

Глава 1. ЧИСЛЕНИ МЕТОДИ ЗА ЗАДАЧАТА НА КОШИ ЗА ОБИКНОВЕНО ДИФЕРЕНЦИАЛНО УРАВНЕНИЕ ОТ ПЪРВИ РЕД

§ 1. ПОСТАНОВКА НА ЗАДАЧАТА. МРЕЖОВИ (ДИФЕРЕНЧНИ) МЕТОДИ. МЕТОДИ НА ОЙЛЕР

Постановка на диференциалната задача, съществуване и единственост на решението, устойчивост по начални данни

Търси се диференцируема функция $u = u(x)$, която удовлетворява диференциалното уравнение

$$(1) \quad u'(x) = f(x, u(x)), \quad x_0 < x \leq X,$$

и началното условие

$$(2) \quad u(x_0) = u_0.$$

Тази задача има следната геометрична интерпретация: търси се крива $u = u(x)$, която минава през точката (x_0, u_0) и чиято допирателна във всяка точка (x, u) има ъглов коефициент $f(x, u)$.

В курса по числени методи ще предполагаме винаги, че разглежданата диференциална задача има и то единствено решение. За да бъде изпълнено това предположение, на входните данни на задачата се налагат някакви условия. Тези условия имат съществено значение при конструирането и изследването на методите за приближено решаване на задачата. За задачата на Коши (1), (2) условията за съществуване и единственост на решението се формулират така ([1], стр.43):

Теорема. Нека функцията $f(x, u)$ е дефинирана и непрекъсната в правоъгълника $D = \{(x, u) : |x - x_0| \leq a, |u - u_0| \leq b\}$ и удовлетворява в D условието на Липшиц по u :

$$(3) \quad |f(x, u) - f(x, v)| \leq K |u - v| \quad \text{за } \forall (x, u), (x, v) \in D$$

с константа $K > 0$. Тогава задачата (1), (2) има и то единствено решение $u(x)$ за $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, където $\delta = \min(a, b/M)$, а $M = \max_D |f(x, u)|$.

Забележка. Ако $f(x, u)$ е само непрекъсната, задачата (1), (2) може да има повече от едно решение.

От свойствата на функцията f зависи и непрекъснатата зависимост на решението $u(x)$ от дясната страна на началното условие u_0 , т. е. неговата устойчивост.

Наред със задачата (1), (2), да разгледаме и задачата

$$(4) \quad \tilde{u}' = f(x, \tilde{u}),$$

$$(5) \quad \tilde{u}(x_0) = \tilde{u}_0,$$

която се различава от задачата (1), (2) само по дясната страна на началното условие, и следователно ще има друго решение, което означаваме с $\tilde{u}(x)$.

Определение. Решението $u = u(x)$ на уравнението (1), съответстващо на началното условие (2), се нарича *устойчиво по начални данни* (устойчиво по Ляпунов), ако за $\forall \varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такова че от неравенството

$|\tilde{u}_0 - u_0| < \delta$ да следва $|\tilde{u}(x) - u(x)| < \varepsilon$ за $\forall x \geq x_0$, където $\tilde{u}(x)$ е решението на задачата (4), (5).

Да изследваме как зависи устойчивостта по начални данни от свойствата на f . Въвеждаме функцията $z(x) = \tilde{u}(x) - u(x)$. За $z(x)$ след прилагане на теоремата за крайните нараствания, получаваме задачата

$$z'(x) = [f(x, \tilde{u}) - f(x, u)] = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u + \theta z)z, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad z(x_0) = z_0 = \tilde{u}_0 - u_0,$$

или още

$$(6) \quad z'(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u + \theta z)z, \quad x_0 < x \leq X,$$

$$(7) \quad z(x_0) = z_0.$$

За краткост по-долу ще пропускаме аргументите на функциите z и $\frac{\partial f}{\partial u}$. Да умножим двете страни на уравнението (6) със z :

$$(8) \quad zz' = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(z^2) = \frac{\partial f}{\partial u} z^2.$$

Да разгледаме два случая:

а) $\frac{\partial f}{\partial u} \leq 0$ за всички x, u, \tilde{u} . Тогава $\frac{d}{dx}(z^2) \leq 0$, от което следва $z^2(x) \leq z^2(x_0)$ и $|z(x)| \leq |z(x_0)|$, т.е. $|\tilde{u}(x) - u(x)| \leq |\tilde{u}_0 - u_0|$ за $x \in [x_0, X]$, което означава устойчивост на решението на задачата (1), (2) по начални данни.

