Софийски Университет “Св. Климент Охридски”
Факултет по Математика и Информатика

Е. Христов, К. Влъчкова

ЗАДАЧИ и ТЕОРЕМИ

по

КОМПЛЕКСЕН АНАЛИЗ

София, 2010 г.

Евгени Христов Христов
Красимира Влъчкова Александрова
Софийски Университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по Математика и Информатика
http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/companal/hristov
http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/companal/krassivl

Задачи и теореми по комплексен анализ
за студентите от специалност „Приложна математика“
Рецензент: проф. д. м. н. Рачо Денчев
Художествено оформление на корицата: Е. Христов
ISBN 978-954-9526-65-3
Издателство „Деметра“
София, 2010 г.

ПРЕДГОВОР

Този сборник от задачи и теореми по комплексен анализ е предназначен преди всичко за студентите от специалностите „Приложна математика“ и „Математика и информатика“ във ФМИ на СУ. Той съдържа задачи и теореми от основните раздели на комплексния анализ, които традиционно се изучават в университетския курс. По-голямата част от задачите са представени с решения, а останалите - с необходимите указания и отговори. Всеки раздел започва със сравнително лесни задачи, подпомагащи изучаването на базисния материал. По-трудните задачи са отбелязани със символа ♠. В началото на всеки раздел накратко са изложени и основни сведения от теорията, касаеща раздела. Начинът на изложение съответства на курса по комплексен анализ, четен от Е. Христов през последните години на студентите от спец. „Приложна математика“ във ФМИ. Теоретичните сведения по никакъв начин не претендират за пълнота и изчерпателност и не могат да заменят изучаването на съответния материал с помощта на учебниците, цитирани в края на сборника. В предпоследния раздел са представени и задачи, които илюстрират ефективността на методите на комплексния анализ при решаване на проблеми от хидромеханиката, спектралната теория, квантовата механика и др. Последният раздел съдържа задачи, давани на контролни и писмени изпити за специалността „Приложна математика“ във ФМИ на СУ. Надяваме се, че така съставеният сборник ще е полезен на студентите за по-лесно усвояване на учебния материал и ще стимулира по-задълбоченото му изучаване.

София, 2010 г. Авторите

Съдържание

ОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbb{N}$ - множеството на естествените числа
$\mathbb{Z}$ - множеството на целите числа
$\mathbb{R}$ - множеството на реалните числа
$\mathbb{C}$ - множеството на комплексните числа
$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ - разширената комплексна равнина
$x = \operatorname{Re} z$ - реалната част на комплексното число z
$y = \operatorname{Im} z$ - имагинерната част на комплексното число z
$\overline{z}$ - комплексно спрегнатото на комплексното число z
$|z|$ - модул на комплексното число z
$\arg z$ - аргумент на комплексното число z
$\equiv$ - „е тъждествено равно на“
$\Rightarrow$ - „следователно“
$\Leftrightarrow$ - „тогава и само тогава“
$\in$ - „е елемент на множеството“
$\forall$ - „за всяко“
$:=$ - „по дефиниция е равно на“
$\to$ - „клони към“
Π - произведение
$\exp(x) := e^x$
$\deg P$ - степента на полинома P
∂D - границата на областта D
$\overline{D}$ - затворената обвивка на областта D, т. е. $\overline{D} := D \bigcup \partial D$

Глава 1

Комплексни числа

1.1 Комплексни числа и действия с тях

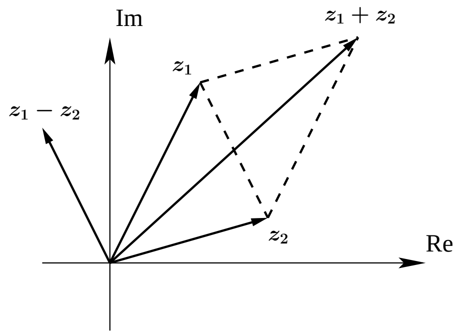
Дефиниция 1. Комплексно число z дефинираме като $\boldsymbol{z := x + iy}$, където x и y са реални числа и $i^2 := -1$.

Символът i се нарича **имагинерна единица**. Множеството на комплексните числа ще означаваме с $\mathbb{C}$. Изразът $x + iy$ се нарича **алгебричен вид** на числото z. Числата x и y се наричат съответно **реална** и **имагинерна част** на комплексното число z и се означават $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Ако $x = 0$, числото $z = iy$ се нарича **чисто имагинерно**.

