СУ „Св. Кл. Охридски“, ФМИ, Изборен курс по CAGD

Лекция3: Алгоритъм на de Casteljau

Лектор: Красимира Влъчкова

сайт на курса:

www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/companal/krassivl/CAGD.html

Геометрично конструиране на парабола

http://www.vis.uni-stuttgart.de/~kraus/LiveGraphics3D/cagd/chap4f

Геометрично конструиране на парабола

http://www.vis.uni-stuttgart.de/~kraus/LiveGraphics3D/cagd/chap4f

Свойства на $\mathbf{b}^2(t)$.

- *Интерполира двете крайни точки.*
- $\mathbf{b}^2(t)$ *е непрекъсната и има непрекъснати производни от произволен ред*.
- *Векторите* $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0$ *и* $\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1$ *са допирателни вектори към кривата съответно в точките* $\mathbf{b_0}$ *и* $\mathbf{b}_2$.
- *Параболата е равнинна крива.*
- *Изпъкнала обвивка.*
- *Линейна точност.*

Криви на Bézier

Нека $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, . . . , $\mathbf{b}_n$ са $n+1$ различни точки в $\mathbb{R}^3$ и $t \in [0,1]$. Алгоритъмът на de Casteljau използва последователни линейни интерполации и след n стъпки построява точка $\mathrm{b}_0^n(t)$ върху полиномиална крива $\mathcal{B}$ от степен n.

Криви на Bézier

Нека $n \in \mathbb{N}$**,** b_0**,** b_1**, . . . ,** b_n **са** $n+1$ **различни точки в** $\mathbb{R}^3$ **и** $t \in [0,1]$**. Алгоритъмът на de Casteljau използва последователни линейни интерполации и след** n **стъпки построява точка** $\mathrm{b}_0^n(t)$ **върху полиномиална крива** $\mathcal{B}$ **от степен** n**.**

Кривата $\mathcal{B}$ **се нарича крива на Bézier.**

Криви на Bézier

Нека $n \in \mathbb{N}$, b_0, b_1, ..., b_n са $n+1$ различни точки в $\mathbb{R}^3$ и $t \in [0,1]$. Алгоритъмът на de Casteljau използва последователни линейни интерполации и след n стъпки построява точка $\mathrm{b}_0^n(t)$ върху полиномиална крива $\mathcal{B}$ от степен n.

Кривата $\mathcal{B}$ се нарича крива на Bézier.

Точките b_i, $i = 0, \ldots, n$, се наричат контролни точки или точки на Bézier.

Криви на Bézier

Нека $n \in \mathbb{N}$, b_0, b_1, ..., b_n са $n+1$ различни точки в $\mathbb{R}^3$ и $t \in [0,1]$. Алгоритъмът на de Casteljau използва последователни линейни интерполации и след n стъпки построява точка $\mathrm{b}_0^n(t)$ върху полиномиална крива $\mathcal{B}$ от степен n.

Кривата $\mathcal{B}$ се нарича крива на Bézier.

Точките b_i, $i = 0, \ldots, n$, се наричат контролни точки или точки на Bézier.

Полигонът с върхове $\mathrm{b}_0, \ldots, \mathrm{b}_n$ се нарича контролен полигон или полигон на Bézier на кривата.

Алгоритъм на de Casteljau

Вход: $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{b}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t), \quad r = 1, \ldots, n;\ i = 0, \ldots, n-r$$

$$\mathbf{b}_i^0 = \mathbf{b}_i$$

Изход: $\mathrm{b}_0^n(t)$ **е точка от кривата $\mathcal{B}$, съответстваща на параметъра t.**

Схема на de Casteljau

$$\begin{array}{llll} \mathbf{b}_0 & & & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1 & & \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1 & \mathbf{b}_0^2 & \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2^1 & \mathbf{b}_1^2 & \mathbf{b}_0^3 \end{array}$$

Схема на de Casteljau

$$
\begin{array}{llll}
\mathbf{b}_0 & & & \\
\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1 & & \\
\mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1 & \mathbf{b}_0^2 & \\
\mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2^1 & \mathbf{b}_1^2 & \mathbf{b}_0^3
\end{array}
$$