б) $\frac{\partial f}{\partial u} \geq c_0 > 0$ за всички x, u, \tilde{u} . Тогава от (8) получаваме последователно

$$\frac{dz^2}{z^2} = 2 \frac{\partial f}{\partial u} dx, \quad \int_{x_0}^x \frac{dz^2}{z^2} = 2 \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial u} dx \geq 2c_0(x - x_0), \quad \ln z^2 \Big|_{x_0}^x \geq 2c_0(x - x_0),$$

$$\ln \frac{z^2}{z_0^2} \geq 2c_0(x - x_0), \quad \ln \frac{|z|}{|z_0|} \geq c_0(x - x_0),$$

$|z(x)| \geq e^{c_0(x-x_0)} |z(x_0)| = e^{-c_0x_0} e^{c_0x} |z(x_0)|$. Следователно $|z(x)| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, т.е. решението не е устойчиво по начални данни.

И така, при $\frac{\partial f}{\partial u} \leq 0$ решението на задачата (1), (2) е устойчиво, при $\frac{\partial f}{\partial u} > 0$ е неустойчиво по начални данни. Тъй като решението $z(x)$ на задачата (6), (7) при $x \rightarrow \infty$ има поведение, аналогично на поведението на решението на линейното уравнение

$$(9) \quad \begin{cases} u' = \lambda u, & x_0 < x \leq X, \\ u(x_0) = u_0, \end{cases} \quad \lambda = \text{const},$$

то задачата (9) е приета за *моделна* при изследване устойчивостта на числените методи за решаване на задача (1), (2). Точно решение на задачата (9) е $u(x) = u_0 e^{\lambda(x-x_0)}$ и има следните свойства:

- (10) $|u(x)| \leq |u_0|$ при $\lambda \leq 0$,
 (11) $|u(x)| \geq |u_0|$ при $\lambda \geq 0$,
 (12) $u(x) \geq 0$ при $u_0 \geq 0$, $u(x) \leq 0$ при $u_0 \leq 0$,
 (13) $u(x)$ е монотонна функция при произволни λ и u_0 .

Определение. Ако численият метод за решаване на задачата (1), (2), приложен към моделната задача (9) при $\lambda \leq 0$ дава приближено решение, за което е изпълнено неравенство, аналогично на (10), казваме, че *методът е абсолютно устойчив*.

В случая $\lambda > 0$ разглеждаме друг вид устойчивост (т. н. *относителна устойчивост*), която ще дефинираме по-късно.

Определение. Ако при всяко λ численият метод дава приближено решение, което има свойства, аналогични на (12), (13) (т. е. той запазва знакоопределеността и монотонността на решението), казваме, че *методът е монотонен*.

Приближено решаване на задачата (1), (2)

Преди да систематизираме видовете числени методи, разработени за задачата (1), (2), ще се опитаме с елементарни разсъждения да изведем някои от тях.

1. Като използваме геометричната интерпретация и една от основните идеи на числените методи - в достатъчно малък интервал дадена непрекъсната функция може да се приближи с линейна - идваме до най-стария метод - метода на Ойлер (1768). В точката (x_0, u_0) построяваме допирателната към кривата $u = u(x)$:

$u - u_0 = f(x_0, u_0)(x - x_0)$. В достатъчно малък интервал с дължина $h = x_1 - x_0$ заместваем кривата $u = u(x)$ с тази допирателна и за приближена стойност на $u(x)$ в точката x_1 приемаме пресечната точка на правата $x = x_1$ с допирателната:

$$(14) \quad \tilde{u}_1 = u_0 + h f(x_0, u_0).$$

Ако продължим този процес, правейки последователно стъпки h , ще получим:

$$(15) \quad \tilde{u}_{i+1} = \tilde{u}_i + h f(x_i, \tilde{u}_i) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad , \quad n = \frac{X - x_0}{h}.$$

2. В уравнението (1) полагаме $x = x_0$

$$u'_0 = f(x_0, u_0)$$

и апроксимираме производната $u'(x_0)$ с едностранна разлика, използвайки стойността на $u(x)$ в достатъчно близка до x_0 точка x_1 , $x_1 - x_0 = h$

$$u'(x_0) = \frac{u_1 - u_0}{h} + O(h) = f(x_0, u_0).$$

Пренебрегваме остатъчния член $O(h)$ и получаваме

$$\tilde{u}_1 = u_0 + h f(x_0, u_0).$$

3. Интегрираме двете страни на уравнението (1) в интервал (x_0, x_1) с дължина h

$$\int_{x_0}^{x_1} u' dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x, u(x)) dx$$

