Глава 3. ВАРИАЦИОННИ МЕТОДИ ЗА РЕШАВАНЕ НА ОПЕРАТОРНИ УРАВНЕНИЯ

§ 12. ПОСТАНОВКА НА ВАРИАЦИОННАТА ЗАДАЧА. МЕТОД НА РИТЦ. СХОДИМОСТ

Същността на вариационните методи за решаване на уравнения се състои в заменянето на задачата за намиране на решение на дадено уравнение със задачата за минимизиране на някакъв функционал.

Преди да изложим метода на Ритц, ще припомним някои основни понятия и факти от линейната алгебра и математическия анализ.

Нека H е непразно множество. Елементите му ще означаваме с малките букви на латинската азбука, а реалните числа – с малките букви от гръцката азбука.

Определение. Казваме, че H е **реално линейно векторно пространство**, ако на всеки два елемента $u, v \in H$ е съпоставен трети, наречен тяхна сума $u+v \in H$ и на всеки елемент u и всяко реално число λ е съпоставен елемент $\lambda u \in H$, така, че са изпълнени следните равенства:

1) $u + v = v + u$ (комутативност);
2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (асоциативност);
3) $\exists\, \vartheta \in \mathrm{H}:\ u + \vartheta = \vartheta + u = u$, $\forall u \in H$ (съществуване на нулев елемент);
4) $\forall u \in H \quad \exists (-u) \in H: \quad u + (-u) = (-u) + u = \vartheta$ (съществуване на противоположен елемент за всеки елемент от пространството);
5) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ (дистрибутивност);
6) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ (дистрибутивност);
7) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$;
8) $1.u = u$.

Определение. Казваме, че H е дефинирано **скаларно произведение** $(.,.)$, ако на всеки два елемента $u, v \in H$ е съпоставено реално число $(u, v) \in R$, такова че

1) $(u, v) = (v, u)$;
2) $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$;
3) $(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$;
4) $(u, u) \ge 0$, като равенството на нула е изпълнено само ако $u = \vartheta$.

Всяко скаларно произведение поражда **норма**, която се задава с формулата $\| u \| = (u, u)^{1/2}$ и притежава следните свойства:

1) $\| u \| \ge 0$, като равенството на нула е изпълнено само ако $u = \vartheta$;
2) $\| \lambda u \| = | \lambda | . \| u \|$;
3) $\| u + v \| \le \| u \| + \| v \|$.

Всяка норма поражда метрика (разстояние):

$$\rho(u, v) = \| u - v \|.$$

В сила е **неравенството на Коши-Буняковски-Шварц:**

$$|(u, v)| \le \| u \| . \| v \|.$$

Определение. Казваме, че пространството H е **безкрайномерно**, ако за всяко естествено число $n \in N$ в H могат да се намерят n линейно независими елемента.

Определение. Казваме, че редицата $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ е **фундаментална**, ако за всяко положително число $\varepsilon > 0$ може да се намери число ν, такова, че щом $n, m > \nu$ да следва неравенството $\| x_m - x_n \| < \varepsilon$.

Както е известно, всяка сходяща редица е фундаментална. Обратното не винаги е вярно.

Определение. Казваме, че пространството H е **пълно,** ако всяка фундаментална редица от негови елементи е сходяща и границата й е елемент от H.

Определение. Казваме, че H е **хилбертово пространство**, ако Н е:

1) реално линейно векторно пространство с въведено в него скаларно произведение;

2) безкрайномерно;

3) пълно, относно метриката, породена от въведеното скаларно произведение.

Нека H е хилбертово пространство, а L е оператор, дефиниран в него: $L : H \to H$.

Определение. Казваме, че операторът L е линеен, ако:

1) $L(u+v) = Lu + Lv, \quad \forall u, v \in H$;

2) $L(\lambda u) = \lambda Lu, \quad \forall \lambda \in R$ и $\forall u \in H$.

Определение. Казваме, че операторът L е симетричен, ако

$(Lu, v) = (u, Lv)$ за $\forall u, v \in H$.

Определение. Казваме, че операторът L е положителен, ако

$(Lu, u) \geq 0$ за $\forall u \in H$ и $(Lu, u) = 0$ само ако $u = 0$.

Определение. Казваме, че операторът L е положително определен, ако съществува константа $\gamma > 0$ такава, че

$L(u, u) \geq \gamma(u, u)$, за $\forall u \in H$.

Ще отбележим, че всеки положително определен оператор е положителен, но обратното не винаги е вярно.

Постановка на вариационата задача

Нека u и f са елементи на хилбертовото пространство H, а L е линеен оператор в H. Задачата за решаване на уравнението

(1) $\quad Lu = f$

е еквиванентна на задачата за намиране минимума на функционала $I(u)$, дефиниран в H, ако са изпълнени условията:

а) ако u_0 е решение на уравнение (1), т.е. $Lu_0 = f$, то

(2) $\quad I(u_0) = \min_{u \in H} I(u)$;

б) ако u_0 минимизира $I(u)$ в H, т. е., изпълнено е (2), то $Lu_0 = f$.

На уравнението (1) могат да се съпоставят различни функционали.

