

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"  
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Приет на заседание на катедра "Комплексен анализ"  
с протокол № ...../..... година

Утвърдил:

Декан:

/академик Б. Боянов/

1. ОБЩО ПРЕДСТАВЯНЕ НА ДИСЦИПЛИНАТА

**наименование на дисциплината:** Математически модели във физиката

**лектор:** проф. Евгени Христов

2. УЧЕБНИ ФОРМИ

<i>аудиторни</i>	<i>часове</i>	<i>извънаудиторни</i>	<i>часове</i>
лекции	60	курсова работа	6
семинарни занятия (упражнения)		контролна работа	—

3. ФОРМИРАНЕ НА ОЦЕНКАТА ПО ДИСЦИПЛИНАТА

	% от оценката
Текуща оценка	0%
Изпит	
– курсова работа	100%

4. ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1: Анотация на дисциплината

Приложение 2: Тематичен план на дисциплината по учебни часове

Приложение 3: Конспект за изпит

Приложение 4: Библиография за курса и изпита

## **АНОТАЦИЯ**

Основната цел на курса е да запознае студентите с някои важни физически задачи, които допускат изчерпателно (и не много сложно) математическо решение. Курсът започва с формулиране на основите на класическата механика, изхождайки от вариационните принципи на Хамилтон и Лагранж с последващо извеждане на съответните уравнения. В частност, разглеждат се моделите на планетарното движение, хармоничния осцилатор, задачата за брахистохроната и др. На тази база се изграждат принципите на квантовата механика, като в основата и се поставя уравнението на Шрьодингер. Детайлно са разгледани моделите на атома на водорода, квантово-механичният осцилатор, разсейване на потенциална яма, различни комутационни съотношения и др. Като едно сравнително ново приложение на използвания тук математически апарат, се извеждат и някои свойства на нелинейните уравнения от солитонен тип. Централно място играе уравнението на Кортвег-де Фриз. Паралелно с разглежданите по-горе въпроси се излагат и необходимите сведения от спектралната теория на линейните оператори в хилбертово пространство. Необходимата математическа подготовка е в рамките на първите два курса на ФМИ.

## ТЕМАТИЧЕН ПЛАН

№	ТЕМА	лекци и	упраж- нения
1	Някои основни понятия от класическата механика. Закони на Нютон. Абсолютност на времето. Теорема за импулса, момента на импулса и енергията. Движение на тежка материална точка.	5 часа	0 часа
2	Праволинейно движение на материална точка. Едномерни колебания. Уравнение на Нютон в криволинейно координати. Полярни, цилиндрични и сферични координати.	4 часа	0 часа
3	Движение под действие на централни сили. Задача на Кеплер. Теорема на Якоби за планетарното движение.	4 часа	0 часа
4	Задача на Бернули за брахистохроната, като пример за функционал, където променливата е крива с фиксирани краища. Нелинеен функционал. Производна на Фреше. Уравнения на Ойлер-Лагранж. Инвариантност на уравненията на Лагранж.	3 часа	0 часа
5	Обобщени координати и обобщени скорости. Принцип на Хамилтон. Уравнения на Лагранж от втори род. Преобразуване на Лежандър. Уравнения на Хамилтон. Консервативна система-закон за запазване на енергията.	4 часа	0 часа
6	Примери за функции на Лагранж и Хамилтон. Класическа скобка на Пуасон. Теорема на Якоби-Пуасон. Уравнение на Хамилтон-Якоби. Пълнен интеграл, теорема на Хамилтон-Якоби.	3 часа	0 часа
7	Методи за решаване на уравнението на Хамилтон-Якоби: циклични координати, разделяне на променливите. Примери: хармоничен осцилатор, математическо махало. Канонически преобразувания. Уравнението на Хамилтон-Якоби като каноническо преобразуване.	6 часа	0 часа
8	Теорема на Лиувил. Напълно интегрируема хамилтонова система. Инвариантни функционали. Теорема на Ньотер за първи интеграли на уравненията на Лагранж.	3 часа	0 часа
9	Класическа квантова механика. Основни правила за квантоване-принцип на съответствието. Оператори на координатата, импулса и енергията. Състояние на квантово-механична система. Еволюция по $t$ на състоянието на квантово-механична система. Статистическа интерпретация на твърденията в квантовата механика. Основен постулат за комутиращи оператори.	3 часа	0 часа
10	Квантово-механична скобка на Пуасон. Основни комутационни съотношения. Некомутиращи оператори. Съотношения за неопределеност на Хайзенберг. Квантово-механичен осцилатор. Собствени числа и собствени значения.	4 часа	0 часа

