**Софийски Университет „Св. Климент Охридски“**
**Писмен конкурсен изпит по математика**
**16 юли 2004 г.**
**ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 3**

**Задача 1.** Дадено е уравнението $3^{2x}-(a+2)3^x-a+1=0$, където $a$ е реален параметър.

а) Да се реши уравнението за $a=0$ и $a=2$.

б) Да се намерят всички стойности на параметъра $a$, за които уравнението има единствен реален корен.

*Решение.* а) За $a=0$ уравнението е $3^{2x}-2.3^x+1=0$. Полагаме $3^x=y>0$ и получаваме $y^2-2y+1=0$, което има единствено решение $y=1$. Сега от $3^x=1$ получаваме единствения корен на уравнението $x=0$.

За $a=2$ уравнението е $3^{2x}-4.3^x-1=0$. Полагаме $3^x=y>0$ и получаваме $y^2-4y-1=0$. То има корени $y_1=2-\sqrt{5}<0$ и $y_2=2+\sqrt{5}>0$. От уравнението $3^x=2+\sqrt{5}$ намираме единственото решение $x=\log_3\left(2+\sqrt{5}\right)$.

б) Полагаме $3^x=y>0$. Понеже $3^x=y$ има единствено решение за всяко положително $y$, условието на задачата е изпълнено само когато уравнението $y^2-(a+2)y-a+1=0$ има един положителен корен. Това е така когато:

1) Уравнението $y^2-(a+2)y-a+1=0$ има само един положителен корен, т.е. $-a+1\le 0$, т.е. $a\ge 1$.

2) Уравнението $y^2-(a+2)y-a+1=0$ има един двоен корен, който е положителен. Дискриминантата се анулира за $a=0$ и $a=-8$. При $a=0$ уравнението има корен 1. При $a=-8$ то има единствен корен –3, който е отрицателен.

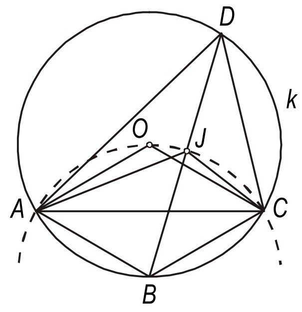
Търсените стойности на $a$ са $a=0$ и $a\ge 1$.

**Задача 2.** В окръжност $k$ с център $O$ и радиус $R=\frac{19\sqrt{3}}{3}$ е вписан четириъгълник $ABCD$ със страна $AD=21$. Центърът $J$ на вписаната в триъгълника $ACD$ окръжност лежи на $BD$ и точките $A$, $C$, $O$ и $J$ лежат на една окръжност.

а) Да се докаже, че $\sphericalangle CDA=60^\circ$.

б) Да се намерят страните и лицето на четириъгълника $ABCD$.

*Решение.* а) Нека $\sphericalangle CDA=\delta$ и $\delta<90^\circ$. Тъй като $A$, $C$, $O$ и $J$ лежат на окръжност, то $\sphericalangle AOC=\sphericalangle AJC$ *(фиг.1)*. Имаме $\sphericalangle AOC=2\sphericalangle ADC=2\delta$ и $\sphericalangle AJC=180^\circ-\frac{1}{2}\left(\sphericalangle CAD+\sphericalangle ACD\right)=90^\circ+\frac{\delta}{2}$. От равенството $90^\circ+\frac{\delta}{2}=2\delta$ намираме $\delta=60^\circ$. Ако $\delta>90^\circ$ от $\sphericalangle AOC+\sphericalangle AJC=180^\circ$ и $\sphericalangle AOC=360^\circ-2\delta$ следва, че $\delta=180^\circ$, т.е. $\delta$ не може да е тъп. б) От $\Delta ACD$ намираме $AC=2.\frac{19\sqrt{3}}{3}.\sin 60^\circ=19$. Ако $DC=x$ от косинусовата теорема намираме $AC^2=AD^2+x^2-x.AD$, откъдето $361=441+x^2-21x$, $x^2-21x+80=0$, $x_1=5$ и $x_2=16$. Следователно имаме два триъгълника $ADC$ и съответно два четириъгълника $ABCD$. Тъй като $BD$ е ъглополовящата на $\sphericalangle ADC$, то $AB=BC$. От $\sphericalangle ADC=60^\circ$ намираме $\sphericalangle ABC=120^\circ$ и $AB=BC=\frac{AC}{2\sin 60^\circ}=\frac{19\sqrt{3}}{3}$. За лицето на четириъгълника $ABCD$ в първия случай получаваме



*Фиг. 1*

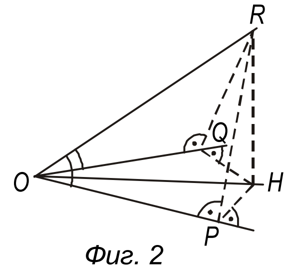
$S_1=S_{ADC}+S_{ABC}=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}\left(21.5+\left(\frac{19\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)=\frac{676\sqrt{3}}{12}$, а във втория $S_2=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}\left(21.16+\left(\frac{19\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)=\frac{1369\sqrt{3}}{12}$.

