

Глава 7.

Динамични модели, основаващи се на микроикономическо поведение

7.1. Увод

Модел от този тип беше разглеждан в §5.2. В тази глава се разглеждат изследвания от теорията на икономическия растеж и главно с резултати на Ramsey и Solow. Исторически сведения за развитието на този клон от икономическата наука могат да се намерят напр. в [W] и [BS]. Последната книга съдържа много интересен обзор на статистическите данни, илюстриращи основни факти, свързани с икономическия растеж.

Ще отбележим, изброените от Kaldor през 1963г. т.нар. “стилизирани факти”, които характеризират икономическия растеж:

1. Производството на глава от населението расте с течение на времето и съответния темп на растеж (вж.гл.6) не намалява.
2. Физическият капитал за един активно зает в производството расте.
3. Възвращаемостта на средствата, вложени в капитал е приблизително постоянна.
4. Отношението на физическия капитал и произведената продукция е приблизително постоянно.
5. Дяловете на труда и на физическия капитал (вж. §7.2) в националния доход са приблизително постоянни.
6. Темпът на растеж на продукцията на глава от активното население се различава значително в отделните страни.

§ 7.2. модел на Солоу-Суон

Моделът на Solow-Swan (1956) често се нарича и неокласически модел на икономическия растеж. За разлика от модела на Рамзи, в който склонността спестяване s е ендеогенно определена функция, тук ще считаме, че $s = \text{const} \in (0,1)$.

Ще приемем, че работната сила $L(t)$ расте с постоянен темп $n = \text{const} > 0$. С помощта на нормирането $L(0) = 1$ получаваме

$$L(t) = e^{nt}.$$

Разглежда се неокласическа производна функция

$$Y = F(K, L),$$

което по дефиниция означава, че F притежава свойствата
(7.2.1)

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial K}(\dots) > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial K^2}(\dots) < 0, \\ \frac{\partial F}{\partial L}(\dots) > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}(\dots) < 0, \end{cases}$$

(7.2.2)

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda \cdot F(K, L), \forall \lambda > 0,$$

т.е. F осигурява постоянна възвращаемост при съответния мащаб,
(7.2.3)

$$\begin{cases} \lim_{K \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial L} = \infty \\ \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial L} = 0 \end{cases}$$

Последните свойства се наричат **условия на Inada** (1963).

Ако означим

$$k = \frac{K}{L}, y = \frac{Y}{L},$$

от условието (7.2.2) следва, че

$$Y = F(K, L) = L \cdot F(k, 1) \equiv L \cdot f(k),$$

което ни дава

(7.2.4)

$$y = f(k)$$

(производствена функция в интензивна форма).

Понеже $Y=L \cdot f(k)$, намираме

(7.2.5)

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial K} = f'(k), \\ \frac{\partial Y}{\partial L} = [f(k) - k \cdot f'(k)] \end{cases}$$

и от условията на Инада следва, че

(7.2.6)

$$\lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0.$$

Забележка. Всеки от факторите на производство е съществен, т.е.

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0.$$

За да установим това, най-напред с правилото на Лопитал и (7.2.3) намираме

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{Y}{K} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial Y}{\partial K} = 0.$$

Следователно, поради (7.2.2),

$$0 = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{F(K, L)}{K} = \lim_{K \rightarrow \infty} F\left(1, \frac{L}{K}\right) = F(1, 0).$$

Тогава $F(K, 0) = K \cdot F(1, 0) = 0$.

Пример. Функцията на Cobb-Douglas

$$y = A \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha}, \quad A = \text{const} > 0, \alpha \in (0, 1),$$

е неокласическа производствена функция.

Изходното уравнение за модела на Солоу-Суон е връзката между капитал и инвестиции, както и равенството на последните със спестяването sY :

$$K' = I - \delta K \equiv s \cdot F(K, L) - \delta K,$$

където $\delta = \text{const} > 0$ отчита обезценяването на капитала.

Следователно

$$\frac{K'}{L} = s \cdot f(k) - \delta k,$$

откъдето

(7.2.7)

$$k' = s \cdot f(k) - (n + \delta)k.$$

Ще казваме, че икономиката е в **устойчиво състояние**, ако величините, които я описват (k, y, c, \dots) имат постоянен темп на растеж (т.е. $k'/k = \text{const}$ и т.н.).

