Софийски Университет "Св. Климент Охридски"

Писмен конкурсен изпит по математика — 29 май 2005 година

Задачи и примерни решения — Тема №2

Задача 1. Да се реши уравнението

$$10\left(25^{\cos\pi x} - 4^{\cos\pi x}\right) = 7\left(5^{\cos\pi x} - 2^{\cos\pi x}\right) \quad .$$

Да се намерят онези негови решения, които са решения и на неравенството $x^4 - 6x^2 - 1 \le 0$.

Решение. Отговор: $x = \dfrac{2k+1}{2}$, k — цяло число; $x = 2l+1$, l — цяло число; $-\dfrac{3}{2}, -1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}$.
Представяме уравнението във вида:

$$\left(5^{\cos\pi x} - 2^{\cos\pi x}\right)\left(10\left(5^{\cos\pi x} + 2^{\cos\pi x}\right) - 7\right) = 0 \quad .$$

От $5^{\cos\pi x} - 2^{\cos\pi x} = 0$ намираме $\cos\pi x = 0$, откъдето $x = \dfrac{2k+1}{2}$, k — цяло число.
От $10\left(5^{\cos\pi x} + 2^{\cos\pi x}\right) - 7 = 0$, понеже $\cos\pi x \ge -1$ и, следователно, $5^{\cos\pi x} + 2^{\cos\pi x} \ge \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2}$, с равенство само за $\cos\pi x = -1$, намираме $\cos\pi x = -1$, откъдето $x = 2l+1$, l — цяло число.

С полагане $y = x^2$ намираме $x^4 - 6x^2 - 1 = \left(x^2 - y_1\right)\left(x^2 - y_2\right)$, където $y_1 = 3 - \sqrt{10} < 0$ и $y_2 = 3+\sqrt{10} > 0$. Решенията на неравенството са числата от интервала $I = \left[-\sqrt{3+\sqrt{10}}\ , \sqrt{3+\sqrt{10}}\right]$.
$\dfrac{2k+1}{2} \in I$ за $k = -2, -1, 0, 1$, а $2l+1 \in I$ за $l = -1, 0$.

Задача 2. В окръжност с радиус $\dfrac{21\sqrt{5}}{10}$ е вписан четириъгълникът $ABCD$ с лице $18\sqrt{5}$. Ако $AB = 4$ и $\operatorname{tg} \sphericalangle ABC = -\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ да се намерят страните и диагоналите на $ABCD$.

Решение. Отговор: $AC = 9$, $BC = 7$, $AD = 7$, $CD = 8$, $BD = 9$ или $AD = 8$, $CD = 7$, $BD = \dfrac{28}{3}$.