Да разгледаме един елементарен пример. Нека u и f са реални числа, а L е умножение с реално число l, т.е. уравнението (1) е

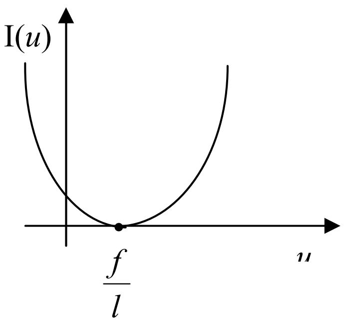
$$l\,u = f$$

с решение $u = \dfrac{f}{l}$. Възможни функционали са:

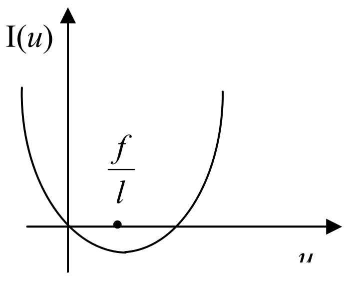
а) $I(u) = \left| l\,u - f \right|^2 = l^2u^2 - 2l\,u\,f + f^2$

б) $I(u) = l\,u^2 - 2f\,u$, ако $l > 0$.

Графики на (квадратните функции) $I(u)$ са показани на фиг.1, а), б).



фиг. 1 а)



фиг. 1 б)

В първия случай вариационният метод е методът на най-малките квадрати, във втория – методът на Ритц. Избирайки различни функционали и различни методи за приближеното им минимизиране (когато H е безкрайномерно, най-често минимумът може да се намери само приближено), получаваме различни вариационни методи.

Метод на Ритц

При метода на Ритц се минимизира функционала

(3) $\quad I(u) = (Lu, u) - 2(f, u)$.

Теорема 1. Ако L е симетричен и положителен в H, то задача (1) е еквивалентна на задачата за минимизиране на функционала (3) в H.

Доказателство. Нека $Lu_0 = f$, т.е. u_0 е решение на (1). Ще покажем, че $I(u_0) \le I(u)$ за $\forall\, u \in H$. Имаме

$I(u_0) = (Lu_0, u_0) - 2(f, u_0) = (Lu_0, u_0) - 2(Lu_0, u_0) = -(Lu_0, u_0)$, (сравнете с фиг.1 б).

$$I(u) = (Lu, u) - 2(f, u) = (Lu, u) - 2(Lu_0, u) + (Lu_0, u_0) - (Lu_0, u_0) =$$
$$= (Lu, u) - (Lu_0, u) - (Lu_0, u) + (Lu_0, u_0) + I(u_0) =$$
$$= (L(u - u_0), u) - (Lu_0, u - u_0) + I(u_0) = (L(u - u_0), u - u_0) + I(u_0)$$

(4) $\quad I(u) - I(u_0) = (L(u - u_0), u - u_0) \ge 0$,

понеже операторът L е положителен. Следователно, u_0 минимизира $I(u)$.

Обратно, нека $u_0 \in H$ и дава минимум на $I(u)$: $I(u_0) \le I(u)$ за $\forall\, u \in H$. Нека α е произволно реално число, z е произволен елемент на H и нека $u = u_0 + \alpha\, z \in H$. Тогава $I(u) = I(u_0 + \alpha\, z) \ge I(u_0)$ за $\forall\, z \in H$ и произволно α. Но

$$I(u) = (L(u_0 + \alpha\, z), u_0 + \alpha\, z) - 2(f, u_0 + \alpha\, z) =$$

$$(Lu_0,u_0)+2\alpha(Lu_0,z)+\alpha^2(Lz,z)-2(f,u_0)-2\alpha(f,z)=$$
$$I(u_0)+2\alpha[(Lu_0,z)-(f,z)]+\alpha^2(Lz,z).$$

За да имаме $I(u)\ge I(u_0)$, трябва

$$\alpha^2(Lz,z)+2\alpha[(Lu_0,z)-(f,z)]\ge 0, \text{ за } \forall\alpha\in R,\ \forall z\in H.$$

Поради произволността на α (положително, отрицателно, голямо, малко) това неравенство е изпълнено само ако

(5) $\quad (Lu_0,z)=(f,z), \qquad \forall z\in H.$

Действително, нека:

а) $\alpha>0$. Като разделим на α, получаваме

$$\alpha(Lz,z)+2(Lu_0-f,z)\ge 0, \quad \text{за } \forall\alpha>0.$$

При $\alpha\to 0$ имаме $(Lu_0-f,z)\ge 0$.

б) $\alpha<0$. Делим на α:

$$\alpha(Lz,z)+2(Lu_0-f,z)\le 0, \quad \text{за } \forall\alpha<0.$$

При $\alpha\to 0$ имаме $(Lu_0-f,z)\le 0$.

Следователно $(Lu_0-f,z)=0$ за $\forall z\in H$, а значи и за $z=Lu_0-f\in H$:

$$(Lu_0-f,Lu_0-f)=0, \text{ т.е. } Lu_0-f=0.$$

Уравнение (5) се нарича уравнение на Гальоркин.

Метод на Ритц за приближено минимизиране на функционала на Ритц

Използвайки симетричността и положителността на оператора L, да дефинираме нови скаларно произведение и норма:

$$(u,v)_L=(Lu,v), \quad \|u\|_L=\sqrt{(Lu,u)}.$$

Хилбертовото пространство с така дефинираните скаларно произведение и норма се нарича *енергетично пространство* и се бележи с H_L. Наименованието идва от вариационното смятане, където (Lu,u) се нарича енергия на оператора L, а съответните скаларно произведение и норма – *енергетично скаларно произведение* и *енергетична норма*.

Нека в H_L е дадена линейно независима пълна система от функции $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n,\dots$. Системата $\{\varphi_i\}$ се нарича пълна в H_L, ако за $\forall v\in H_L$ и за $\forall\varepsilon>0$, съществува $n=n(\varepsilon)$ и числа $a_1,a_2,\dots,a_n$ такива, че

$$(L(v-\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i),(v-\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i))=\left\|v-\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i\right\|_L^2<\varepsilon,$$

т.е. ако всеки елемент v може да се приближи с произволна точност с линейна комбинация на функциите от тази система.

