0$, което противоречи на (123).

И така, ако $V > 0$, to за всяко достатъчно голямо x в съществува $n \in (x, 2x]$ такова, че за някакви индекси i, j такива, че $1 \leq i < j \leq k$ числата

$$p = n + h_i, \qquad q = n + h_j$$

са прости. Непосредствено се проверява, че

$$x < p < q < 3x, \qquad 0 < q - p \leq h_k - h_1.$$

Тогава, като дадем на x редица от стойности, клонящи към безкрайност, намираме безбройно много двойки от различни прости числа, намиращи се на разстояние ненадминаващо $h_k - h_1$.

Основният проблем е да се намери подходяща функция $w(\mathcal{H}, n)$, която да удовлетворява (122) и да е такава, че да сме в състояние да докажем неравенството (123). Голдстон, Пинц и Ялдарим избират тази функция от вида

$$w(\mathcal{H}, n) = \left(\sum_{\substack{d \mid P(n) \\ d \leq R}} \lambda(d) \right)^2, \tag{125}$$

където R е параметър,

$$P(n) = (n + h_1) \dots (n + h_k) \tag{126}$$

и $\lambda(d)$ е реалнозначна аритметична функция. Голдстон, Пинц и Ялдарим, ръководейки се от съображения, изложени за първи път в трудовете на Селберг, определят

$$\lambda(d) = \mu(d)\, G\left(\frac{\log d}{\log R}\right),$$

където $G(t)$ е гладка функция, определена в интервала $[0, 1]$, а $\mu(d)$ е функцията на Мьобиус.

При такъв избор на $\lambda(d)$ е очевидно, че условието (122) е изпълнено. По-нататък, от (121) и (125) следва

$$V = \sum_{x<n\le 2x} \left(\sum_{i=1}^{k} \Theta(n+h_i) - \log(3x) \right) \sum_{\substack{d_1,d_2 | P(n) \\ d_1,d_2 \le R}} \lambda(d_1)\lambda(d_2)$$

$$= \sum_{d_1,d_2\le R} \lambda(d_1)\lambda(d_2) \sum_{\substack{x<n\le 2x \\ P(n)\equiv 0 \pmod{[d_1,d_2]}}} \left(\sum_{i=1}^{k} \Theta(n+h_i) - \log(3x) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} V_i - V^* \log(3x), \tag{127}$$

където

$$V_i = \sum_{d_1,d_2\le R} \lambda(d_1)\lambda(d_2) \sum_{\substack{x<n\le 2x \\ P(n)\equiv 0 \pmod{[d_1,d_2]}}} \Theta(n+h_i)$$

$$V^* = \sum_{d_1,d_2\le R} \lambda(d_1)\lambda(d_2) \sum_{\substack{x<n\le 2x \\ P(n)\equiv 0 \pmod{[d_1,d_2]}}} 1.$$

При подходящ избор на функцията $G(t)$ може да бъдат намерени асимптотични формули за горните суми. При изследването на V_i се използва информация за разпределението на простите числа в аритметични прогресии. Оказва се, че ако простите числа имат ниво на разпределение по-голямо от $\frac{1}{2}$, то изразът (127) става положителен за достатъчно големи x. Оттук следва доказателството на Теорема 2.11.

Ще кажем няколко думи и за работата на Джанг. Основната идея е вместо условието на наличие на ниво на разпределение на простите числа по-голямо от $\frac{1}{2}$ да се изпозлва по-слабо условие, което обаче вече може да бъде доказано със средствата на съвремената математика. Джанг доказва резултат, който е аналогичен на теоремата на Бомбиери–Виноградов, но с ниво на разпределение по-голямо от $\frac{1}{2}$. По-точно, основният нов резултат от работата [16] е следната

Лема 4.1 (Джанг). *Нека $\Delta(x,q,a)$ се определя от равенството* (60) *и нека $\mathcal{S}$ е множеството на безквадратните числа, чиито прости множители не надминават $x^{\frac{1}{1168}}$. Ако $\mathcal{H}=\{h_1,\dots,h_k\}$ е допустим набор и при $\theta>0$ разглеждаме сумата*

$$\Sigma^*_{\theta,i}(x)=\sum_{\substack{q\le x^\theta\\ q\in\mathcal{S}}}\ \sum_{a\in C_i(q)}|\Delta(x,q,a)|\,,$$

където за $i=1,\dots,k$ сме означили

$$C_i(q)=\{c\ :\ 1\le c\le q,\ (c,q)=1,\ P(c-h_i)\equiv 0\pmod q\ \}.$$

Тогава ако $1\le i\le k$ и ако

$$\theta<\frac{1}{2}+\frac{1}{584},$$

то за произволно $A>0$ е в сила оценката

$$\Sigma^*_{\theta,i}(x)\ll_{A,k}\frac{x}{(\log x)^A}. \tag{128}$$

$\square$

Доказателството на Лема 4.1 е дълго и технически много трудно. Използва се дисперсионния метод на Линник и доказателството на оценката (128) се свежда до изследването на сложни експоненциални суми над крайни полета. Тези суми се оценяват със средствата на алгебричната геометрия, като се използват дълбоките резултати на А. Вейл и П. Делин.

След като доказва Лема 4.1 Джанг следва метода на Голдстон, Пинц и Ялдарим и получава доказателство на Теорема 2.12. В настоящите записки обаче с метода на Джанг няма да се занимаваме.

4.2 Начало на доказателството на Теорема 2.14

Нека x е достатъчно голямо. Ще разгледаме сума подобна на тази от (121), но с две отличия. Първото е, че се сумира не по всички $n\in(x,2x]$, а по числата от този интервал, принадлежащина на подходяща аритметична прогрсеия. Този трик ни помага да преодолеем някои технически препятствия, които възникват ако той не бъде приложен. Втората разлика е, че вместо израза $\log(3x)$ имаме $m\log(3x)$, където $m\in\mathbb{N}$ е произволно. Това ни да ва възможност „да улавяме" не само двойки, но и m-орки прости числа в ограничени интервали.

Ще отбележим, че е достатъчно да докажем Теорема 2.14 при достатъчно големи стойности m. Тогава, разбира се, тя ще е вярна при всички естествени m, стига да вземем по-голяма константа C в дясната част на неравенството (21).

Определяме

$$W=\prod_{p\le D}p,\qquad \text{където}\qquad D=\log\log\log x. \tag{129}$$

От асимптотичния закон за разпределението на простите числа (Лема 3.32) следва, че при достатъчно големи x имаме

$$\log W = \sum_{p \le D} \log p \le 2D = \log (\log\log x)^2,$$

следователно

$$W \le (\log\log x)^2. \tag{130}$$

Нека е даден допустим набор

$$\mathcal{H} = \{h_1, \dots, h_k\} \tag{131}$$

(виж Определение 2.5). Ще определим $v \in \mathbb{Z}$ така, че ако $n \equiv v \pmod W$, то да е изпълнено $(n + h_i, W) = 1$ за всяко $i = 1, 2, \dots, k$.

Тъй като наборът $\mathcal{H}$ е допустим, то за всяко просто p съществува $\nu_p \in \mathbb{Z}$ такова, че $h_i \not\equiv -\nu_p \pmod p$ за всяко $i = 1, 2, \dots, k$. Като използваме китайската теорема за остатъците (Лема 3.22), както и определението (129) за W, виждаме, че съществува $v \in \mathbb{Z}$ такова, че сравнението

$$n \equiv v \pmod W \tag{132}$$

е еквивалентно на системата от сравнения

$$n \equiv \nu_p \pmod p,$$

където модулите са всички прости числа $p \le D$. Тогава, ако n удовлетворява (132), то за всяко просто $p \le D$ и за всяко $i = 1, 2, \dots, k$ имаме

$$n + h_i \equiv \nu_p + h_i \not\equiv 0 \pmod p.$$

Следователно, като вземем предвид (129), виждаме, че $(n + h_i, W) = 1$ за всяко $i = 1, 2, \dots, k$.

Нека $m \in \mathbb{N}$ и нека за всяко $n \in (x, 2x]$, за което $n \equiv v \pmod W$, сме определили $w(\mathcal{H}, n) \in \mathbb{R}$, като засега ще считаме само, че

$$w(\mathcal{H}, n) \ge 0, \tag{133}$$

а точният вид на $w(\mathcal{H}, n)$ ще определим по-късно. Разглеждаме сумата

$$S = S(\mathcal{H}, m) = \sum_{\substack{x < n \le 2x \\ n \equiv v \pmod W}} \left(\sum_{i=1}^{k} \Theta\,(n + h_i) - m \log(3x) \right) w(\mathcal{H}, n). \tag{134}$$

Да допуснем, че сме доказали, че при достатъчно големи x е изпълнено

$$S > 0. \tag{135}$$

Тогава, ако x е достатъчно голямо, ще съществува $n \in (x, 2x]$ такова, че

$$\sum_{i=1}^{k} \Theta\left(n + h_i\right) > m \log(3x). \tag{136}$$

Тогава измежду числата

$$n + h_1, \ldots, n + h_k \tag{137}$$

ще има поне m на брой прости. Наистина, в противен случай сумата от лявата страна на (136) няма да надхвърля $(m-1)\log(n+h_k) \le (m-1)\log(2x+h_k)$ и ако x е достатъчно голямо, неравенството (136) няма да е изпълнено.

Ако измежду числата (137) прости са

$$p_1 = n + h_{j_1} < p_2 = n + h_{j_2} < \cdots < p_m = n + h_{j_m},$$

то всички те се намират в интервала $(x, 3x)$ и освен това

$$p_m - p_1 \le h_{j_m} - h_{j_1} \le h_k - h_1.$$

Сега, ако x пробягва редица от стойности, клоняща към безкрайност, ще получим безбройно много m-орки от прости числа, всяка от които се намира в интервал с дължина $h_k - h_1$, която (виж Определение 2.4) е диаметърът на набора $\mathcal{H}$.

Предстои ни да определим тегловата функция $w(\mathcal{H}, n)$, което е най-важната част от доказателството. Ще дефинираме $w(\mathcal{H}, n)$ по такъв начин, че ако $\mathcal{H}$ е произволен допустим набор с k елемента и ако

$$k \ge A m^2 e^{4m}, \tag{138}$$

където $A > 0$ е достатъчно голяма константа, то за достатъчно големи x ще е изпълнено (135). След като това е извършено ще определим

$$k = \left[A m^2 e^{4m}\right] + 1 \tag{139}$$

и, като се възползваме от Лема 3.25 ще конструираме допустим набор от k елемента с диаметър не наминаващ $Bk \log k$, където $B > 0$ е константа. Но от (139) непосредствено се вижда, че ако вземем достатъчно голяма константа $C > 0$, ще имаме

$$Bk \log k \le C m^3 e^{4m}.$$

От всичко това следва, че за всяко $m \in \mathbb{N}$ ще съществуват безбройно много m-орки от последователни прости числа, лежащи в интервали с дължина ненадминаваща $Cm^3 e^{4m}$, с което Теорема 2.14 ще бъде доказана.

4.3 Определяне на функцията $w(\mathcal{H}, n)$

Основната нова идея в доказателството е,че теглото $w(\mathcal{H}, n)$ се определя чрез формула подобна на (125), но с величина λ, представляваща функция на много променливи.

Нека $\lambda(d_1, \ldots, d_k)$ е реалнозначна функция, дефинирана за $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{N}$. При $n \equiv v \pmod W$ определяме

$$w(\mathcal{H}, n) = \left(\sum_{\substack{d_i | n+h_i \\ i=1,\ldots,k}} \lambda(d_1, \ldots, d_k) \right)^2 . \tag{140}$$

Тогава очевидно е изпълнено условието (133).

Точния вид на $\lambda(d_1, \ldots, d_k)$ ще дадем по-късно, а засега налагаме върху нея следните условия. Нека $R > 1$ е параметър, който ще определим по-късно. Засега ще считаме само, че R е положителна степен на x, откъдето в частност следва, че

$$\log R \asymp \log x. \tag{141}$$

Ще искаме да е изпълнено $\lambda(d_1, \ldots, d_k) = 0$, ако е налице някое от условията:

- някое от числата d_i не е безквадратно,
- $d_1 \ldots d_k > R$,
- $(d_i, W) > 1$ за някое i,
- $(d_i, d_j) > 1$ за някои $i \neq j$.

Да отбележим, че третото и четвъртото изискване възникват поради естеството на сумата в дясната страна на (140). Наистина, ако за някое i и за някое просто $p \leq D$ имаме $p \mid d_i$, то поради условието, наложено в областта на сумиране, ще имаме $p \mid n + h_i$, откъдето $(n + h_i, W) > 1$. Но последното е невъзможно при $n \equiv v \pmod W$ поради избора на v. По-нататък, да допуснем, че $(d_i, d_j) > 1$ и да вземем общ прост делител p на d_i и d_j. Ясно е, че $(p, W) = 1$, откъдето $p \geq D$. От друга страна имаме $p \mid n + h_i$, $p \mid n + h_j$ откъдето $p \mid h_i - h_j$. Но тогава ще имаме $p \mid \prod_{1 \leq j < i \leq k} (h_i - h_j)$, а последният израз зависи само от набора $\mathcal{H}$. Следователно, ако x е достатъчно голямо, получаваме противоречие.

И така, присъствието на множител $\lambda(d_1, \ldots, d_k)$ налага на променливите следните условия:

$$d_1 \ldots d_k \leq R, \qquad \mu^2(d_1 \ldots d_k) = 1, \qquad (d_1 \ldots d_k, W) = 1. \tag{142}$$

За сумата S, определена от (134), имаме

$$S = \sum_{\mu=1}^{k} S_2^{(\mu)} - m \log(3x)\, S_1, \tag{143}$$

където

$$S_1 = \sum_{\substack{x<n\leq 2x \\ n\equiv v \pmod W}} w(\mathcal{H}, n), \tag{144}$$

$$S_2^{(\mu)} = \sum_{\substack{x<n\leq 2x \\ n\equiv v \pmod W}} \Theta(n+h_\mu)\, w(\mathcal{H}, n). \tag{145}$$

4.4 Намиране на асимптотична формула за сумата S_1

Да разгледаме сумата S_1, определена чрез (144). Като използваме (140), намираме

$$S_1 = \sum_{\substack{x<n\leq 2x \\ n\equiv v \pmod W}} \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ d_i|n+h_i \\ i=1,\dots,k}} \lambda(d_1,\dots,d_k) \sum_{\substack{t_1,\dots,t_k \\ t_i|n+h_i \\ i=1,\dots,k}} \lambda(t_1,\dots,t_k)$$

Сменяме реда на сумиране и получаваме

$$S_1 = \sum_{\substack{d_1,\dots d_k \\ t_1,\dots,t_k}} \lambda(d_1,\dots,d_k)\, \lambda(t_1,\dots,t_k)\, \mathfrak{N}, \tag{146}$$

където $\mathfrak{N}$ е броят на целите числа $n \in (x, 2x]$, удовлетворяващи сравненията

$$n + h_i \equiv 0 \pmod{[d_i, t_i]}, \qquad i = 1, \dots, k. \tag{147}$$

и

$$n \equiv v \pmod W. \tag{148}$$

В областта на сумиране в сумата S_1, зададена чрез (146), може да се постави условието

$$([d_i, t_i], [d_j, t_j]) = 1 \qquad \text{при} \qquad i \neq j, \tag{149}$$

тъй като в противен случай ще имаме $\mathfrak{N} = 0$. Наистина, нека съществува просто число p, делящо $[d_i, t_i]$ и $[d_j, t_j]$ при някои $i \neq j$. Тогава от (129) и от третото от условията (142) следва, че $p > D$. Ако съществува $n \in \mathbb{Z}$ удовлетворяващо (147) и (148), то ще имаме $p \mid n + h_i$, $p \mid n + h_j$, откъдето $p \mid h_i - h_j$. Следователно $p \leq \prod_{1\leq j<i\leq k}(h_i - h_j)$ и тъй като последното число е фиксирано, а D става произволно голямо с нарастването на x, получаваме противоречие.

Да отбележим, че вместо (149) в областта на сумиране в (146) може да се постави само условието

$$(d_i, t_j) = 1 \qquad \text{при} \qquad i \neq j, \tag{150}$$

тъй като условията $(d_i, d_j) = (t_i, t_j) = 1$ при $i \neq j$ се гарантират от наличието на множителите $\lambda(d_1, \dots, d_k)$ и $\lambda(t_1, \dots, t_k)$ и от условията (142), които те налагат.