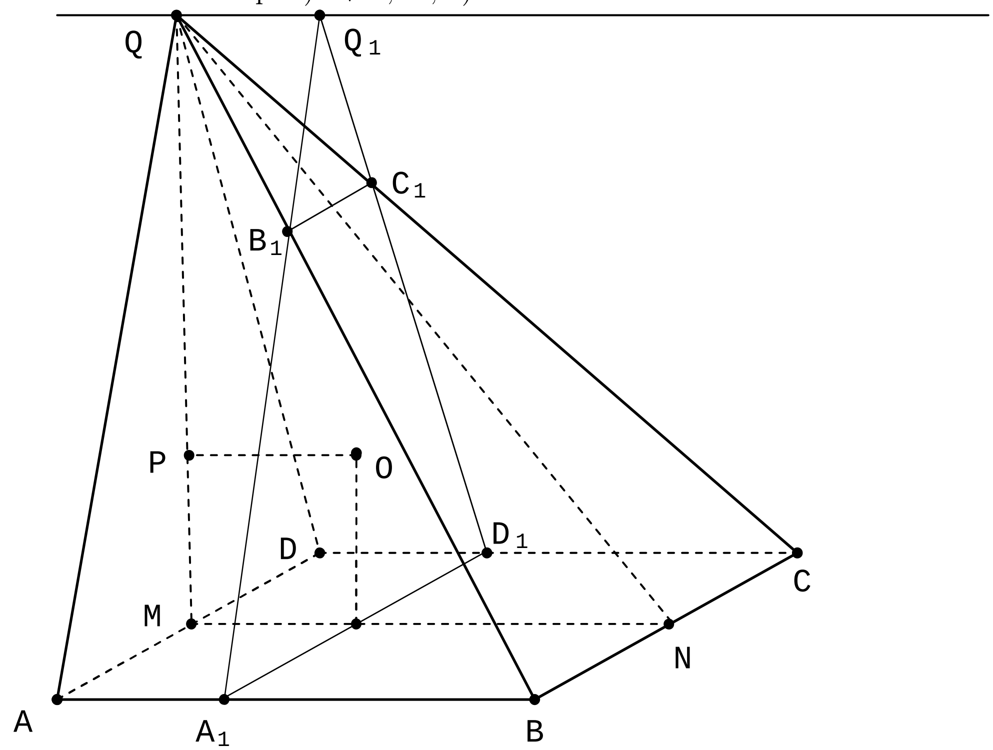
Нека $\sphericalangle ABC = \beta$. Тогава $0^\circ < \beta < 180^\circ$ и $\sin\beta > 0$. От $\operatorname{tg}\beta < 0$ намираме $\cos\beta < 0$. От системата $\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = -\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ и $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ определяме $\sin\beta = \dfrac{3\sqrt{5}}{7}$ и $\cos\beta = -\dfrac{2}{7}$. От синусовата теорема за $\triangle ABC$ получаваме $AC = 2R\sin\beta = 2 \cdot \dfrac{21\sqrt{5}}{10} \cdot \dfrac{3\sqrt{5}}{7} = 9$. Ако $BC = t$, косинусовата теорема за $\triangle ABC$ води до уравнението $81 = 16 + t^2 - 2.4.t.\left(-\dfrac{2}{7}\right)$, с единствен положителен корен $t = 7$, т.е. $BC = 7$. Имаме $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dfrac{3\sqrt{5}}{7} = 6\sqrt{5}$ и $S_{ADC} = 18\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$, откъдето за $x = AD$ и $y = CD$ ($\sphericalangle ADC = 180^\circ - \beta$, т.е. $\sin \sphericalangle ADC = \dfrac{3\sqrt{5}}{7}$ и $\cos \sphericalangle ADC = \dfrac{2}{7}$) получаваме $xy = 56$. От косинусовата теорема за $\triangle ADC$ имаме $81 = x^2 + y^2 - \dfrac{4}{7}xy$. Получената система има две решения: $x = 7$, $y = 8$ и $x = 8$, $y = 7$. Ако $AD = 7$ и $CD = 8$, то $ABCD$ е равнобедрен трапец, т.е. $BD = 9$. Ако $AD = 8$ и $CD = 7$ за $u = BD$ и $\alpha = \sphericalangle DAB$ от косинусовата теорема за $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ получаваме $u^2 = 4^2 + 8^2 - 2.4.8.\cos\alpha$ и $u^2 = 7^2 + 7^2 + 2.7.7.\cos\alpha$, откъдето $u^2 = 80 - 64\left(\dfrac{u^2}{98} - 1\right)$, $u^2 = \dfrac{784}{9}$, $BD = \dfrac{28}{3}$.

Задача 3. Основата $ABCD$ на четириъгълна пирамида $ABCDQ$ е правоъгълник със страни $AB = 3$ и $BC = 2\sqrt{2}$. В пирамидата може да се впише сфера, а ортогоналната проекция на върха Q в равнината на основата е средата M на ръба AD .

а) Да се намерят обемът на пирамидата и радиусът на вписаната сфера.

б) С равнина, минаваща през центъра на вписаната сфера и успоредна на стената ADQ , пирамидата е разделена на две тела. Да се намери отношението на обемите им.

Решение. Отговор: а) $8\sqrt{2}$, 1 ; б) $13:14$.



Означаваме с O центъра на вписаната сфера, с r — нейния радиус, с $h = QM$ — височината на пирамидата, а с N — средата на ръба BC. От $QM \perp (ABCD)$ следва $(ADQ) \perp (ABCD)$ и $QM \perp AB$. Понеже $AD \perp AB$, то $AB \perp (ADQ)$, откъдето $(ABQ) \perp (ADQ)$ и $(CDQ) \perp (ADQ)$ $(CD \parallel AB)$. Нека $l = (ABQ) \times (CDQ)$. През O прекарваме равнина $\lambda \parallel (ADQ)$ (условие б)). Тогава допирните точки на вписана сфера със стените $(ABCD)$, (ABQ) и (CDQ) лежат в λ, т.е. вписаната в $\triangle A_1D_1Q_1$ (където $A_1 = AB \times \lambda$, $D_1 = CD \times \lambda$ и $Q_1 = l \times \lambda$) окръжност има център O и радиус r. От друга страна $\triangle A_1D_1Q_1 \cong ADQ$ и, следователно, вписаната в $\triangle ADQ$ окръжност има радиус r. От $QM \perp AD$ и $AM = MD = \sqrt{2}$ намираме $AQ = DQ = \sqrt{h^2+2}$ и $\sqrt{2}\,h = S_{ADQ} = r(\sqrt{2} + \sqrt{h^2+2})$ $(*)$.