Да означим с H_n крайномерното подпространство на H_L, породено от линейно независимите функции $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$:

$$H_n=\left\{v_n : v_n=\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i\right\}\subset H_L.$$

Функциите $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ се наричат *базисни (координатни)* функции.

Методът на Ритц за приближено минимизиране на функционала на Ритц (3) се състои в това, че минимумът се търси в H_n вместо в H. Именно, функцията u_n, минимизираща $I(u)$ в H_n, се търси във вида

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i \, .$$

За определяне на коефициентите a_i, $i = \overline{1,n}$, пресмятаме $I(u_n)$:

$$I(u_n) = (L\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i, \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i) - 2(f, \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j (L\varphi_i, \varphi_j) - 2\sum_{i=1}^{n} a_i (f, \varphi_i) = \Phi(a_1, a_2, \dots, a_n) \, .$$

Необходимото условие за минимум на $I(u_n)$ като функция на n променливи $\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ е

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0, \quad i = \overline{1,n} \, ,$$

т. е.

(6) $$\sum_{j=1}^{n} a_j (L\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_i), \quad i = \overline{1,n} \, .$$

Системата уравнения (6) (*система на Ритц*) има симетрична неособена матрица. Нейната детерминанта е детерминанта на Грам на линейно независимите функции $\varphi_i \in H_L$, $i = \overline{1,n}$. Следователно системата на Ритц има единствено решение $(a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$. Тогава

$$u_n^* = \sum_{i=1}^{n} a_i^* \varphi_i$$

е такова, че

(7) $$I(u_n^*) = \min_{u_n \in H_n} I(u_n) \, .$$

Възниква въпросът – колко близко е u_n^* до u_0?

Сходимост на метода на Ритц

Сходимост в H_L. Ще получим оценка за $\| u_n^* - u_0 \|_L$. За целта ще пресметнем първо $I(u_n^*) - I(u_0)$.

Нека $\varepsilon > 0$. Щом $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ е пълна система в H_L, то $\exists n = n(\varepsilon)$ и елемент $\overline{u}_n \in H_n$, приближаващ решението u_0 на уравнение (1) в H_n. По формула (4)

(8) $$I(\overline{u}_n) - I(u_0) = (L(\overline{u}_n - u_0), \, \overline{u}_n - u_0) < \varepsilon \, .$$

Понеже u_n^* минимизира $I(u)$ в H_n, то

(9) $$I(u_n^*) \le I(\overline{u}_n) \, .$$

От (9) и (8) получаваме

$$I(u_n^*) \le I(\overline{u}_n) < I(u_0) + \varepsilon$$

т. е.,

$$I(u_n^*) - I(u_0) < \varepsilon \, ,$$

и пак по (4)

(10) $\quad I(u_n^*) - I(u_0) = (L(u_n^* - u_0), u_n^* - u_0) = \left\| u_n^* - u_0 \right\|_L^2 < \varepsilon$.

Следователно u_n^* клони към u_0 при $n \to \infty$ по норма на енергетичното пространство H_L.

Сходимост в H. За да докажем сходимост на метода на Ритц и в H, ще поставим още едно изискване към оператора L, а именно – да е положително определен. От (10) и положителната определеност на оператора L имаме:

$$I(u_n^*) - I(u_0) = (L(u_n^* - u_0), u_n^* - u_0) \geq \gamma \left\| u_n^* - u_0 \right\|^2 .$$

Следователно

$$\left\| u_n^* - u_0 \right\|^2 \leq \frac{1}{\gamma} \left\| u_n^* - u_0 \right\|_L^2 < \frac{\varepsilon}{\gamma} .$$

Така доказахме следната:

Теорема 2. Нека редицата $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ от линейно независими функции е пълна система в H_L, а операторът L е симетричен и положително определен. Тогава методът на Ритц дава редица $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, която е сходяща в H към решението u_0 на уравнението (1):

$$\left\| u_n^* - u_0 \right\| \to 0, \text{ при } n \to \infty .$$

Разглежданията, които направихме, са за случая, когато дефиниционната област на оператора L е цялото хилбертово пространство H, т. е. $D(L) = H$. Обикновено обаче $D(L) \subset H$, $D(L) \neq H$. Понякога в $D(L)$ може да няма елемент, за който $I(u)$ достига минимума си, понеже често $D(L)$ не е затворено. Да се върнем на примера, който разгледахме.

Нека сега l и f са рационални числа, $l \in Q$, $l > 0$, $f \in Q$. Тогава решението $u = \dfrac{f}{l}$ също е рационално число: $u \in Q$. Обаче $I(u) = l u^2 - 2 f u$ и за да търсим минимума на тази квадратна функция, трябва да я дефинираме в множеството R на реалните числа. Нещо повече, ако търсим минимума приближено, то приближената стойност на u може да не е рационално число. Затова в този случай трябва предварително да попълним множеството Q на рационалните числа до множеството R на реалните числа чрез границите на всевъзможните редици от рационални числа и тогава да търсим елемента u_n^*, който минимизира $I(u)$ в R; ако $u_n^* \notin Q$, то той, съгласно теорията, ще бъде реално число, близко до рационалното число $\dfrac{f}{l}$. За случая на общото уравнение (1) схемата на разсъждения е следната:

- в $D(L) \subset H$ въвеждаме скаларно произведение $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{L}} = (\boldsymbol{Lu}, \boldsymbol{v})$ и норма $\|u\|_L = \sqrt{(Lu, u)}$;
- попълваме $D(L)$ относно нормата $\|u\|_L$, т. е. получаваме H_L: $u \in H_L$, ако съществува редица $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n \in D(L)$ за $\forall n$, такава, че $\lim\limits_{n \to \infty} \|u_n - u\|_L = 0$;

Ако L е положително определен в $D(L)$, то

$$\|u\|^2 = (u, u) \leq \frac{1}{\gamma} (Lu, u) = \frac{1}{\gamma} \|u\|_L^2$$

и следователно $H_L \subset H$.