№	ТЕМА	лекци и	упраж- нения
11	Момент на импулса. Тримерно уравнение на Шрьодингер. Лапласиан в сферически координати. Разделяне на променливите при сферически симетричен потенциал. Примери- Правоъгълни потенциали.	5 часа	0 часа
12	Водороден атом. Изследване на отрицателния спектър. Радиално уравнение на Шрьодингер. Задача за разсейване. Функция на Грийн за оператора на Шрьодингер. Задача за разсейването за уравнението на Шрьодингер на цялата ос.	6 часа	0 часа
13	Метод на характеристиките за уравнението $\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0$ . Уравнение на Бюргерс. Смяна на Коул-Хопф. (Граничен преход. Метод на Лаплас.)	4 часа	0 часа
14	Уравнение на Кортевег- де Фриз. Представяне на Лакс за уравнението на Кортевег-де Фриз.	3 часа	0 часа
15	Метод на обратната задача - основна идея.	3 часа	0 часа

## КОНСПЕКТ

1. Някои основни понятия от класическата механика. Закони на Нютон. Абсолютност на времето.
2. Теорема за импулса, момента на импулса и енергията.
3. Движение на тежка материална точка.
4. Праволинейно движение на материална точка. Едномерни колебания.
5. Уравнение на Нютон в криволинейно координати. Полярни, цилиндрични и сферични координати.
6. Движение под действие на централни сили. Задача на Кеплер.
7. Теорема на Якоби за планетарното движение.
8. Задача на Бернули за брахистохроната, като пример за функционал, където променливата е крива с фиксирани краища.
9. Нелинеен функционал. Производна на Фреше. Уравнения на Ойлер-Лагранж.
10. Инвариантност на уравненията на Лагранж.
11. Обобщени координати и обобщени скорости. Принцип на Хамилтон. Уравнения на Лагранж от втори род.
12. Преобразуване на Лежандър.
13. Уравнения на Хамилтон. Консервативна система-закон за запазване на енергията.
14. Примери за функции на Лагранж и Хамилтон.
15. Класическа скобка на Поасон. Теорема на Якоби-Поасон.
16. Уравнение на Хамилтон-Якоби. Пълнен интеграл, теорема на Хамилтон-Якоби.
17. Методи за решаване на уравнението на Хамилтон-Якоби: циклични координати, разделяне на променливите. Примери: хармоничен осцилатор, математическо махало.
18. Канонически преобразувания. Уравнението на Хамилтон-Якоби като каноническо преобразуване.
19. Теорема на Лиувил. Напълно интегрируема хамилтонова система.
20. Инвариантни функционали. Теорема на Ньотер за първи интеграли на уравненията на Лагранж.
21. Класическа квантова механика. Основни правила за квантоване-принцип на съответствието. Оператори на координатата, импулса и енергията.
22. Състояние на квантово-механична система. Еволюция по  $t$  на състоянието на квантово-механична система. Статистическа интерпретация на твърденията в квантовата механика. Основен постулат за комутиращи оператори.
23. Квантово-механична скобка на Пасон. Основни комутационни съотношения.
24. Некомутиращи оператори. Съотношения за неопределеност на Хайзенберг.
25. Квантово-механичен осцилатор. Собствени числа и собствени значения.
26. Момент на импулса.
27. Тримерно уравнение на Шрьодингер. Лапласиан в сферически координати.
28. Разделяне на променливите при сферически симетричен потенциал.
29. Примери- Правоъгълни потенциали.
30. Водороден атом. Изследване на отрицателния спектър.
31. Радиално уравнение на Шрьодингер. Задача за разсейване. Функция на Гриин за оператора на Шрьодингер.
32. Задача за разсейването за уравнението на Шрьодингер на цялата ос.
33. Метод на характеристиките за уравнението .
34. Уравнение на Бюргерс. Смяна на Коул-Хопф. (Граничен преход. Метод на Лаплас.)
35. Уравнение на Кортевег- де Фриз.
36. Представяне на Лакс за уравнението на Кортевег-де Фриз.
37. Метод на обратната задача - основна идея.

## БИБЛИОГРАФИЯ

1. Л. Д. Фаддеев, О. Я. Якубовский , Лекции по квантовой механике (для студентов математиков), Ленинград, 1980.
2. В. И. Арнольд, Математические методы классической механики, М. Наука, 1974.
3. G. B. Whitham, Linear and nonlinear waves, John Wiley and Sons, New York, 1974.
4. Л. Д. Ландау, Механика, М. Наука, 1988.
5. Я. В. Таратинов, Лекции по классической динамике, Издательства Московского университета, 1984.
6. Йохан фон Нейман, Математические основы квантовой механики, „Наука“, Москва, 1964, (перевод от немски: J. V. Neuman, Mathematische Grundlagen der Quantmechanik, Berlin, 1932.)