По-нататък, ясно е че

$$([d_i, t_i], W) = 1 \qquad \text{при} \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{151}$$

Тогава според китайската теорема за остатъците (Лема 3.22) съществува $\kappa \in \mathbb{Z}$ такова, че системата от сравнения (147), (148) е еквивалентна на сравнението

$$n \equiv \kappa \pmod{W[d_1, t_1] \ldots [d_k, t_k]}. \tag{152}$$

Тъй като $\mathfrak{N}$ е равно на броя на числата $n \in (x, 2x]$, удовлетворяващи (152), то от Лема 3.23 следва

$$\mathfrak{N} = \frac{x}{W[d_1, t_1] \ldots [d_k, t_k]} + O(1). \tag{153}$$

От (146) и (153) следва

$$S_1 = \frac{x}{W} \mathcal{E} + O(\mathcal{B}), \tag{154}$$

където

$$\mathcal{E} = \sum_{\substack{d_1, \ldots, d_k \\ t_1, \ldots, t_k \\ (150)}} \frac{\lambda(d_1, \ldots, d_k) \, \lambda(t_1, \ldots, t_k)}{[d_1, t_1] \ldots [d_k, t_k]}, \tag{155}$$

$$\mathcal{B} = \sum_{\substack{d_1, \ldots d_k \\ t_1, \ldots, t_k}} |\lambda(d_1, \ldots, d_k)| \, |\lambda(t_1, \ldots, t_k)| \tag{156}$$

Да разгледаме сумата $\mathcal{E}$. Като използваме Лема 3.6 заключаваме, че е в сила равенството $[d_i, t_i](d_i, t_i) = d_i t_i$, следователно

$$\mathcal{E} = \sum_{\substack{d_1, \ldots d_k \\ t_1, \ldots, t_k \\ (150)}} \frac{\lambda(d_1, \ldots, d_k)}{d_1 \ldots d_k} \, \frac{\lambda(t_1, \ldots, t_k)}{t_1 \ldots t_k} \, (d_1, t_1) \ldots (d_k, t_k). \tag{157}$$

Като вземем предвид формула (34) от Лема 3.15 виждаме, че е в сила равенството

$$n = \sum_{r \mid n} \varphi(r). \tag{158}$$

От (157) и (158) получаваме

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \sum_{\substack{d_1, \ldots d_k \\ t_1, \ldots, t_k \\ (150)}} \frac{\lambda(d_1, \ldots, d_k)}{d_1 \ldots d_k} \, \frac{\lambda(t_1, \ldots, t_k)}{t_1 \ldots t_k} \left(\sum_{r_1 \mid (d_1, t_1)} \varphi(r_1) \right) \ldots \left(\sum_{r_k \mid (d_k, t_k)} \varphi(r_k) \right) \\ &= \sum_{\substack{d_1, \ldots d_k \\ t_1, \ldots, t_k \\ (150)}} \frac{\lambda(d_1, \ldots, d_k)}{d_1 \ldots d_k} \, \frac{\lambda(t_1, \ldots, t_k)}{t_1 \ldots t_k} \sum_{\substack{r_1, \ldots, r_k \\ r_i \mid (d_i, t_i) \\ i = 1, \ldots, k}} \varphi(r_1) \ldots \varphi(r_k). \end{aligned} \tag{159}$$

Сега използваме Лема 3.7 и се освобождаваме от условията (150) в областта на сумиране на горната сума, като за всяка двойка индекси $i \neq j$ поставим множител $\sum_{s_{ij} \mid (d_i, t_j)} \mu(s_{ij})$. Като извършим това за всички възможни двойки индекси, виждаме, че множителят, който трябва да се постави, е равен на

$$\prod_{\substack{1 \le i,j \le k \\ i \neq j}} \sum_{s_{ij} \mid (d_i, t_j)} \mu(s_{ij}) = \sum_{\substack{s_{ij} \\ 1 \le i,j \le k,\, i \neq j \\ s_{ij} \mid (d_i, t_j)}} \prod_{\substack{1 \le i,j \le k \\ i \neq j}} \mu(s_{ij}). \tag{160}$$

Получаваме

$$\mathcal{E} = \sum_{\substack{d_1, \dots d_k \\ t_1, \dots, t_k}} \frac{\lambda(d_1, \dots, d_k)}{d_1 \dots d_k} \frac{\lambda(t_1, \dots, t_k)}{t_1 \dots t_k} \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k \\ r_i \mid (d_i, t_i) \\ i = 1, \dots, k}} \varphi(r_1) \dots \varphi(r_k) \sum_{\substack{s_{ij} \\ 1 \le i,j \le k,\, i \neq j \\ s_{ij} \mid (d_i, t_j)}} \prod_{\substack{1 \le i,j \le k \\ i \neq j}} \mu(s_{ij}). \tag{161}$$

От необходимите условия (142), за това величината $\lambda(d_1, \dots, d_k)$ да не се анулира, виждаме, че последната сума ще е празна, освен ако променливите $r_1, \dots, r_k$ не удовлетворяват условията

$$r_1 \dots r_k \le R, \qquad \mu^2(r_1 \dots r_k) = 1, \qquad (r_1 \dots r_k, W) = 1. \tag{162}$$

Ясно е също, че всички променливи s_{ij} трябва да са безквадратни числа, взаимно прости с W и да са две по две взаимно прости, тъй като в противен случай ще имаме $\mathcal{E} = 0$. Освен това s_{ij} трябва да е взаимно просто с r_i и r_j при всеки $i \neq j$. Наистина, ако за някое просто p имаме $p \mid s_{ij}$ и $p \mid r_i$, то ще имаме също $p \mid t_j$ и $p \mid t_i$, а това противоречи на условието $(t_i, t_j) = 1$. И така, променливите s_{ij} задължително удовлетворяват условията

$$(\Pi, W) = 1, \quad \mu^2(\Pi) = 1, \quad (s_{ij}, r_i) = (s_{ij}, r_j) = 1 \quad \text{при} \quad 1 \le i,j \le k, \quad i \neq j, \tag{163}$$

където

$$\Pi = \prod_{\substack{1 \le i,j \le k \\ i \neq j}} s_{ij}. \tag{164}$$

Сменяме реда на сумиране в (161) и, като използваме (163) и (164), получаваме

$$\mathcal{E} = \sum_{\substack{r_1, \dots, r_k \\ (162)}} \varphi(r_1) \dots \varphi(r_k) \sum_{\substack{s_{ij} \\ 1 \le i,j \le k,\, i \neq j \\ (163)}} \mu(\Pi)\, Z(a_1, \dots, a_k)\, Z(b_1, \dots, b_k), \tag{165}$$

където сме положили

$$Z(u_1, \dots, u_k) = \sum_{\substack{d_1, \dots, d_k \\ d_i \equiv 0 \pmod{u_i} \\ i = 1, \dots, k}} \frac{\lambda(d_1, \dots, d_k)}{d_1 \dots d_k}, \tag{166}$$

$$a_i = r_i \prod_{\substack{1\le j\le k \\ j\ne i}} s_{ij}, \qquad b_i = r_i \prod_{\substack{1\le j\le k \\ j\ne i}} s_{ji}. \tag{167}$$

Сега определяме

$$y(u_1,\dots,u_k) = \mu(u_1)\dots\mu(u_k)\,\varphi(u_1)\dots\varphi(u_k)\,Z(u_1,\dots,u_k) \tag{168}$$

От (166) и (168) следва

$$\frac{y(u_1,\dots,u_k)}{\varphi(u_1)\dots\varphi(u_k)} = \mu(u_1)\dots\mu(u_k) \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ d_i\equiv 0 \pmod{u_i} \\ i=1,\dots,k}} \frac{\lambda(d_1,\dots,d_k)}{d_1\dots d_k} \tag{169}$$

и тогава, като приложим Лема 3.10, получаваме

$$\lambda(d_1,\dots,d_k) = \mu(d_1)\dots\mu(d_k)\,d_1\dots d_k \sum_{\substack{u_1,\dots,u_k \\ u_i\equiv 0 \pmod{d_i} \\ i=1,\dots,k}} \frac{y(u_1,\dots,u_k)}{\varphi(u_1)\dots\varphi(u_k)}. \tag{170}$$

Да разгледаме израза $Z(a_1,\dots,a_k)$. Като използваме (167), (168) и вземем предвид, че съгласно (163) множителите в произведението, задаващо a_i, са два по два взаимно прости, получаваме

$$Z(a_1,\dots,a_k) = \mu(a_1)\dots\mu(a_k)\,\frac{y(a_1,\dots,a_k)}{\varphi(a_1)\dots\varphi(a_k)}$$

$$= y(a_1,\dots,a_k)\,\frac{\mu(r_1)\dots\mu(r_k)}{\varphi(r_1)\dots\varphi(r_k)} \prod_{\substack{1\le i,j\le k \\ i\ne j}} \frac{\mu(s_{ij})}{\varphi(s_{ij})}.$$

Аналогично намираме

$$Z(b_1,\dots,b_k) = y(b_1,\dots,b_k)\,\frac{\mu(r_1)\dots\mu(r_k)}{\varphi(r_1)\dots\varphi(r_k)} \prod_{\substack{1\le i,j\le k \\ i\ne j}} \frac{\mu(s_{ij})}{\varphi(s_{ij})}.$$

Заместваме горните изрази в (165) и получаваме

$$\mathcal{E} = \sum_{\substack{r_1,\dots,r_k \\ (162)}} \varphi(r_1)\dots\varphi(r_k) \sum_{\substack{s_{ij} \\ 1\le i,j\le k,\ i\ne j \\ (163)}} \mu(\Pi)\,y(a_1,\dots,a_k)\,y(b_1,\dots,b_k)$$

$$\times\,\frac{\mu^2(r_1)\dots\mu^2(r_k)}{\varphi^2(r_1)\dots\varphi^2(r_k)} \prod_{\substack{1\le i,j\le k \\ i\ne j}} \frac{\mu^2(s_{ij})}{\varphi^2(s_{ij})}.$$

Оттук, като вземем предвид (162) – (164) виждаме, че

$$\mathcal{E} = \sum_{\substack{r_1,\dots,r_k \\ (162)}} \frac{1}{\varphi(r_1)\dots\varphi(r_k)} \sum_{\substack{s_{ij} \\ 1\le i,j\le k,\ i\ne j \\ (163)}} y(a_1,\dots,a_k)\, y(b_1,\dots,b_k) \prod_{\substack{1\le i,j\le k \\ i\ne j}} \frac{\mu(s_{ij})}{\varphi^2(s_{ij})}. \tag{171}$$

Сега ще определим величината $y(u_1,\dots,u_k)$. Нека $F(t_1,\dots t_k)$ е функция с носител, намиращ се в множеството

$$R_k = \{\langle t_1,\dots,t_k\rangle \in \mathbb{R}^k \ :\ t_1 \ge 0,\ \dots,\ t_k \ge 0,\ t_1 + \dots t_k \le 1\}, \tag{172}$$

или, с други думи, имаме

$$F(t_1,\dots,t_k) = 0 \qquad \text{ако} \qquad \langle t_1,\dots,t_k\rangle \notin R_k. \tag{173}$$

Ще считаме, че F е ограничена и частично диференцируема в R_k и че частните ѝ производни, там където съществуват, са също ограничени. Накрая, предполагаме, че $F(t_1,\dots,t_k)$ е симетрична относно всички свои променливи, т.е.

$$F(t_{i_1},\dots,t_{i_k}) = F(t_1,\dots,t_k)$$

за произволна пертмутация $\{i_1,\dots,i_k\}$ на числата $\{1,\dots,k\}$.

Определяме

$$y(u_1,\dots,u_k) = F\left(\frac{\log u_1}{\log R},\dots,\frac{\log u_k}{\log R}\right). \tag{174}$$

Тогава имаме

$$y(u_1,\dots,u_k) = O(1), \tag{175}$$

като константата в знака O зависи от конкретния избор на функцията F. Освен това $y(u_1,\dots,u_k)$ е симетрична функция относно всичките си променливи. Оттук и от (170) следва, че $\lambda(d_1,\dots,d_k)$ също е симетрична функция на променливите си $d_1,\dots,d_k$.

Ще намерим асимптотична формула за величината $\mathcal{E}$, като главният член в нея възниква от събираемите от (171), за които $s_{ij} = 1$ за всички възможни i,j.

Първо ще оценим приноса към $\mathcal{E}$ от събираемите, за които $s_{ij} > 1$ за някои i,j. Да вземем, например, сумата от модулите на събираемите на $\mathcal{E}$, за които $s_{12} > 1$, като означим получената сума с Ξ_{12}. Тъй като според (163), (164) имаме $(s_{12}, W) = 1$, то, като вземем предвид (129) се убеждаваме, че щом $s_{12} > 1$, то s_{12} ще притежава прост делител по-голям от D и, в частност, ще имаме $s_{12} > D$. По-нататък, според формула (36) от Лема 3.18, имаме

$$\sum_{s_{12} > D} \frac{1}{\varphi^2(s_{12})} \ll D^{-1}.$$

Сумите по останалите променливи s_{ij} оценяваме като използваме само оценката

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^2(s)} \ll 1.$$

Тогава, като вземем предвид (162), (171) и (175), както и определението на Ξ_{12}, получаваме

$$\Xi_{12} \ll \sum_{\substack{r_1,\ldots,r_k \\ (162)}} \frac{1}{\varphi(r_1)\ldots\varphi(r_k)} \sum_{s_{12}>D} \frac{1}{\varphi^2(s_{12})} \ll D^{-1} \sum_{\substack{r_1\ldots r_k \le R \\ (r_1\ldots,r_k,W)=1}} \frac{\mu^2(r_1)\ldots\mu^2(r_k)}{\varphi(r_1)\ldots\varphi(r_k)}$$

$$\ll D^{-1} \left(\sum_{\substack{r\le R \\ (r,W)=1}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} \right)^k . \tag{176}$$

Но, като използваме Лема 3.15, Лема 3.19, Лема 3.27 и определението (129) на величината W виждаме, че

$$\sum_{\substack{r\le R \\ (r,W)=1}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} \le \prod_{\substack{p\le R \\ (p,W)=1}} \left(1+\frac{1}{p-1}\right) = \prod_{p|W} \frac{p-1}{p} \cdot \prod_{p\le R} \left(1+\frac{1}{p-1}\right)$$

$$= \frac{\varphi(W)}{W} \prod_{p\le R} \left(1+\frac{1}{p-1}\right) \ll \frac{\varphi(W)}{W} \log R. \tag{177}$$

Оттук и от (176) слева

$$\Xi_{12} \ll D^{-1} \left(\frac{\varphi(W)}{W}\right)^k (\log R)^k.$$

От горните разсъждения заключаваме, че ако означим с $\mathcal{E}^*$ приноса на събираемите в сумата в дясната страна на (171), за които $s_{ij} = 1$ при всички i, j, то имаме

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^* + O\left(D^{-1} \left(\frac{\varphi(W)}{W}\right)^k (\log R)^k \right). \tag{178}$$

Да разгледаме сумата $\mathcal{E}^*$. От (167) виждаме, че ако $s_{ij} = 1$ при всички i, j, то имаме $a_i = b_i = r_i$ за всяко i, следователно

$$\mathcal{E}^* = \sum_{\substack{r_1,\ldots,r_k \\ (162)}} \frac{y(r_1,\ldots,r_k)^2}{\varphi(r_1)\ldots\varphi(r_k)}. \tag{179}$$

В последната сума ще заменим условието (162) от областта на сумиране с условието

$$r_1 \dots r_k \le R, \qquad \mu^2(r_1) = \dots = \mu^2(r_k) = 1, \qquad (r_1 \dots r_k, W) = 1, \tag{180}$$

т.е. допускаме променливите r_i да не са непременно две по две взаимно прости.