- в така полученото *енергетично пространство* H_L (по метода на Ритц в $H_n \subset H_L$) минимизираме функционала $I(u)$. Ако минимизиращата функция $u_n^* \notin D(L)$, то тя все пак ще бъде достатъчно близко до $u_0 \in D(L)$.

§ 13. МЕТОД НА РИТЦ ЗА ГРАНИЧНАТА ЗАДАЧА ЗА ОДУ ОТ II РЕД

Еквивалентна вариационна задача

Търси се функция $u = u(x) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1]$, която удовледотворява диференциалното уравнение

(1) $\quad Lu \equiv -\big(p(x)u'(x)\big)' + q(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1$

и следните гранични условия

(2) $\quad u(0) = \gamma_1, \quad p(1)u'(1) + \beta u(1) = \gamma_2$.

Нека $p(x) \ge p_0 > 0$, $q(x) \ge 0$ в $[0,\,1]$, $\beta \ge 0$, $p(x) \in C^1[0,1]$, $q(x)$, $f(x) \in C[0,1]$. Следователно операторът L е дефиниран в областта

$$D(L) = \left\{ v \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1],\, v(0) = \gamma_1,\, p(1)v'(1) + \beta v(1) = \gamma_2 \right\}.$$

Нека $H = L_2(0,1) = \left\{ v : \int_0^1 v^2\, dx < \infty \right\}$, $(u,v) = \int_0^1 uv\, dx$, $\|u\|^2 = \int_0^1 u^2 dx$.

Нека $u, v \in D(L)$ и да проверим дали L е симетричен:

$$\begin{aligned}
(Lu,v) &= \int_0^1 (-(pu')' + qu)v dx = \int_0^1 (pu'v' + quv)dx - pu'v\Big|_0^1 = \\
&= a(u,v) - p(1)\,u'(1)\,v(1) + p(0)\,u'(0)\,v(0) = \\
&= a(u,v) - v(1)[-\beta\, u(1) + \gamma_2] + p(0)\,u'(0)\,v(0) = \\
&= a(u,v) + \beta\, u(1)\,v(1) - \gamma_2\, v(1) + p(0)\,u'(0)\,\gamma_1,
\end{aligned}$$

където $a(u,v) = \int_0^1 (pu'v' + quv)dx$.

Ясно е, че (Lu,v) може да бъде равно на (u,Lv) само ако $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Следователно операторът L е симетричен в областта

(3) $\quad \widetilde{D}(L) = \left\{ v \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1],\, v(0) = 0,\, p(1)v'(1) + \beta v(1) = 0 \right\}.$

В $\widetilde{D}(L)$ имаме

(4) $\quad (Lu,v) = a(u,v) + \beta u(1)v(1) = (u,Lv)$,

(5) $\quad (Lu,u) = a(u,u) + \beta u^2(1) = \int_0^1 (pu'^2 + qu^2)\,dx + \beta u^2(1) \ge 0$,

при това $(Lu,u) = 0$ само ако $u' \equiv 0$ (понеже $q(x) \ge 0$, $\beta \ge 0$, $p(x) \ge p_0 > 0$). Тогава $u \equiv \text{const}$ и понеже в $\widetilde{D}(L)$ имаме $u(0) = 0$, то $u \equiv 0$. Следователно операторът L е и положителен в $\widetilde{D}(L)$.

Съгласно теорията задачата (1), (2′):

(2′) $\quad u(0) = 0, \quad p(1)u'(1) + \beta\, u(1) = 0$

е еквивалентна на задачата за минимизиране на *функционала на Ритц*

$$(6)\qquad I(u)=(Lu,u)-2(f,u)=\int_0^1(pu'^2+qu^2)\,dx+\beta u^2(1)-2\int_0^1 f\,u\,dx\,.$$

Аналогично се доказва, че операторът L е симетричен и положителен и в $\tilde{D}_1(L)=\left\{\ v\in C^2(0,1)\cap C[0,\ 1],\ v(0)=0,\ v(1)=0\right\}$.

Къде ще търсим минимума на функционала (6)?

Очевидно $\widetilde{D}(L)\subset L_2(0,1)=H$. Ще следваме схемата, описана в § 12, като за простота ще разгледаме случая $\beta=0$. Тогава:

1) В $\widetilde{D}(L)$ въвеждаме скаларно произведение $(u,v)_L=(Lu,v)=a(u,v)$ и норма $\|u\|_L^2=(Lu,u)=a(u,u)$,

$$(7)\qquad \|u\|_L^2=\int_0^1(pu'^2+qu^2)\,dx\,.$$

2) Попълваме $\widetilde{D}(L)$ с границите (в смисъла на (7)) на всевъзможните редици $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ от функции $u_n\in\widetilde{D}(L)$. Така получаваме пространството H_L.

3) Търсим минимума на $I(u)$ в $H_n\subset H_L$. За да конструираме H_n, да изясним най-напред структурата на H_L.

а) Нормата (7) е дефинирана за функции, които заедно с първите си (обобщени) производни са сумируеми в квадрат. Следователно при избора на $\varphi_i(x)\in H_L$ можем да се възползваме от тези по-ниски изисквания за гладкост в H_L: $v(x)\in L_2(0,1),\, v'(x)\in L_2(0,1)$.

б) Какви гранични условия удовлетворяват функциите $v\in H_L$?

