СУ „Св. Кл. Охридски“, ФМИ, Изборен курс по CAGD

Лекция2: Афинни изображения

Лектор: Красимира Влъчкова

сайт на курса:

www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/companal/krassivl/CAGD.html

Пресмятане на барицентрични координати

Разглеждаме $\triangle \mathrm{abc}$ **и произволна точка** p**, като** $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{p} \in \mathbb{R}^2$**.**

Пресмятане на барицентрични координати

Разглеждаме $\triangle \mathrm{abc}$ и произволна точка p, като $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{p} \in \mathbb{R}^2$.

Нека α, β, γ са барицентричните координати на p относно $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$.

Пресмятане на барицентрични координати

Разглеждаме $\triangle \mathrm{abc}$ и произволна точка p, като $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{p} \in \mathbb{R}^2$.
Нека α, β, γ са барицентричните координати на p относно $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$.

$$\left|\begin{aligned} \mathbf{p} = &\quad \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c} \\ 1 = &\quad \alpha + \beta + \gamma. \end{aligned}\right.$$

Нека $\mathbf{a}(a_x, a_y)$, $\mathbf{b}(b_x, b_y)$, $\mathbf{c}(c_x, c_y)$, $\mathbf{p}(p_x, p_y)$.

Пресмятане на барицентрични координати

Разглеждаме $\triangle \mathrm{abc}$ и произволна точка p, като $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{p} \in \mathbb{R}^2$.
Нека α, β, γ са барицентричните координати на p относно $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$.

$$\left| \begin{aligned} \mathbf{p} &= \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c} \\ 1 &= \alpha + \beta + \gamma. \end{aligned} \right.$$

Нека $\mathbf{a}(a_x, a_y)$, $\mathbf{b}(b_x, b_y)$, $\mathbf{c}(c_x, c_y)$, $\mathbf{p}(p_x, p_y)$.

$$\left| \begin{aligned} p_x &= \alpha\, a_x + \beta\, b_x + \gamma\, c_x \\ p_y &= \alpha\, a_y + \beta\, b_y + \gamma\, c_y \\ 1 &= \alpha + \beta + \gamma. \end{aligned} \right.$$

Пресмятане на барицентрични координати...

$$D = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Пресмятане на барицентрични координати...

$$D = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2S_{\triangle abc}.$$

Пресмятане на барицентрични координати...

$$D = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2S_{\triangle abc}.$$

$$\alpha = \frac{S_{\triangle \mathbf{pbc}}}{S_{\triangle \mathbf{abc}}},\ \beta = \frac{S_{\triangle \mathbf{apc}}}{S_{\triangle \mathbf{abc}}},\ \gamma = \frac{S_{\triangle \mathbf{abp}}}{S_{\triangle \mathbf{abc}}}.$$

Пресмятане на барицентрични координати...

$$D = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2S_{\triangle abc}.$$

$$\alpha = \frac{S_{\triangle \mathbf{pbc}}}{S_{\triangle \mathbf{abc}}},\ \beta = \frac{S_{\triangle \mathbf{apc}}}{S_{\triangle \mathbf{abc}}},\ \gamma = \frac{S_{\triangle \mathbf{abp}}}{S_{\triangle \mathbf{abc}}}.$$

- **За да са добре дефинирани α, β, γ, трябва $D = 2S_{\triangle abc} \neq 0$, т. е. точките $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$ да са неколинеарни.**

Пресмятане на барицентрични координати...

$$D = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2S_{\triangle abc}.$$

$$\alpha = \frac{S_{\triangle \mathbf{pbc}}}{S_{\triangle \mathbf{abc}}}, \ \beta = \frac{S_{\triangle \mathbf{apc}}}{S_{\triangle \mathbf{abc}}}, \ \gamma = \frac{S_{\triangle \mathbf{abp}}}{S_{\triangle \mathbf{abc}}}.$$

- **За да са добре дефинирани α, β, γ, трябва $D = 2S_{\triangle abc} \neq 0$, т. е. точките $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$ да са неколинеарни.**
- **Лицата на триъгълниците са ориентирани лица.**

Пресмятане на барицентрични координати...