**Задача 3.** Основата $ABCD$ на четириъгълна пирамида $ABCDM$ е ромб със страна $AB=1$ и $\sphericalangle BAD=2\alpha$. Околният ръб $MD$ е равен на $2\sqrt{2}$ и сключва равни ъгли с правите $AD$, $BD$ и $CD$. Пирамидата е пресечена с равнина успоредна на правата $AC$, която минава през върха $B$ и средата $N$ на ръба $MD$.

а) Да се докаже, че лицето на сечението на пирамидата с равнината е $\frac{2}{3}\cos\alpha\sqrt{2+4\sin^2\alpha}$.

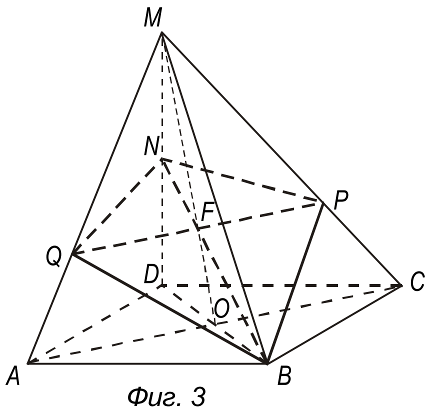
б) Да се намери ъгъл $\alpha$, за който лицето на сечението е най-голямо.

*Решение.* а) Първо ще докажем, че ако $\sphericalangle ROP=\sphericalangle ROQ$, то оргогоналната проекция на правата $OR$ в равнината ($OPQ$) е ъглополовящата на $\sphericalangle POQ$ *(фиг.2)*. Ако $H$ е ортогоналната проекция на $R$ и $HP\perp OP$, $HQ\perp OQ$, то $RP\perp OP$ и $RP\perp OQ$. Така $\Delta ROP\cong\Delta ROQ$ $\Rightarrow$ $RP=RQ$ $\Rightarrow$ $HP=HQ$ $\Rightarrow HO$ е ъглополовяща. Тъй като околният ръб $MD$ сключва равни ъгли с правите $AD$, $BD$ и $CD$, то ортогоналната проекция на върха в равнината ($ABC$) лежи на ъглополовящите на ъглите $ADB$ и $BDC$, т.е. съвпада с точката $D$ и $MD\perp\left(ABC\right)$ *(фиг.3)*. Нека $\gamma$ е равнината на сечението и нека $BN\cap MO=F$. Тъй като $\gamma||AC$, ако $\gamma\cap(ACM)=PQ$, то $F\in PQ$ и $PQ||AC$. Тогава сечението е четириъгълникът $BPNQ$. Понеже $BD=$пр$_{(ABC)}BN$ и $AC\perp BD$, то $BN\perp AC$. Следователно $PQ\perp BN$ и ако $S_\gamma$ е лицето на сечението, то $S_\gamma=\frac{1}{2}BN.PQ$. Лесно се намира, че $BD=2\sin\alpha$ и



*Фиг. 2*

$AC = 2\cos\alpha$. Тогава от $\Delta BDN$ намираме $BN = \sqrt{BD^2 + DN^2} = \sqrt{2 + 4\sin^2\alpha}$, а от $\Delta PQM \sim \Delta ACM$ – $\frac{PQ}{AC} = \frac{MF}{MO} = \frac{2}{3}$ ($F$ е медицентър на $\Delta BDM$). Така намираме $PQ = \frac{4}{3}\cos\alpha$ и $S_\gamma = \frac{2}{3}\cos\alpha\sqrt{2 + 4\sin^2\alpha}$.



*Фиг. 3*

б) Имаме $S_\gamma = \frac{2}{3}\cos\alpha\sqrt{2 + 4\sin^2\alpha} = \frac{2}{3}\sqrt{\cos^2\alpha\left(2 + 4\sin^2\alpha\right)}$. Трябва да изследваме функцията $f(\alpha) = \cos^2\alpha\left(2 + 4\sin^2\alpha\right) = \left(1 - \sin^2\alpha\right)\left(2 + 4\sin^2\alpha\right)$, където $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Като положим $\sin^2\alpha = t$, $t \in (0;1)$, получаваме функцията $g(t) = (1-t)(2+4t)$. Най голямата стойност на тази функция се получава при $t_0 = \frac{1}{4}$ и очевидно $t_0 \in (0;1)$. Следователно лицето е най-голямо при $\sin^2\alpha = \frac{1}{4}$, т.е. $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, откъдето $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Следователно лицето на сечението е най-голямо когато $\sphericalangle BAD = \frac{\pi}{3}$.