б*) Ще покажем, че ако $v\in H_L$, то $v(0)=0$. Действително, щом $v\in H_L$, то съществува редица $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $v_k(x)\in\widetilde{D}(L)$, че $\|v-v_k\|_L\to 0$ при $k\to\infty$. Нека $v_m(x)$ и $v_n(x)$ са елементи на тази редица: $v_m(x)$, $v_n(x)\in\widetilde{D}(L)$, следователно $v_m(0)=v_n(0)=0$. Образуваме разликата $v_n(x)-v_m(x)$. За нея имаме

$$(8)\qquad |v_n(x)-v_m(x)|^2=\left|\int_0^x(v_n'(t)-v_m'(t))\,dt\right|^2\le\int_0^x|v_n'(t)-v_m'(t)|^2\,dt\le$$

$$\le\frac{1}{p_0}\int_0^1\left[p(t)|v_n'(t)-v_m'(t)|^2+q(t)(v_n(t)-v_m(t))^2\right]dt=\frac{1}{p_0}\|v_n(t)-v_m(t)\|_L^2\,.$$

Тъй като редицата $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ е сходяща в H_L, то $\|v_n(t)-v_m(t)\|_L^2\to 0$ при $m\to\infty$, $n\to\infty$, което означава и равномерна сходимост на $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ съгласно (8). Следователно нейната границата $v=\lim\limits_{k\to\infty}v_k(x)$ е непрекъсната функция и $v(0)=\lim\limits_{k\to\infty}v_k(0)=0$.

б**) Ако $v\in H_L$, то не винаги $v'(1)=0$. Ще го покажем с пример. Да разгледаме редицата

$$v_k(x)=\begin{cases}x\,, & ,\quad 0\le x\le 1-\dfrac{1}{k}\,,\\[2mm] \dfrac{k^2}{3}(1-x)^3-k(1-x)^2+1-\dfrac{1}{3k} & ,\quad 1-\dfrac{1}{k}\le x\le 1\,.\end{cases}$$

Очевидно $v_k(x) \in \widetilde{D}(L)$, границата на $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в H_L е $v(x) = x$:

$$\| v_k(x) - v(x)\|_L^2 = \int_0^1 \left[(v_k'(x) - v'(x))^2 + (v_k(x) - v(x))^2\right] dx \le \frac{M}{k}, \quad M = \text{const},$$

но $v'(1) = 1 \ne v_k'(1) = 0$.

И така, при граничен преход в H_L граничното условие от първи ред се запазва, а това от втори ред – не.

Гранични условия, които се запазват при граничния преход в H_L, се наричат ***главни гранични условия,*** тези, които не се запазват – ***естествени***.

Ще покажем, че ако минимизиращата функция $u(x) \in C^2(0,1) \cap C^1[0,1]$, тя удовлетворява и естественото гранично условие.

Нека ε е произволно число, $v(x) \in H_L$. Тогава

$$I(u) \le I(u + \varepsilon v) = \int_0^1 (p(u' + \varepsilon v')^2 + q(u + \varepsilon v)^2)\, dx - 2\int_0^1 f(u + \varepsilon v)\, dx =$$

$$= I(u) + 2\varepsilon \int_0^1 (pu'v' + quv - fv)\, dx + \varepsilon^2 \int_0^1 (pv^2 + qv^2)\, dx.$$

Но ε е произволно, следователно

$$0 = \int_0^1 (pu'v' + quv - fv)\, dx = \int_0^1 (-(pu')' + qu - f)v\, dx + p(1)u'(1)v(1) - p(0)u'(0)v(0) =$$

$$= p(1)u'(1)v(1).$$

Понеже $p(1) > 0$, а на $v(1)$ не се налагат никакви условия, то остава $u'(1) = 0$, т.е. минимизиращата функция удовлетворява и естественото гранично условие.

Вече е ясно как да избираме функциите $\varphi_i(x) \in H_n \subset H_L$:

- $\varphi_i(x) \in L_2(0,1)$, $\varphi_i'(x) \in L_2(0,1)$;
- $\varphi_i(x)$ трябва да удовлетворяват само главните гранични условия.

Същите свойства ще имат и елементите $u_n \in H_n$

(9) $$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x).$$

Определяне на коефициентите a_i

Заместваме (9) във функционала (6)

$$I(u_n) = \int_0^1 \left[p(x)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i'(x)\right)^2 + q(x)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x)\right)^2\right] dx - 2\int_0^1 f(x) \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x)\, dx =$$

$$= \Phi(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

От условията $\dfrac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0$, $i = \overline{1,n}$ получаваме системата на Ритц:

(10) $$\sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^1 (p(x)\varphi_j'(x)\varphi_i'(x) + q(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x))\, dx = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\, dx, \; i = \overline{1,n},$$

или записано компактно

(11) $$K a = F,$$

където

$$(12)\qquad K=\left\{k_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}\,,\quad k_{ij}=\int_0^1 (p(x)\varphi_j'(x)\varphi_i'(x)+q(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x))\,dx\,,$$

$$a=(a_1,a_2,\dots,a_n)^T\,,$$

$$(13)\qquad F=(f_1,f_2,\dots,f_n)^T\,,\quad f_i=\int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx\,.$$

Избор на функциите $\varphi_i(x)$

1. В класическия метод на Ритц функциите $\varphi_i(x)$ са алгебрични или тригонометрични полиноми. Ако операторът L е с дефиниционна област $\widetilde{D}(L)$, то можем да изберем $\varphi_i(x)=x^i\,,\, i=\overline{1,n}$**.** Нека в уравнението (1) имаме $p(x)=\text{const}=p>0\,,\; q(x)=\text{const},\quad q\ge 0$.
Тогава

$$k_{ij}=\int_0^1 (pix^{i-1}jx^{j-1}+qx^ix^j)\,dx=\frac{pij}{i+j-1}+\frac{q}{i+j+1}\,.$$

Матрицата $K=\left\{k_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$ на системата на Ритц е известната матрица на Хилберт, която е лошо обусловена. Причината е, че макар и теоретично линейно независими, функциите $\varphi_i(x)=x^i\,,\, i=\overline{1,n}$ практически са почти линейно зависими при големи n. Затова този избор е неудачен.

