§ 21. ДИФЕРЕНЧНИ МЕТОДИ ЗА УРАВНЕНИЕТО НА СТРУНАТА

Постановка на диференциалната задача

Търси се функция $u = u(x,t)$, която удовлетворява диференциалното уравнение

(1) $$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T,$$

началните условия

(2) $$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l,$$

(2*) $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \phi(x), \quad 0 \le x \le l,$$

граничните условия

(3) $$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T,$$

и условията за съгласуваност:

(4) $$\varphi(0) = \mu_1(0), \quad \varphi(l) = \mu_2(0), \quad \phi(0) = \mu_1'(0), \quad \phi(l) = \mu_2'(0).$$

При $f(x,t) \equiv 0$ уравнението (1) описва свободните трептения на еластична струна с дължина l, при $f(x,t) \ne 0$ - принудените трептения на струната; $u(x,t)$ е напречното преместване на струната, c е скоростта на разпространението на трептенията; $\varphi(x)$ и $\phi(x)$ задават съответно началното отклонение и началната скорост на струната. Граничните условия (3) задават законите за движение на краищата на струната ($\mu_1(t) \equiv \mu_2(t) \equiv 0$ означава неподвижни краища).

Задачата (1), (2), (2*), (3) се нарича *смесена* (*начално-гранична*) задача, а задачата (1), (2), (2*) при $-\infty < x < \infty$ – *задача на Коши*. Вместо условията (3) могат да се поставят и по-общи

(3*) $$\begin{aligned} &\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) + \beta_1 u(0,t) = \mu_1(t), \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0, \\ &\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) + \beta_2 u(l,t) = \mu_2(t), \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 > 0, \ \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0. \end{aligned}$$

Правите с уравнения

(5) $$x \pm ct = \text{const}$$

се наричат *характеристики*. През всяка точка (x,t) минават по две характеристики от семейството (5).

Да разгледаме *задачата на Коши* за уравнението (1) при $f(x,t) \equiv 0$:

(6) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

и да потърсим решение от вида

$$u(x,t) = v_1(x - ct) + v_2(x + ct).$$

От началните условия (2) и (2*) получаваме

(7) $$u(x,0) = v_1(x) + v_2(x) = \varphi(x),$$

(8) $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -c\, v_1'(x) + c\, v_2'(x) = \phi(x).$$

Интегрираме (8) в граници от x_0 до x:

$$-c(v_1(x)-v_1(x_0))+c(v_2(x)-v_2(x_0))=\int_{x_0}^{x}\phi(s)\,ds$$

или

(9) $$-cv_1(x)+cv_2(x)=C+\int_{x_0}^{x}\phi(s)\,ds,\quad C=v_2(x_0)-v_1(x_0)$$

От (7) и (9) получаваме

$$v_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x}\phi(s)\;ds+\frac{C}{2c},$$

$$v_1(x)=\varphi(x)-v_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{C}{2c}-\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x}\phi(s)\,ds\,.$$

Тогава

$$u(x,t)=v_1(x-ct)+v_2(x+ct)=$$
$$=\frac{1}{2}[\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)]-\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct}\phi(s)\,ds+\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct}\phi(s)\,ds,$$

(10) $$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\phi(s)\,ds\,.$$

Това е известната *формула на Даламбер* за решението на задачата на Коши (6),(2), (2*). Тя показва, че решението в точката (x_0,t_0) се определя от началните данни в интервала $[x_0-c\,t_0, x_0+c\,t_0]$. Триъгълникът, определен от характеристиките през точката (x_0,t_0) и абсцисната ос, се нарича *триъгълник на определеност на диференциалната задача* (6), (2), (2*) както и на (1), (2), (2*) или (1), (2), (2*), (3).

Диференчна схема

В областта $\overline{\Omega}=[0,l]\times[0,T]$ въвеждаме мрежа $\overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau$,

$$\overline{\omega}_h=\{x_i=ih,\,h=\frac{l}{n},\,i=0,1,\ldots,n\},\quad \overline{\omega}_\tau=\{t_j=j\,\tau\,,\,\tau=\frac{T}{m}\,,\,j=0,1,\ldots,m\}.$$

За апроксимация на вторите производни по t и по x използваме съответно:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{(i,j)}=\frac{u_i^{j+1}-2u_i^j+u_i^{j-1}}{\tau^2}-\frac{\tau^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i,\eta)\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(i,j)}=\frac{u_{i+1}^{j}-2u_i^j+u_{i-1}^{j}}{h^2}-\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi,t_j)\,,$$

ако $u(x,t)\in C^4(\Omega)$. Така за апроксимиране на уравнението (1) във вътрешните възли на мрежата използваме диференчните уравнения

$$\frac{y_i^{j+1}-2y_i^j+y_i^{j-1}}{\tau^2}-c^2\,\frac{y_{i+1}^{j}-2y_i^j+y_{i-1}^{j}}{h^2}=f_i^j,\quad i=1,2,\ldots,n-1\,,\quad j=1,2,\ldots,m-1\,,$$

чиято локална грешка на апроксимация е $O(h^2+\tau^2)$.

