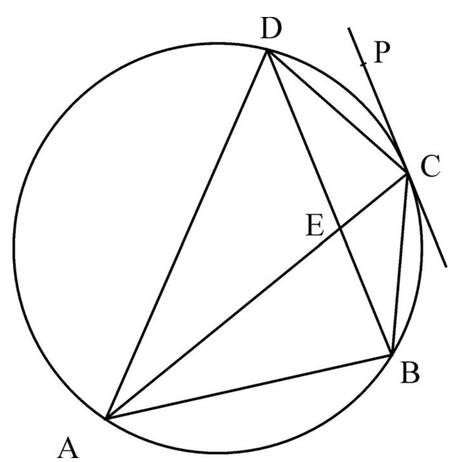
Софийски Университет "Св. Климент Охридски"
Писмен конкурсен изпит по математика – 26 юли 2005 г.
ТЕМА 1

Задача 1. а) Решете неравенството $\sqrt{11-x} < 5-\sqrt{2+x}$.
б) Решете уравнението $\log_2((x+1)^2)+2\log_4((x-8)^2)=6$.
Кои от корените на уравнението са решения на неравенството от подусловие а)?

Решение: **а)** Множеството от допустимите стойности е $[-2;11]$. Последователно преобразуваме:
$\sqrt{11-x} < 5-\sqrt{2+x} \Leftrightarrow \sqrt{11-x}+\sqrt{2+x} < 5$.
Лявата страна е неотрицателна като сума на аритметични корени, следователно повдигането на квадрат е еквивалентна операция.
$\sqrt{(11-x)(2+x)} < 6 \Leftrightarrow x^2-9x+14>0$.
Решенията на последното неравенство са $x\in(-\infty;2)\cup(7;\infty)$. Сечението на тези интервали с множеството от допустимите стойности е решение на началното неравенство, а именно решението е $x\in[-2;2)\cup(7;11]$.
б) Множеството от допустимите стойности е $(-\infty;\infty)\setminus\{-1,8\}$.
Преобразуваме:
$\log_2((x+1)^2)+2\log_4((x-8)^2)=6 \Leftrightarrow \log_2((x+1)^2)+\log_2((x-8)^2)=6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_2((x+1)^2(x-8)^2)=6 \Leftrightarrow \left((x+1)(x-8)\right)^2=64 \Leftrightarrow |(x+1)(x-8)|=8$
Решението на модулното уравнение е обединение на решенията на уравненията
$(x+1)(x-8)=8$ и $(x+1)(x-8)=-8$. Корените на първото са
$x_1=\dfrac{7-\sqrt{113}}{2}$ и $x_2=\dfrac{7+\sqrt{113}}{2}$, а на второто са $x_3=0$ и $x_4=7$. Тези стойности очевидно са допустими. Преобразувания доказват, че $-2<\dfrac{7-\sqrt{113}}{2}<0$ и $7<\dfrac{7+\sqrt{113}}{2}<11$.
Окончателно x_1, x_2 и x_3 са решения на неравенството.

Задача 2. В окръжност е вписан четириъгълник $ABCD$ и E е пресечната точка на диагоналите му. Допирателната към окръжността в точката C е успоредна на диагонала BD.
а) Докажете, че AC е ъглополовяща на $\sphericalangle BAD$. Ако са дадени $AB=4$, $AE=3\sqrt{2}$ и $AD=6$, пресметнете BE, CE, DE, BC и CD.
б) Ако са дадени $AC=10$ и $\sphericalangle DAB=30^\circ$, пресметнете лицето на четириъгълника $ABCD$.
Решение: Избираме точка P върху допирателната (виж чертежа).



За периферния ъгъл имаме $\sphericalangle PCD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}=\sphericalangle CAD$. От $PC\parallel DB$ получаваме $\sphericalangle PCD=\sphericalangle CDB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}=\sphericalangle BAC$. Следователно AC разполовява $\sphericalangle BAD$.
Ще определим $ED=x$ и $BE=y$. От свойствата на ъглополовящата AE в $\triangle ABD$ имаме $AE^2=AB.AD-xy$ и $x:y=AD:AB$, т.е. $18=24-xy$ и $2x=3y$. Решенията на тази система са $x=ED=3$ и $y=BE=2$, откъдето $BD=BE+ED=5$.
От подобието $\triangle AED\sim\triangle BEC$ следва, че $EC=\sqrt{2}$ и $BC=2\sqrt{2}$. От равенството на ъгли $\sphericalangle BAC=\sphericalangle DAC$ следва равенство на дъги $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$ и хорди $BC=CD$. Следователно $CD=2\sqrt{2}$.
б) Ще използваме формулата за лице на четириъгълник $S=\frac{1}{2}AC.BD.\sin\varphi$, където $\varphi=\sphericalangle AEB$. Имаме, че $\varphi=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD})=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC})=\sphericalangle ADC$. По синусовата теорема имаме $AC=2R\sin\varphi$ и $BD=2R\sin 30^\circ$. Следователно $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.2R\sin 30^\circ.\sin\varphi$. В тази формула заменяме $2R\sin\varphi$ с AC и получаваме $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC^2\sin 30^\circ=25$.