Пресмятане на барицентрични координати...

http://www.vis.uni-stuttgart.de/~kraus/LiveGraphics3D/cagd/index.

Пресмятане на барицентрични координати...

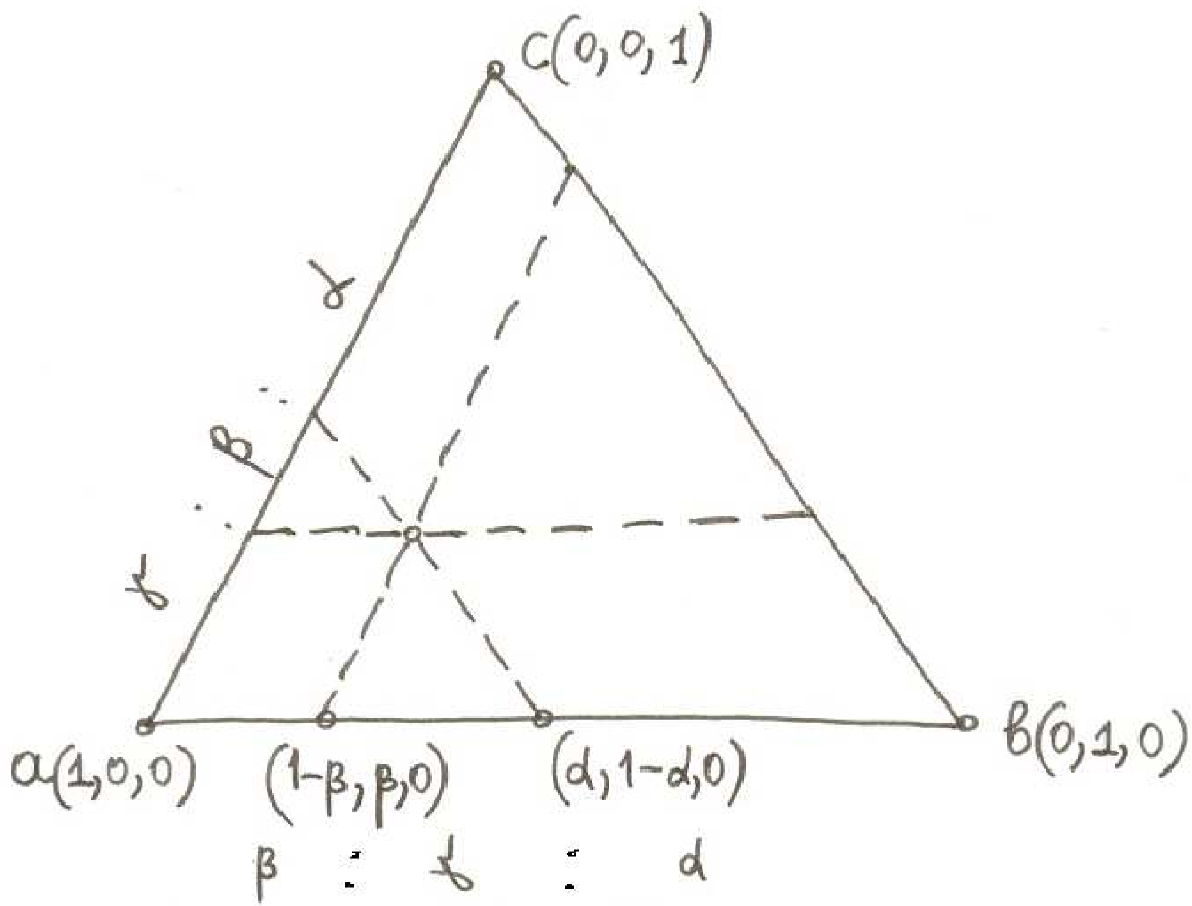
`http://www.vis.uni-stuttgart.de/~kraus/LiveGraphics3D/cagd/index.`

`http://i33www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/inhalt.html`

Пресмятане на барицентрични координати...

http://www.vis.uni-stuttgart.de/~kraus/LiveGraphics3D/cagd/index.

http://i33www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/inhalt.html



Пресмятане на барицентрични координати...