и за пресмятане на интеграла вдясно използваме някоя от известните прости формули за числено интегриране [5], [7]:

- формулата на левите правоъгълници

$$u_1 - u_0 = h f(x_0, u_0) + O(h^2),$$

$$\tilde{u}_1 - u_0 = h f(x_0, u_0),$$
- формулата на десните правоъгълници

$$u_1 - u_0 = h f(x_1, u_1) + O(h^2),$$
(16)
$$\tilde{u}_1 - u_0 = h f(x_1, \tilde{u}_1),$$
- формулата на трапеците

$$u_1 - u_0 = \frac{h}{2} (f(x_0, u_0) + f(x_1, u_1)) + O(h^3),$$
(17)
$$\tilde{u}_1 - u_0 = \frac{h}{2} (f(x_0, u_0) + f(x_1, \tilde{u}_1)).$$

И така, по формулите (15), (16), (17) можем да намерим приближените стойности \tilde{u}_i на решението $u(x)$ в точките $x_i = x_0 + ih$, $h = (X - x_0)/n$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тези формули са частни случаи на мрежовите (диференчните) методи за решаване на диференциалната задача (1),(2).

Мрежови (диференчни) методи

В интервала $[x_0, X]$ въвеждаме *мрежа от точки*:

- неравномерна: $\hat{\omega} = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n = X\}$ или
- равномерна: $\bar{\omega}_h = \{x_i : x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, n, h = (X - x_0)/n\}$.

Да означим с $u_i = u(x_i)$ стойностите на точното решение на задачата (1), (2) във възлите на мрежата, а с $y_i = \tilde{u}_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, съответните приближени стойности, които намираме по някой числен метод (например (15)-(17)).

Дефинираме следните *мрежови функции*:

$$y_h = \{y_i\}_{i=0}^n, \quad u_h = \{u_i\}_{i=0}^n.$$

Това са функции на дискретен аргумент с дефиниционна област $\bar{\omega}_h$ или $\hat{\omega}$.

Да запишем уравнението (1) във вида

(18)
$$Lu = f, \quad L = \frac{d}{dx}.$$

Определение. Операторът L_h , преобразуващ мрежовата функция y_h в мрежова функция $Y_h = L_h y_h$, се нарича *мрежов* или *диференчен оператор*.

Диференциалният оператор L , действащ в множеството на функциите на непрекъснат аргумент, може да бъде *апроксимиран* (приближен) с диференчен оператор L_h , действащ върху мрежовите функции.

Определение. Разликата

(19)
$$\psi_i = (L_h u_h)_i - (Lu)_i$$

се нарича *грешка на апроксимацията на оператора L с диференчния оператор L_h във възела $x_i \in \bar{\omega}_h$ (локална грешка на апроксимацията)*. Ако $\psi_i = O(h^m)$, казва се, че грешката на апроксимация във възела x_i е от m -ти ред.

Например, ако $Lu = u'$, а

$$(20) \quad (L_h u_h)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h},$$

то

$$\begin{aligned} \psi_i &= (L_h u_h)_i - (Lu)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - u'_i = \frac{1}{h} \left(u_i + hu'_i + \frac{h^2}{2} u''(x_i + \theta h) - u_i \right) - u'_i = \\ &= \frac{h}{2} u''(x_i + \theta h) = O(h), \quad 0 \leq \theta \leq 1. \end{aligned}$$

Ако $u \in C^2[x_0, X]$, то локалната грешка на апроксимация на оператора $L = \frac{d}{dx}$ с диференчния оператор L_h , дефиниран чрез (20), е от първи ред.