Ще установим, че в модела на Солоу-Суон това условие всъщност означава, че величините са постоянни. Например от (7.2.7) следва, че в устойчиво положение:

$$\frac{k'}{k} = \text{const} = s \frac{f(k)}{k} - (n + \delta),$$

откъдето

$$\frac{f(k)}{k} = \text{const.}$$

Оттук, след диференциране по времето t ,

$$0 = \frac{f'(k) \cdot k'}{k} - \frac{f(k) \cdot k'}{k^2} = \frac{k'}{k} \cdot \frac{k \cdot f'(k) - f(k)}{k}.$$

Понеже числителят на последната дроб е положителен (вж. (7.2.5) и (7.2.1)), производната $k' = 0$, т.е. $k(t) = k_0 = \text{const}$ (в устойчиво състояние). Тогава са постоянни също $y_0 = f(k_0)$ и $c_0 = (1-s)f(k_0)$.

Очевидно е, че в устойчиво състояние величините K , Y , C растат с постоянен темп, а именно темпа n на нарастване на работната сила.

В устойчиво състояние числото $k = k_0 > 0$ удовлетворява (7.2.8)

$$sf(k_0) = (n + \delta)k_0.$$

Определяме функцията $k_0 = k_0(s)$ от последното уравнение; възможно е, защото

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_0} [sf(k_0) - (n + \delta)k_0] &= s \cdot f'(k_0) - (n + \delta) = \\ &= \frac{1}{k_0} [k_0 \cdot sf'(k_0) - (n + \delta)k_0] = \\ &= \frac{1}{k_0} [k_0 \cdot sf'(k_0) - sf(k_0)] = \\ &= \frac{s}{k_0} [k_0 \cdot f'(k_0) - f(k_0)] < 0 \end{aligned}$$

поради (7.2.5).

Производната на функцията $k_0 = k_0(s)$ е положителна, защото от (7.2.8) следва, че

$$f(k_0) + s \cdot f'(k_0) \cdot \frac{dk_0}{ds} = (n + \delta) \frac{dk_0}{ds},$$

откъдето (7.2.9)

$$\frac{dk_0}{ds} = \frac{f(k_0)}{(n + \delta) - s \cdot f'(k_0)}.$$

След тези бележки можем да изведем т.нар. златно правило за натрупване на капитала. В устойчиво състояние потреблението на глава от населението

$$c_0 = (1-s) \cdot f(k_0(s)) = f(k_0(s)) - (n + \delta)k_0(s)$$

има производна

$$\frac{dc_0}{ds} = [f'(k_0(s)) - (n + \delta)] \frac{dk_0(s)}{ds}.$$

При малки стойности на s (т.е. за малки $k_0(s)$) тя е положителна (вж. 7.2.6), а за големи s – отрицателна. Следователно $c_0(s)$ достига максимума си за онази стойност на s , за която

$$\frac{dc_0}{ds} = 0, \text{ т.е. } f'(k_0(s)) = n + \delta,$$

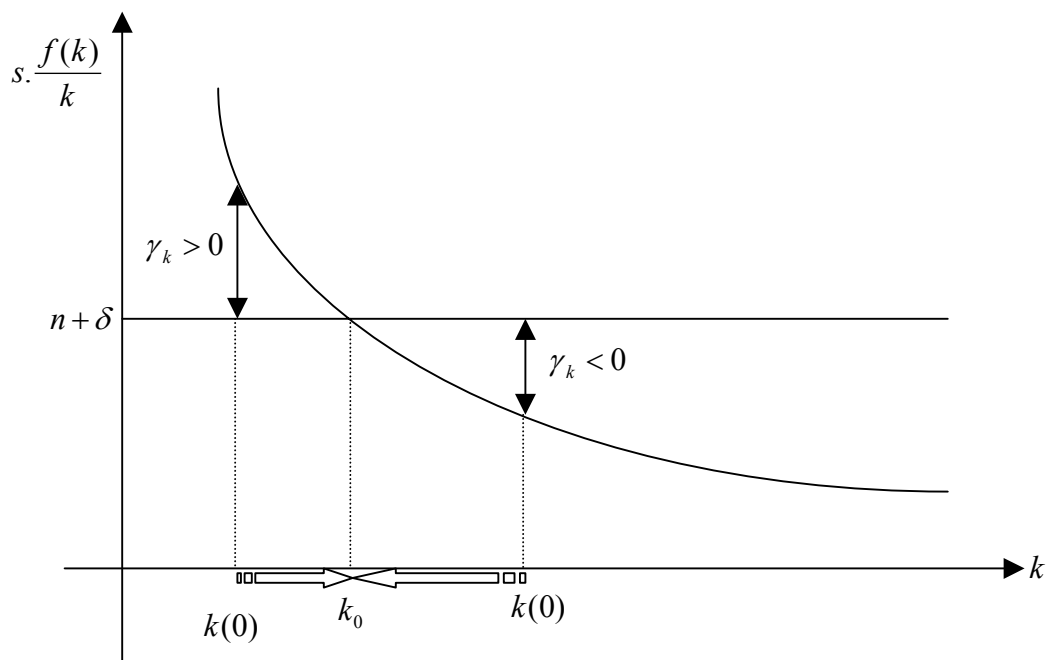
тъй като производната на k_0 е положителна. Тази стойност на k_0 я означават k_{gold} ; съответно s_{gold} , c_{gold} . Смесът на названието (въведено от Phelps, 1966) на това правило е, че при този темп на спестяване се осигурява същото (максимално възможно!) ниво на потребление и за бъдещите поколения (а не се консумира всичко, с което се разполага във фиксиран момент).

