СУ „Св. Кл. Охридски“, ФМИ, Курс по CAGD

Лекция1: Афинни пространства. Барицентрични координати.

Лектор: Красимира Влъчкова

сайт на курса:

http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/companal/krassivl/CAGD_MASTERS.html

Векторни пространства

Дефиниция 1 **Векторно (линейно) пространство** V **над** $\mathbb{R}$ ***е множество от елементи, което е затворено относно линейните комбинации с реални коефициенти, т. е. ако*** $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$***, то***

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n \in V,$$

където $\alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$***. Елементите на*** V ***се наричат*** **вектори*****, а коефициентите*** $\alpha_1, \dots \alpha_n$ ***-*** **скалари*****.***

Примери.

- **Стандартното векторно пространство** $\mathbb{R}^n$

Векторни пространства

Дефиниция 2 **Векторно (линейно) пространство** V **над** $\mathbb{R}$ ***е множество от елементи, което е затворено относно линейните комбинации с реални коефициенти, т. е. ако*** $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$***, то***

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n \in V,$$

където $\alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$***. Елементите на*** V ***се наричат*** **вектори*****, а коефициентите*** $\alpha_1, \dots \alpha_n$ ***-*** **скалари*****.***

Примери.

- **Стандартното векторно пространство** $\mathbb{R}^n$
- **Множеството от всички алгебрични полиноми от степен** n

Векторни пространства

Дефиниция 3 **Векторно (линейно) пространство** V **над** $\mathbb{R}$ ***е множество от елементи, което е затворено относно линейните комбинации с реални коефициенти, т. е. ако*** $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$***, то***

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n \in V,$$

където $\alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$***. Елементите на*** V ***се наричат*** **вектори*****, а коефициентите*** $\alpha_1, \dots \alpha_n$ ***-*** **скалари*****.***

Примери.

- Стандартното векторно пространство $\mathbb{R}^n$
- Множеството от всички алгебрични полиноми от степен n
- Множеството от всички $(n \times n)$ - матрици

Векторни пространства

Дефиниция 4 **Векторно (линейно) пространство** V **над** $\mathbb{R}$ ***е множество от елементи, което е затворено относно линейните комбинации с реални коефициенти, т. е. ако*** $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$***, то***

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n \in V,$$

където $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}$***. Елементите на*** V ***се наричат*** **вектори*****, а коефициентите*** $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ ***-*** **скалари*****.***

Примери.

- **Стандартното векторно пространство** $\mathbb{R}^n$
- **Множеството от всички алгебрични полиноми от степен** n
- **Множеството от всички** $(n \times n)$ **- матрици**
- **Полуравнина в** $\mathbb{R}^2$

Линейна независимост

Дефиниция 5 Линейна обвивка S ***на векторите*** $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$ ***се нарича множеството от всички линейни комбинации*** $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_n\vec{v}_n$***, където*** $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}$ ***са произволни скалари.***

Дефиниция 6 ***Векторите*** $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$ ***са линейно независими, ако уравнението***

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_n\vec{v}_n = 0$$

има единствено решение $\alpha_i = 0,\ i = 1, \ldots, n$***.***

Еквивалентна дефиниция: Никой от векторите $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ ***не може да се представи като линейна комбинация на останалите вектори. Ако*** $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ ***са линейно независими, казваме, че те са*** базис ***на*** S ***и*** S ***има размерност*** n ***(***$\dim \mathrm{S=n}$***).***

Афинни пространства

Дефиниция 7 **Афинно пространство** $\mathcal{A}$ ***се състои от множество от точки*** $\mathcal{P}$ ***и векторно пространство*** V***.***

Афинни пространства

Дефиниция 8 **Афинно пространство** $\mathcal{A}$ ***се състои от множество от точки*** $\mathcal{P}$ ***и векторно пространство*** V***.***

В компютърната графика основно понятие е афинното пространство $\mathbb{R}^3$**.**

Афинни пространства

Дефиниция 9 **Афинно пространство $\mathcal{A}$** ***се състои от множество от точки $\mathcal{P}$ и векторно пространство V.***

В компютърната графика основно понятие е афинното пространство $\mathbb{R}^3$.