Приближените методи, дефинирани чрез (15)-(17), имат следния общ вид:

$$(21) \quad (L_h y_h)_i = (\theta_h(y_h))_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

където $(\theta_h(y_h))_i$ е някаква апроксимация на дясната част $f(x, u(x))$ във възела x_i . Уравнението (21) се нарича *диференчно уравнение*. За приближените методи (15), (16) и (17) имаме съответно:

$$(22) \quad (L_h y_h)_i \equiv \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \equiv (\theta_h(y_h))_i,$$

$$(23) \quad (L_h y_h)_i \equiv \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_{i+1}, y_{i+1}) \equiv (\theta_h(y_h))_i,$$

$$(24) \quad (L_h y_h)_i \equiv \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \equiv (\theta_h(y_h))_i.$$

Диференчният метод, дефиниран чрез (22), се нарича *явен метод на Ойлер*, чрез (23) - *неявен метод на Ойлер*, а чрез (24) - *подобрен метод на Ойлер*.

Определение. Разликата

$$(25) \quad \psi_i = (L_h u_h)_i - (\theta_h(u_h))_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

се нарича *грешка на апроксимацията* на диференциалното уравнение (1) с диференчното уравнение (21) във възела $x_i \in \bar{\omega}_h$ (*локална грешка на апроксимацията*), пресметната за точното решение на задача (1)-(2).

Дефинираме мрежова С-норма на y_h ,

$$\| y_h \| = \max_{0 \leq i \leq n} | y_i |,$$

аналог на равномерната норма $\| u \| = \max_{x \in [x_0, X]} | u(x) |$, която наричаме *мрежова С-норма*.

Дефинираме *мрежовата* функция $\psi_h = \{ \psi_i \}_{i=0}^n$ - *грешка на апроксимацията върху мрежата* и нейната мрежова С-норма

$$\| \psi_h \| = \max_{0 \leq i \leq n} | \psi_i |.$$

Апроксимация, устойчивост по начални данни, монотонност и сходимост на явния метод на Ойлер

1. Грешка на апроксимацията.

От (25) и (22) имаме

$$\psi_i = (L_h u_h)_i - (\theta_h(u_h))_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - f(x_i, u_i) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - u'_i = \frac{h}{2} u''(x_i + \theta h), \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

ако $u(x) \in C^2[x_0, X]$. Нека $\max_{x \in [x_0, X]} |u''(x)| = M_2$. Тогава

$$(26) \quad \|\psi_h\| = \max_{0 \leq i \leq n} |\psi_i| \leq \frac{h}{2} M_2 = O(h).$$

Следователно локалната грешка на апроксимация и C -нормата на грешката на апроксимация върху мрежата са от първи ред по отношение на h .

2. Устойчивост по начални данни и монотонност.

Изследваме ги върху моделната задача

$$(27) \quad \begin{cases} u' = \lambda u, & \lambda < 0, \quad x_0 < x \leq X, \\ u(x_0) = u_0. \end{cases}$$

Имаме

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \lambda y_i,$$

$$y_{i+1} = (1 + h\lambda) y_i = (1 + h\lambda)^2 y_{i-1} = \dots = (1 + h\lambda)^{i+1} y_0.$$

За да бъде изпълнено неравенство, аналогично на (10), т.е. неравенството

$$|y_i| \leq |y_0| \quad \text{за } i = 0, 1, \dots, n,$$

е достатъчно

$$(28) \quad |1 + h\lambda| \leq 1, \quad -1 \leq 1 + h\lambda \leq 1.$$

Дясното неравенство е изпълнено за всяко h , а лявото - при следното условие за стъпката h :

$$(29) \quad h \leq \frac{2}{-\lambda}.$$

Казва се, че явният метод на Ойлер е *условно абсолютно устойчив* – абсолютно устойчив при изпълнение на условието (29).

За да бъдат изпълнени неравенства, аналогични на (12), а именно

$$y_i \geq 0 \quad \text{при } y_0 \geq 0, \quad y_i \leq 0 \quad \text{при } y_0 \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

достатъчно е

$$(30) \quad 1 + h\lambda \geq 0, \quad h \leq \frac{1}{-\lambda}.$$

Казва се, че явният метод на Ойлер е *условно монотонен* - монотонен при изпълнение на условието (30). Да отбележим, че условието за монотонност (30) е по-силно от условието за устойчивост (29).

3. Сходимость и оценка на грешката.

Дефинираме *мрежова функция*:

$$(31) \quad z_h = u_h - y_h, \quad z_i = u_i - y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

която се нарича *грешка* на диференчния метод.

Определение. Ако

$$\|z_h\| = \max_{0 \leq i \leq n} |z_i| \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

казва се, че диференчният метод е *сходящ* - има сходимост на приближеното решение към точното. Ако $\|z_h\| = O(h^m)$, казва се, че сходимостта (скоростта на сходимост) е от ред m .