Означаваме

$$\mathcal{E}^{\#} = \sum_{\substack{r_1,\dots,r_k \\ (180)}} \frac{y(r_1,\dots,r_k)^2}{\varphi(r_1)\dots\varphi(r_k)}. \tag{181}$$

За да оценим разликата между сумите от (179) и (181) е достатъчно да оценим грешката Δ_{12}, която се появява, ако от условието (162) в областта на сумиране в (179) премахнем само изискването $(r_1, r_2) = 1$. Отбелязваме, че ако $(r_1, r_2) > 1$, то поради условието $(r_1 r_2, W) = 1$ и от определението (129) на W следва, че числото (r_1, r_2) ще притежава прост делител по-голям от D и, в частност, ще имаме $(r_1, r_2) > D$. Като използваме (175) виждаме, че

$$\Delta_{12} \ll \sum_{\substack{r_1 \dots r_k \le R \\ (r_1 \dots r_k, W)=1 \\ (r_1, r_2) > D}} \frac{\mu^2(r_1)\dots\mu^2(r_k)}{\varphi(r_1)\dots\varphi(r_k)} \le \Delta' \left(\sum_{\substack{r \le R \\ (r,W)=1}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} \right)^{k-2}, \tag{182}$$

където

$$\Delta' = \sum_{\substack{r_1 r_2 \le R \\ (r_1 r_2, W)=1 \\ (r_1, r_2) > D}} \frac{\mu^2(r_1)\mu^2(r_2)}{\varphi(r_1)\varphi(r_2)}.$$

За да оценим сумата Δ' използваме формула (36) от Лема 3.18 и оценката (177) и получаваме

$$\Delta' = \sum_{D < d \le R} \sum_{\substack{r_1 r_2 \le R \\ (r_1 r_2, W)=1 \\ (r_1, r_2) = d}} \frac{\mu^2(r_1)\mu^2(r_2)}{\varphi(r_1)\varphi(r_2)} \le \sum_{D < d \le R} \left(\sum_{\substack{r \le R \\ (r,W)=1 \\ r \equiv 0 \pmod d}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} \right)^2$$

$$\le \sum_{D < d \le R} \left(\sum_{\substack{r \le R \\ (r,W)=1}} \frac{\mu^2(r)\,\mu^2(d)}{\varphi(r)\,\varphi(d)} \right)^2 \le \left(\sum_{D < d \le R} \frac{\mu^2(d)}{\varphi^2(d)} \right) \left(\sum_{\substack{r \le R \\ (r,W)=1}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} \right)^2$$

$$\ll D^{-1} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \log R \right)^2.$$

От последната оценка, (177) и (182) получаваме

$$\Delta_{12} \ll D^{-1} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \log R \right)^k .$$

По такъв начин виждаме, че

$$\mathcal{E}^* = \mathcal{E}^\# + O\left(D^{-1} \left(\frac{\varphi(W)}{W} \log R \right)^k \right) . \tag{183}$$

Сега ще намерим асимптотична формула за сумата $\mathcal{E}^\#$. Като използваме (174), (180) и (181) записваме тази сума във вида

$$\mathcal{E}^\# = \sum_{\substack{r_1 \ldots r_{k-1} \le R \\ (r_1 \ldots r_{k-1}, W)=1}} \frac{\mu^2(r_1) \ldots \mu^2(r_{k-1})}{\varphi(r_1) \ldots \varphi(r_{k-1})} \; \mathcal{F}_k, \tag{184}$$

където

$$\mathcal{F}_k = \sum_{\substack{r \le \frac{R}{r_1 \ldots r_{k-1}} \\ (r,W)=1}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} \, F^2 \left(\frac{\log r_1}{\log R}, \ldots, \frac{\log r_{k-1}}{\log R}, \frac{\log r}{\log R} \right)$$

В тази сума може да разпростем сумирането до числата, за които $r \le R$, тъй като извън множеството R_k, определено чрез (172), функцията $F(t_1, \ldots, t_k)$ се анулира. Извършваме тази процедура, след което прилагаме Лема 3.43 и получаваме

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k &= \sum_{\substack{r \le R \\ (r,W)=1}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} \, F^2 \left(\frac{\log r_1}{\log R}, \ldots, \frac{\log r_{k-1}}{\log R}, \frac{\log r}{\log R} \right) \\ &= \frac{\varphi(W)}{W} (\log R) \int\limits_0^1 F^2 \left(\frac{\log r_1}{\log R}, \ldots, \frac{\log r_{k-1}}{\log R}, t_k \right) dt_k \; + \; O\left(\tau(W)\right)\end{aligned} \tag{185}$$

Като използваме (177) и (184) виждаме, че приносът към $\mathcal{E}^\#$, който се получава от остатъчния член в (185) е

$$\begin{aligned}&\ll \tau(W) \sum_{\substack{r_1 \ldots r_{k-1} \le R \\ (r_1 \ldots r_{k-1}, W)=1}} \frac{\mu^2(r_1) \ldots \mu^2(r_{k-1})}{\varphi(r_1) \ldots \varphi(r_{k-1})} \ll \tau(W) \left(\sum_{\substack{r \le R \\ (r,W)=1}} \frac{\mu^2(r)}{\varphi(r)} \right)^{k-1} \\ &\ll \tau(W) \left(\frac{\varphi(W)}{W} \log R \right)^{k-1} .\end{aligned}$$

Тогава от (184) и (185) получаваме

$$\mathcal{E}^{\#} = \frac{\varphi(W)}{W} (\log R) \int\limits_0^1 \mathcal{U}_k(t_k)\, dt_k + O\left(\tau(W) \left(\frac{\varphi(W)}{W} \log R \right)^{k-1} \right), \tag{186}$$

където

$$\mathcal{U}_k(t_k) = \sum_{\substack{r_1 \dots r_{k-1} \le R \\ (r_1 \dots r_{k-1}, W) = 1}} \frac{\mu^2(r_1) \dots \mu^2(r_{k-1})}{\varphi(r_1) \dots \varphi(r_{k-1})} F^2 \left(\frac{\log r_1}{\log R}, \dots, \frac{\log r_{k-1}}{\log R}, t_k \right) \tag{187}$$

Сумата $\mathcal{U}_k$ разглеждаме по същия начин, както $\mathcal{E}^{\#}$ и, като приложим отново Лема 3.43, получаваме

$$\mathcal{U}_k(t_k) = \frac{\varphi(W)}{W} (\log R) \int\limits_0^1 \mathcal{U}_{k-1}(t_{k-1}, t_k)\, dt_{k-1} + O\left(\tau(W) \left(\frac{\varphi(W)}{W} \log R \right)^{k-2} \right), \tag{188}$$

където

$$\mathcal{U}_{k-1}(t_{k-1}, t_k) = \sum_{\substack{r_1 \dots r_{k-2} \le R \\ (r_1 \dots r_{k-2}, W) = 1}} \frac{\mu^2(r_1) \dots \mu^2(r_{k-2})}{\varphi(r_1) \dots \varphi(r_{k-2})} F^2 \left(\frac{\log r_1}{\log R}, \dots, \frac{\log r_{k-2}}{\log R}, t_{k-1}, t_k \right) \tag{189}$$

От (186) и (188) следва

$$\mathcal{E}^{\#} = \left(\frac{\varphi(W)}{W} (\log R) \right)^2 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \mathcal{U}_{k-1}(t_{k-1}, t_k)\, dt_{k-1}\, dt_k + O\left(\tau(W) \left(\frac{\varphi(W)}{W} \log R \right)^{k-1} \right).$$

Като продължим по описания начин, получаваме

$$\mathcal{E}^{\#} = \left(\frac{\varphi(W)}{W} (\log R) \right)^k \mathcal{I}_k + O\left(\tau(W) \left(\frac{\varphi(W)}{W} \log R \right)^{k-1} \right), \tag{190}$$

където

$$\mathcal{I}_k = \int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 F^2(t_1, \dots, t_k)\, dt_1 \dots dt_k. \tag{191}$$

От равенствата (178), (183) и (190) следва асимптотична формула за сумата $\mathcal{E}$. Като използваме Лема 3.12, Лема 3.17, както и (129), (141) лесно може да се убедим, че доминиращият остатъчен член е този от формула (178) (елементарната проверка оставяме на читателя). Тогава получаваме

$$\mathcal{E} = \left(\frac{\varphi(W)}{W} (\log R) \right)^k \left(\mathcal{I}_k + O\left(D^{-1} \right) \right). \tag{192}$$

Сега ще оценим величината $\mathcal{B}$, определена от (156). От (170), (175), Лема 3.17 и Лема 3.18 следва

$$\lambda(d_1,\dots,d_k) \ll d_1\dots d_k \sum_{\substack{u_1\dots u_k\le R\\ u_i\equiv 0 \pmod{d_i}\\ i=1,\dots,k}} \frac{\mu^2(u_1)\dots\mu^2(u_k)}{\varphi(u_1)\dots\varphi(u_k)}$$

$$\ll d_1\dots d_k \sum_{m_1\dots m_k\le R} \frac{\mu^2(d_1m_1)\dots\mu^2(d_km_k)}{\varphi(d_1m_1)\dots\varphi(d_km_k)}$$

$$\ll \frac{d_1\dots d_k}{\varphi(d_1)\dots\varphi(d_k)} \left(\sum_{m\le R}\frac{\mu^2(m)}{\varphi(m)}\right)^k$$

$$\ll (\log\log R)^k (\log R)^k$$

$$\ll (\log R)^{k+1}. \tag{193}$$

От последната оценка, (156) и от Лема 3.13 получаваме

$$\mathcal{B} \ll (\log R)^{2k+2} \sum_{\substack{d_1\dots d_k\le R\\ t_1\dots t_k\le R}} 1 = (\log R)^{2k+2}\left(\sum_{n\le R}\tau_k(n)\right)^2 \ll R^2(\log R)^{4k}. \tag{194}$$

Оттук нататък ще считаме, че

$$R\le x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}, \tag{195}$$

където $\varepsilon>0$. Тогава от (194) и (195) получаваме

$$\mathcal{B} \ll x^{1-\varepsilon}. \tag{196}$$

От (129), (130), (154), (192) и (196) следва

$$S_1 = \frac{\varphi(W)^k}{W^{k+1}}\, x\,(\log R)^k\,\left(\mathcal{I}_k + O\left(D^{-1}\right)\right). \tag{197}$$

4.5 Изследване на сумите $S_2^{(\mu)}$ — начало

Да разгледаме сумата $S_2^{(\mu)}$, зададена чрез (145). Като използваме формулата (140) за теглото $w(\mathcal{H},n)$, получаваме

$$S_2^{(\mu)} = \sum_{\substack{x<n\le 2x\\ n\equiv v \pmod W}} \Theta(n+h_\mu) \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k\\ d_i\mid n+h_i\\ i=1,\dots,k}} \lambda(d_1,\dots,d_k) \sum_{\substack{t_1,\dots,t_k\\ t_i\mid n+h_i\\ i=1,\dots,k}} \lambda(t_1,\dots,t_k).$$

Сменяме реда на сумирането и записваме $S_2^{(\mu)}$ във вида

$$S_2^{(\mu)} = \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ t_1,\dots,t_k}} \lambda(d_1,\dots,d_k)\,\lambda(t_1,\dots,t_k)\,\mathfrak{M}_\mu, \tag{198}$$

където

$$\mathfrak{M}_\mu = \sum_{\substack{x<n\le 2x \\ (200)}} \Theta(n+h_\mu), \tag{199}$$

като сумирането е по числата n от зададения интервал, удовлетворяващи сравненията

$$n \equiv v \pmod W, \qquad n+h_i \equiv 0 \pmod{[d_i,t_i]} \quad \text{при} \quad i=1,\dots,k. \tag{200}$$

Модулите на системата от сравнения (200) са два по два взаимно прости. Наистина, числата d_i и t_i са взаимно прости с W вследствие на условията (142). По-нататък, ако за някои $i \neq j$ числата $[d_i,t_i]$ и $[d_j,t_j]$ притежават общ прост множител p', то от една страна ще имаме $(p',W)=1$, откъдето $p'>D$. Но от друга страна от условията (200) следва $p' \mid (h_i-h_j)$, откъдето $p' \le \prod_{1\le j<i\le k}(h_i-h_j)$. Като вземем предвид (129) виждаме, че се получава противоречие когато x е достатъчно голямо.

Като си припомним определението (2) виждаме, че наличието на израза $\Theta(n+h_\mu)$ в (199) налага условието числото $n+h_\mu$ да е просто. Но това число се дели на $[d_\mu,t_\mu]$, следователно $[d_\mu,t_\mu]$ е равно на 1 или на $n+h_\mu$. Последното обаче е невъзможно, понеже тогава бихме имали

$$x \le x+h_\mu < n+h_\mu = [d_\mu,t_\mu] \le d_\mu t_\mu \le R^2$$

и влизаме в противоречие с условието (195). Следователно, ако $[d_\mu,t_\mu]>1$ то $\mathfrak{M}_\mu=0$, откъдето следва, че в областта на сумиране в (198) можем да наложим още условието

$$d_\mu = t_\mu = 1. \tag{201}$$

И така, имаме

$$S_2^{(\mu)} = \sum_{\substack{d_1,\dots,d_k \\ t_1,\dots,t_k \\ (201)}} \lambda(d_1,\dots,d_k)\,\lambda(t_1,\dots,t_k)\,\mathfrak{M}_\mu, \tag{202}$$

а в условията (200) от определението на $\mathfrak{M}_\mu$ може да бъде изпуснато сравнението отговавящо на $i=\mu$.

По-нататък, в областта на сумиране на сумата $S_2^{(\mu)}$ можем да поставим условието

$$([d_i,t_i],[d_j,t_j]) = 1 \qquad \text{при} \qquad i \neq j,$$

тъй като в противен случай ще имаме $\mathfrak{M}_\mu=0$. Но това условие всъщност може да се отслаби до

$$(d_i,t_j) = 1 \qquad \text{при} \qquad i \neq j, \tag{203}$$

тъй като условията $(d_i, d_j) = (t_i, t_j) = 1$ при $i \neq j$ следват от (142). И така, имаме

$$S_2^{(\mu)} = \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ t_1,\ldots,t_k \\ (201),\,(203)}} \lambda(d_1,\ldots,d_k)\,\lambda(t_1,\ldots,t_k)\,\mathfrak{M}_\mu. \tag{204}$$

Да разгледаме величината $\mathfrak{M}_\mu$. Правим смяна на сумационната променлива, като заменим $n + h_\mu$ (което е просто число) с p. Новата сумационна променлива удовлетворява сравненията

$$p \equiv v + h_\mu \pmod W, \qquad p \equiv h_\mu - h_i \pmod{[d_i, t_i]} \quad \text{при} \quad i \neq \mu. \tag{205}$$

Освен това p ще пробягва интервала $(x + h_\mu, 2x + h_\mu]$, но тъй като броят на целите числа в интервалите $(x, x+h_\mu]$ и $(2x, 2x+h_\mu]$ не надхвърля константа, зависеща само от набора $\mathcal{H}$, то като използваме определението (2) за функцията $\Theta(n)$, получаваме

$$\mathfrak{M}_\mu = \sum_{\substack{x<p\leq 2x \\ (205)}} \log p + O(\log x). \tag{206}$$

Да означим за простота

$$\Xi = W[d_1, t_1]\ldots[d_k, t_k], \tag{207}$$

Като приложим Лема 3.22 виждаме, че съществува $b \in \mathbb{Z}$ такова, че системата (205) е еквивалентна на сравнението

$$p \equiv b \pmod \Xi. \tag{208}$$

В началото на доказателството определихме числото v така, че ако е изпълнено $n \equiv v \pmod W$, то $(n + h_i, W) = 1$ за $i = 1,\ldots,k$. В частност имаме $(v + h_\mu, W) = 1$. По-нататък, за всяко $i = 1,\ldots,k$, $i \neq \mu$ е изпълнено $(h_\mu - h_i, [d_i, t_i]) = 1$. Наистина, ако допуснем, че числата $h_\mu - h_i$ и $[d_i, t_i]$ притежават общ прост делител p', то от определението на W, зададено чрез (129) и от условието $(d_i t_i, W) = 1$ следва, че $p' > D$. От друга страна p' ще дели числото $\prod_{1\leq j<i\leq k}(h_i - h_j)$, което зависи само от фиксирания набор $\mathcal{H}$ и при достатъчно големи x ще получим противоречие. Тогава, като приложим отново Лема 3.22 виждаме, че числото b, участващо в сравнението (208), удовлетворява

$$(b, \Xi) = 1. \tag{209}$$

От горните разсъждения и от (206) виждаме, че

$$\mathfrak{M}_\mu = \sum_{\substack{x<p\leq 2x \\ p\equiv b \pmod \Xi}} \log p + O(\log x).$$

Като използваме означенията (7) и (60) записваме

$$\mathfrak{M}_\mu = \theta(2x, \Xi, b) - \theta(x, \Xi, b) + O(\log x)$$

$$= \frac{x}{\varphi(\Xi)} + \Delta(2x, \Xi, b) - \Delta(x, \Xi, b) + O(\log x)$$

$$= \frac{x}{\varphi(\Xi)} + O\left(\max_{y \le 2x} \max_{(a,\Xi)=1} |\Delta(y, \Xi, a)| \right) + O(\log x) \tag{210}$$