Задача: **Дадени са точките $\mathrm{a}(0,0)$, $\mathrm{b}(1,0)$ и $\mathrm{c}(0,1)$. Намерете барицентричните координати относно a, b, c на следните точки:**

Пресмятане на барицентрични координати...

Задача: **Дадени са точките $\mathbf{a}(0,0)$, $\mathbf{b}(1,0)$ и $\mathbf{c}(0,1)$. Намерете барицентричните координати относно $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ на следните точки:**

- $\mathbf{p}_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Пресмятане на барицентрични координати...

Задача: **Дадени са точките $\mathbf{a}(0, 0)$, $\mathbf{b}(1, 0)$ и $\mathbf{c}(0, 1)$. Намерете барицентричните координати относно $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ на следните точки:**

- $\mathbf{p}_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Отг. $\mathbf{p}_1(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Пресмятане на барицентрични координати...

Задача: **Дадени са точките $\mathbf{a}(0,0)$, $\mathbf{b}(1,0)$ и $\mathbf{c}(0,1)$. Намерете барицентричните координати относно $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ на следните точки:**

- $\mathbf{p}_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Отг. $\mathbf{p}_1(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

- $\mathbf{p}_2(1, 1)$

Пресмятане на барицентрични координати...

Задача: **Дадени са точките** $\mathbf{a}(0,0)$, $\mathbf{b}(1,0)$ **и** $\mathbf{c}(0,1)$. **Намерете барицентричните координати относно** $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ **на следните точки:**

- $\mathbf{p}_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

Отг. $\mathbf{p}_1(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

- $\mathbf{p}_2(1,1)$

Отг. $\mathbf{p}_2(-1,1,1)$

Пресмятане на барицентрични координати...

Задача: **Дадени са точките $\mathbf{a}(0,0)$, $\mathbf{b}(1,0)$ и $\mathbf{c}(0,1)$. Намерете барицентричните координати относно $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ на следните точки:**

- $\mathbf{p}_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Отг. $\mathbf{p}_1(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

- $\mathbf{p}_2(1,1)$

Отг. $\mathbf{p}_2(-1,1,1)$

- $\mathbf{p}_3(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

Пресмятане на барицентрични координати...

Задача: **Дадени са точките $\mathbf{a}(0,0)$, $\mathbf{b}(1,0)$ и $\mathbf{c}(0,1)$. Намерете барицентричните координати относно $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ на следните точки:**

- $\mathbf{p}_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Отг. $\mathbf{p}_1(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

- $\mathbf{p}_2(1,1)$

Отг. $\mathbf{p}_2(-1,1,1)$

- $\mathbf{p}_3(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

Отг. $\mathbf{p}_3(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

Афинни изображения

Голяма част от изображенията (трансформациите), които се използват за позициониране или мащабиране на обекти в компютърната графика, са *афинни изображения*.