Да изследваме сходимостта на явния метод на Ойлер. Приближеното решение удовлетворява (22), а поради грешката на апроксимация ψ_i и *грешките* δ_i от *закръгляванията на всяка стъпка*, мрежовата функция u_h , съответстваща на точното решение $u(x)$, ще удовлетворява диференчните уравнения

$$(32) \quad \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = f(x_i, u_i) + \psi_i + \delta_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Изваждаме уравнението (22) от (32) и за грешката z_i получаваме диференчната задача

$$(33) \quad \frac{z_{i+1} - z_i}{h} = f(x_i, u_i) - f(x_i, y_i) + \psi_i + \delta_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$(34) \quad z_0 = u_0 - y_0.$$

Тогава $z_{i+1} = z_i + h[f(x_i, u_i) - f(x_i, y_i)] + h\psi_i + h\delta_i$.

Въвеждаме означението $A_i = h|\psi_i| + h|\delta_i|$. Като използваме условието на Липшиц (3) за f , получаваме

$$\begin{aligned} |z_{i+1}| &\leq |z_i| + hK|z_i| + A_i = (1+hK)|z_i| + A_i = (1+hK)^2|z_{i-1}| + (1+hK)A_{i-1} + A_i \leq \dots \leq \\ &\leq (1+hK)^{i+1}|z_0| + \sum_{j=0}^i (1+hK)^j A_{i-j}. \end{aligned}$$

Нека $|\psi_i| \leq \psi$, $|\delta_i| \leq \delta$, $i = 0, 1, \dots, n$, и да използваме неравенството $1+x \leq e^x$:

$$|z_{i+1}| \leq e^{Kh(i+1)}|z_0| + h(\psi + \delta) \frac{(1+hK)^{i+1} - 1}{1+hK-1} \leq e^{K(x_{i+1}-x_0)}|z_0| + (\psi + \delta) \frac{e^{K(x_{i+1}-x_0)} - 1}{K}.$$

Следователно

$$(35) \quad |u_i - y_i| \leq e^{K(x_i-x_0)}|u_0 - y_0| + (\psi + \delta) \frac{e^{K(x_i-x_0)} - 1}{K}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Нека $u_0 = y_0$ и $\delta = 0$. Тогава при всяко фиксирано $x_i \in \bar{\omega}_h$

$$|u_i - y_i| \leq \psi \frac{e^{K(x_i-x_0)} - 1}{K} = O(h) \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0 \text{ и следователно}$$

$$(36) \quad \|u_h - y_h\| = \max_{0 \leq i \leq n} |u_i - y_i| \leq \frac{e^{K(X-x_0)} - 1}{K} \frac{M_2}{2} h = Ch.$$

И така, ако функцията $f(x, u)$ удовлетворява условието на Липшиц (3), $u \in C^2[x_0, X]$ и ако предположим, че грешката на началните данни е нула и не се правят грешки от закръгляване, то имаме сходимост на приближеното решение към точното и сходимостта е от първи ред. Да обърнем внимание обаче, че константата C зависи от дължината на интервала $[x_0, X]$, от M_2 и от K .

Нека сега $y_0 \neq u_0$ и $\delta \neq 0$. Както се вижда от (35), при всяко фиксирано $x_i \in \bar{\omega}_h$ грешката $|u_i - y_i|$ остава ограничена, но при $X \rightarrow \infty$ тя расте експоненциално по X .

Както всяка теоретична оценка, оценките (35) и (36) са завишени и съдържат предварително неизвестна информация за търсеното решение. Те обаче дават информация за източниците на реалната грешка в числените резултати. По-нататък ще се запознаем с метода на Рунге за практическа оценка на грешката.

Апроксимация, устойчивост по начални данни и монотонност на неявния метод на Ойлер

1. Грешка на апроксимацията.

От (25) и (23) имаме

$$\begin{aligned} \psi_i &= (L_h u_h)_i - (\theta_h(u_h))_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - f(x_{i+1}, u_{i+1}) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - u'_{i+1} = \\ &= \frac{1}{h} \left(u_i + hu'_i + \frac{h^2}{2} u''(x_i + \theta_1 h) - u_i \right) - (u'_i + hu''(x_i + \theta_2 h)) = \\ &= \frac{h}{2} u''(x_i + \theta_1 h) - hu''(x_i + \theta_2 h) = O(h), \quad 0 \leq \theta_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

ако $u(x) \in C^2[x_0, X]$. Нека $\max_{x \in [x_0, X]} |u''(x)| = M_2$. Тогава

$$\|\psi_h\| = \max_{0 \leq i \leq n} |\psi_i| \leq \frac{3h}{2} M_2 = O(h).$$

Следователно локалната грешка на апроксимация и C -нормата на грешката на апроксимация върху мрежата на неявния метод на Ойлер са от първи ред по отношение на h .