Заместваме последния израз в (202), използваме (207) и получаваме

$$S_2^{(\mu)} = \frac{x}{\varphi(W)}\, \mathcal{D}_\mu + O\left(\mathcal{R}\right) + O\left(\mathcal{R}'(\log x)\right), \tag{211}$$

където

$$\mathcal{D}_\mu = \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ t_1,\ldots,t_k \\ (201),\ (203)}} \frac{\lambda(d_1,\ldots,d_k)\,\lambda(t_1,\ldots,t_k)}{\varphi([d_1,t_1])\ldots\varphi([d_k,t_k])}, \tag{212}$$

$$\mathcal{R} = \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ t_1,\ldots,t_k}} |\lambda(d_1,\ldots,d_k)\,\lambda(t_1,\ldots,t_k)| \max_{y \le 2x} \max_{(a,\Xi)=1} |\Delta(y, \Xi, a)|, \tag{213}$$

$$\mathcal{R}' = \sum_{\substack{d_1,\ldots,d_k \\ t_1,\ldots,t_k}} |\lambda(d_1,\ldots,d_k)\,\lambda(t_1,\ldots,t_k)|. \tag{214}$$

Да разгледаме първо величината $\mathcal{R}'$. Като използваме, че наличието на множител $\lambda(d_1,\ldots,d_k)$ налага на променливите условията (142) и като вземем предвид (193), (195), както и Лема 3.13, получаваме

$$\mathcal{R}' \ll (\log R)^{2k+2} \sum_{\substack{d_1\ldots d_k \le R \\ t_1\ldots t_k \le R}} 1 \ll (\log R)^{2k+2} \left(\sum_{n \le R} \tau_k(n) \right)^2$$

$$\ll (\log R)^{2k+2} \left(R\,(\log R)^{k-1} \right)^2 = R^2 (\log R)^{4k}$$

$$\ll x^{1-\varepsilon}. \tag{215}$$

Сега да оценим сумата $\mathcal{R}$, зададена чрез (213). От (142) и (193) следва

$$\mathcal{R} \ll (\log R)^{2k+2} \mathcal{R}^*, \tag{216}$$

където
$$\mathcal{R}^* = \sum_{\substack{d_1\ldots d_k \le R\\ t_1\ldots t_k\le R}} \max_{y\le 2x} \max_{(a,\Xi)=1} |\Delta(y,\Xi,a)| \tag{217}$$

и където Ξ се определя от (207). Разделяме последната сума на части съобразно стойността, която приема величината Ξ. Тъй като

$$\Xi = W[d_1,t_1]\ldots[d_k,t_k] \le W d_1\ldots d_k\, t_1\ldots t_k \le WR^2,$$

получаваме
$$\mathcal{R}^* = \sum_{q\le WR^2} \varkappa(q) \max_{y\le 2x} \max_{(a,q)=1} |\Delta(y,q,a)|, \tag{218}$$

където $\varkappa(q)$ е броят на решенията на уравнението

$$W[d_1,t_1]\ldots[d_k,t_k] = q \tag{219}$$

в естествени числа $d_1,\ldots,d_k,t_1,\ldots,t_k$. От (219) следва, че всяко от числата d_i,t_i е делител на q и поради това имаме

$$\varkappa(q) \le \tau^{2k}(q). \tag{220}$$

Според теоремата на Бомбиери-Виноградов, дадена в записките като Лема 3.35, всяко число $\theta < \frac{1}{2}$ е ниво на разпределение (виж Определение 3.33) на редицата от простите числа. Полагаме
$$R = x^{\frac{1}{4}-\varepsilon}, \tag{221}$$

където $\varepsilon > 0$ е произволно малка константа. Ясно е, че така избраното R удовлетворява условието (195). От (130) и (221) имаме $WR^2 \le x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, следователно, като използваме Лема 3.37 и (218), (220), (221), получаваме

$$\mathcal{R}^* \le \sum_{q\le x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \tau^{2k}(q) \max_{y\le 2x} \max_{(a,q)=1} |\Delta(y,q,a)| \ll \frac{x}{(\log x)^A}, \tag{222}$$

където $A > 0$ е произволно голяма константа.

От (211), (215), (216) и (222) получаваме

$$S_2^{(\mu)} = \frac{x}{\varphi(W)}\,\mathcal{D}_\mu + O\left(\frac{x}{(\log x)^A}\right), \tag{223}$$

където $A > 0$ е произволно голямо.

Сега да разгледаме сумата $\mathcal{D}_\mu$, определена чрез (212). Тъй като по условие функцията $\lambda(d_1,\ldots,d_k)$ е симетрична относно променливите си $d_1,\ldots,d_k$, то $\mathcal{D}_\mu$ всъщност не зависи от μ, т.е.
$$\mathcal{D}_1 = \cdots = \mathcal{D}_k. \tag{224}$$

Поради това, достатъчно е да разгледаме величината $\mathcal{D}_k$, която оттук нататък ще означаваме с $\widehat{\mathcal{D}}$. Тогава имаме

$$\widehat{\mathcal{D}} = \sum_{\substack{d_1,\dots,d_{k-1} \\ t_1,\dots,t_{k-1} \\ (203)}} \frac{\lambda(d_1,\dots,d_{k-1},1)\,\lambda(t_1,\dots,t_{k-1},1)}{\varphi([d_1,t_1])\dots\varphi([d_{k-1},t_{k-1}])} \tag{225}$$

и, като вземем предвид (223), намираме

$$S_2^{(\mu)} = \frac{x}{\varphi(W)}\,\widehat{\mathcal{D}} + O\left(\frac{x}{(\log x)^A}\right), \tag{226}$$

Да разгледаме величината $\widehat{\mathcal{D}}$. От (225) и от равенството

$$\varphi([d_i,t_i])\varphi((d_i,t_i)) = \varphi(d_i)\varphi(t_i),$$

което е следствие от Лема 3.6 получаваме

$$\widehat{\mathcal{D}} = \sum_{\substack{d_1,\dots,d_{k-1} \\ t_1,\dots,t_{k-1} \\ (203)}} \frac{\lambda(d_1,\dots,d_{k-1},1)\,\lambda(t_1,\dots,t_{k-1},1)}{\varphi(d_1)\dots\varphi(d_{k-1})\,\varphi(t_1)\dots\varphi(t_{k-1})}\,\varphi((d_1,t_1))\dots\varphi((d_{k-1},t_{k-1})) \tag{227}$$

Като използваме Лема 3.9 определяме функцията $g(h)$ чрез равенството

$$\varphi(d) = \sum_{r\mid d} g(r). \tag{228}$$

Оттук следва, че функцията $g(h)$ е мултипликативна и че при просто p имаме

$$p-1 = \varphi(p) = 1 + g(p),$$

откъдето

$$g(p) = p-2. \tag{229}$$

Да отбележим, че от горните свойства следва, че $g(h) \neq 0$ при нечетно h.

Вследствие на (228) изразът $\varphi((d_1,t_1))\dots\varphi((d_{k-1},t_{k-1}))$ от (227) може да бъде заменен с

$$\left(\sum_{r_1\mid(d_1,t_1)} g(r_1)\right)\dots\left(\sum_{r_{k-1}\mid(d_{k-1},t_{k-1})} g(r_{k-1})\right) = \sum_{\substack{r_1,\dots,r_{k-1} \\ r_i\mid(d_i,t_i) \\ i=1,\dots,k-1}} g(r_1)\dots g(r_{k-1}).$$

Следователно имаме

$$\widehat{\mathcal{D}} = \sum_{\substack{d_1,\dots,d_{k-1} \\ t_1,\dots,t_{k-1} \\ (203)}} \frac{\lambda(d_1,\dots,d_{k-1},1)\,\lambda(t_1,\dots,t_{k-1},1)}{\varphi(d_1)\dots\varphi(d_{k-1})\,\varphi(t_1)\dots\varphi(t_{k-1})} \sum_{\substack{r_1,\dots,r_{k-1} \\ r_i\mid(d_i,t_i) \\ i=1,\dots,k-1}} g(r_1)\dots g(r_{k-1}). \tag{230}$$

Ясно е, че числата $r_1, \dots, r_{k-1}$ трябва да удовлеторяват условията

$$r_1 \dots r_{k-1} \le R, \qquad \mu^2(r_1 \dots r_{k-1}) = 1, \qquad (r_1 \dots r_{k-1}, W) = 1, \tag{231}$$

а за d_i, t_i имаме

$$d_i \equiv 0 \pmod{r_i}, \qquad t_i \equiv 0 \pmod{r_i}, \qquad i = 1, \dots, k-1. \tag{232}$$

Тогава, като сменим в (230) реда на сумиране, получаваме

$$\widehat{\mathcal{D}} = \sum_{\substack{r_1,\dots,r_{k-1} \\ (231)}} g(r_1) \dots g(r_{k-1}) \sum_{\substack{d_1,\dots,d_{k-1} \\ t_1,\dots,t_{k-1} \\ (203),\, (232)}} \frac{\lambda(d_1, \dots, d_{k-1}, 1)\, \lambda(t_1, \dots, t_{k-1}, 1)}{\varphi(d_1) \dots \varphi(d_{k-1})\, \varphi(t_1) \dots \varphi(t_{k-1})}. \tag{233}$$

Сега премахваме от областта на сумиране условията (203) и, за да компенсираме тази промяна, използваме Лема 3.7, като поставяме множители $\sum_{s_{ij} | (d_i, t_j)} \mu(s_{ij})$ за всяка двойка индекси $i \ne j$. Тази процедура довежда до появата на множител, подобен на този от формула (160), но с параметър $k-1$ вместо k. Получаваме

$$\widehat{\mathcal{D}} = \sum_{\substack{r_1,\dots,r_{k-1} \\ (231)}} g(r_1) \dots g(r_{k-1}) \sum_{\substack{d_1,\dots,d_{k-1} \\ t_1,\dots,t_{k-1} \\ (232)}} \frac{\lambda(d_1, \dots, d_{k-1}, 1)\, \lambda(t_1, \dots, t_{k-1}, 1)}{\varphi(d_1) \dots \varphi(d_{k-1})\, \varphi(t_1) \dots \varphi(t_{k-1})}$$
$$\times \sum_{\substack{s_{ij} \\ 1 \le i,j \le k-1,\, i \ne j \\ s_{ij} | (d_i, t_j)}} \prod_{\substack{1 \le i,j \le k-1 \\ i \ne j}} \mu(s_{ij}). \tag{234}$$

Ясно е, че сумационните променливи s_{ij} удовлетворяват условията

$$\left(\widehat{\Pi}, W\right) = 1, \quad \mu^2\left(\widehat{\Pi}\right) = 1, \quad (s_{ij}, r_i) = (s_{ij}, r_j) = 1 \quad \text{при} \quad 1 \le i, j \le k-1, \quad i \ne j, \tag{235}$$

където

$$\widehat{\Pi} = \prod_{\substack{1 \le i,j \le k-1 \\ i \ne j}} s_{ij}. \tag{236}$$

(Разсъжденията са аналогични на тези, които използвахме, за да получим (163)). Също така, условието (232), обединено с условията $s_{ij} \mid (d_i, t_j)$ ни дава

$$d_i \equiv 0 \pmod{a_i}, \qquad t_i \equiv 0 \pmod{b_i}, \qquad i = 1, \dots, k-1, \tag{237}$$

където сме положили

$$a_i = r_i \prod_{\substack{1 \le j \le k-1 \\ j \ne i}} s_{ij}, \qquad b_i = r_i \prod_{\substack{1 \le j \le k-1 \\ j \ne i}} s_{ji}, \qquad i = 1, \dots, k-1. \tag{238}$$

Тогава, като сменим реда на сумирането в (234) и използваме означението (236), получаваме

$$\widehat{\mathcal{D}} = \sum_{\substack{r_1,\dots,r_{k-1} \\ (231)}} g(r_1)\dots g(r_{k-1}) \sum_{\substack{s_{ij} \\ 1\le i,j\le k-1,\ i\ne j \\ (235)}} \mu(\widehat{\Pi}) \sum_{\substack{d_1,\dots,d_{k-1} \\ t_1,\dots,t_{k-1} \\ (237)}} \frac{\lambda(d_1,\dots,d_{k-1},1)\,\lambda(t_1,\dots,t_{k-1},1)}{\varphi(d_1)\dots\varphi(d_{k-1})\,\varphi(t_1)\dots\varphi(t_{k-1})}. \tag{239}$$

Последният израз е удобен с това, че сумата по променливите d_i, t_j може да се представи като произведение на две еднотипни суми — първата по d_i, а втората по t_j. По-точно, като положим

$$\widehat{Z}(u_1,\dots,u_{k-1}) = \sum_{\substack{d_1,\dots,d_{k-1} \\ d_i\equiv 0 \pmod{u_i} \\ i=1,\dots,k-1}} \frac{\lambda(d_1,\dots,d_{k-1},1)}{\varphi(d_1)\dots\varphi(d_{k-1})}, \tag{240}$$

получаваме

$$\widehat{\mathcal{D}} = \sum_{\substack{r_1,\dots,r_{k-1} \\ (231)}} g(r_1)\dots g(r_{k-1}) \sum_{\substack{s_{ij} \\ 1\le i,j\le k-1,\ i\ne j \\ (235)}} \mu(\widehat{\Pi})\ \widehat{Z}(a_1,\dots,a_{k-1})\ \widehat{Z}(b_1,\dots,b_{k-1}), \tag{241}$$

където a_i, b_i се определят чрез (238).

Определяме

$$\widehat{y}(u_1,\dots,u_{k-1}) = \mu(u_1)\dots\mu(u_{k-1})\ g(u_1)\dots g(u_{k-1})\ \widehat{Z}(u_1,\dots,u_{k-1}), \tag{242}$$

което, заедно с (241), ни дава

$$\widehat{\mathcal{D}} = \sum_{\substack{r_1,\dots,r_{k-1} \\ (231)}} g(r_1)\dots g(r_{k-1}) \sum_{\substack{s_{ij} \\ 1\le i,j\le k-1,\ i\ne j \\ (235)}} \mu(\widehat{\Pi})\ \frac{\mu(a_1)\dots\mu(a_{k-1})\ \mu(b_1)\dots\mu(b_{k-1})}{g(a_1)\dots g(a_{k-1})\ g(b_1)\dots g(b_{k-1})}$$

$$\times\ \widehat{y}(a_1,\dots,a_{k-1})\ \widehat{y}(b_1,\dots,b_{k-1}).$$

Сега, като използваме (235), (236) и (238), получаваме

$$\widehat{\mathcal{D}} = \sum_{\substack{r_1,\dots,r_{k-1} \\ (231)}} \big(\, g(r_1)\dots g(r_{k-1})\,\big)^{-1} \sum_{\substack{s_{ij} \\ 1\le i,j\le k-1,\ i\ne j \\ (235)}} \prod_{\substack{1\le i,j\le k-1 \\ i\ne j}} \frac{\mu(s_{ij})}{g^2(s_{ij})}$$

$$\times\ \widehat{y}(a_1,\dots,a_{k-1})\ \widehat{y}(b_1,\dots,b_{k-1}). \tag{243}$$

Да разгледаме величината $\widehat{y}(u_1,\dots,u_{k-1})$, определена чрез (242). От (170), (174), (240), (242) получаваме

$$\widehat{y}(u_1,\dots,u_{k-1}) = \mu(u_1)\dots\mu(u_{k-1})\,g(u_1)\dots g(u_{k-1})$$

$$\times \sum_{\substack{d_1,\dots,d_{k-1}\\ (245),\,(246)}} \frac{\mu(d_1)\dots\mu(d_{k-1})\,d_1\dots d_{k-1}}{\varphi(d_1)\dots\varphi(d_{k-1})}$$

$$\times \sum_{\substack{l_1,\dots,l_k\\ (247),\,(248)}} \frac{\mu^2(l_1)\dots\mu^2(l_k)}{\varphi(l_1)\dots\varphi(l_k)}\,F\left(\frac{\log l_1}{\log R},\dots,\frac{\log l_k}{\log R}\right), \qquad (244)$$