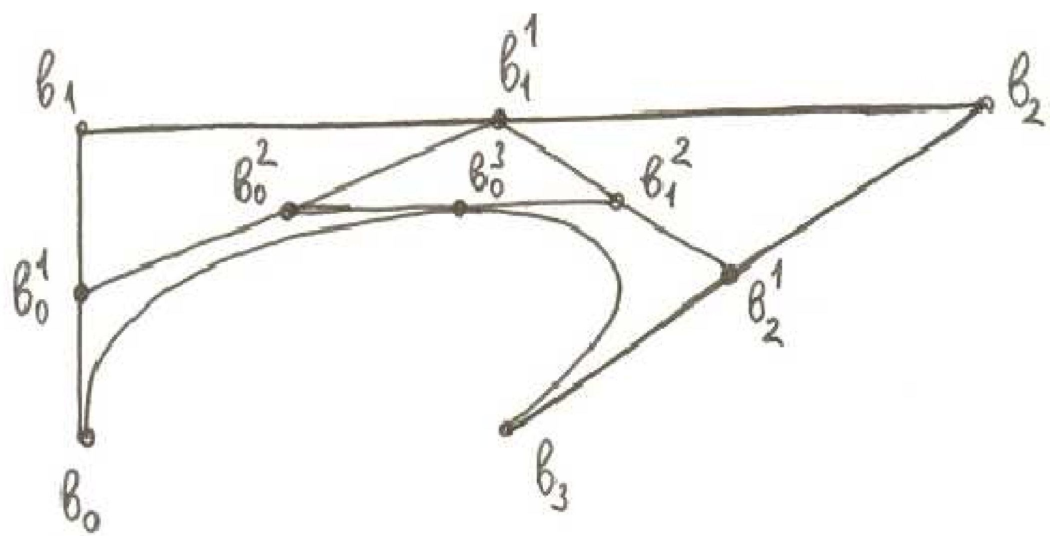
Пример. **Напишете схемата на de Casteljau за $t = 1/2$ за равнинната крива с контролни точки $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(8, 2)$, $(4, 0)$.**

Схема на de Casteljau...

$$
\begin{array}{llll}
(0,0) & & & \\
(0,2) & (0,1) & & \\
(8,2) & (4,2) & (2,3/2) & \\
(4,0) & (6,1) & (5,3/2) & (7/2,3/2)
\end{array}
$$

Схема на de Casteljau...

$$
\begin{array}{llll}
(0,0) & & & \\
(0,2) & (0,1) & & \\
(8,2) & (4,2) & (2,3/2) & \\
(4,0) & (6,1) & (5,3/2) & (7/2,3/2)
\end{array}
$$



Свойства на кривите на Bézier.

Свойства на кривите на Bézier.

- *Афинна инвариантност.*

Свойства на кривите на Bézier.

- *Афинна инвариантност.*
- *Инвариантност при афинни преобразувания на параметъра*.

Свойства на кривите на Bézier.

- *Афинна инвариантност.*
- *Инвариантност при афинни преобразувания на параметъра*.

Ако кривата е дефинирана в произволен интервал $a \leq u \leq b$**, правим смяна на параметъра** $0 \leq t = \frac{u-a}{b-a} \leq 1$**,**

$$\mathbf{b}_i^r(u) = \frac{b-u}{b-a}\mathbf{b}_i^{r-1}(u) + \frac{u-a}{b-a}\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(u).$$

Свойства на кривите на Bézier.

- *Афинна инвариантност.*
- *Инвариантност при афинни преобразувания на параметъра*.

Ако кривата е дефинирана в произволен интервал $a \le u \le b$, правим смяна на параметъра $0 \le t = \frac{u-a}{b-a} \le 1$,

$$\mathbf{b}_i^r(u) = \frac{b-u}{b-a}\mathbf{b}_i^{r-1}(u) + \frac{u-a}{b-a}\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(u).$$

- *Свойството на изпъкналата обвивка.*

Свойства на кривите на Bézier.

- *Афинна инвариантност.*
- *Инвариантност при афинни преобразувания на параметъра*.

Ако кривата е дефинирана в произволен интервал $a \leq u \leq b$, правим смяна на параметъра $0 \leq t = \frac{u-a}{b-a} \leq 1$,

$$\mathbf{b}_i^r(u) = \frac{b-u}{b-a}\mathbf{b}_i^{r-1}(u) + \frac{u-a}{b-a}\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(u).$$

- *Свойството на изпъкналата обвивка.*

Следствие: **Равнинен полигон генерира равнинна крива.**

Свойства на кривите на Bézier.

- *Афинна инвариантност.*
- *Инвариантност при афинни преобразувания на параметъра*.

Ако кривата е дефинирана в произволен интервал $a \le u \le b$**,**
правим смяна на параметъра $0 \le t = \frac{u-a}{b-a} \le 1$**,**

$$\mathbf{b}_i^r(u) = \frac{b-u}{b-a}\mathbf{b}_i^{r-1}(u) + \frac{u-a}{b-a}\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(u).$$

- *Свойството на изпъкналата обвивка.*

Следствие: **Равнинен полигон генерира равнинна крива.**
Пример. **Interference checking**
`http://www.vis.uni-stuttgart.de/~kraus/LiveGraphics3D/cagd/chap5f`

Свойства на кривите на Bézier...