Ако операторът L е с дефиниционна област $\widetilde{D}_1(L)$, то можем да изберем $\varphi_i(x)=x^i(1-x)\,,\quad i=\overline{1,n}$.

Забележка. Ако интервалът, в който разглеждаме задачата (1), (2), е $[a,b]$, то $\varphi_i(x)=(x-a)^i$ за $\widetilde{D}(L)$ и $\varphi_i(x)=(x-a)^i(b-x)$ за $\widetilde{D}_1(L)$.

2. Нека $\varphi_i(x),\, i=\overline{1,n}$ са първите n собствени функции на оператора L, а λ_i - съответните им собствени стойности:

$$L\varphi_i(x)=\lambda_i\varphi_i(x)\,,\quad i=\overline{1,n}\,,$$

при това нека $(\varphi_i,\varphi_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1\,, & i=j\\ 0\,, & i\ne j.\end{cases}$

Тогава $(L\varphi_i,\varphi_j)=\lambda_i(\varphi_i,\varphi_j)=\begin{cases}\lambda_i\,, & i=j\\ 0\,, & i\ne j\,.\end{cases}$

Следователно системата на Ритц е:

$$\lambda_i a_i=(f,\varphi_i)\,,\quad i=\overline{1,n}\,,$$

$$a_i=\frac{(f,\varphi_i)}{\lambda_i}\,,\quad i=\overline{1,n}\,,\qquad u_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(f,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i(x)\,,\quad i=\overline{1,n}\,.$$

Задачата за намиране на собствени стойности и собствени функции на оператора L обаче е поне толкова трудна, колкото и задачата за решаване на уравнението $Lu=f$.

Разгледаните два случая са в известен смисъл крайни – най-лошият и най-добрият. В следващия параграф е изложен трети начин за избор на *базисните* функции, който съчетава добрите страни на тези два подхода.

Задачи

1. зад. Да се реши по метода на Ритц с две координатни функции, които са алгебрични полиноми, задачата

$$\begin{vmatrix} u''(x) = -6x, \quad x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{vmatrix}$$

Решение. За тази задача

$$Lu \equiv -u''(x) = 6x, \quad D(L) = \left\{ \ u \in C^2(0,1) \cap C[0,\ 1],\ u(0) = 0,\ u(1) = 0 \right\} \subset L_2(0,1)\,.$$

Тъй като в случая $p(x) \equiv 1 > 0, \quad q(x) \equiv 0$, то съгласно теорията, операторът L е симетричен, положителен и положително определен в $D(L)$ и

$$\left(Lu, v\right) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx\,.$$

Тогава задачата се свежда до минимизирането на функционала

$$I(u) = \int_0^1 \left[\left(u'(x)\right)^2 - 12xu(x) \right] dx$$

в

$$H_L = \left\{ u : u, u' \in L_2(0,1), u(0) = u(1) = 0 \right\}.$$

Приближено решение на тази минимизационна задача се търси в

$$H_2 = \left\{ u_2 = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2,\ a_i \in R \right\},$$

където

$$\varphi_1(x) = x(1-x), \quad \varphi_2(x) = x^2(1-x) \ \text{ и } \ \varphi_1'(x) = 1-2x, \quad \varphi_2'(x) = 2x - 3x^2\,.$$

Коефициентите a_1 и a_2 се намират от системата

$$\begin{vmatrix} a_1(L\varphi_1, \varphi_1) + a_2(L\varphi_2, \varphi_1) = (f, \varphi_1) \\ a_1(L\varphi_1, \varphi_2) + a_2(L\varphi_2, \varphi_2) = (f, \varphi_2) \end{vmatrix}.$$

Последователно получаваме:

$$(L\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 \left(\varphi_1'(x)\right)^2 dx = \int_0^1 \left(1-2x\right)^2 dx = \frac{1}{3};$$

$$(L\varphi_2, \varphi_1) = (L\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^1 \varphi_1'(x)\varphi_2'(x)dx = \int_0^1 \left(1-2x\right)\left(2x-3x^2\right)dx = \frac{1}{6};$$

$$(L\varphi_2, \varphi_2) = \int_0^1 \left(\varphi_2'(x)\right)^2 dx = \int_0^1 \left(2x-3x^2\right)^2 dx = \frac{2}{15};$$

$$(f, \varphi_1) = \int_0^1 f(x)\varphi_1(x)dx = \int_0^1 6x.x(1-x)dx = \frac{1}{2};$$

$$(f, \varphi_2) = \int_0^1 f(x)\varphi_2(x)dx = \int_0^1 6x.x^2(1-x)dx = \frac{3}{10};$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{6}a_2 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6}a_1 + \frac{2}{15}a_2 = \frac{3}{10} \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = 1$$

и следователно $u_2 = 1.x(1-x) + 1.x^2(1-x) = x - x^3$.

2. зад. Да се реши по метода на Ритц с три координатни функции, които са алгебрични полиноми, задачата

$$\begin{vmatrix} u''(x) = -(1+x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u'(1) = 0. \end{vmatrix}$$

Решение. За тази задача

$Lu \equiv -u''(x) = (1+x), \quad D(L) = \left\{ \; u \in C^2(0,1) \cap C^1[0,\ 1],\ u(0) = 0,\ u'(1) = 0 \right\} \subset L_2(0,1)$.