От $QM \perp (ABCD)$ следва и $(NMQ) \perp (ABCD)$ и $QM \perp MN$. Понеже $AD \perp MN$, то $AD \perp (MNQ)$, откъдето $(MNQ) \perp (ADQ)$ и $(MNQ) \perp (BCQ)$ $(BC \parallel AD)$. От друга страна $AQ \perp l$, $DQ \perp l$, $MQ \perp l$ и QM е ъглополовяща на $\sphericalangle AQD$. Следователно равнината (NMQ) е ъглополовяща на двустенния ъгъл с ръб l и съдържащ пирамидата, т.е. $O \in (NMQ)$, откъдето допирните точки на вписана сфера със стените $(ABCD)$, (ADQ) и (BCD) лежат в (NMQ), т.е. вписаната в правоъгълния триъгълник NMQ окръжност има център O и радиус r. Тогава (понеже $MN = 3$) $3h = 2S_{MNQ} = r(3+h+\sqrt{h^2+9})$ $(**)$.

От уравненията $(*)$ и $(**)$ получаваме $\sqrt{2}\left(3+h+\sqrt{h^2+9}\right) = 3\left(\sqrt{2}+\sqrt{h^2+2}\right)$ откъдето, след повдигане на квадрат, $2\left(2h^2+9+2h\sqrt{h^2+9}\right) = 9\left(h^2+2\right)$, $4\sqrt{h^2+9} = 5h$ и $h = 4$. Тогава $r = \dfrac{\sqrt{2}\,h}{\sqrt{2}+\sqrt{h^2+2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{16+2}} = 1$, $V_{ABCDQ} = \dfrac{1}{3}.3.2\sqrt{2}.4 = 8\sqrt{2}$.

б) Нека $B_1 = BQ \times A_1Q_1$ и $C_1 = CQ \times D_1Q_1$. Да означим с V_1 обема на $A_1D_1C_1B_1ADQ$, с V_2 — на $A_1D_1C_1B_1BC$. Тогава $V_1 + V_2 = V_{ABCDQ} = 8\sqrt{2}$. От друга страна, V_1 е разлика на обема V_3 на правата призма $ADQA_1D_1Q_1$ и обема V_4 на пирамидата $B_1C_1Q_1Q$. Общата им височина е $QQ_1 = r = 1$, откъдето $V_3 = 4\sqrt{2}$, защото $S_{ADQ} = 4\sqrt{2}$. Имаме още $\triangle A_1D_1Q_1 \cong \triangle ADQ$, $\triangle B_1C_1Q_1 \sim \triangle A_1D_1Q_1$ и $\triangle A_1B_1B \sim \triangle AQB$, което ни дава

$$S_{B_1C_1Q_1} : S_{ADQ} = \left(\frac{B_1Q_1}{A_1Q_1}\right)^2 = \left(1 - \frac{A_1B_1}{AQ}\right)^2 = \left(1 - \frac{A_1B}{AB}\right)^2 = \left(1 - \frac{3-1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\,.$$

Тогава $V_4 = \dfrac{4\sqrt{2}}{27}$, $V_1 = \dfrac{104\sqrt{2}}{27}$, $V_2 = \dfrac{112\sqrt{2}}{27}$ и $V_1 : V_2 = 13:14$.

Задача 4. Дадена е функцията $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2$.
а) Да се намерят общите точки на графиката на $f(x)$ и:
— допирателната към нея в точката с абсциса 2;
— допирателната към нея в точката с абсциса 3.
б) Да се намерят всички допирателни към графиката на $f(x)$, които имат точно две общи точки с нея.