**Задача 4.** а) Да се намери най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(x) = \left(a - x^2\right)(x+2)$ в интервала $[0;1]$ в зависимост от стойностите на реалния параметър $a$.

б) Да се докаже, че ако $m$, $n$ и $p$ са реални неотрицателни числа, за които $m + n + p = 1$, то $\frac{1}{1-m^2} + \frac{1}{1-n^2} + \frac{1}{1-p^2} > \frac{189}{62}$.

*Решение.* а) Производната на $f(x)$ е $f'(x) = -3x^2 - 4x + a$. Решаваме уравнението $-3x^2 - 4x + a = 0$. Неговата дискриминанта е $D = 4 + 3a$. Уравнението има корени само когато $a \ge -\frac{4}{3}$ и тогава те са $x_1 = \frac{\sqrt{4+3a} - 2}{3}$ и $x_2 = \frac{-\sqrt{4+3a} - 2}{3} \notin [0;1]$. Изследваме кога $x_1 \in (0;1)$. Това е така, когато $0 < \frac{\sqrt{4+3a} - 2}{3} < 1$, което е еквивалентно на $0 < a < 7$. Разглеждаме следните случаи:

1) $0 < a < 7$. Тогава $f(x)$ расте в интервала $(0; x_1)$ и намалява в интервала $(x_1;1)$. Следователно $f(x)$ има локален максимум в $x_1$, който е равен на $M(a) = \frac{2}{27}\left((4+3a)\sqrt{4+3a} + 18a - 8\right)$. За стойностите на $f(x)$ в краищата на интервала получаваме $f(0) = 2a$ и $f(1) = 3(a-1)$. Сравняваме числата $2a$ и $3(a-1)$ и установяваме, че $f(0) < f(1)$ за $a > 3$ и $f(0) > f(1)$ за $a < 3$. Следователно ако $a \in (0;3)$, то $f_{\min} = f(1) = 3(a-1)$ и ако $a \in [3;7)$, то $f_{\min} = f(0) = 2a$.

2) $a \ge 7$. Тогава $x_1 \ge 1$ и $f(x)$ расте в интервала $[0;1]$. Следователно $f_{\min} = f(0) = 2a$ и $f_{\max} = f(1) = 3(a-1)$.

3) $-\frac{4}{3} \le a \le 0$. Тогава $x_1 \le 0$ и $f(x)$ намалява в интервала $[0;1]$. Следователно $f_{\min} = f(1) = 3(a-1)$ и $f_{\max} = f(0) = 2a$.

4) $a < -\frac{4}{3}$. Тогава $D < 0$ и $f'(x) < 0$ за всяко $x$. Следователно $f(x)$ намалява в интервала $[0;1]$. Следователно $f_{\min} = f(1) = 3(a-1)$ и $f_{\max} = f(0) = 2a$.

Окончателно получаваме:

- За $a \le 0$, $f_{\max} = f(0) = 2a$ и $f_{\min} = f(1) = 3(a-1)$.
- За $0 < a < 3$, $f_{\max} = f(x_1) = M(a)$ и $f_{\min} = f(1) = 3(a-1)$.
- За $3 \le a < 7$, $f_{\max} = f(x_1) = M(a)$ и $f_{\min} = f(0) = 2a$.
- За $a \ge 7$, $f_{\max} = f(1) = 3(a-1)$ и $f_{\min} = f(0) = 2a$.

б) Прилагаме получения в а) резултат за $a = 1$. Тогава $f_{\max} = f(x_1) = M(1) = \frac{2}{27}\left(7\sqrt{7} + 10\right)$, т.е. $\left(1 - x^2\right)(x+2) \le \frac{2}{27}\left(7\sqrt{7} + 10\right)$ за всяко $x \in [0;1]$. От последното неравенство получаваме, че $\frac{1}{1-x^2} \ge \frac{27(x+2)}{2\left(7\sqrt{7}+10\right)}$ за всяко $x \in [0;1]$. От условието на задачата е ясно, че числата $m$, $n$ и $p$ са в интервала $[0;1]$. Прилагаме последното неравенство за тези три числа и събираме. Тъй като $\sqrt{7} < 3$, получаваме

$$\frac{1}{1-m^2} + \frac{1}{1-n^2} + \frac{1}{1-p^2} \ge \frac{27(m+n+p+6)}{2\left(7\sqrt{7}+10\right)} = \frac{27.7}{2\left(7\sqrt{7}+10\right)} > \frac{189}{62}.$$