като сумирането в сумата по d_i се извършва по променливи, удовлетворяващи

$$d_1\dots d_{k-1}\le R, \qquad (d_i,d_j)=1 \quad \text{при} \quad i\ne j, \qquad (245)$$

$$(d_i,W)=1, \qquad d_i\equiv 0 \pmod{u_i}, \qquad i=1,\dots,k-1. \qquad (246)$$

Съответно, променливите l_i удовлетворяват условията

$$l_1\dots l_k\le R, \qquad (l_1\dots l_k,W)=1, \qquad (l_i,l_j)=1 \quad \text{при} \quad i\ne j, \qquad (247)$$

$$l_i\equiv 0 \pmod{d_i} \qquad i=1,\dots,k-1. \qquad (248)$$

Сменяме реда на сумиране в (244) и виждаме, че

$$\widehat{y}(u_1,\dots,u_{k-1}) = \mu(u_1)\dots\mu(u_{k-1})\,g(u_1)\dots g(u_{k-1})$$

$$\times \sum_{\substack{l_1,\dots,l_k\,:\,(247)\\ l_i\equiv 0 \pmod{u_i}\\ i=1,\dots,k-1}} \frac{\mu^2(l_1)\dots\mu^2(l_k)}{\varphi(l_1)\dots\varphi(l_k)}\,F\left(\frac{\log l_1}{\log R},\dots,\frac{\log l_k}{\log R}\right)$$

$$\times\,\mathfrak{R}(u_1,l_1,\dots,u_{k-1},l_{k-1}), \qquad (249)$$

където

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}(u_1,l_1,\dots,u_{k-1},l_{k-1}) = \sum_{\substack{d_1,\dots,d_{k-1}\\ d_i\mid l_i,\ i=1,\dots,k-1\\ (245),\,(246)}} \frac{\mu(d_1)\dots\mu(d_{k-1})\,d_1\dots d_{k-1}}{\varphi(d_1)\dots\varphi(d_{k-1})}. \qquad (250)$$

Да пресметнем величината $\mathfrak{R}$. Можем да пропуснем условията (245), както и условието $(d_1\dots d_{k-1},W)=1$ от (246), тъй като те са следствия от условията, наложени върху l_i в (247). Получаваме

$$\mathfrak{R} = \sum_{\substack{d_1,\dots,d_{k-1} \\ d_i \equiv 0 \pmod{u_i} \\ d_i | l_i,\, i=1,\dots,k-1}} \frac{\mu(d_1)\dots\mu(d_{k-1})\, d_1 \dots d_{k-1}}{\varphi(d_1)\dots\varphi(d_{k-1})} = \prod_{1\le i\le k-1} \mathcal{F}_i, \tag{251}$$

където

$$\mathcal{F}_i = \sum_{\substack{d | l_i \\ d\equiv 0 \pmod{u_i}}} \frac{\mu(d)\, d}{\varphi(d)}.$$

Поради наличието на множителите $\mu^2(l_i)$ в (244) всяко от числата l_i е безквадратно. Тогава, ако $u_i \mid l_i$, то всеки делител на $\frac{l_i}{u_i}$ е взаимно прост с u_i. От това съображение и от Лема 3.4 получаваме

$$\mathcal{F}_i = \sum_{n | \frac{l_i}{u_i}} \frac{\mu(nu_i)\, nu_i}{\varphi(nu_i)} = \frac{\mu(u_i)\, u_i}{\varphi(u_i)} \sum_{n | \frac{l_i}{u_i}} \frac{\mu(n)\, n}{\varphi(n)} = \frac{\mu(u_i)\, u_i}{\varphi(u_i)} \prod_{p | \frac{l_i}{u_i}} \left(1 - \frac{p}{p-1}\right)$$

$$= \frac{\mu(u_i)\, u_i}{\varphi(u_i)} \prod_{p | \frac{l_i}{u_i}} \frac{-1}{p-1} = \frac{\mu(u_i)\, u_i}{\varphi(u_i)} \cdot \frac{\mu\left(\frac{l_i}{u_i}\right)}{\varphi\left(\frac{l_i}{u_i}\right)}$$

$$= \frac{u_i\, \mu(l_i)}{\varphi(l_i)}.$$

От последната формула и от (251) следва

$$\mathfrak{R} = \prod_{1\le i\le k-1} \frac{u_i\, \mu(l_i)}{\varphi(l_i)}.$$

Заместваме този израз в (249) и получаваме

$$\widehat{y}(u_1, \dots, u_{k-1}) = \left(\prod_{1\le i\le k-1} \mu(u_i)\, g(u_i)\, u_i \right) \widehat{\mathfrak{T}}(u_1, \dots, u_{k-1}), \tag{252}$$

където

$$\widehat{\mathfrak{T}} = \sum_{\substack{l_1,\dots,l_k \,:\, (247) \\ l_i \equiv 0 \pmod{u_i} \\ i=1,\dots,k-1}} \frac{\mu^2(l_1)\dots\mu^2(l_k)}{\varphi(l_1)\dots\varphi(l_k)} F\left(\frac{\log l_1}{\log R}, \dots, \frac{\log l_k}{\log R} \right) \prod_{1\le i\le k-1} \frac{\mu(l_i)}{\varphi(l_i)}. \tag{253}$$

Разделяме горната сума на две части:

$$\widehat{\mathfrak{T}} = \mathfrak{T}^* + \mathfrak{T}', \tag{254}$$

където $\mathfrak{T}^*$ е приноса на събираемите, за които $l_i = u_i$ за всички $i = 1, \dots, k-1$, а $\mathfrak{T}'$ е приноса на събираемите, за които $l_i > u_i$ за някое i.

Имаме
$$\mathfrak{T}^* = \frac{\mu(u_1)\dots\mu(u_{k-1})}{\varphi^2(u_1)\dots\varphi^2(u_{k-1})}\,\mathfrak{H}, \tag{255}$$
където
$$\mathfrak{H} = \sum_{\substack{l \le \frac{R}{u_1 \dots u_{k-1}} \\ (l, W u_1 \dots u_{k-1}) = 1}} \frac{\mu^2(l)}{\varphi(l)} F\left(\frac{\log u_1}{\log R}, \dots, \frac{\log u_{k-1}}{\log R}, \frac{\log l}{\log R}, \right). \tag{256}$$

Да оценим $\mathfrak{T}'$. За целта е достатъчно да вземем фиксиран индекс $\nu \le k-1$ и да оценим сумата от модулите на събираемите от (253), за които $l_\nu > u_\nu$. Ако означим тази сума с Ξ_ν, ще имаме
$$\mathfrak{T}' \ll \sum_{1 \le \nu \le k-1} \Xi_\nu. \tag{257}$$

От това че числото l_ν е безквадратно и удовлетворява условията $l_\nu \equiv 0 \pmod{u_\nu}$ и $(l_\nu, W) = 1$ следва, че $(l_\nu u_\nu^{-1}, W) = 1$. Тогава, като вземем предвид (129), виждаме, че $l_\nu u_\nu^{-1} > D$, откъдето $l_\nu > D u_\nu$. Тъй като функцията F е ограничена, виждаме, че
$$\Xi_\nu \ll \sum_{\substack{l_1, \dots, l_k \\ (258)}} \frac{\mu^2(l_1)\dots\mu^2(l_{k-1})}{\varphi^2(l_1)\dots\varphi^2(l_{k-1})}\,\frac{\mu^2(l_k)}{\varphi(l_k)},$$

където сумирането е по променливите l_i, удовлетворяващи условията
$$l_1 \dots l_k \le R, \qquad (l_1 \dots l_k, W) = 1, \qquad l_\nu > D u_\nu, \qquad l_i \equiv 0 \pmod{u_i}, \quad i = 1, \dots, k-1. \tag{258}$$

Оттук получаваме
$$\Xi_\nu \ll \mathfrak{D}'\,\mathfrak{D}'' \prod_{\substack{1 \le i \le k-1 \\ i \ne \nu}} \mathfrak{D}_i, \tag{259}$$

където
$$\mathfrak{D}' = \sum_{\substack{l \le R \\ (l, W) = 1}} \frac{\mu^2(l)}{\varphi(l)}, \tag{260}$$

$$\mathfrak{D}'' = \sum_{\substack{D u_\nu < l \le R \\ (l, W) = 1 \\ l \equiv 0 \pmod{u_\nu}}} \frac{\mu^2(l)}{\varphi^2(l)}, \tag{261}$$

$$\mathfrak{D}_i = \sum_{\substack{l \le R \\ (l, W) = 1 \\ l \equiv 0 \pmod{u_i}}} \frac{\mu^2(l)}{\varphi^2(l)}. \tag{262}$$

Като приложим оценката (36) от Лема 3.18 виждаме, че

$$\mathfrak{D}_i \leq \sum_{n \leq \frac{R}{u_i}} \frac{\mu^2(n)\,\mu^2(u_i)}{\varphi^2(n)\,\varphi^2(u_i)} \ll \frac{\mu^2(u_i)}{\varphi^2(u_i)}. \tag{263}$$

По-нататък, от (177) и (260) намираме

$$\mathfrak{D}' \ll \frac{\varphi(W)}{W}\,\log R. \tag{264}$$

Накрая, от оценката (36) от Лема 3.18 и (261) получаваме

$$\mathfrak{D}'' \leq \sum_{D<n \leq \frac{R}{u_\nu}} \frac{\mu^2(n)\,\mu^2(u_\nu)}{\varphi^2(n)\,\varphi^2(u_\nu)} \ll \frac{\mu^2(u_\nu)}{\varphi^2(u_\nu)} \sum_{D<n} \frac{\mu^2(n)}{\varphi^2(n)} \ll D^{-1}\,\frac{\mu^2(u_\nu)}{\varphi^2(u_\nu)}. \tag{265}$$

От (259), (263) – (265) следва

$$\Xi_\nu \ll D^{-1}\,\frac{\varphi(W)}{W}\,\frac{\mu^2(u_1)\ldots\mu^2(u_{k-1})}{\varphi^2(u_1)\ldots\varphi^2(u_{k-1})}\,\log R$$

и, като вземем предвид (257), получаваме

$$\mathfrak{T}' \ll D^{-1}\,\frac{\varphi(W)}{W}\,\frac{\mu^2(u_1)\ldots\mu^2(u_{k-1})}{\varphi^2(u_1)\ldots\varphi^2(u_{k-1})}\,\log R. \tag{266}$$

Сега ще разгледаме величината $\mathfrak{H}$, зададена чрез (256), като първо ще намерим оценки за нея. Можем да считаме, че е изпълнено $u_1\ldots u_{k-1} \leq R$, тъй като в противен случай функцията F ще се анулира и ще имаме $\mathfrak{H} = 0$. Прилагаме Лема 3.44, където

$$H = W u_1 \ldots u_{k-1}$$

и

$$G(t) = F\left(\frac{\log u_1}{\log R}, \ldots, \frac{\log u_{k-1}}{\log R}, t\right).$$

От (129) и от ограниченията за числата u_i следва, че $(\log\log 10H)^2 \ll (\log\log R)^2$, следователно

$$\mathfrak{H} = \frac{\varphi(W)\varphi(u_1)\ldots\varphi(u_{k-1})}{W u_1 \ldots u_{k-1}}\,(\log R) \int\limits_0^1 F\left(\frac{\log u_1}{\log R}, \ldots, \frac{\log u_{k-1}}{\log R}, t_k\right)\,dt_k$$

$$+\, O\left((\log\log R)^2\right). \tag{267}$$

От (130), (221), (267) и от ограничеността на функцията F следва, че

$$\mathfrak{H} \ll \frac{\varphi(W)}{W}\,\log R. \tag{268}$$

Тогава, като вземем още предвид (254), (255) и (266), получаваме

$$\widehat{\mathfrak{T}} \ll \frac{\varphi(W)}{W} \frac{\mu^2(u_1) \dots \mu^2(u_{k-1})}{\varphi^2(u_1) \dots \varphi^2(u_{k-1})} \log R. \tag{269}$$

Заместваме последната оценка в (252) и намираме

$$\widehat{y}(u_1, \dots, u_{k-1}) \ll \left(\prod_{1 \le i \le k-1} \frac{\mu^2(u_i)\, g(u_i)\, u_i}{\varphi^2(u_i)} \right) \frac{\varphi(W)}{W} \log R. \tag{270}$$

Но от Лема 3.15 и от (229) следва, че при всяко безквадратно u имаме

$$\frac{\mu^2(u)\, g(u)\, u}{\varphi^2(u)} = \prod_{p|u} \frac{g(p)\, p}{\varphi^2(p)} = \prod_{p|u} \frac{(p-2)\, p}{(p-1)^2} < 1.$$

От горното неравенство и от (270) следва

$$\widehat{y}(u_1, \dots, u_{k-1}) \ll \frac{\varphi(W)}{W} \log R. \tag{271}$$

4.6 Изследване на сумите $S_2^{(\mu)}$ — продължение

Да се върнем към изследването на величината $\widehat{\mathcal{D}}$, зададена чрез формула (243). Ще се убедим, че главната част в израза от дясната страна на (243) идва от събираемите, за които $s_{ij} = 1$ при всички допустими стойности на i, j. Да означим съответната сума с $\mathcal{D}^*$ и нека $\mathcal{D}'$ е приноса на събираемите, за които $s_{ij} > 1$ за някоя двойка i, j. Тогава имаме

$$\widehat{\mathcal{D}} = \mathcal{D}^* + \mathcal{D}'. \tag{272}$$

От (238), (243) и от определението на $\mathcal{D}^*$ следва, че

$$\mathcal{D}^* = \sum_{\substack{r_1, \dots, r_{k-1} \\ (231)}} \frac{\mu^2(r_1) \dots \mu^2(r_{k-1})}{g(r_1) \dots g(r_{k-1})} \left(\widehat{y}(r_1, \dots, r_{k-1}) \right)^2. \tag{273}$$

Да оценим сумата $\mathcal{D}'$. Вземаме предвид оценката (271) и тъй като, поради симетрията, можем да считаме, че нашата двойка индекси i, j, за които $s_{ij} > 1$ е $i = 1, j = 2$, имаме

$$\mathcal{D}' \ll \left(\frac{\varphi(W)}{W} \log R \right)^2 \sum_{\substack{r_1 \dots r_{k-1} \le R \\ (r_1 \dots r_{k-1}, W) = 1}} \frac{\mu^2(r_1) \dots \mu^2(r_{k-1})}{g(r_1) \dots g(r_{k-1})}$$

$$\times \sum_{\substack{s_{ij} \\ 1 \le i,j \le k-1,\, i \ne j \\ (s_{12}, W) = 1 \\ s_{12} > 1}} \prod_{\substack{1 \le i,j \le k-1 \\ i \ne j}} \frac{\mu^2(s_{ij})}{g^2(s_{ij})}. \tag{274}$$

Ще проверим първо, че

$$\sum_{\substack{s_{12}>1\\(s_{12},W)=1}} \frac{\mu^2(s_{12})}{g^2(s_{12})} \ll D^{-1}. \tag{275}$$

Тъй като $s_{12} > 1$ и $(s_{12}, W) = 1$, то от определението на W, зададено чрез (129) следва, че за всеки прост делител p на s_{12} имаме $p > D$. Тогава при достастъчно голямо Y използваме Лема 3.19, Лема 3.28 и (229) виждаме, че

$$\sum_{\substack{1<s_{12}\le Y\\(s_{12},W)=1}} \frac{\mu^2(s_{12})}{g^2(s_{12})} \le -1 + \prod_{D<p\le Y}\left(1+\frac{1}{g^2(p)}\right) \le -1 + \prod_{D<p}\left(1+\frac{1}{(p-2)^2}\right) \ll D^{-1}.$$

Тъй като константата в знака $\ll$ в горната формула не зависи от Y, то остава да извършим граничен преход $Y \to \infty$ и получаваме (275).