Свойства на кривите на Bézier...

- *Интерполация на крайните контролни точки.* **Следва от схемата на de Casteljau, приложена за $t = 0$ и $t = 1$.**

Свойства на кривите на Bézier...

- *Интерполация на крайните контролни точки.* **Следва от схемата на de Casteljau, приложена за $t = 0$ и $t = 1$.**

- *Симетрия.* **Ако вместо полигона $\mathrm{b}_0, \dots, \mathrm{b}_n$ разгледаме полигона $\mathrm{b}_n, \dots, \mathrm{b}_0$, ще получим същата крива.**

Свойства на кривите на Bézier...

- *Интерполация на крайните контролни точки.* **Следва от схемата на de Casteljau, приложена за $t = 0$ и $t = 1$.**
- *Симетрия.* **Ако вместо полигона $\mathrm{b}_0, \ldots, \mathrm{b}_n$ разгледаме полигона $\mathrm{b}_n, \ldots, \mathrm{b}_0$, ще получим същата крива.**
- *Линейна точност.* **Ако контролните точки са колинеарни, b^n е права линия.**

Алгоритъм на de Casteljau-обобщение

Алгоритъмът на de Casteljau може да се обобщи по следния начин:

Алгоритъм на de Casteljau-обобщение

Алгоритъмът на de Casteljau може да се обобщи по следния начин:

$$
\begin{array}{llll}
\mathbf{b}_0 & & & \\
\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1[t_1] & & \\
\mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1[t_1] & \mathbf{b}_0^2[t_1, t_2] & \\
\mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2^1[t_1] & \mathbf{b}_1^2[t_1, t_2] & \mathbf{b}_0^3[t_1, t_2, t_3].
\end{array}
$$

Алгоритъм на de Casteljau-обобщение

Алгоритъмът на de Casteljau може да се обобщи по следния начин:

$$
\begin{array}{llll}
\mathbf{b}_0 & & & \\
\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1[t_1] & & \\
\mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1[t_1] & \mathbf{b}_0^2[t_1, t_2] & \\
\mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2^1[t_1] & \mathbf{b}_1^2[t_1, t_2] & \mathbf{b}_0^3[t_1, t_2, t_3].
\end{array}
$$

Точката $\mathrm{b}_0^3[t_1, t_2, t_3]$ **е функция на три независими променливи, следователно вече не описва крива, а област в** $\mathbb{R}^3$**.**

Blossom

Дефиниция. Функцията на три променливи $\mathrm{b}[.,.,.]$ се нарича **blossom** на кривата $\mathrm{b}^3(t)$.

Blossom

Дефиниция. Функцията на три променливи $\mathrm{b}[.,.,.]$ се нарича **blossom** на кривата $\mathrm{b}^3(t)$.

Пресметнете $\mathbf{b}[0,0,0]$, $\mathbf{b}[1,1,1]$, $\mathbf{b}[0,0,1]$, $\mathbf{b}[0,0,1]$ и $\mathbf{b}[0,0,t]$.

Blossom

Дефиниция. **Функцията на три променливи $\mathrm{b}[.,.,.]$ се нарича blossom на кривата $\mathrm{b}^3(t)$.**

Пресметнете $\mathbf{b}[0,0,0]$, $\mathbf{b}[1,1,1]$, $\mathbf{b}[0,0,1]$, $\mathbf{b}[0,0,1]$ и $\mathbf{b}[0,0,t]$.

$$
\begin{array}{llll}
\mathbf{b}_0 & & & \\
\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0 & & \\
\mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0 & \\
\mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}[0,0,1].
\end{array}
$$

Blossom

Дефиниция. **Функцията на три променливи** $\mathrm{b}[.,.,.]$ **се нарича blossom на кривата** $\mathrm{b}^3(t)$**.**

Пресметнете $\mathbf{b}[0,0,0]$**,** $\mathbf{b}[1,1,1]$**,** $\mathbf{b}[0,0,1]$**,** $\mathbf{b}[0,0,1]$ **и** $\mathbf{b}[0,0,t]$**.**

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{b}_0 & & & \\
\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0 & & \\
\mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0 & \\
\mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}[0,0,1].
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{b}_0 & & & \\
\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0 & & \\
\mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0 & \\
\mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1 = \mathbf{b}[0,0,t].
\end{array}$$

Blossom...

Цялата схема на de Casteljau може се запише като

$$
\begin{array}{llll}
\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}[0,0,0] & & & \\
\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}[0,0,1] & \mathbf{b}[0,0,t] & & \\
\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}[0,1,1] & \mathbf{b}[0,t,1] & \mathbf{b}[0,t,t] & \\
\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}[1,1,1] & \mathbf{b}[t,1,1] & \mathbf{b}[t,t,1] & \mathbf{b}[t,t,t].
\end{array}
$$

Blossom...