Задача 3. Даден е триъгълник ABC със страна $AB = 1$ и $BC = 2AC$.
а) Докажете, че лицето S на триъгълника ABC се изразява с формулата $S = \dfrac{\sin\gamma}{5 - 4\cos\gamma}$, където $\gamma = \sphericalangle ACB$ и намерете най-голямата стойност, която то може да приема.
б) Определете най-голямата стойност, която може да приема ъгълът $\beta = \sphericalangle ABC$.

Решение: Ще използваме стандартните означения $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$. От косинусовата теорема за $\triangle ABC$ получаваме $1 = c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 5b^2 - 4b^2\cos\gamma = b^2(5 - 4\cos\gamma)$. Тъй като $5 - 4\cos\gamma > 0$ (поради $|\cos\gamma| < 1$), определяме $b = \dfrac{1}{\sqrt{5 - 4\cos\gamma}}$ и $a = 2b = \dfrac{2}{\sqrt{5 - 4\cos\gamma}}$.
Тогава $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \dfrac{\sin\gamma}{5 - 4\cos\gamma}$.
Пресмятаме производната на $S = S(\gamma)$: $\quad S'(\gamma) = \dfrac{5\cos\gamma - 4}{(5 - 4\cos\gamma)^2}$.
S' се анулира само когато $\cos\gamma = \frac{4}{5}$. Нека означим с γ_0 единствения ъгъл в интервала $(0, 180^\circ)$, за който $\cos\gamma_0 = \frac{4}{5}$. Понеже $\cos$ е строго намаляваща функция в интервала $(0, 180^\circ)$, то $S'(\gamma) > 0$ при $\gamma \in (0^\circ, \gamma_0)$ и $S'(\gamma) < 0$ при $\gamma \in (\gamma_0, 180^\circ)$. Пресмятаме, че $\sin\gamma_0 = \frac{3}{5}$ и следователно максималната стойност на $S(\gamma)$ е $S_{max}(\gamma) = \frac{1}{3}$.
Триъгълник с такова лице съществува, в този случай $a = \frac{2\sqrt{5}}{3}, b = \frac{\sqrt{5}}{3}, c = 1$ и очевидно неравенствата на триъгълника за страните са изпълнени.
б) От синусовата теорема имаме $\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha \leqq \frac{1}{2}$, при това $\sin\beta = \frac{1}{2}$ само при $\alpha = 90^\circ$. Да съобразим, че $b < a$, следователно $\beta < \alpha = \sphericalangle BAC$. Оттук очевидно β е остър ъгъл и от неравенството $\sin\beta \leqq \frac{1}{2}$ се получава $\beta \leqq 30^\circ$.
$\beta = 30^\circ$ се реализира при правоъгълен триъгълник със страни $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}, b = \frac{\sqrt{3}}{3}, c = 1$, следователно най-голямата стойност, която приема β е $\beta = 30^\circ$.

Задача 4. Дадена е функцията $f(x) = x^2 + px + q$, $q \neq 0$, чиято графика пресича абсцисната ос на декартова координатна система в две различни точки A и B и ординатната ос в точка C. Означаваме с k окръжността, описана около триъгълник ABC и с O – центъра ѝ.
а) Нека D е пресечната точка на допирателните към графиката на $f(x)$ в точките A и B. Пресметнете лицето на четириъгълника $ADBO$ при $p = -4$ и $q = 3$.
б) Докажете, че точката $P(0; 1)$ лежи върху окръжността k.

Решение: Имаме $A(1; 0)$, $B(3; 0)$ $C(0; 3)$. O лежи на симетралата на A и B, следователно абсцисата ѝ е 2. Означаваме с y ординатата ѝ. Пресмятаме квадратите на разстоянията от O до A и C: $OA^2 = (2-1)^2 + (y-0)^2 = y^2 + 1$, $OC^2 = (2-0)^2 + (y-3)^2 = y^2 - 6y + 13$. Приравняваме ги и получаваме $y = 2$. Следователно $O(2; 2)$.
Имаме $f'(x) = 2x - 4$. Уравненията на допирателните са $y = -2x + 2$ и $y = 2x - 6$. Ако разглеждаме тези две уравнения като система, то решението ѝ дава точка $D(2; -2)$.
От факта, че абсцисите на O и D са равни следва, че $OD \perp AB$. Пресмятаме $AB = 2$ и $OD = 4$ и лицето на четириъгълника $ADOB$ с перпендикулярни диагонали се дава с формулата $S = \frac{1}{2}AB.OD = 4$.
б) Повтаряме разсъжденията от а), за да определим координатите на O. Определяме най-напред $A\left(\dfrac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}; 0\right)$, $B\left(\dfrac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}; 0\right)$ и $C(0, q)$. Абсцисата на O е $-\dfrac{p}{2}$, отново означаваме с y ординатата ѝ.
Имаме $OA^2 = \dfrac{p^2 - 4q}{4} + y^2$, $OC^2 = \dfrac{p^2}{4} + (y - q)^2$, $OA^2 = OC^2$, оттук $2yq = q^2 + q$. Но $q \neq 0$, следователно $y = \dfrac{q + 1}{2}$. Квадратът на радиуса на окръжността k е $R^2 = \dfrac{p^2}{4} + \dfrac{(q-1)^2}{4}$.
Пресмятаме и $OP^2 = \dfrac{p^2}{4} + \dfrac{(q-1)^2}{4} = R^2$. Получаваме, че P лежи върху k.