Точките и векторите (наричат се още свободни вектори) са основните обекти за операциите в компютърната графика.

Точки и вектори в $\mathbb{R}^3$

- **Точката има позиция в $\mathbb{R}^3$. Позицията е единствената характеристика, по която различаваме една точка от друга точка.**

Точки и вектори в $\mathbb{R}^3$

- **Точката има позиция в $\mathbb{R}^3$. Позицията е единствената характеристика, по която различаваме една точка от друга точка.**

- **Векторът има големина и посока, но няма фиксирана позиция в $\mathbb{R}^3$. Използва се за преместване от една точка в друга точка.**

Аксиоми

1. **За всеки две точки a и b съществува единствен вектор $\vec{v}$ с посока от a към b. Записваме $\vec{v} = \mathrm{b} - \mathrm{a}$.**

Аксиоми

1. **За всеки две точки a и b съществува единствен вектор $\vec{v}$ с посока от a към b. Записваме $\vec{v} = \mathrm{b} - \mathrm{a}$.**

2. **За всяка точка a и вектор $\vec{v}$ съществува единствена точка b, така че**

$$\vec{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

Аксиоми

1. **За всеки две точки a и b съществува единствен вектор $\vec{v}$ с посока от a към b. Записваме $\vec{v} = \mathrm{b} - \mathrm{a}$.**

2. **За всяка точка a и вектор $\vec{v}$ съществува единствена точка b, така че**

$$\vec{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

Последното равенство може да се запише още като $\mathrm{b} = \mathrm{a} + \vec{v}$. Геометрически това означава, че ако извършим транслация на точката a на вектор $\vec{v}$, ще стигнем до точката b.

Афинни координати

Дефиниция 10 ***Нека*** $\mathbf{a_0} \in \mathcal{P}$ ***и*** $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ ***са*** *базис* ***на*** V***. Това дефинира координатна система*** $\mathrm{a}_0, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$***, която наричаме*** рамка ***на*** V***. Ако*** $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$***, коефициентите*** $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ ***се наричат*** афинни координати ***на точката*** a ***относно рамката*** $\mathrm{a}_0, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$***.***

Примери

- $\mathbb{R}^n$ **е афинно пространство.**

Примери

- $\mathbb{R}^n$ **е афинно пространство.**
- **Множеството от алгебричните полиноми от степен** n **не е афинно пространство (няма точки).**

Примери

- $\mathbb{R}^n$ е афинно пространство.
- Множеството от алгебричните полиноми от степен n не е афинно пространство (няма точки).
- Множеството от всички $(n \times n)$ - матрици не е афинно пространство

Примери

- $\mathbb{R}^n$ **е афинно пространство.**
- **Множеството от алгебричните полиноми от степен** n **не е афинно пространство (няма точки).**
- **Множеството от всички** $(n \times n)$ **- матрици не е афинно пространство**
- **Полуравнина в** $\mathbb{R}^2$ **не е афинно пространство! (не е векторно пространство).**

Барицентрични координати

Дефиниция 11 **Афинна комбинация** ***на точките $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{A}$ се нарича линейната комбинация***

$$\alpha_0\mathbf{a}_0 + \alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n, \text{ \textbf{\textit{където}} } \alpha_0 + \cdots + \alpha_n = 1. \qquad (1)$$

Коефициентите $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ се наричат барицентрични координати на точката a относно точките $\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n$.