Цялата схема на de Casteljau може се запише като

$$
\begin{array}{llll}
\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}[0,0,0] & & & \\
\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}[0,0,1] & \mathbf{b}[0,0,t] & & \\
\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}[0,1,1] & \mathbf{b}[0,t,1] & \mathbf{b}[0,t,t] & \\
\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}[1,1,1] & \mathbf{b}[t,1,1] & \mathbf{b}[t,t,1] & \mathbf{b}[t,t,t].
\end{array}
$$

За крива от произволна степен n контролните точки са

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}[0^{<n-i>}, 1^{<i>}],$$

където $t^{<r>}$ означава, че t участва r пъти като аргумент.

Blossom...

Алгоритъмът на de Casteljau може да се запише чрез blossom по следния начин:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}[0^{<n-r-i>}, t^{<r>}, 1^{<i>}] &= (1-t)\mathbf{b}[0^{<n-r-i+1>}, t^{<r-1>}, 1^{<i>}] \\ &\quad + t\,\mathbf{b}[0^{<n-r-i>}, t^{<r-1>}, 1^{<i+1>}].\end{aligned}$$

Blossom...

Алгоритъмът на de Casteljau може да се запише чрез blossom по следния начин:

$$\mathbf{b}[0^{<n-r-i>}, t^{<r>}, 1^{<i>}] \quad = \quad (1-t)\mathbf{b}[0^{<n-r-i+1>}, t^{<r-1>}, 1^{<i>}] + t\,\mathbf{b}[0^{<n-r-i>}, t^{<r-1>}, 1^{<i+1>}].$$

Дефиниция. **Функции, чиито стойности не зависят от наредбата на аргументите им, се наричат** симетрични **функции.**

Blossom...

Алгоритъмът на de Casteljau може да се запише чрез blossom по следния начин:

$$\mathbf{b}[0^{<n-r-i>}, t^{<r>}, 1^{<i>}] \quad = \quad (1-t)\mathbf{b}[0^{<n-r-i+1>}, t^{<r-1>}, 1^{<i>}]$$
$$+t\,\mathbf{b}[0^{<n-r-i>}, t^{<r-1>}, 1^{<i+1>}].$$

Дефиниция. **Функции, чиито стойности не зависят от наредбата на аргументите им, се наричат** **симетрични** **функции.**

Твърдение. *Функцията blossom е симетрична полиномиална функция на n променливи.*

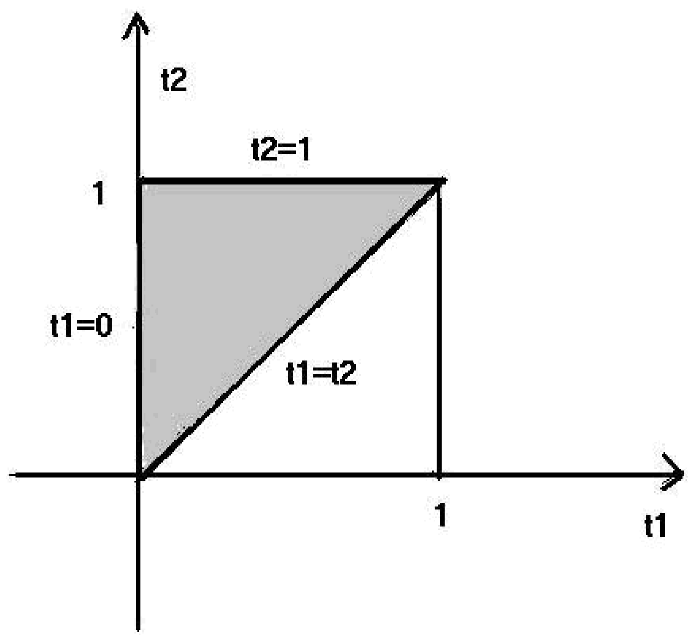
Blossom

Задача. **Нека b_0, b_1, b_2 са три различни точки в $\mathbb{R}^3$. Каква област в $\mathbb{R}^3$ описва функцията $b[t_1, t_2]$, където $0 \leq t_1$, $t_2 \leq 1$?**

Blossom

Задача. **Нека b_0, b_1, b_2 са три различни точки в $\mathbb{R}^3$. Каква област в $\mathbb{R}^3$ описва функцията $b[t_1, t_2]$, където $0 \le t_1,\ t_2 \le 1$?**

Дефиниционната област на функцията $b[t_1, t_2]$



Blossom

Областта, която се описва от функцията $b[t_1, t_2]$