За сумите по останалите s_{ij} използваме простата оценка

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu^2(s)}{g^2(s)} \ll 1. \tag{276}$$

Заместваме оценките от (275) и (276) в (274) и получаваме

$$\mathcal{D}' \ll \sum_{\substack{r_1\dots r_{k-1}\le R\\(r_1\dots r_{k-1},W)=1}} \frac{\mu^2(r_1)\dots\mu^2(r_k)}{g(r_1)\dots g_(r_{k-1})}\, D^{-1} \left(\frac{\varphi(W)}{W}\log R\right)^2$$

$$\ll D^{-1}\left(\frac{\varphi(W)}{W}\log R\right)^2 \left(\sum_{\substack{r\le R\\(r,W)=1}} \frac{\mu^2(r)}{g(r)}\right)^{k-1}. \tag{277}$$

Но, като използваме Лема 3.19, (129) и (229), виждаме, че

$$\sum_{\substack{r\le R\\(r,W)=1}} \frac{\mu^2(r)}{g(r)} \le \prod_{D<p\le R}\left(1+\frac{1}{p-2}\right) = \prod_{2<p\le R}\left(1+\frac{1}{p-2}\right)\prod_{2<p\le D}\left(1+\frac{1}{p-2}\right)^{-1}$$

$$\ll (\log R)\prod_{2<p\le D}\left(1+\frac{1}{p-2}\right)^{-1} = (\log R)\frac{\varphi(W)}{W}\,\Pi, \tag{278}$$

където

$$\Pi = 2\prod_{2<p\le D}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{p-2}\right)^{-1}.$$

Лесно се вижда, че

$$\Pi \ll 1$$

(проверката оставяме на читателя). Тогава, като заместим тази оценка в (278), получаваме

$$\sum_{\substack{r\le R\\(r,W)=1}} \frac{\mu^2(r)}{g(r)} \ll \frac{\varphi(W)}{W}\log R. \tag{279}$$

Оттук и от (277) следва, че

$$\mathcal{D}' \ll D^{-1}\left(\frac{\varphi(W)}{W}\log R\right)^{k+1}. \tag{280}$$

От (272) и (280) получаваме

$$\widehat{\mathcal{D}} = \mathcal{D}^* + O\left(D^{-1}\left(\frac{\varphi(W)}{W}\log R\right)^{k+1}\right). \tag{281}$$

Да разгледаме сега сумата $\mathcal{D}^*$, зададена чрез (273). Представяме я във вида

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^{\#} - \mathcal{D}'', \tag{282}$$

където сумирането в $\mathcal{D}^{\#}$ е по променливи $r_1,\dots,r_{k-1}$, които не са непременно две по две взаимно прости, а $\mathcal{D}''$ се състои от събираемите, за които $(r_i,r_j)>1$ за някои $i\neq j$. Като имаме предвид (231) виждаме, че

$$\mathcal{D}^{\#} = \sum_{\substack{r_1\dots r_{k-1}\le R\\(r_1\dots r_{k-1},W)=1}} \frac{\mu^2(r_1)\dots\mu^2(r_{k-1})}{g(r_1)\dots g(r_{k-1})}\,\left(\widehat{y}(r_1,\dots,r_{k-1})\right)^2 \tag{283}$$

Да оценим $\mathcal{D}''$. За тази цел е достатъчно да оценим приноса Δ_{ij} на събираемите, за които $(r_i,r_j)>1$ за някои фиксирани $i\neq j$. Поради симетрията можем да считаме, че $i=1, j=2$. Тъй като $(r_1r_2,W)=1$, то като вземем предвид определението на W, зададено чрез (129), виждаме, че ще имаме $(r_1,r_2)>D$. Тогава, като вземем също предвид (271), намираме

$$\Delta_{12} \ll \left(\frac{\varphi(W)}{W}\log R\right)^2 \sum_{\substack{D<d\le R\\(d,W)=1}}\mu^2(d) \sum_{\substack{r_1\dots r_{k-1}\le R\\(r_1\dots r_{k-1},W)=1\\(r_1,r_2)=d}} \frac{\mu^2(r_1)\dots\mu^2(r_{k-1})}{g(r_1)\dots g(r_{k-1})}$$

$$\ll \left(\frac{\varphi(W)}{W}\log R\right)^2 \sum_{\substack{D<d\le R\\(d,W)=1}}\mu^2(d)\left(\sum_{\substack{r\le R\\(r,W)=1}}\frac{\mu^2(r)}{g(r)}\right)^{k-3}\left(\sum_{\substack{r\le R\\(r,W)=1\\r\equiv 0 \pmod d}}\frac{\mu^2(r)}{g(r)}\right)^2. \tag{284}$$

Сега използваме (279) и също оценката

$$\sum_{\substack{r\le R\\(r,W)=1\\r\equiv 0 \pmod d}} \frac{\mu^2(r)}{g(r)} \le \frac{\mu^2(d)}{g(d)} \sum_{\substack{r\le \frac{R}{d}\\(r,W)=1}} \frac{\mu^2(r)}{g(r)} \ll \frac{\mu^2(d)}{g(d)}\,\frac{\varphi(W)}{W}\,\log R$$

и, като заместим в (284), получаваме

$$\Delta_{12} \ll \left(\frac{\varphi(W)}{W}\,\log R\right)^{k+1} \sum_{\substack{D<d\le R\\(d,W)=1}} \frac{\mu^2(d)}{g^2(d)}.$$

От Лема 3.19, Лема 3.28 и (229) получаваме

$$\sum_{\substack{D<d\le R\\(d,W)=1}} \frac{\mu^2(d)}{g^2(d)} \le -1 + \prod_{D<p}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right) \ll D^{-1}$$

и, като заместим в предишната формула, виждаме че

$$\Delta_{12} \ll D^{-1}\left(\frac{\varphi(W)}{W}\,\log R\right)^{k+1}.$$

Същата оценка е валидна и за сумата $\mathcal{D}''$, така че като вземем предвид (282) получаваме

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^\# + O\left(D^{-1}\left(\frac{\varphi(W)}{W}\,\log R\right)^{k+1}\right). \tag{285}$$

От (226), (281) и (285) получаваме

$$S_2^{(\mu)} = \frac{x}{\varphi(W)}\,\mathcal{D}^\# + O\left(D^{-1}\,\frac{(\varphi(W))^k}{W^{k+1}}\,x\,(\log R)^{k+1}\right). \tag{286}$$

4.7 Намиране на асимптотична формула за сумата S

Тук продължаваме да изучаваме сумата $S_2^{(\mu)}$ и целта ни е да намерим нова асимптотична формула за нея, в която главният член е записан във вид, удобен за работа. За тази цел трябва да получим асимптотична формула за сумата $\mathcal{D}^\#$, зададена чрез (283), а за да постигнем това, трябва да намерим формула за величината $\widehat{y}(u_1,\dots,u_{k-1})$.

Като използваме (252) и (254) – (266) виждаме, че

$$\widehat{y}(u_1,\dots,u_{k-1}) = \left(\prod_{1\le i\le k-1} \mu(u_i)\,g(u_i)\,u_i\right)(\mathfrak{T}^* + \mathfrak{T}')$$

$$= \left(\prod_{1\le i\le k-1} \frac{\mu^2(u_i)g(u_i)u_i}{\varphi^2(u_i)}\right)\left(\mathfrak{H} + O\left(D^{-1}\,\frac{\varphi(W)}{W}\,\log R\right)\right) \tag{287}$$

Тъй като всяко u_i е взаимно просто с W, то всеки прост делител на u_i е по-голям от D и тогава, като използваме Лема 3.28, виждаме, че

$$\frac{\mu^2(u_i)g(u_i)u_i}{\varphi^2(u_i)} = \prod_{p|u_i} \frac{(p-2)p}{(p-1)^2} = \prod_{p|u_i} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) = 1 + O\left(D^{-1}\right).$$

Тогава първият множител в (287) също е равен на $1 + O\left(D^{-1}\right)$ и от (268) и (287) следва

$$\widehat{y}(u_1, \ldots, u_{k-1}) = \mathfrak{H} + O\left(D^{-1}\,\frac{\varphi(W)}{W}\,\log R\right). \tag{288}$$

От остатъчните членове във формулите (267) и (288) доминиращ е този от (288). Тогава получаваме

$$\widehat{y}(u_1, \ldots, u_{k-1}) = \frac{\varphi(W)\varphi(u_1)\ldots\varphi(u_{k-1})}{W u_1 \ldots u_{k-1}}\,(\log R) \int\limits_0^1 F\left(\frac{\log u_1}{\log R}, \ldots, \frac{\log u_{k-1}}{\log R}, t_k\right) dt_k$$

$$+ O\left(D^{-1}\,\frac{\varphi(W)}{W}\,\log R\right). \tag{289}$$

От тази формула, като повдигнем на квадрат, намираме

$$\left(\widehat{y}(u_1, \ldots, u_{k-1})\right)^2 = \left(\frac{\varphi(W)}{W}\right)^2 \frac{\varphi(u_1)^2 \ldots \varphi(u_{k-1})^2}{u_1^2 \ldots u_{k-1}^2}\,(\log R)^2$$

$$\times \left(\int\limits_0^1 F\left(\frac{\log u_1}{\log R}, \ldots, \frac{\log u_{k-1}}{\log R}, t_k\right) dt_k\right)^2$$

$$+ O\left(D^{-1}\,\left(\frac{\varphi(W)}{W}\right)^2\,(\log R)^2\right). \tag{290}$$

Заместваме последния израз в (283) и виждаме, че

$$\mathcal{D}^{\#} = \left(\frac{\varphi(W)}{W}\right)^2 (\log R)^2\,\left(\mathfrak{X}^* + O\left(D^{-1}\mathfrak{X}'\right)\right), \tag{291}$$

където

$$\mathfrak{X}^* = \sum_{\substack{r_1\dots r_{k-1}\le R\\(r_1\dots r_{k-1},W)=1}} \left(\prod_{1\le i\le k-1} \frac{\mu^2(r_i)\,\varphi^2(r_i)}{g(r_i)\,r_i^2}\right) \left(\int\limits_0^1 F\left(\frac{\log r_1}{\log R},\dots,\frac{\log r_{k-1}}{\log R},t_k\right)dt_k\right)^2, \tag{292}$$

$$\mathfrak{X}' = \sum_{\substack{r_1\dots r_{k-1}\le R\\(r_1\dots r_{k-1},W)=1}} \frac{\mu^2(r_1)\dots\mu^2(r_{k-1})}{g(r_1)\dots g(r_{k-1})}. \tag{293}$$

Първо ще оценим $\mathfrak{X}'$. Като използваме (279) виждаме, че

$$\mathfrak{X}' \le \left(\sum_{\substack{r\le R\\(r,W)=1}} \frac{\mu^2(r)}{g(r)}\right)^{k-1} \ll \left(\frac{\varphi(W)}{W}\log R\right)^{k-1} \tag{294}$$

Сега ще намерим асимптотична формула за сумата $\mathfrak{X}^*$, определена от (292). За удобство въвеждаме следните означения. Въвеждаме функциите

$$\mathcal{J}_1(t_1,\dots,t_{k-1}),\qquad \mathcal{J}_2(t_1,\dots,t_{k-2}),\qquad \dots,\qquad \mathcal{J}_{k-1}(t_1),$$

както и числото $\mathcal{J}_k$ по следния начин. Нека

$$\mathcal{J}_1(t_1,\dots,t_{k-1}) = \left(\int\limits_0^1 F(t_1,\dots,t_{k-1},t_k)\,dt_k\right)^2, \tag{295}$$

а при $1\le\nu\le k-1$ определяме индуктивно чрез формулата

$$\mathcal{J}_{\nu+1}(t_1,\dots,t_{k-\nu-1}) = \int\limits_0^1 \mathcal{J}_\nu(t_1,\dots,t_{k-\nu-1},t_{k-\nu})\,dt_{k-\nu}. \tag{296}$$

В частност имаме

$$\mathcal{J}_k = \int\limits_0^1\dots\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 F(t_1,\dots,t_k)\,dt_k\right)^2 dt_1\,\dots\,dt_{k-1}. \tag{297}$$

Сумата по $r_1,\dots,r_{k-1}$ в дясната страна на (292) представяме като повторна, като външната е по променливите $r_1,\dots,r_{k-2}$, а вътрешната по r_{k-1} (което вече ще бележим с r). Получаваме

$$\mathfrak{X}^* = \sum_{\substack{r_1\dots r_{k-2}\le R\\(r_1\dots r_{k-2},W)=1}} \left(\prod_{1\le i\le k-2} \frac{\mu^2(r_i)\,\varphi^2(r_i)}{g(r_i)\,r_i^2}\right)\mathcal{V}_{k-1}, \tag{298}$$

където
$$\mathcal{V}_{k-1} = \sum_{\substack{r \le \frac{R}{r_1 \dots r_{k-2}} \\ (r,W)=1}} \frac{\mu^2(r)\,\varphi^2(r)}{g(r)\,r^2}\,\mathcal{J}_1\left(\frac{\log r_1}{\log R}, \dots, \frac{\log r_{k-2}}{\log R}, \frac{\log r}{\log R}\right).$$

В последната сума разширяваме областта на сумиране, като вместо условието $r \le \frac{R}{r_1 \dots r_{k-2}}$ поставяме $r \le R$. Това не довежда до промяна, понеже по условие функцията $F(t_1, \dots, t_K)$ се анулира при $t_1 + \dots + t_k > 1$, а $\mathcal{J}_1$ се определя от (295). Сега прилагаме Лема 3.42, както и формула (296) и получаваме

$$\mathcal{V}_{k-1} = \frac{\varphi(W)}{W}\,\beta(W)\,(\log R) \int\limits_0^1 \mathcal{J}_1\left(\frac{\log r_1}{\log R}, \dots, \frac{\log r_{k-2}}{\log R}, t_{k-1}\right) dt_{k-1} + O\left(\tau(W)\right)$$

$$= \frac{\varphi(W)}{W}\,\beta(W)\,(\log R)\,\mathcal{J}_2\left(\frac{\log r_1}{\log R}, \dots, \frac{\log r_{k-2}}{\log R}\right) + O\left(\tau(W)\right). \tag{299}$$

Като използваме определението (87) за величината $\beta(W)$, както и Лема 3.28 лесно се вижда, че
$$\beta(W) = 1 + O\left(D^{-1}\right). \tag{300}$$
От горната формула, (298) и (299) получаваме

$$\mathfrak{X}^* = \frac{\varphi(W)}{W}\,(\log R) \sum_{\substack{r_1 \dots r_{k-2} \le R \\ (r_1 \dots r_{k-2}, W)=1}} \left(\prod_{1 \le i \le k-2} \frac{\mu^2(r_i)\,\varphi^2(r_i)}{g(r_i)\,r_i^2}\right) \mathcal{J}_2\left(\frac{\log r_1}{\log R}, \dots, \frac{\log r_{k-2}}{\log R}\right)$$

$$+ O\left(\left(D^{-1}\frac{\varphi(W)}{W}\log R + \tau(W)\right)\mathfrak{X}''\right), \tag{301}$$

където
$$\mathfrak{X}'' = \sum_{\substack{r_1 \dots r_{k-2} \le R \\ (r_1 \dots r_{k-2}, W)=1}} \left(\prod_{1 \le i \le k-2} \frac{\mu^2(r_i)\,\varphi^2(r_i)}{g(r_i)\,r_i^2}\right).$$

Като използваме горната формула и (279) оценяваме $\mathfrak{X}''$ и намираме

$$\mathfrak{X}'' \le \sum_{\substack{r_1 \dots r_{k-2} \le R \\ (r_1 \dots r_{k-2}, W)=1}} \prod_{1 \le i \le k-2} \frac{\mu^2(r_i)}{g(r_i)} \le \left(\sum_{\substack{r \le R \\ (r,W)=1}} \frac{\mu^2(r)}{g(r)}\right)^{k-2} \ll \left(\frac{\varphi(W)}{W}\log R\right)^{k-2}.$$

Освен това, като вземем предвид (129), Лема 3.12 и Лема 3.17 виждаме, че от двете събираеми $D^{-1}\frac{\varphi(W)}{W}\log R$ и $\tau(W)$ от остатъчния член в израза (301) доминира първото. Тогава, като заместим в (301), получаваме

$$\mathfrak{X}^* = \frac{\varphi(W)}{W}\,(\log R) \sum_{\substack{r_1\ldots r_{k-2}\le R\\(r_1\ldots r_{k-2},W)=1}} \left(\prod_{1\le i\le k-2} \frac{\mu^2(r_i)\,\varphi^2(r_i)}{g(r_i)\,r_i^2}\right) \mathcal{J}_2\left(\frac{\log r_1}{\log R},\ldots,\frac{\log r_{k-2}}{\log R}\right)$$

$$+\,O\left(D^{-1}\left(\frac{\varphi(W)}{W}\log R\right)^{k-1}\right).$$

Продължаваме по същия начин, като представим сумата по $r_1,\ldots,r_{k-2}$ като повторна — външната по $r_1,\ldots,r_{k-3}$, а вътрешната по r_{k-2}, което вече ще бележим с буквата r. Получаваме

$$\mathfrak{X}^* = \frac{\varphi(W)}{W}\,(\log R) \sum_{\substack{r_1\ldots r_{k-3}\le R\\(r_1\ldots r_{k-3},W)=1}} \left(\prod_{1\le i\le k-3} \frac{\mu^2(r_i)\,\varphi^2(r_i)}{g(r_i)\,r_i^2}\right) \mathcal{V}_{k-2}$$

$$+\,O\left(D^{-1}\left(\frac{\varphi(W)}{W}\log R\right)^{k-1}\right), \tag{302}$$