Изпъкнала комбинация на точки

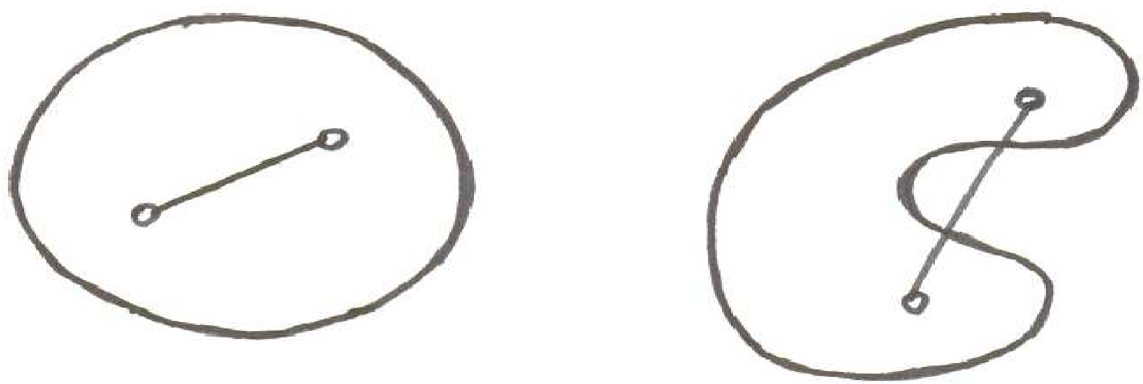
Дефиниция 12 ***Афинната комбинация*** $\alpha_0\mathbf{a}_0 + \alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n$***,*** $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n = 1$***, се нарича*** изпъкнала комбинация ***на точките*** $\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_n$***, ако*** $0 \le \alpha_i \le 1$***,*** $i = 0, \ldots, n$***.***

Дефиниция 13 Изпъкнала обвивка ***на точките*** $\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_n$ ***се нарича множеството от всички изпъкнали комбинации на*** $\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_n$***.***

Ако $n = 1$*, какво представлява изпъкналата обвивка на точките* $\mathbf{a}_0$ *и* $\mathbf{a}_1$**?**

Изпъкнало множество

Дефиниция 14 *Едно множество се нарича* изпъкнало*, ако съвкупността от всички изпъкнали комбинации на произволни две точки от множеството (т. е. отсечката с краища двете произволни точки) също принадлежи на множеството.*



Изпъкнало множество...

Минималното изпъкнало множество, което съдържа всичките точки $\mathrm{a}_0, \ldots, \mathrm{a}_n$ е изпъкналата обвивка.

Ако $\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^2$, какво представлява геометрически изпъкналата им обвивка?

Симплекс

Дефиниция **15** ***Точките*** $\mathrm{a}_0, \ldots, \mathrm{a}_n$ ***са*** афинно независими***, ако векторите*** $\mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_0, \ldots, \mathrm{a}_n - \mathrm{a}_0$ ***са линейно независими.***

От всеки $n+1$ **афинно независими точки в** $\mathbb{R}^n$ **може да се направи рамка.**

Изпъкналата обвивка на $n+1$ **афинно независими точки в** $\mathbb{R}^n$ **се нарича...?**

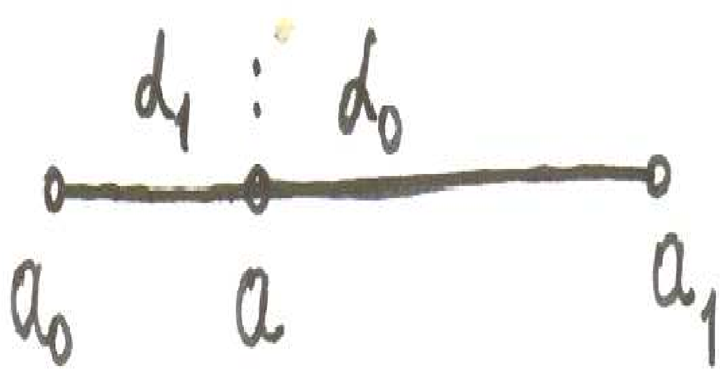
Приложения

- **Нека** $n = 1$ **и**

$$\textsf{\textbf{ratio}}(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}, \mathbf{a}_1) := \frac{\mathbf{a} - \mathbf{a}_0}{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}},$$