2. Устойчивост по начални данни и монотонност.

Изследваме ги върху моделната задача (27). Имаме

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \lambda y_{i+1}, \quad y_{i+1} = \frac{1}{1 - \lambda h} y_i.$$

За да бъде изпълнено неравенството

$$|y_i| \leq |y_0| \quad \text{за } i = 0, 1, \dots, n,$$

е достатъчно

$$(37) \quad \left| \frac{1}{1 - \lambda h} \right| \leq 1.$$

Тъй като $\lambda < 0$, неравенството (37) е изпълнено за всяко h , т. е. неявният метод на Ойлер е *абсолютно устойчив*.

За да бъдат изпълнени неравенства, аналогични на (12) е достатъчно да е изпълнено неравенството

$$(38) \quad \frac{1}{1 - \lambda h} > 0.$$

Тъй като $\lambda < 0$, неравенството (38) е изпълнено за всяко h , т. е. неявният метод на Ойлер е *монотонен* за всяко h .

Апроксимация, устойчивост по начални данни и монотонност на подобрения метод на Ойлер

1. Грешка на апроксимацията.

От (24) и (25) получаваме:

$$\begin{aligned}\psi_i &= (L_h u_h)_i - (\theta_h(u_h))_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{u'_{i+1} + u'_i}{2} \\ &= \frac{1}{h} \left(u_i + h u'_i + \frac{h^2}{2} u''_i + \frac{h^3}{6} u'''(x_i + \theta_1 h) - u_i \right) - \frac{1}{2} \left(u'_i + h u''_i + \frac{h^2}{2} u'''(x_i + \theta_2 h) + u'_i \right) = \\ &= \frac{h^2}{6} u'''(x_i + \theta_1 h) - \frac{h^2}{4} u'''(x_i + \theta_2 h) = O(h^2), \quad 0 \leq \theta_i \leq 1, \quad i = 1, 2,\end{aligned}$$

ако $u \in C^3[x_0, X]$. Нека $M_3 = \max_{x \in [x_0, X]} |u'''(x)|$. Тогава

$$\|\psi_h\| = \max_{0 \leq i \leq n} |\psi_i| \leq \frac{5M_3}{12} h^2.$$

Да отбележим, че и тук, както при явния метод на Ойлер, грешката на апроксимация на диференциалния оператор $\frac{d}{dx}$ с диференчния е от първи ред по h .

По-високият ред на апроксимация на диференциалното уравнение с диференчното се постига благодарение на различната апроксимация на дясната част f .

2. Устойчивост по начални данни и монотонност.

Изследваме ги отново върху моделната задача (27). Имаме

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{2} (\lambda y_i + \lambda y_{i+1}), \quad y_{i+1} = \frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h} y_i.$$

За да бъде изпълнено неравенството

$$|y_i| \leq |y_0| \quad \text{за } i = 0, 1, \dots, n,$$

е достатъчно

$$(39) \quad \left| \frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h} \right| \leq 1.$$

Неравенството (39) е еквивалентно на неравенствата $-1 \leq \frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h} \leq 1$. Тъй като

$\lambda < 0$, то $2 - \lambda h > 0$ и в последното неравенство можем да се освободим от знаменателя. Получаваме неравенствата

$$-2 + \lambda h \leq 2 + \lambda h \leq 2 - \lambda h.$$

Тези неравенства са изпълнени за всяка стойност на h и следователно подобреният метод на Ойлер е *абсолютно устойчив*.

За да бъдат изпълнени неравенства, аналогични на (12) е достатъчно

$$(40) \quad \frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h} > 0.$$

Тъй като $\lambda < 0$, неравенството (40) е еквивалентно на неравенството $2 + \lambda h > 0$, което е изпълнено за

$$(41) \quad h \leq -\frac{2}{\lambda},$$

т.е. подобреният метод на Ойлер е *условно монотонен* при условие, че стъпката h удовлетворява неравенството (41).