За апроксимиране на началното условие (2*) с локална грешка на апроксимация $O(\tau^2)$ използваме познатия начин за повишаване реда на апроксимация:

$$\theta_i = \frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} - \phi_i = \frac{1}{\tau}\left(u_i^0 + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) + O(\tau^3) - u_i^0 \right) - \phi_i =$$

$$= \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, 0) + O(\tau^2) = \frac{\tau}{2}\left(\ c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, 0) + f_i^0 \ \right) + O(\tau^2) =$$

$$= \frac{\tau}{2}\left(c^2 \frac{u_{i+1}^0 - 2u_i^0 + u_{i-1}^0}{h^2} + O(h^2) + f_i^0 \right) + O(\tau^2) .$$

Следователно диференчното уравнение

$$\frac{y_i^1 - \varphi_i}{\tau} - \frac{\tau}{2}\left(c^2 \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} + f_i^0 \right) = \phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 ,$$

апроксимира началното условие (2*) с грешка $O(\tau^2 + \tau h^2)$.

И така диференчната схема е :

(11) $$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{\tau^2} - c^2 \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} = f_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 , \quad j = 1, 2, \dots, m-1$$

(12) $$y_i^0 = \varphi_i \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

(13) $$y_i^1 = \varphi_i + \frac{\tau^2 c^2}{2h^2}\left(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}\right) + \frac{\tau^2}{2} f_i^0 + \tau\phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 ,$$

(13) $$y_0^j = \mu_1^j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad y_n^j = \mu_2^j, \quad j = 1, 2, \dots, m .$$

Това е явна трислойна схема по шаблона „кръст”.

Да запишем уравненията (11) и (13) в *каноничен вид*:

(15) $$y_i^{j+1} = 2(1-\gamma^2) y_i^j + \gamma^2 (y_{i+1}^j + y_{i-1}^j) - y_i^{j-1} + \tau^2 f_i^j ,$$

(16) $$y_i^1 = (1-\gamma^2)\varphi_i + \frac{\gamma^2}{2}(\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1}) + \frac{\tau^2}{2} f_i^0 + \tau\phi_i, \quad \gamma = \frac{\tau\ c}{h} .$$

Както се вижда, за уравнението (15) условието за положителност на коефициентите не е изпълнено заради $B(x, x_{i,j-1}) = -1$. За положителност на коефициентите пред y_i^j и φ_i трябва да имаме

(17) $$\gamma = \frac{c\tau}{h} \le 1 .$$

Следователно за схемата (11)-(14) принципът за максимума не е в сила и не можем да го използваме, за да докажем устойчивост в мрежова норма $C(\overline{\omega}_{h\tau})$. Също така схемата не е монотонна. Все пак условието $\tau \le h/c$, както ще видим, се получава и по метода на хармониките за изследване на устойчивостта на хомогенното диференчно уравнение (11).

Преди това да обърнем внимание на следното. При пресмятане на $y_{h\tau}$ в точка (x_i, t_j) участват стойностите на $\varphi(x)$ в интервала $I_1 = [x_i - jh, x_i + jh]$. Триъгълникът, определен от точките (x_i, t_j), $(x_i - jh, 0)$, $(x_i + jh, 0)$, се нарича *триъгълник на определеност на диференчната задача.* Характеристиките пресичат абсцисната ос в точките $x_i - ct_j = x_i - cj\tau = x_i - \gamma jh$ и $x_i + ct_j = x_i + cj\tau = x_i + \gamma jh$. Ясно е, че ако $\gamma > 1$, то $I_1 = [x_i - jh, x_i + jh] \subset I_2 = [x_i - \gamma jh, x_i + \gamma jh]$ и следователно триъгълникът на определеност на диференциалната задача ще съдържа триъгълника на определеност на диференчната задача. В този случай приближеното решение в точка (x_i, t_j) няма да използва всички начални данни, които определят точното решение, и сходимост на приближеното решение към точното не може да се очаква. От тези съображения мрежата трябва да се избира така, че $\tau \le h/c$.