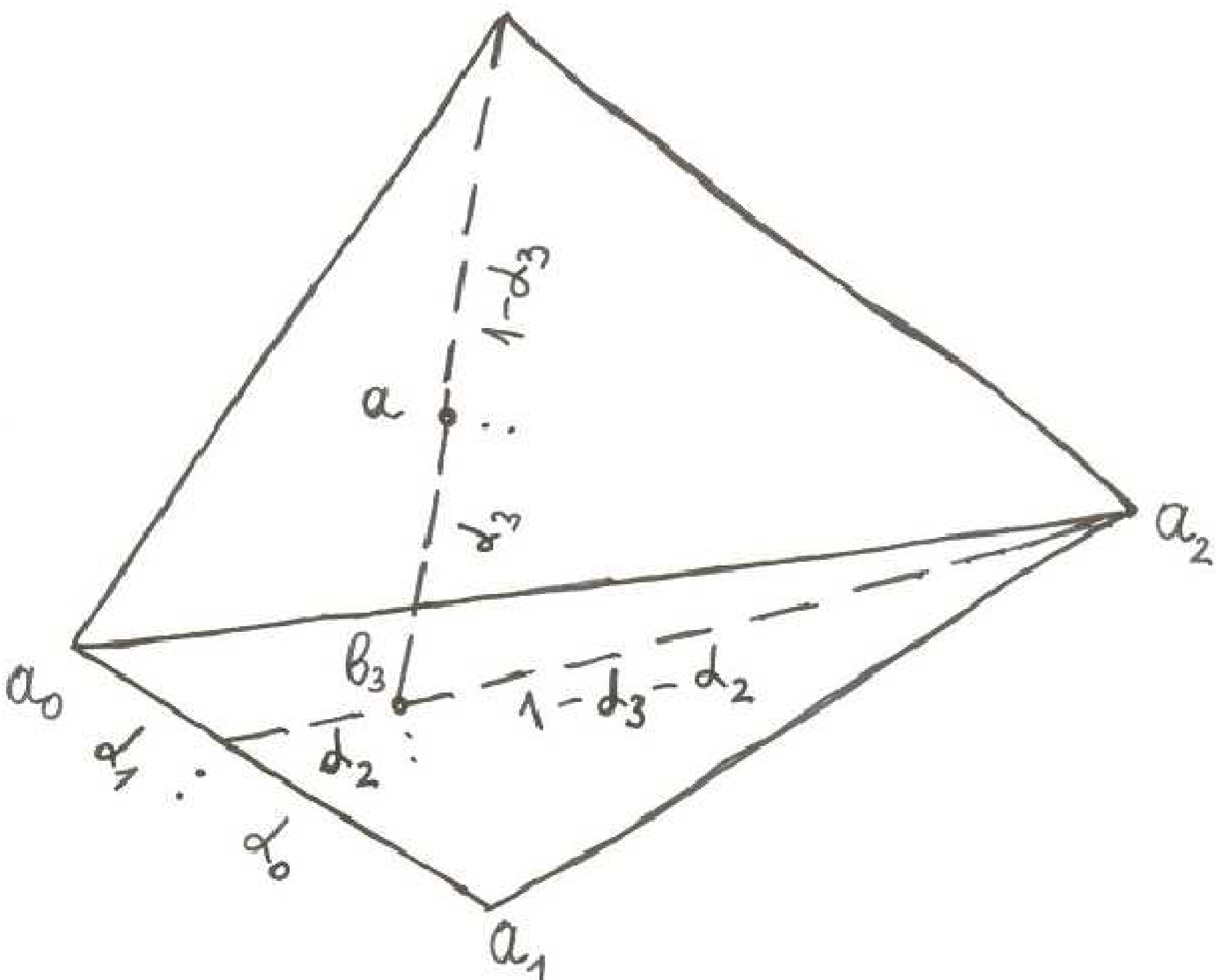
където $\mathrm{b} - \mathrm{a}$ **означава ориентираната дължина на отсечката с краища точките** a **и** b**.**

$$\textsf{\textbf{ratio}}(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}, \mathbf{a}_1) = ?$$