Афинни изображения

Голяма част от изображенията (трансформациите), които се използват за позициониране или мащабиране на обекти в компютърната графика, са *афинни изображения*.

affinis (лат.)-родствен

Афинни изображения

Голяма част от изображенията (трансформациите), които се използват за позициониране или мащабиране на обекти в компютърната графика, са *афинни изображения*.

affinis (лат.)-родствен

Афинната геометрия **е раздел от геометрията, в който се изучават свойствата на фигурите в** $\mathbb{R}^2$ **(или** $\mathbb{R}^3$**), които се запазват при всички афинни изображения.**

Афинни изображения

Голяма част от изображенията (трансформациите), които се използват за позициониране или мащабиране на обекти в компютърната графика, са *афинни изображения***.**

affinis (лат.)-родствен

Афинната геометрия **е раздел от геометрията, в който се изучават свойствата на фигурите в** $\mathbb{R}^2$ **(или** $\mathbb{R}^3$**), които се запазват при всички афинни изображения.**

Основният афинен инвариант е простото отношение на три колинеарни точки

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{\mathbf{c} - \mathbf{a}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}}.$$

Афинни изображения...

Афинни изображения...

Дефиниция 1 ***Изображението*** $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ***е*** **афинно изображение*****, ако запазва афинните комбинации на точки:***

$$\textbf{\textit{ако}}\ \mathbf{x} = \sum \alpha_j \mathbf{a}_j \ \Rightarrow\ \Phi(\mathbf{x}) = \sum \alpha_j \Phi(\mathbf{a}_j),\ \sum \alpha_j = 1.$$

Афинни изображения...

Дефиниция 2 ***Изображението*** $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ***е*** **афинно изображение*****, ако запазва афинните комбинации на точки:***

$$\textit{ако } \mathbf{x} = \sum \alpha_j \mathbf{a}_j \;\Rightarrow\; \Phi(\mathbf{x}) = \sum \alpha_j \Phi(\mathbf{a}_j),\; \sum \alpha_j = 1.$$

Φ **е линейно изображение** $\Rightarrow \Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \vec{v}$.

Афинни изображения...

Дефиниция 3 *Изображението* $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *е* афинно изображение*, ако запазва афинните комбинации на точки:*

$$\textit{ако } \mathbf{x} = \sum \alpha_j \mathbf{a}_j \;\Rightarrow\; \Phi(\mathbf{x}) = \sum \alpha_j \Phi(\mathbf{a}_j),\; \sum \alpha_j = 1.$$

Φ **е линейно изображение** $\Rightarrow \Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \vec{v}$.

A **е** (3×3)**- матрица и векторът** $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$**.**

Афинни изображения...

Твърдение. *Изображение от вида* $\Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \vec{v}$ *е афинно изображение.*

Доказателство.

$$\begin{aligned}
\Phi(\sum \alpha_j \mathbf{a}_j) &= A(\sum \alpha_j \mathbf{a}_j) + \vec{v} \\
&= \sum \alpha_j A\mathbf{a}_j + \sum \alpha_j \vec{v} \\
&= \sum \alpha_j (A\mathbf{a}_j + \vec{v}) \\
&= \sum \alpha_j \Phi(\mathbf{a}_j).
\end{aligned}$$

Примери на афинни изображения

Примери на афинни изображения

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **и** $\vec{v} \neq 0$

Примери на афинни изображения

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **и** $\vec{v} \neq 0$

Транслация на вектор $\vec{v}$**.**

Примери на афинни изображения

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ **и** $\vec{v} \neq 0$

Транслация на вектор $\vec{v}$**.**

- $$A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}$$ **и** $\vec{v} = 0$

Примери на афинни изображения

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **и** $\vec{v} \neq 0$

Транслация на вектор $\vec{v}$.

- $A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}$ **и** $\vec{v} = 0$

Мащабиране (scaling)
$k = k_1 = k_2 = k_3$**?**

Примери на афинни изображения...

Примери на афинни изображения...

- $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **и** $\vec{v} = 0$

Примери на афинни изображения...