Във връзка със стойността s_{gold} трябва да се отбележи, че по-висок коефициент на спестяване е **неефективен**, защото всъщност при него потреблението ще намалее. Това твърдение може лесно да се илюстрира и графично (вж. [BS], стр.21).

От основното уравнение (7.2.7) се вижда, че темпът на растеж на $k(t)$

$$\gamma_k \equiv \frac{k'}{k} = s \cdot \frac{f'(k)}{k} - (n + \delta)$$

е положителен при малки стойности на k и отрицателен – при големи. (За да се убедите в това, приложете правилото на Лопитал и свойства 7.2.6.) На фиг. 7.1 е илюстрирано поведението на $k(t)$ при начална стойност $k(0) < k_0$ (съответно $k(0) > k_0$).



Фиг. 7.1

Скоростта на прехода към устойчиво състояние е толкова по-малка, колкото $k(0)$ е по близо до k_0 .

Аналогично бихме могли да изучим темпа на растеж на продукцията на глава от населението:

$$\begin{aligned} \gamma_y &\equiv \frac{y'}{y} = \frac{f'(k) \cdot k'}{f(k)} = \frac{k \cdot f'(k)}{f(k)} \cdot \gamma_k = \\ &= s \cdot f'(k) - (n + \delta) \cdot Sh(k), \end{aligned}$$

където величината

$$Sh(k) = \frac{k \cdot f'(k)}{f(k)}$$

се нарича **дял на капитала*** (като част от общия доход).

След диференциране относно k намираме (7.2.10)

$$\frac{\partial \gamma_y}{\partial k} = \frac{f''(k) \cdot k}{f(k)} \cdot \gamma_k - \frac{(n + \delta) f'(k)}{f(k)} [1 - Sh(k)]$$

* Като пояснение на този термин ще напомним, че възвръщаемостта от единица капитал е маргиналната производителност $f'(k)$. Следователно $k \cdot f'(k)$ е доходът на глава, получен от собствениците на капитал. Тогава $k \cdot f'(k)/y$ е част на дохода от капитал в рамките на целия доход y .

Тъй като $Sh(k) \in (0,1)$, като вземем предвид знаците на производните на $f(k)$, виждаме че при $\gamma_k \geq 0$ производната (7.2.10) е отрицателна. Следователно за икономика с $k(0) < k_0$, която трябва да натрупва капитал до достигане на нивото k_0 , темпът γ_k намалява с нарастването на k . Ако обаче $\gamma_k < 0$ (т.е. $k > k_0$), тогава знакът на (7.2.10) не е точно определен (за случая на разглежданата обща производствена функция). Разбира се, ако $k > k_0$ е много близо до k_0 , тогава γ_k е много малко и следователно отново

$$\frac{\partial \gamma_y}{\partial k} < 0.$$

Като непосредствено следствие от изучаването на γ_y се получават сведения за поведението на потреблението $c = (1-s) \cdot y$, защото очевидно $\gamma_c = \gamma_y$.

Задача. Нека

$$Y = A \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha}, \quad A = \text{const}, \alpha \in (0,1).$$

Покажете, че

$$k_0 = \left(\frac{sA}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

$$y_0 = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \left[\frac{s}{n + \delta} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

$$\gamma_k = s \cdot A \cdot k^{-(1-\alpha)} - (n + \delta),$$

$$\gamma_y = \alpha \gamma_k.$$

От израза за γ_k намираме

$$\frac{d\gamma_k}{dk} = s \left[f'(k) - \frac{f(k)}{k} \right] \cdot \frac{1}{k} < 0.$$

Зависимостта на темпа на растеж на k при различни начални стойности $k(0)$ – малки или големи (т.е. за страни, които според дохода на глава са бедни или съответно богати) е изучавана за различни групи страни (вж. [BS], стр. 26-29). Получените резултати показват, че за близки икономики (отделни щати в САЩ) зависимостта между темпа на растеж на y (годишен доход на глава) и $\ln y$ връзката е практически линейна.