Решение. Отговор: а) $(-4\,,\,-64)$, $(-2\,,\,-48)$, $(2\,,\,-16)$ (допирателна $y = 8x - 32$); $(3\,,\,27)$ (допирателна $y = 90x - 243$). б) $y = 40x + 32$, $y = -14\,x + 5$ и $y = 13\,x - \dfrac{169}{4}$.

Допирателната към графиката на $f(x)$ в точката $(p\,,\,f(p))$ има уравнение $y = f'(p)\,(x-p) + f(p)$. За да определим общите точки на графиката на и допирателната трябва да решим уравнението:

$$(\diamondsuit)\qquad x^4 + 2x^3 - 12x^2 - \left(4p^3 + 6p^2 - 24p\right)(x-p) - \left(p^4 + 2p^3 - 12p^2\right) = 0 \quad .$$

Имаме:

$$x^4 - 4p^3x + 3p^4 = x\left(x^3 - p^3\right) - 3p^3\,(x-p) = (x-p)\left(x^3 + px^2 + p^2x - 3p^3\right) =$$
$$= (x-p)\left(x^3 - p^3 + p\left(x^2 - p^2\right) + p^2\,(x-p)\right) = (x-p)^2\left(x^2 + 2px + 3p^2\right) \quad ;$$
$$2x^3 - 6p^2x + 4p^3 = 2\left(x\left(x^2 - p^2\right) - 2p^2\,(x-p)\right) = 2\,(x-p)\left(x^2 + px - 2p^2\right) =$$
$$= 2\,(x-p)^2\,(x+2p) \quad ;$$
$$-12x^2 + 24px - 12p^2 = -12\,(x-p)^2 \quad .$$

Следователно, уравнението $(\diamondsuit)$ има вида:

$$(x-p)^2\left(x^2 + 2\,(p+1)\,x + 3p^2 + 4p - 12\right) = 0 \quad .$$

а) За $p = 2$ уравнението $(\diamondsuit)$ е $(x-2)^2\left(x^2 + 6x + 8\right) = 0$ с корени -4, -2 и 2 , т.е. общите точки са $(-4\,,\,-64)$, $(-2\,,\,-48)$, $(2\,,\,-16)$.

За $p = 3$ уравнението $(\diamondsuit)$ е $(x-3)^2\left(x^2 + 8x + 27\right) = 0$ с единствен реален корен 3, т.е. общата точка е само една $(3\,,\,27)$.

б) Общите точки графиката на $f(x)$ с допирателната към графиката ѝ в точката $(p\,,\,f(p))$ са точно две тогава и само тогава, когато уравнението $(\diamondsuit)$ има точно два различни корена. Това е така в два случая:

I. Уравнението $x^2 + 2\,(p+1)\,x + 3p^2 + 4p - 12 = 0$ има за корен числото p, а вторият му корен е различен от p. От $p^2 + 2\,(p+1)\,p + 3p^2 + 4p - 12 = 0$ намираме $p^2 + p - 2 = 0$ с корени -2 и 1. И двете намерени стойности отговарят на условието. Допирателните са $y = 40x + 32$ и $y = -14\,x + 5$.

II. Уравнението $x^2 + 2\,(p+1)\,x + 3p^2 + 4p - 12 = 0$ има двоен корен, различен от p. Последното условие е изпълнено, защото стойностите на p, за които числото p е корен на уравнението, са намерени в I. и корените не са двойни. От $4\,(p+1)^2 - 4\left(3p^2 + 4p - 12\right) = 0$ намираме $2p^2 + 2p - 13 = 0$ с корени $p_1 = \dfrac{-1 - 3\sqrt{3}}{2}$ и $p_2 = \dfrac{-1 + 3\sqrt{3}}{2}$. Допирателната, обаче, е една и съща. Наистина, $p_1 + p_2 = -1$, т.е. квадратното уравнение, което получаваме за $p = p_1$ има двоен корен p_2 и, симетрично, квадратното уравнение, което получаваме за $p = p_2$ има двоен корен p_1 . Следователно

$$f(x) - f'(p_1)\,(x-p_1) - f(p_1) \;=\; (x-p_1)^2\,(x-p_2)^2 \;=\; f(x) - f'(p_2)\,(x-p_2) - f(p_2).$$

Общата допирателна има уравнение

$$y = f(x) - (x-p_1)^2\,(x-p_2)^2 \;=\; 2\,(p_1+p_2)\,p_1p_2x - p_1^2p_2^2 \;=\; 13\,x - \frac{169}{4}\ .$$