- $$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ **и** $\vec{v} = 0$

Ротация около оста Oz

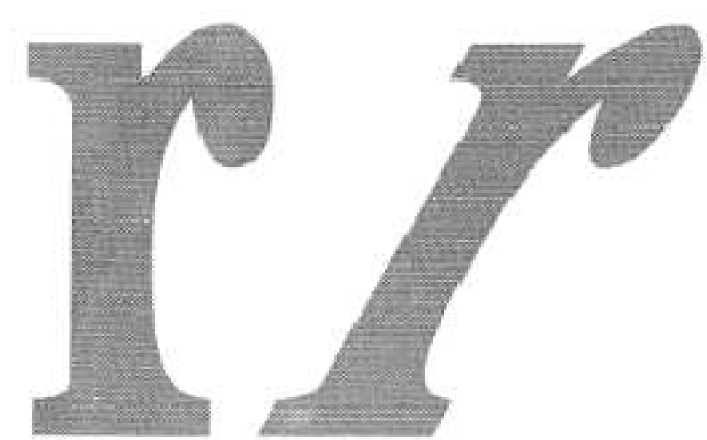
Примери на афинни изображения...

Примери на афинни изображения...

- $A = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & k_2 \\ 0 & 1 & k_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **и** $\vec{v} = 0$

Примери на афинни изображения...

- $A = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & k_2 \\ 0 & 1 & k_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **и** $\vec{v} = 0$



Shear (изкривяване)

Примери на афинни изображения...

Примери на афинни изображения...

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **и** $\vec{v} = 0$

Примери на афинни изображения...

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ **и** $\vec{v} = 0$

Φ е успоредна проекция от $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^2$ (също така може да се разглежда и като хомотетия с коефициент 0 по направлението Oz).

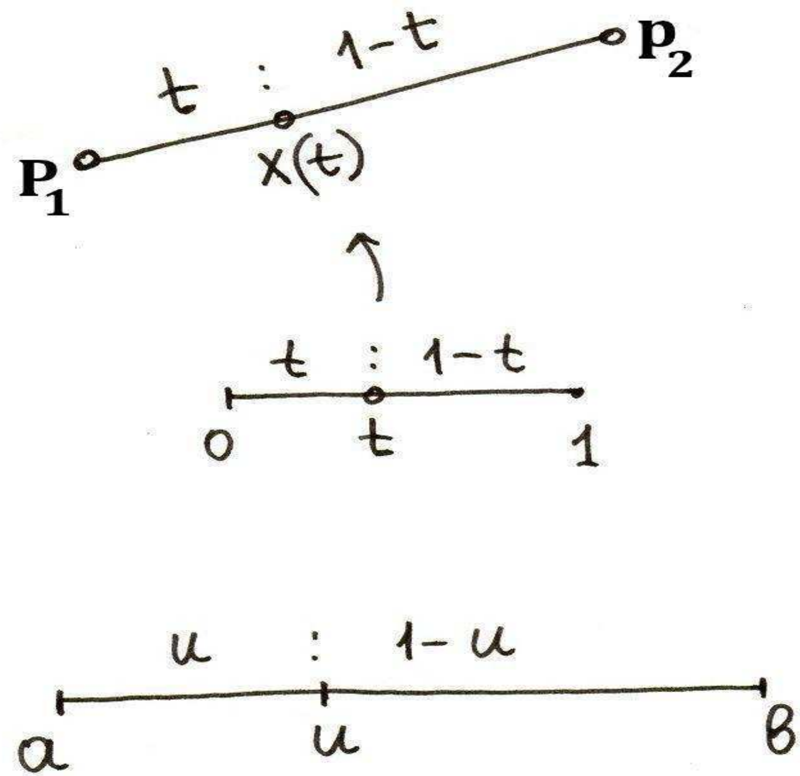
Примери на афинни изображения...

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **и** $\vec{v} = 0$

Φ е успоредна проекция от $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^2$ (също така може да се разглежда и като хомотетия с коефициент 0 по направлението Oz).

Твърдение. *Всяко афинно изображение може да се представи като суперпозиция на транслации, ротации, мащабирания (scalings) и shears.*

Примери на афинни изображения...



Линейна интерполация на точките p_1 и p_2