Тъй като и в този случай $p(x) \equiv 1 > 0, \quad q(x) \equiv 0$, то съгласно теорията, операторът L е симетричен, положителен и положително определен в $D(L)$ и

$$\left(Lu, v\right) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx .$$

Тогава задачата се свежда до минимизирането на функционала

$$I(u) = \int_0^1 \left[\left(u'(x)\right)^2 - 2(1+x)u(x) \right] dx$$

в

$$H_L = \left\{ u : u, u' \in L_2(0,1), u(0) = 0 \right\}.$$

Приближено решение на минимизационната задача се търси в

$$H_3 = \left\{ u_3 = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3,\ a_i \in R \right\},$$

където

$$\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2, \quad \varphi_3(x) = x^3 \ \text{ и } \ \varphi_1'(x) = 1, \quad \varphi_2'(x) = 2x, \quad \varphi_3'(x) = 3x^2 .$$

Коефициентите a_1, a_2 и a_3 се намират от системата

$$\begin{vmatrix} a_1(L\varphi_1,\varphi_1) + a_2(L\varphi_2,\varphi_1) + a_3(L\varphi_3,\varphi_1) = (f,\varphi_1) \\ a_1(L\varphi_1,\varphi_2) + a_2(L\varphi_2,\varphi_2) + a_3(L\varphi_3,\varphi_2) = (f,\varphi_2) \\ a_1(L\varphi_1,\varphi_3) + a_2(L\varphi_2,\varphi_3) + a_3(L\varphi_3,\varphi_3) = (f,\varphi_3) \end{vmatrix}.$$

Последователно получаваме:

$$(L\varphi_1,\varphi_1) = \int_0^1 \left(\varphi_1'(x)\right)^2 dx = \int_0^1 1dx = 1;$$

$$(L\varphi_2,\varphi_1) = (L\varphi_1,\varphi_2) = \int_0^1 \varphi_1'(x)\varphi_2'(x)dx = \int_0^1 1.2xdx = 1;$$

$$(L\varphi_3,\varphi_1) = (L\varphi_1,\varphi_3) = \int_0^1 \varphi_1'(x)\varphi_3'(x)dx = \int_0^1 1.3x^2dx = 1;$$

$$(L\varphi_2,\varphi_2) = \int_0^1 \left(\varphi_2'(x)\right)^2 dx = \int_0^1 4x^2dx = \frac{4}{3};$$

$$(L\varphi_3,\varphi_2) = (L\varphi_2,\varphi_3) = \int_0^1 \varphi_2'(x)\varphi_3'(x)dx = \int_0^1 2x.3x^2dx = \frac{3}{2};$$

$$(L\varphi_3,\varphi_3)=\int_0^1\left(\varphi_3'(x)\right)^2dx=\int_0^1 9x^4dx=\frac{9}{5};$$

$$(f,\varphi_1)=\int_0^1 f(x)\varphi_1(x)dx=\int_0^1(1+x).xdx=\frac{5}{6};$$

$$(f,\varphi_2)=\int_0^1 f(x)\varphi_2(x)dx=\int_0^1(1+x).x^2dx=\frac{7}{12};$$

$$(f,\varphi_3)=\int_0^1 f(x)\varphi_3(x)dx=\int_0^1(1+x).x^3dx=\frac{9}{20};$$

$$\left|\begin{array}{l} a_1+\quad a_2+\quad a_3=\dfrac{5}{6}\\ a_1+\dfrac{4}{3}a_2+\dfrac{3}{2}a_3=\dfrac{7}{12}\\ a_1+\dfrac{3}{2}a_2+\dfrac{9}{5}a_3=\dfrac{9}{20}\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad a_1=\frac{3}{2},\quad a_2=-\frac{1}{2},\quad a_3=-\frac{1}{6}$$

и следователно $u_2=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3$.

3 зад. Задачата

$$\left|\begin{array}{l}-p(x)u''(x)+r(x)u'(x)+q(x)u(x)=f(x),\quad x\in(a,b),\\ u(a)=0,\quad u(b)=0,\end{array}\right.$$

където $p(x)\ge p_0>0,\quad q(x)\ge 0$, дефинира оператора

$$Lu\equiv -p(x)u''(x)+r(x)u'(x)+q(x)u(x)$$

с дефиниционна област множеството

$$D(L)=\left\{\ u\in C^2(a,b)\cap C[a,\ b],\ u(a)=0,\ u(b)=0\right\}\subset L_2(0,1).$$

Да се покаже, че в $D(L)$ операторът L не е симетричен.

Забележка. Ако умножим диференциалното уравнение от зад. 3 с функцията

$$R(x)=\frac{1}{p(x)}e^{\int\frac{r(x)}{p(x)}dx}>0,$$

ще получим оператор, който е симетричен и освен това положително определен. Наистина, след умножаване на диференциалното уравнение с функцията $R(x)$, получаваме

$$-R(x)p(x)u''(x)+R(x)r(x)u'(x)+R(x)q(x)u(x)=R(x)f(x).$$

Като отчетем, че

$$R(x)p(x)=e^{\int\frac{r(x)}{p(x)}dx}$$

и следователно

$$\left(R(x)p(x)\right)'=-e^{\int\frac{r(x)}{p(x)}dx}\frac{r(x)}{p(x)}=-R(x)r(x),$$

получаваме

$$-R(x)p(x)u''(x)-\left(R(x)p(x)\right)'u'(x)+R(x)q(x)u(x)=R(x)f(x),$$

или още

$$-\left(R(x)p(x)u'(x)\right)' + R(x)q(x)u(x) = R(x)f(x).$$

Последното уравнение дефинира оператора

$$\bar{L}u \equiv -\left(R(x)p(x)u'(x)\right)' + R(x)q(x)u(x),$$

който е симетричен и положително определен.