Методите на Ойлер - явен, неявен и подобрен, се получават и като частни случаи на *двата основни класа диференчни методи за решаване на задачата* (1), (2) - *едностъпкови и многостъпкови*. Както едните, така и другите биват *явни и неявни*.

Едностъпковите методи имат вида

$$(L_h y_h)_i \equiv \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \theta_i(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Ще изучим явните методи на Рунге - Кута. Съществуват още неявни и полуявни методи на Рунге - Кута [2], метод на Розенброк [3], които остават извън рамките на този курс.

Линейните многостъпкови методи имат вида

$$\frac{1}{h} \sum_{j=0}^k a_j y_{i+j} = \sum_{j=0}^k b_j f(x_{i+j}, y_{i+j}), \quad a_k \neq 0, \quad |a_0| + |b_0| \neq 0.$$

За да започне прилагането на k -стъпков метод са необходими k начални стойности - y_0, y_1, \dots, y_{k-1} , които трябва да бъдат намерени по друг метод.

При $b_k = 0$ методите са *явни*, а при $b_k \neq 0$ - *неявни*. Съществуват многостъпкови методи, в дясната част на които освен $f = u'$ се съдържат и производните от по-висок ред на u . Те имат вида

$$\frac{1}{h} \sum_{j=0}^k a_j y_{i+j} = \sum_{m=1}^l h^m \left(\sum_{j=0}^k b_{mj} y_{i+j}^{(m)} \right)$$

и в литературата са свързани с името на Обрешков [2], [3].

От многостъпковите методи ще изучим явните и неявни линейни методи.

Задачи

1. зад. Чрез интегриране в интервала $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ на уравнението (1) от задачата (1), (2) и прилагане към интеграла вдясно на квадратурната формула на Симпсън, да се получи диференчен метод за решаване на задачата (1), (2) и да се пресметне локалната му грешка на апроксимация.

Решение: Последователно получаваме

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, u(x)) dx,$$

$$u_{i+1} - u_{i-1} = \frac{2h}{6} [f(x_{i+1}, u(x_{i+1})) + 4f(x_i, u(x_i)) + f(x_{i-1}, u(x_{i-1}))] + O(h^5),$$

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \frac{1}{6} [f(x_{i+1}, u_{i+1}) + 4f(x_i, u_i) + f(x_{i-1}, u_{i-1})] + O(h^4).$$

Следователно диференчният метод е

$$\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = \frac{1}{6} [f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 4f(x_i, y_i) + f(x_{i-1}, y_{i-1})],$$

а локалната му грешка на апроксимация е $\psi_i = O(h^4)$, ако $u \in C^5[x_0, X]$.

2. зад. Разглеждаме задачата на Коши (1), (2). Ако $f(x, u)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ и $\frac{\partial f}{\partial u}(x, u)$ са дефинирани, неотрицателни и непрекъснати в цялата равнина, а $\{y_i\}_{i=0}^n$ са приближените стойности на решението съответно в точките $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, получени по явния метод на Ойлер, да се докаже, че $y_i \leq u(x_i)$ за $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Решение: От уравнение (1) чрез диференциране по x получаваме $u'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} f$. От условието на задачата следва, че $u'' \geq 0$ за всички стойности на x и u . По-нататък доказателството ще проведем по метода на математическата индукция. При $i=0$ имаме $y_0 = u_0$ и исканото неравенство е изпълнено. Да допуснем, че неравенството е изпълнено при $i=k$, т. е. $y_k \leq u(x_k)$. Ще докажем, че неравенството е изпълнено и при $i=k+1$, т. е. ще докажем, че $y_{k+1} \leq u(x_{k+1})$. Имаме последователно

$$\begin{aligned} y_{k+1} - u(x_{k+1}) &= y_k + hf(x_k, y_k) - u(x_k) - hu'(x_k) - \frac{h^2}{2!} u''(x_k + \theta h) = \\ &= (y_k - u(x_k)) + h(f(x_k, y_k) - f(x_k, u_k)) - \frac{h^2}{2!} u''(x_k + \theta h) \leq \\ &\leq h(f(x_k, y_k) - f(x_k, u_k)) \leq h \frac{\partial f}{\partial u}(x_k, y_k + \theta_1(y_k - u_k))(y_k - u_k) \leq 0, \\ &\theta, \theta_1 \in (0, 1). \end{aligned}$$