Изследване на устойчивостта по метода на хармониките

Нека $y_k^j = q^j e^{ikh\theta}$ и да го заместим в хомогенното уравнение (11). Последователно получаваме

$$\frac{q^{j+1} - 2q^j + q^{j-1}}{\tau^2} e^{ikh\theta} - c^2 q^j \frac{e^{i(k+1)h\theta} - 2e^{ikh\theta} + e^{i(k-1)h\theta}}{h^2} = 0,$$

$$q^2 - 2q + 1 - \gamma^2 q(2\cos h\theta - 2) = 0,$$

$$q^2 - 2q + 4\gamma^2 \sin^2\frac{h\theta}{2} q + 1 = 0,$$

(18) $$q^2 - 2\left(1 - 2\gamma^2 \sin^2\frac{h\theta}{2}\right) q + 1 = 0.$$

За да бъдат корените q_1 и q_2 на квадратното уравнение $aq^2 + bq + c = 0$ по модул по-малки или равни на 1, е необходимо и достатъчно

$$c \le a,$$

$$|b| \le a + c.$$

За уравнението (18) имаме $c = a = 1$, а второто неравенство дава

$$2\left|1 - 2\gamma^2 \sin^2\frac{h\theta}{2}\right| \le 2,$$

$$-1 \le 1 - 2\gamma^2 \sin^2\frac{h\theta}{2} \le 1.$$

Дясното неравенство е изпълнено при всяко γ , а лявото става

$$2\gamma^2 \sin^2\frac{h\theta}{2} \le 2,$$

което е изпълнено при $\gamma \le 1$.

Може да се докаже, че условието $\gamma \le 1$ е достатъчно за устойчивост по начални данни в специална (енергетична) норма.

Задачи

1. зад. Да се реши задачата на Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,$$

в областта, определена от характеристиките, построени в точката $M(1,3)$ и оста Ox, като се използва квадратна мрежа със стъпки $h = \tau = 1$.

Решение. Характеристиките през точката $M(1,3)$ са с уравнения $h_1 : x = t - 2$ и $h_2 : x = -t + 4$. Тогава областта, в която се търси решението, е характеристичният триъгълник с върхове $M(1,3)$, $A(-2,0)$ и $B(4,0)$.

От първото начално условие имаме $y_{-2}^0 = y_{-1}^0 = y_0^0 = y_1^0 = y_2^0 = y_3^0 = y_4^0 = 0$.

За апроксимиране на второто начално условие ще въведем фиктивен ред с номер (-1). Тогава правим апроксимация на диференциалното уравнение на нулевия слой по времето и на производната във второто начално условие с централна разлика и от получените две апроксимации изключваме стойностите на приближеното решение на фиктивния слой. Имаме

$$\frac{y_i^1 - 2y_i^0 + y_i^{-1}}{1^2} = \frac{y_{i-1}^0 - 2y_i^0 + y_{i+1}^0}{1^2} + 12x_i,$$

$$\frac{y_i^1 - y_i^{-1}}{2.1} = 0,$$

и следователно

$$y_i^1 = 6x_i.$$

Тогава за стойностите на приближеното решение в точките от първия слой на мрежата получаваме $y_{-1}^1 = -6, \quad y_0^1 = 0, \quad y_1^1 = 6, \quad y_2^1 = 12, \quad y_3^1 = 18$.

От апроксимацията на уравнението при $j \geq 1$ имаме

$$\frac{y_i^{j+1} - 2y_i^j + y_i^{j-1}}{1^2} = \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{1^2} + 12x_i,$$

и следователно

$$y_i^{j+1} = y_{i-1}^j + y_{i+1}^j - y_i^{j-1} + 12x_i.$$

При $j = 1$ получаваме $y_0^2 = 0, \quad y_1^2 = 24, \quad y_2^2 = 48$, а при $j = 2$ имаме $y_1^3 = 54$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Т. Генчев, Обикновени диференциални уравнения. Унив. изд „Св. Кл. Охридски", 1991.**

2. **Х. Щетер, Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений. Мир, Москва, 1978.**

3. **E. Hairer, S. P. Norsett, G. Wanner, Solving Ordinary Differential Equations. Springer Verlag, 1987.**

4. **А. А. Самарский, А. В. Гулин, Численные методи. М., Наука, !989.**

5. **Б. Сендов, В. Попов, Числени методи. Част 1, Унив. изд. „Св. Кл. Охридски", 1996.**

6. **Б. Сендов, В. Попов, Числени методи. Част 2, София, Наука и изкуство, 1978.**

7. **Б. Боянов, Лекции по числени методи. Дарба, София,1998.**