където

$$\mathcal{V}_{k-2} = \sum_{\substack{r\le \frac{R}{r_1\ldots r_{k-3}}\\(r,W)=1}} \frac{\mu^2(r)\,\varphi^2(r)}{g(r)\,r^2}\,\mathcal{J}_2\left(\frac{\log r_1}{\log R},\ldots,\frac{\log r_{k-3}}{\log R},\frac{\log r}{\log R}\right).$$

Прилагаме отново Лема 3.42, както и (296) и за сумата $\mathcal{V}_{k-2}$ намираме следната формула

$$\mathcal{V}_{k-2} = \frac{\varphi(W)}{W}\,\beta(W)\,(\log R)\,\mathcal{J}_3\left(\frac{\log r_1}{\log R},\ldots,\frac{\log r_{k-3}}{\log R}\right) + O\left(\tau(W)\right).$$

Заместваме този израз в (302), прилагаме също (300) и след кратки изчисления, подобни на тези от предишната стъпка, получаваме

$$\mathfrak{X}^* = \left(\frac{\varphi(W)}{W}\,(\log R)\right)^2 \sum_{\substack{r_1\ldots r_{k-3}\le R\\(r_1\ldots r_{k-3},W)=1}} \left(\prod_{1\le i\le k-3} \frac{\mu^2(r_i)\,\varphi^2(r_i)}{g(r_i)\,r_i^2}\right)$$

$$\times\,\mathcal{J}_3\left(\frac{\log r_1}{\log R},\ldots,\frac{\log r_{k-3}}{\log R}\right)$$

$$+\,O\left(D^{-1}\left(\frac{\varphi(W)}{W}\log R\right)^{k-1}\right).$$

Продължаваме по описания начин и след $k-1$ на брой стъпки получаваме асимптотичната формула

$$\mathfrak{X}^* = \left(\frac{\varphi(W)}{W} \log R \right)^{k-1} \left(\mathcal{J}_k + O\left(D^{-1}\right)\right), \tag{303}$$

където $\mathcal{J}_k$ е зададено чрез (297).

От (291), (294) и (303) следва

$$\mathcal{D}^{\#} = \left(\frac{\varphi(W)}{W} \log R \right)^{k+1} \left(\mathcal{J}_k + O\left(D^{-1}\right)\right) \tag{304}$$

Заместваме последния израз за $\mathcal{D}^{\#}$ в (286) и получаваме

$$S_2^{(\mu)} = \frac{(\varphi(W))^k}{W^{k+1}} x (\log R)^{k+1} \left(\mathcal{J}_k + O\left(D^{-1}\right)\right). \tag{305}$$

От формули (143), (197) и (305) следва

$$S = \frac{(\varphi(W))^k}{W^{k+1}} x (\log R)^k (\log x) \left(\frac{\log R}{\log x} k \mathcal{J}_k - m \mathcal{I}_k + O\left(D^{-1}\right)\right). \tag{306}$$

Сега, като вземем предвид (221) виждаме, че

$$S = \frac{(\varphi(W))^k}{W^{k+1}} x (\log R)^k (\log x) \left(\left(\frac{1}{4} - \varepsilon \right) k \mathcal{J}_k - m \mathcal{I}_k + O\left(D^{-1}\right)\right). \tag{307}$$

Числото $\varepsilon > 0$ можем да изберем произволно малко, а както се вижда от (129), величината D^{-1} клони към нула, когато x клони към безкрайност. Следователно, от (307) се вижда, че за да установим неравенството $S > 0$ при достатъчно големи x е достатъчно да имаме

$$k \mathcal{J}_k > 4m \mathcal{I}_k. \tag{308}$$

Остава да намерим функция $F(t_1, \ldots, t_k)$, удовлетворяваща споменатите преди условия и такава, че да е изпълнено (308), където $\mathcal{I}_k$ и $\mathcal{J}_k$ са определени чрез (191) и (297). Удобно е да положим

$$\mathcal{M}_k = \frac{k\mathcal{J}_k}{\mathcal{I}_k} \tag{309}$$

като, разбира се, ще предполагаме, че функцията F е такава, че $\mathcal{I}_k > 0$. Тогава неравенството (308) е еквивалентно на

$$\mathcal{M}_k > 4m. \tag{310}$$

В следващия параграф ще проверим, че ако определим k като функция на m съобразно формула (139), т.е. $k = [Am^2 e^{4m}] + 1$, където A е достатъчно голяма константа, то съществува функция $F(t_1, \ldots, t_k)$, която притежава всички свойства, които вече сме поискали и също такава, че да е изпълнено неравенството (310). Както отбелязахме в края на параграф 4.2, оттук ще следва, че при така избраното k за достатъчно големи x ще имаме $S > 0$, с което доказателството на Теорема 2.14 ще бъде завършено.

4.8 Оценка отдолу на величината $\mathcal{M}_k$ и край на доказателството

Да припомним, че нашата функция $F(t_1, \ldots, t_k)$ трябва да удовлетворява следните условия:

• $F(t_1, \ldots, t_k)$ е с носител намиращ се в множеството

$$R_k = \{\langle t_1, \ldots, t_k \rangle \in \mathbb{R}^k \ : \ t_1 \geq 0, \ \ldots, \ t_k \geq 0, \ t_1 + \ldots t_k \leq 1\}, \tag{311}$$

или, с други думи, имаме

$$F(t_1, \ldots, t_k) = 0 \qquad \text{ако} \qquad \langle t_1, \ldots, t_k \rangle \notin R_k. \tag{312}$$

• $F(t_1, \ldots, t_k)$ е ограничена и частично диференцируема в R_k и частните ѝ производни, там където съществуват, са също ограничени.

• $F(t_1, \ldots, t_k)$ е симетрична относно всички свои променливи, т.е.

$$F(t_{i_1}, \ldots, t_{i_k}) = F(t_1, \ldots, t_k)$$

за произволна пертмутация $\{i_1, \ldots, i_k\}$ на числата $\{1, \ldots, k\}$.

• За интеграла $\mathcal{I}_k$, определен от (191), имаме

$$\mathcal{I}_k > 0. \tag{313}$$

Нашата цел е да намерим функция $F(t_1, \ldots, t_k)$, която да удовлетворява горните условия и да е такава, че за величината $\mathcal{M}_k$, зададена чрез (309), да е изпълнено неравенството (310).

Нека $T = T_k$ е параметър, който ще изберем по-късно. Засега ще считаме само, че

$$0 < T < k. \tag{314}$$

Нека $g(t)$ е частично непрекъснато диференцируема функция, приемаща реални стойности за която

$$g(t) = 0 \qquad \text{при} \qquad t \notin [0, T]. \tag{315}$$

Ще търсим функцията $F(t_1, \ldots, t_k)$ във вида

$$F(t_1, \ldots, t_k) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{k} g(kt_i) & \text{ако} \quad \langle t_1, \ldots, t_k \rangle \in R_k, \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases} \tag{316}$$

Да разгледаме интеграла $\mathcal{I}_k$, определен чрез (191). Първо отбелязваме, че очевидно съществува някакво отворено множество, в което функцията F не се анулира, така че ще е изпълнено условието (313).

По-нататък, като използваме определението на F получаваме

$$\mathcal{I}_k = \int\limits_0^\infty \dots \int\limits_0^\infty F^2(t_1, \dots, t_k)\, dt_1 \dots dt_k$$

$$\leq \int\limits_0^\infty \dots \int\limits_0^\infty g^2(kt_1) \dots g^2(kt_k)\, dt_1 \dots dt_k = \left(\int\limits_0^\infty g^2(kt)\, dt \right)^k . \tag{317}$$

Сега да положим

$$\gamma = \int\limits_0^\infty g^2(t)\, dt. \tag{318}$$

Ясно е, че $\gamma > 0$. Тогава имаме

$$\int\limits_0^\infty g^2(kt)\, dt = \frac{\gamma}{k}$$

и, като вземем предвид (317), получаваме

$$\mathcal{I}_k \leq \frac{\gamma^k}{k^k}. \tag{319}$$

Сега да разгледаме интеграла $\mathcal{J}_k$, определен чрез (297). Като използваме (316), както и останалите свойствата на функцията F виждаме, че

$$\mathcal{J}_k = \int \dots \int\limits_{t_1, \dots, t_{k-1} > 0} \left(\int\limits_0^1 F(t_1, \dots, t_k)\, dt_k \right)^2 \, dt_1 \dots dt_{k-1}$$

$$= \int \dots \int\limits_{\substack{t_1, \dots, t_{k-1} > 0 \\ t_1 + \dots + t_{k-1} < 1}} \left(g(kt_1) \dots g(kt_{k-1}) \int\limits_0^{1-(t_1+\dots+t_{k-1})} g(kt_k)\, dt_k \right)^2 dt_1 \dots dt_{k-1}. \tag{320}$$

Сега вземаме предвид (314) и стесняваме областта на интегриране по $t_1, \dots, t_{k-1}$, като заменяме условието $t_1 + \dots + t_{k-1} < 1$ съответно с

$$t_1 + \dots t_{k-1} < 1 - \frac{T}{k}. \tag{321}$$

Но, ако е изпълнено (321), то ще имаме $1-(t_1+\dots+t_{k-1}) > \frac{T}{k}$ и, като вземем предвид (315) виждаме, че интегрирането по t_k ще се извършва всъщност по интервала $\left[0, \frac{T}{k}\right]$. От тези съображения и от (320) следва

$$\mathcal{J}_k \geq \mathcal{J}'_k, \tag{322}$$

където

$$\mathcal{J}_k' = \int\limits_{\substack{t_1,\dots,t_{k-1}>0\\ t_1+\dots+t_{k-1}<1-\frac{T}{k}}}\!\!\dots\int g^2(kt_1)\dots g^2(kt_{k-1})\left(\int\limits_0^{\frac{T}{k}} g(kt_k)\,dt_k\right)^2 dt_1\dots t_{k-1}.$$

Очевидно в послния израз можем да изнесем интеграла по t_k извън интеграла по $t_1,\dots,t_{k-1}$. Като направим също смяна на променливите, получаваме

$$\mathcal{J}_k' = \frac{1}{k^{k+1}}\left(\int\limits_0^{\infty} g(t)\,dt\right)^2 \int\limits_{\substack{t_1,\dots,t_{k-1}>0\\ t_1+\dots+t_{k-1}<k-T}}\!\!\dots\int g^2(t_1)\dots g^2(t_{k-1})\,dt_1\dots t_{k-1}.$$

В последния интеграл премахваме условието $t_1+\dots+t_{k-1}<k-T$ и означаваме получения израз с $\mathcal{J}_k^*$, т.е.

$$\mathcal{J}_k^* = \frac{1}{k^{k+1}}\left(\int\limits_0^{\infty} g(t)\,dt\right)^2 \int\limits_{t_1,\dots,t_{k-1}>0}\!\!\dots\int g^2(t_1)\dots g^2(t_{k-1})\,dt_1\dots t_{k-1}$$

$$= \frac{1}{k^{k+1}}\left(\int\limits_0^{\infty} g(t)\,dt\right)^2 \left(\int\limits_0^{\infty} g^2(t)\,dt\right)^{k-1}.$$

Сега, като вземем превид (318) виждаме, че

$$\mathcal{J}_k^* = \frac{\gamma^{k-1}}{k^{k+1}}\left(\int\limits_0^{\infty} g(t)\,dt\right)^2. \tag{323}$$

Грешката, която се получава при замяната на $\mathcal{J}_k'$ с $\mathcal{J}_k^*$, се записва във вида

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{k^{k+1}}\left(\int\limits_0^{\infty} g(t)\,dt\right)^2 \int\limits_{\substack{t_1,\dots,t_{k-1}>0\\ t_1+\dots+t_{k-1}>k-T}}\!\!\dots\int g^2(t_1)\dots g^2(t_{k-1})\,dt_1\dots t_{k-1}, \tag{324}$$

така че имаме

$$\mathcal{J}_k' = \mathcal{J}_k^* - \mathcal{E}_k. \tag{325}$$

Полагаме

$$\mu = \frac{1}{\gamma}\int\limits_0^{\infty} tg^2(t)\,dt, \tag{326}$$

където γ е определено чрез (318). [6] Оттук нататък ще предполагаме, че е изпълнено условието

$$\mu < 1 - \frac{T}{k}. \tag{327}$$

Както ще видим, то ще ни гарантира, че величината $\mathcal{E}_k$, определена от (324), е пренебрежимо малка в сравнение с J_k^*.

Определяме също

$$\eta = \frac{k-T}{k-1} - \mu. \tag{328}$$

Непосредствено се проверява, че $\eta > \frac{k-T}{k-1} - \frac{k-T}{k} > 0$, откъдето следва, че $\frac{k-T}{k-1} > \mu$. Следователно, ако числата $t_1, \ldots, t_{k-1}$ удовлетворяват условията $t_1, \ldots, t_{k-1} > 0$ и $t_1 + \cdots + t_{k-1} > k - T$, то ще имаме $t_1 + \cdots + t_{k-1} > (k-1)\mu$. Освен това

$$\frac{t_1 + \cdots + t_{k-1}}{k-1} - \mu > \frac{k-T}{k-1} - \mu = \eta > 0,$$

откъдето следва, че

$$1 \leq \frac{1}{\eta^2} \left(\frac{t_1 + \cdots + t_{k-1}}{k-1} - \mu \right)^2. \tag{329}$$

Последното неравенство ни дава възможност да оценим интеграла от израза в дясната страна на (324). Да означим

$$\mathcal{H} = \int\limits_{\substack{t_1,\ldots,t_{k-1}>0 \\ t_1+\cdots+t_{k-1}>k-T}} \cdots \int g^2(t_1) \ldots g^2(t_{k-1})\, dt_1 \ldots t_{k-1} \tag{330}$$

Като вземем предвид (329) намираме

$$\mathcal{H} \leq \frac{1}{\eta^2} \int\limits_{\substack{t_1,\ldots,t_{k-1}>0 \\ t_1+\cdots+t_{k-1}>k-T}} \cdots \int \left(\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} t_i - \mu \right)^2 g^2(t_1) \ldots g^2(t_{k-1})\, dt_1 \ldots t_{k-1}$$

$$\leq \frac{1}{\eta^2} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left(\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} t_i - \mu \right)^2 g^2(t_1) \ldots g^2(t_{k-1})\, dt_1 \ldots t_{k-1}.$$

Сега, като извършим повдигането на квадрат в подинтегралната функция, получа-

[6] С други думи, числото μ е x-координатата на центъра на тежестта на фигурата в равнината, определена от условията $0 \leq x \leq T$, $0 \leq y \leq g^2(x)$.

ваме

$$\mathcal{H} \le \frac{1}{\eta^2} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left(\frac{1}{(k-1)^2} \sum_{i=1}^{k-1} t_i^2 + \mu^2 + \frac{2}{(k-1)^2} \sum_{1\le i<j\le k-1} t_i t_j - \frac{2}{k-1} \mu \sum_{i=1}^{k-1} t_i \right)$$

$$\times g^2(t_1)\dots g^2(t_{k-1})\, dt_1 \dots t_{k-1}$$

$$= \frac{1}{\eta^2} \left(\frac{1}{(k-1)^2} \sum_{i=1}^{k-1} \mathcal{H}_i^{(1)} + \mu^2 \mathcal{H}^{(2)} + \frac{2}{(k-1)^2} \sum_{1\le i<j\le k-1} \mathcal{H}_{ij}^{(3)} - \frac{2\mu}{(k-1)} \sum_{i=1}^{k-1} \mathcal{H}_i^{(4)} \right), \tag{331}$$

където

$$\mathcal{H}_i^{(1)} = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty t_i^2\, g^2(t_1)\dots g^2(t_{k-1})\, dt_1 \dots t_{k-1}$$

$$\mathcal{H}^{(2)} = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty g^2(t_1)\dots g^2(t_{k-1})\, dt_1 \dots t_{k-1}$$

$$\mathcal{H}_{ij}^{(3)} = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty t_i\, t_j\, g^2(t_1)\dots g^2(t_{k-1})\, dt_1 \dots t_{k-1}$$

$$\mathcal{H}_i^{(4)} = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty t_i\, g^2(t_1)\dots g^2(t_{k-1})\, dt_1 \dots t_{k-1}.$$

Очевидно $\mathcal{H}_i^{(1)}$ и $\mathcal{H}_i^{(4)}$ не зависят от i, а $\mathcal{H}_{ij}^{(3)}$ не зависи от i и j.