4 зад. Задачата

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) = x, \quad x \in (1,2), \\ u(1) = 1, \quad u(2) = 2 \end{cases}$$

да се приведе във вид, удобен за прилагане на метода на Ритц.

Решение. 1) Граничните условия не са хомогенни. Можем да ги направим хомогенни по следния начин. Търсим линейна функция $u^*(x) = ax + b$, която да удовлетворява граничните условия. Тази функция очевидно е $u^*(x) = x$. Правим смяната $\bar{u}(x) = u(x) - u^*(x) = u(x) - x$ и тогава функцията $\bar{u}(x)$ ще удовлетворява хомогенни гранични условия. След смяната на функциите получаваме задачата

$$\begin{cases} \bar{u}''(x) + \bar{u}'(x) = x - 1, \quad x \in (1,2), \\ \bar{u}(1) = 0, \quad \bar{u}(2) = 0 \end{cases}$$

или още

$$\begin{cases} -\bar{u}''(x) - \bar{u}'(x) = 1 - x, \quad x \in (1,2), \\ \bar{u}(1) = 0, \quad \bar{u}(2) = 0. \end{cases}$$

2) Последната задача не дефинира симетричен оператор. Ако умножим диференциалното уравнение с функцията $R(x) = \frac{1}{1} e^{-\int \frac{-1}{1} dx} = e^x$ ще получим задачата

$$\begin{cases} -\left(e^x \bar{u}'(x)\right)' = e^x(1 - x), \quad x \in (1,2), \\ \bar{u}(1) = 0, \quad \bar{u}(2) = 0, \end{cases}$$

която вече дефинира симетричен и положително определен оператор и към която можем да приложим метода на Ритц.

5 зад. Да се реши по метода на Ритц с една координатна функция, която е алгебричен полином задачата

$$\begin{cases} u''(x) - u'(x) - u(x) = -1, \quad x \in (0,1), \\ u(0) = -1, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

Решение. Като следваме зад. 4, най-напред ще приведем задачата във вид, удобен за прилагане на метода на Ритц. За функцията $u^*(x)$ получаваме

$$u^*(x) = x - 1.$$

Тогава

$$\bar{u}(x) = u(x) - x + 1,$$

$$u(x) = \bar{u}(x) + x - 1,$$

и след смяната на функциите получаваме задачата

$$\begin{cases} -\bar{u}''(x) + \bar{u}'(x) + \bar{u}(x) = 1 - x, \quad x \in (0,1), \\ \bar{u}(0) = 0, \quad \bar{u}(1) = 0. \end{cases}$$

Функцията $R(x)$ в случая има вида $R(x) = \frac{1}{1} e^{-\int \frac{1}{1} dx} = e^{-x}$ и задачата, към която методът на Ритц е приложим, приема вида

$$\left|\begin{array}{l} -\left(e^{-x}\overline{u}'(x)\right)' + e^{-x}\overline{u}(x) = e^{-x}(1-x), \quad x \in (0,1), \\ \overline{u}(0) = 0, \quad \overline{u}(1) = 0. \end{array}\right.$$

За тази задача

$$L\overline{u} \equiv -\left(e^{-x}\overline{u}'(x)\right)' + e^{-x}\overline{u}(x),\ D(L) = \left\{\ \overline{u} \in C^2(0,1) \cap C[0,\ 1],\ \overline{u}(0) = 0,\ \overline{u}(1) = 0\right\}.$$

В случая $p(x) = e^{-x} > 0, \quad q(x) = e^{-x} > 0$, операторът L е симетричен и положително определен в $D(L)$ и

$$\left(L\overline{u}, \overline{v}\right) = \int_0^1 \left[e^{-x}\overline{u}'(x)\overline{v}'(x) + e^{-x}\overline{u}(x)\overline{v}(x)\right]dx\ .$$

Функционалът $I(\overline{u})$ е

$$I(\overline{u}) = \int_0^1 \left[e^{-x}\left(\overline{u}'(x)\right)^2 + e^{-x}\left(\overline{u}(x)\right)^2 - 2e^{-x}(1-x)\overline{u}(x)\right]dx\ ,$$

а

$$H_L = \left\{\overline{u} : \overline{u}, \overline{u}' \in L_2(0,1), \overline{u}(0) = \overline{u}(1) = 0\right\}.$$

Приближено решение на минимизационната задача се търси в

$$H_1 = \left\{\overline{u}_1 = a_1\varphi_1,\ a_1 \in R\right\},$$

където

$$\varphi_1(x) = x(1-x) \quad \text{и} \quad \varphi_1'(x) = 1 - 2x\ .$$

Коефициентът a_1 се намира от уравнението

$$a_1(L\varphi_1, \varphi_1) = (f, \varphi_1)\ .$$

Последователно получаваме:

$$(L\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 \left[e^{-x}\left(\varphi_1'(x)\right)^2 + e^{-x}\left(\varphi_1(x)\right)^2\right]dx = \int_0^1 \left[e^{-x}\left(1-2x\right)^2 + e^{-x}\left(x - x^2\right)^2\right]dx = -51e^{-1} + 19;$$

$$(f, \varphi_1) = \int_0^1 f(x)\varphi_1(x)dx = \int_0^1 e^{-x}(1-x).x(1-x)dx = -8e^{-1} + 3.$$

Тогава

$$a_1 = \frac{3e-8}{19e-51}$$

и

$$\overline{u}_1 = \frac{3e-8}{19e-51}\varphi_1(x) = \frac{3e-8}{19e-51}x(1-x)\ .$$

Като отчетем смяната на функциите получаваме, че

$$u_1 = \overline{u}_1 + u* = \overline{u}_1 + x - 1 = \frac{3e-8}{19e-51}x(1-x) + x - 1\ .$$