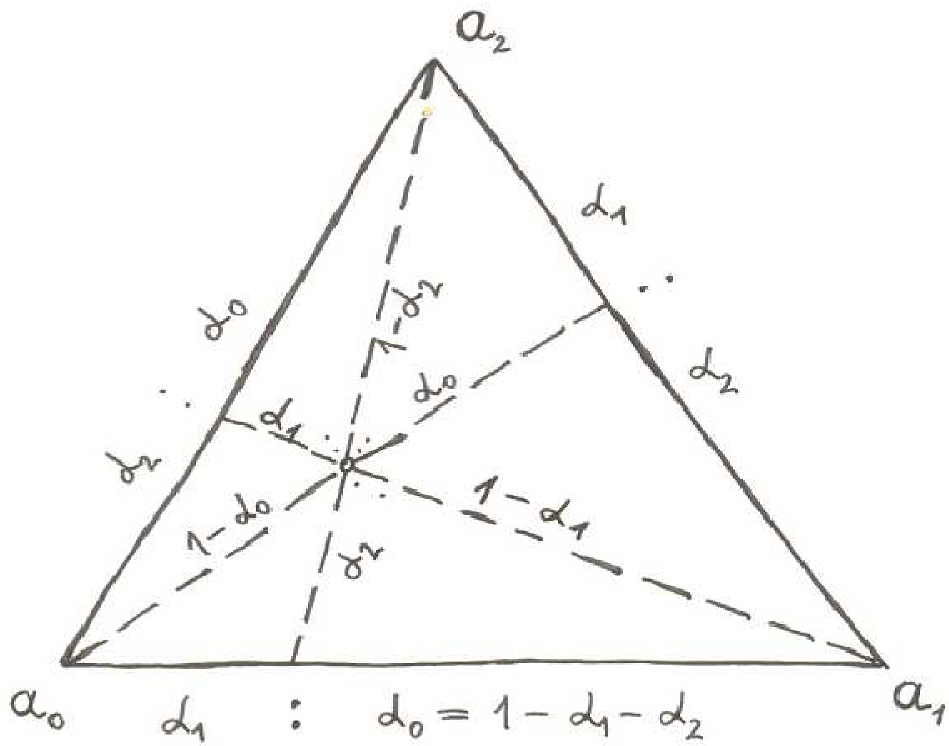
Приложения...