Като използваме (318) намираме

$$\sum_{i=1}^{k-1} \mathcal{H}_i^{(1)} = (k-1)\mathcal{H}_1^{(1)} = (k-1)\,\gamma^{k-2} \int_0^\infty t^2 g^2(t)\, dt.$$

По-нататък, очевидно имаме

$$\mathcal{H}^{(2)} = \gamma^{k-1}.$$

Ясно е също, че

$$\sum_{1\le i<j\le k-1} \mathcal{H}_{ij}^{(3)} = \frac{(k-2)(k-1)}{2} \mathcal{H}_{12}^{(3)} = \frac{(k-2)(k-1)}{2}\,\gamma^{k-3} \left(\int_0^\infty t g^2(t)\, dt \right)^2.$$

Накрая, изпълнено е

$$\sum_{i=1}^{k-1} \mathcal{H}_i^{(4)} = (k-1)\mathcal{H}_1^{(4)} = (k-1)\,\gamma^{k-2} \int\limits_0^\infty tg^2(t)\,dt.$$

Също така, от (326) следва

$$\int\limits_0^\infty tg^2(t)\,dt = \gamma\,\mu. \tag{332}$$

Сега, като заместим съответните изрази в (331), получаваме

$$\mathcal{H} \le \frac{1}{\eta^2}\left(\frac{\gamma^{k-2}}{k-1}\int\limits_0^\infty t^2g^2(t)\,dt + \mu^2\,\gamma^{k-1} + \frac{k-2}{k-1}\,\gamma^{k-3}\,(\gamma\mu)^2 - 2\mu\,\gamma^{k-2}\,\gamma\mu\right)$$

$$= \frac{\gamma^{k-2}}{\eta^2(k-1)}\left(\int\limits_0^\infty t^2g^2(t)\,dt - \gamma\mu^2\right). \tag{333}$$

Да разгледаме интеграла в последния ред на горната формула. Интегрирането в него може да се вземе по интервала $[0, T]$, тъй като според (315) имаме $g(t) = 0$ при $t > T$. Но, ако $0 \le t \le T$, то имаме $t^2g^2(t) \le Ttg^2(t)$ и, като вземем още предвид (332), получаваме

$$\int\limits_0^\infty t^2g^2(t)\,dt \le T\int\limits_0^\infty tg^2(t)\,dt = T\gamma\mu.$$

От горното неравенство и от (333) намираме

$$\mathcal{H} \le \frac{\gamma^{k-1}\mu}{\eta^2(k-1)}\,(T-\mu)\,. \tag{334}$$

От (324), (327) (330) и (334) следва

$$\mathcal{E}_k \le \frac{\gamma^{k-1}\,\mu}{\eta^2\,k^{k+1}\,(k-1)}\,(T-\mu)\,\left(\int\limits_0^\infty g(t)\,dt\right)^2 \le \frac{\gamma^{k-1}\,T}{\eta^2\,k^{k+1}\,(k-1)}\,\left(\int\limits_0^\infty g(t)\,dt\right)^2. \tag{335}$$

Като използваме (322), (323), (325) и (335) получаваме

$$\mathcal{J}_k \ge \frac{\gamma^{k-1}}{k^{k+1}}\left(\int\limits_0^\infty g(t)\,dt\right)^2\left(1 - \frac{T}{\eta^2\,(k-1)}\right). \tag{336}$$

От (309), (318), (319) и (336) следва

$$\mathcal{M}_k \geq \frac{1}{\gamma} \left(\int\limits_0^\infty g(t)\, dt \right)^2 \left(1 - \frac{T}{\eta^2\,(k-1)} \right). \tag{337}$$

Като вземем предвид (327) и (328) получаваме

$$\eta^2(k-1) = \left(\frac{k-T}{k-1} - \mu \right)^2 (k-1) = \frac{(k-T-\mu(k-1))^2}{k-1} > \frac{(k-T-\mu k))^2}{k}.$$

Прилагаме последното неравенство и (337) и получаваме

$$\mathcal{M}_k \geq \frac{1}{\gamma} \left(\int\limits_0^\infty g(t)\, dt \right)^2 \left(1 - \frac{kT}{(k-T-\mu k)^2} \right). \tag{338}$$

За да намерим колкото се може по-точна долна граица за $\mathcal{M}_k$ е необходимо да подберем функцията $g(t)$ така, че изразът в дясната страна на (338) да е колкото се може по-голям. Ще искаме функцията $g(t)$ да е от вида

$$g(t) = \begin{cases} (1+At)^{-1} & \text{при} \quad t \in [0, T], \\ 0 & \text{при} \quad t \notin [0, T], \end{cases} \tag{339}$$

където $A > 1$ е величина, зависеща по определен начин от T. Ще обясним накратко защо търсим $g(t)$ в този вид.

Ние трябва да определим $g(t)$ в интервала $[0, T]$ по такъв начин, че интегралът $\int_0^T g(t)\, dt$ да приема максимална стойност, и в същото време да са изпълнени условията (318) и (326), които за удобство привеждаме отново:

$$\int\limits_0^T g^2(t)\, dt = \gamma, \qquad \int\limits_0^T t g^2(t)\, dt = \gamma\mu. \tag{340}$$

Тази задача е от областта на вариационното изчисление, но ние ще опростим нещата, като за момент предположим, че $g(t)$ е стъпаловидна функция. (Да не забравяме, че сега не провеждаме доказателство, а само търсим аргументи, с които да обосновем избора на $g(t)$ зададен чрез (339)).

Да допуснем, че $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{T}{n}$ и нека $g(t)$ се задава чрез

$$g(t) = g_j \qquad \text{при} \qquad (j-1)h < t \leq jh, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{341}$$

а $g(0)$ е произволно число. Тогава имаме

$$\int\limits_0^T g(t)\, dt = \sum_{j=1}^n \int\limits_{(j-1)h}^{jh} g(t)\, dt = h \sum_{j=1}^n g_j. \tag{342}$$

Аналогично получаваме

$$\int\limits_0^T g^2(t)\,dt = h\sum_{j=1}^n g_j^2, \qquad \int\limits_0^T t\,g^2(t)\,dt = \frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^n g_j^2\,(2j-1). \tag{343}$$

(Изчисленията оставяме на читателя).

Като имаме предвид (340) – (343) виждаме, че нашата задача се свежда до намирането на числа $g_1, \dots, g_n$ удовлетворяващи

$$\sum_{j=1}^n g_j^2 = \frac{\gamma}{h}, \qquad \sum_{j=1}^n g_j^2\,(2j-1) = \frac{2\gamma\mu}{h^2} \tag{344}$$

и такива, че сумата

$$\sum_{j=1}^n g_j \tag{345}$$

да приема максимална стойност.

Както е известно, за да търсим екстремуми на израза (345) при наличието на условията (344) е необходимо да разгледаме фукцията на Лагранж

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_1, \dots, g_n, \theta_1, \theta_2) = \sum_{j=1}^n g_j - \theta_1\left(\sum_{j=1}^n g_j^2 - \frac{\gamma}{h}\right) - \theta_2\left(\sum_{j=1}^n g_j^2\,(2j-1) - \frac{2\gamma\mu}{h^2}\right)$$

и трябва да решаваме относно g_j системата уравнения, образувана от (344) заедно с уравненията

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_j} = 0, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{346}$$

Лесно се проверява, че системата (346) има решение

$$g_j = \frac{1}{2(\theta_1 - \theta_2) + 4\theta_2 j}, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{347}$$

Стойностите на θ_1 и θ_2 могат да се получат, ако заместим изразите за g_j в двете уравнения (344). Няма да търсим тези стойности, защото и от досегашните разсъждения става ясно, че стъпаловидната функция, определена от (341) и (347) е аналог на функция от вида $g(t) = (\alpha + \beta t)^{-1}$. Като вземем предвид (318) виждаме, че величината $\frac{1}{\gamma}\left(\int_0^T g(t)\,dt\right)^2$ не се променя при умножаване на функцията $g(t)$ с константа. Тогава можем да очакваме, че подходящ избор на $g(t)$ се дава от равенството (339).

Когато $g(t)$ е зададена чрез (339) лесно се проверява, че

$$\int_0^T g(t)\,dt = \frac{\log(1+AT)}{A}, \tag{348}$$

$$\int_0^T g^2(t)\,dt = \frac{1}{A}\left(1 - \frac{1}{1+AT}\right), \tag{349}$$

$$\int_0^T t\,g^2(t)\,dt = \frac{1}{A^2}\left(\log(1+AT) - 1 + \frac{1}{1+AT}\right). \tag{350}$$

Изчисленията оставяме на читателя.

Поставяме условието величините T и A да са свързани по такъв начин, че изразът от (348) да е равен на 1. Това означава, че $\log(1+AT) = A$, или все едно

$$T = \frac{1}{A}\left(e^A - 1\right). \tag{351}$$

Тогава от (318) и (349) – (351) следва

$$\gamma = \int_0^T g^2(t)\,dt = \frac{1}{A}\left(1 - e^{-A}\right), \tag{352}$$

$$\int_0^T t\,g^2(t)\,dt = \frac{1}{A^2}\left(A - 1 + e^{-A}\right). \tag{353}$$

Като използваме (318), (326), (352) и (353) след прости изчисления получаваме

$$\mu = \frac{1}{1-e^{-A}} - \frac{1}{A}. \tag{354}$$

Избираме

$$A = \log k - 2\log\log k \tag{355}$$

и считаме че k е фиксирано, но достатъчно голямо. Тогава от последната формула и от (351) следва

$$T < \frac{e^A}{A} = \frac{e^{\log k - 2\log\log k}}{\log k - 2\log\log k} = \frac{k}{(\log k)^3\left(1 - \frac{2\log\log k}{\log k}\right)} < k,$$

тъй че условието (314) е налице.

Сега да проверим, че е изпълнено и условието (327). Наистина, като вземем предвид (351), (354) и (355) виждаме, че

$$1-\frac{T}{k}-\mu > 1-\frac{e^A}{Ak}-\frac{1}{1-e^{-A}}+\frac{1}{A}=\frac{1}{A}\left(1-\frac{A}{e^A-1}-\frac{e^A}{k}\right)$$

$$=\frac{1}{A}\left(1-\frac{\log k-2\log\log k}{\frac{k}{(\log k)^2}-1}-\frac{1}{(\log k)^2}\right)>0.$$

Заместваме получените стойности за интегралите в дясната страна на (338) и получаваме

$$\mathcal{M}_k \geq \frac{A}{(1-e^{-A})}\left(1-\frac{kT}{(k-T-k\mu)^2}\right)\geq A\left(1-\frac{kT}{(k-T-k\mu)^2}\right). \tag{356}$$

Сега заместваме в горната формула T с израза от (351), Забелязваме, че последният израз намалява, ако T расте, и тъй като $T<\frac{e^A}{A}$, виждаме, че

$$\mathcal{M}_k \geq A\left(1-\frac{k\,A^{-1}\,e^A}{\left(k-A^{-1}e^A-k\mu\right)^2}\right). \tag{357}$$

Като вземем предвид (355) получаваме

$$kA^{-1}e^A=\frac{k^2}{(\log k)^2(\log k-2\log\log k)}=\frac{k^2}{(\log k)^3}\left(1+O\left(\frac{\log\log k}{\log k}\right)\right). \tag{358}$$

По-нататък, като използваме (354) и (355) виждаме, че

$$k-A^{-1}e^A-k\mu=k+O\left(\frac{k}{(\log k)^3}\right)-k\left(\frac{1}{1-e^{-A}}-\frac{1}{A}\right)$$

$$=k+O\left(\frac{k}{(\log k)^3}\right)-k\left(1-\frac{1}{\log k-2\log\log k}\right)$$

$$=\frac{k}{\log k-2\log\log k}+O\left(\frac{k}{(\log k)^3}\right)$$

$$=\frac{k}{\log k}\left(1+O\left(\frac{\log\log k}{\log k}\right)\right). \tag{359}$$

От (358) и (359) следва

$$\frac{k\,A^{-1}\,e^A}{\left(k-A^{-1}e^A-k\mu\right)^2}=\frac{1}{\log k}\left(1+O\left(\frac{\log\log k}{\log k}\right)\right). \tag{360}$$

Тогава като използваме (355), (357) и (360) получаваме, че при достатъчно големи k е изпълнено

$$\mathcal{M}_k \geq (\log k - 2\log\log k)\left(1 - \frac{1}{\log k} + O\left(\frac{\log\log k}{(\log k)^2}\right)\right)$$

$$= \log k - 2\log\log k - 1 + O\left(\frac{\log\log k}{\log k}\right)$$

$$\geq \log k - 2\log\log k - 2. \tag{361}$$

Сега вече можем да довършим доказателството на Теорема 2.14. Нека $A > 0$ е достатъчно голяма константа и нека

$$k = \left[Am^2e^{4m}\right] + 1. \tag{362}$$

Тъй като функцията $\log t - 2\log\log t$ е растяща за достатъчно големи стойности на t, имаме

$$\log k - 2\log\log k - 2 \geq \log\left(Am^2e^{4m}\right) - 2\log\log\left(Am^2e^{4m}\right) - 2$$

$$= 4m + 2\log m + \log A - 2\log\left(4m + 2\log m + \log A\right) - 2$$

$$> 4m, \tag{363}$$

стига както параметърът m, така и константата A да са достатъчно големи. (Елементарната проверка на последното неравенство оставяме на читателя.)

От (361) – (363) следва, че при достатъчно големи m и A и при k избрано във вида (362) е изпълнено

$$\mathcal{M}_k > 4m.$$

Както се убедихме в края на предишния параграф, от тук следва доказателството на Теорема 2.14.

$\square$

Литература

[1] Д. И. Толев, *Увод в аналитичната теория на числата*, Записки по едноименния изборен курс, четен във ФМИ през учебната 2008/2009 г. http://www.fmi.uni-sofia.bg/econtent/

[2] Д. И. Толев, *Увод в аналитичната теория на числата - III*, Записки по едноименния изборен курс, четен във ФМИ през учебната 2012/2013 г. http://www.fmi.uni-sofia.bg/econtent/

[3] L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, Vol I, II, III, Dover Publications, New York, 1919, 1920, 1923.

[4] P. D. T. A. Elliott, H. Halberstam, *A conjecture in prime number theory*, In Symposia Mathematica, Vol. IV (INDAM, Rome, 1968/69), pages 59–72. Academic Press, London, 1970.

[5] J. Friedlander, A. Granville, *Limitations to the equi-distribution of primes I*, Ann. of Math. (2), 129(2), (1989), 363–382.

[6] D. A. Goldston, J. Pintz, C. Y. Yildirim, *Primes in tuples I*, Ann. of Math. (2), 170(2) (2009), 819–862.

[7] D. Goldston, J. Pintz, C. Yildirim, *Primes in tuples II*, Acta Math. 204 (2010), 1, 1-47.

[8] J. Friedlander, H. Iwaniec, *Opera de Cribro*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 57, 2010.

[9] H. Halberstam, H. E. Richert, *Sieve Methods*, Academic Press, London, 1974.

[10] H.Iwaniec, E.Kowalski, *Analytic number theory*, Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, 53, 2004

[11] H. Maier, *Small differences between prime numbers*, Michigan Math. J. 35 (1988), 323–344.

[12] J. Maynard, *Small gaps between primes*, Ann. of Math., в печат. Статията може да се намери на следната страница:

http://de.arxiv.org/pdf/1311.4600.pdf

[13] M. B. Nathanson, *Additive Number Theory: The Classical Bases*, Graduate Texts in Mathematics, 164, Springer, New York, 1996.

[14] D. H. J. Polymath, *New equidistribution estimates of Zhang type, and bounded gaps between primes*, препринт.

[15] D. H. J. Polymath, *Variants of the Selberg sieve, and bounded intervals containing many primes*, препринт. Статията може да се намери на следната страница:

http://michaelnielsen.org/polymath1/index.php

[16] Y. Zhang, *Bounded gaps between primes*, Ann. of Math., в печат.