- Две комплексни числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ са равни тогава и само тогава, когато $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.
- Сума на комплексните числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ се нарича комплексното число $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
- Произведение на комплексните числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ се нарича комплексното число $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Забележка. *От последните равенства следва, че комплексните числа се умножават и събират като многочлени на i, като i^2 се заменя с* -1.

Ако в равнината е зададена ортогонална координатна система Oxy, на всяко комплексно число $z = x + iy$ може да съпоставим точката $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Така получаваме взаимно-еднозначно съответствие между



Фигура 1.1: Събиране (транслация)

множеството на комплексните числа $\mathbb{C}$ и равнината $\mathbb{R}^2$. В тази връзка множеството $\mathbb{C}$ се нарича **комплексна (гаусова) равнина**.

На всяко комплексно число z може да се съпостави вектор с начало $(0, 0)$ и край (x, y), който ще означаваме също със z. Векторът $z_1 + z_2$, който се получава по правилото на успоредника за събиране на вектори (фиг. 1.1), съответства на числото z_1+z_2 от дефиницията. Следователно съответствието между комплексните числа и векторите в равнината се пренася и върху операцията събиране. Геометричната интерпретация на операцията събиране, при която на z_1 се съпоставя числото $z_1 + z_2$, е транслация на вектор z_2 (фиг. 1.1). Комплексното число $x - iy$ се нарича **спрегнато** на комплексното число $x + iy$ и се означава с $\bar{z}$. От дефиницията следват свойствата $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ и $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

Реалното число $\sqrt{x^2 + y^2}$ се нарича **модул** на комплексното число $z = x + iy$ и се означава с $|z|$. Изпълнено е

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2. \tag{1.1}$$

От геометричната интерпретация на операцията събиране (фиг. 1.1) и от неравенството на триъгълника следват неравенствата

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|. \tag{1.2}$$

Дясното неравенство в (1.2) също ще наричаме **неравенство на триъгълника**. Лявото неравенство следва от дясното:

$$|z_2| = |(z_1 + z_2) + (-z_1)| \le |z_1 + z_2| + |z_1|,$$
$$|z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \le |z_1 + z_2| + |z_2|.$$

От фиг. 1.1 се вижда още, че разстоянието между z_1 и z_2 е $|z_1 - z_2|$.

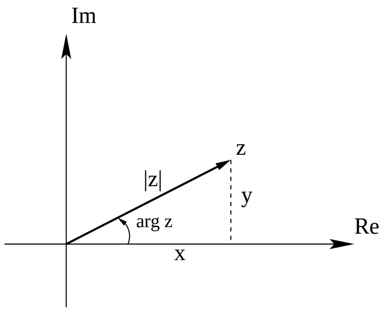
Всяко φ, за което

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi, \tag{1.3}$$

се нарича **аргумент** на комплексното число $z = x + iy$ и се означава с $\mathbf{arg}\, \boldsymbol{z}$. Вижда се, че аргументът се определя с точност до кратно на 2π. **Главното значение** на аргумента се определя от условието

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

Геометрически аргументът представлява ориентирания ъгъл между положителната посока на реалната ос и вектора z (фиг. 1.2). От (1.1) и



Фигура 1.2: Геометрично представяне

(1.3) получаваме **тригонометричния** вид[1] на комплексно число

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

В сила е следната **формула на Ойлер**[2]

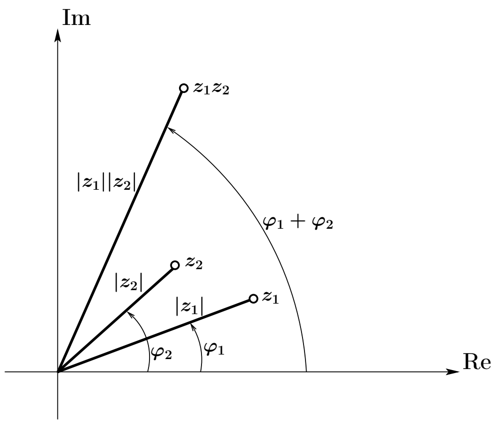
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{1.4}$$

откъдето следва

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{1.5}$$

[1]Тъй като връзката между декартовите координати (x, y) и полярните координати (ρ, φ) е $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, където $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$, то тригонометричният вид се нарича още **полярна форма**.

[2]За дефиницията на експоненциалната функция e^z, $z \in \mathbb{C}$ и доказателството на формулата на Ойлер вж. Гл. 2, Елементарни трансцендентни функции.



Фигура 1.3: Умножение (ротация и хомотетия)

От (1.4) и $\rho = |z|$ получаваме $z = \rho e^{i\varphi}$, което също се нарича тригонометричен вид на z.