- $n = 3$

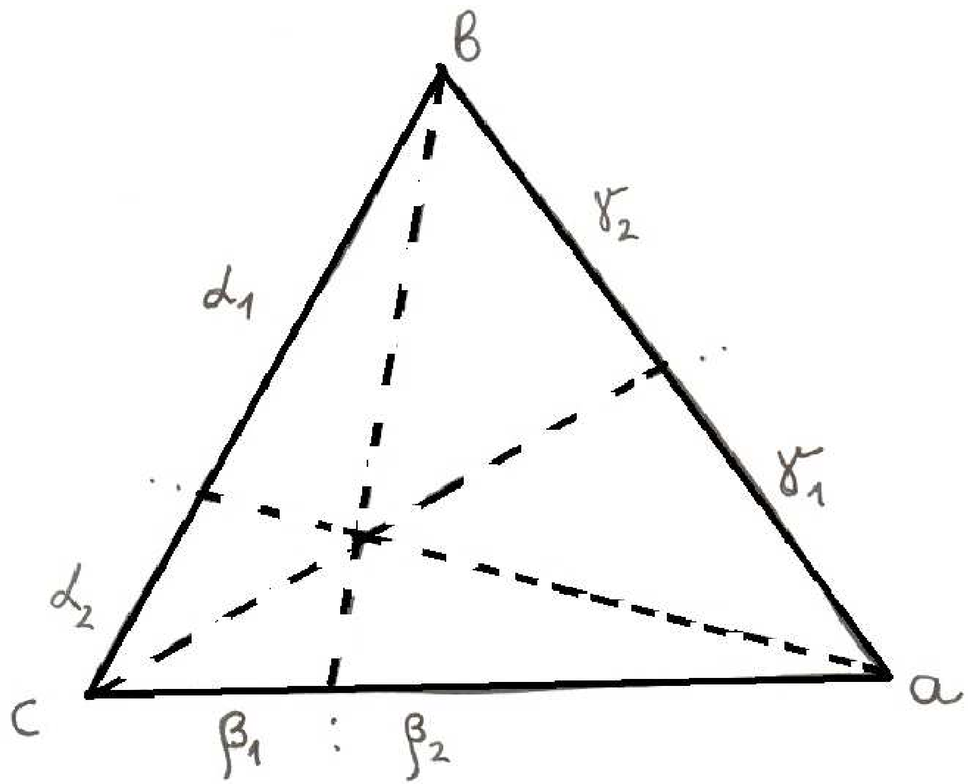


Приложения...

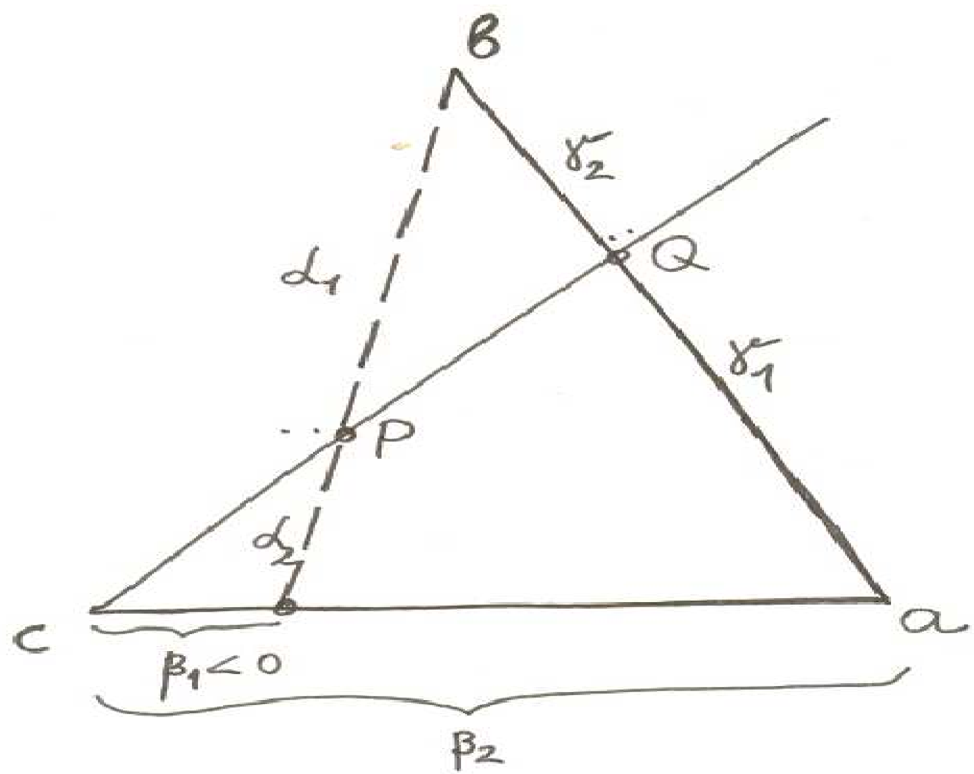
- $n = 2$



Теорема на Чева



Теорема на Менелай



CAGD версия на теоремата на Менелай