Ако $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то за произведението $z_1\,z_2$ получаваме

$$z_1\,z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)), \tag{1.6}$$

откъдето следва $|z_1\,z_2| = |z_1||z_2|$ и $\arg(z_1\,z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$. Геометричната интерпретация на операцията умножение, при която на z_1 се съпоставя числото $z_1\,z_2$, е последователно прилагане на хомотетия с център т. 0 и коефициент $|z_2|$ и ротация с център т. 0 на ъгъл φ_2, без значение в какъв ред (фиг. 1.3).

От въведените по-горе операции с комплексни числа следват формули за реципрочно и частно.

- Ако $z = x + iy \neq 0$, то $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$.
- Ако $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

От тези формули следва $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Ще докажем следната
Формула на Моавър. *Нека* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$*. Тогава за всяко естествено число* n *е изпълнено*

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{1.7}$$

откъдето следва

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} := z_k &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \\ &= \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n}i}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Доказателство. Формулата (1.7) следва по индукция от (1.6). Ще докажем (1.8). Да разгледаме уравнението

$$w^n = z, \tag{1.9}$$

където при дадено $z \in \mathbb{C}$ търсим решение w. Представяме z и w в тригонометричен вид, съответно $z = |z|e^{i\varphi}$, $w = |w|e^{i\psi}$, където $\psi = \arg w$. Тогава от (1.7) и (1.9) получаваме $|w|^n e^{in\psi} = |z|e^{i\varphi}$, откъдето следва $|w|^n = |z|$ и $n\psi = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Следователно $|w| = \sqrt[n]{|z|}$, $\psi = \frac{\varphi+2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е. решенията w на уравнението (1.9) се дават с формулата (1.8). ■

Забележка.

(1) *За разлика от операцията „коренуване" в множеството на реалните числа, при коренуване на комплексни числа се получават точно* n *на брой различни корена (дори и ако* $\operatorname{Im} z = 0$*, т. е.* z *е реално). Геометрически значенията на* $\sqrt[n]{z}$ *са разположени във върховете на правилен* n*-ъгълник, вписан в окръжност с център* $z = 0$ *и радиус* $\sqrt[n]{|z|}$.

(2) *Уравнението* $z^n = 1$ *има точно* n *различни решения* $z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, *наричани* **n-ти корени на единицата**.

Задача 1.1.1 *Представете следните комплексни числа в алгебричен вид* **(а)** $\frac{1}{1-i}$ **(б)** $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

Решение.

(а) $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$

(б) $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 i\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\left(\frac{1}{2}\right)\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$
$= -1 + i0$

Задача 1.1.2 *Извършете действията и запишете отговора в алгебричен вид.* **(а)** $\overline{(1+i)(2+i)}(3+i)$ **(б)** $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$ **(в)** $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$

Отг. **(а)** $z = 6 - 8i$ **(б)** $z = -2 + \frac{3}{2}i$ **(в)** $z = 2$

Задача 1.1.3 *Намерете модулите на числата*

(а) $\frac{4-3i}{2-i}$ **(б)** $\frac{(1-i)^{2010}}{(1+i)^{2010}}$

Решение. **(а)** $\left|\frac{4-3i}{2-i}\right| = \frac{|4-3i|}{|2-i|} = \frac{\sqrt{16+9}}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}.$

(б) $\left|\frac{(1-i)^{2010}}{(1+i)^{2010}}\right| = \left|\frac{1-i}{1+i}\right|^{2010} = |-i|^{2010} = 1$

Условие **(б)** може да реши и като забележим, че числото $1-i$ е спрегнато на $1+i$, следователно $|1-i| = |1+i|$. Тогава

$$\left|\frac{(1-i)^{2010}}{(1+i)^{2010}}\right| = \left(\frac{|1-i|}{|1+i|}\right)^{2010} = 1.$$

Задача 1.1.4 *Представете в тригонометричен вид чрез главната стойност на аргумента следните числа:*

(а) 1 **(б)** i **(в)** $1-i$ **(г)** $\dfrac{2}{1-i\sqrt{3}}$

Решение. Първо намираме модула на числото, а после и главната стойност на аргумента му.

(а) $1 = 1 + i0 = 1(1+i0) = 1(\cos 0 + i\sin 0) = e^{0\cdot i},$

(б) $i = 1(0+i) = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}i},$

(в) $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\big(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\big) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i},$

(г) $\frac{2}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2(1+i\sqrt{3})}{4} = 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{\pi}{3}i}.$

Задача 1.1.5 *Да се намерят модулите и аргументите на следните комплексни числа z:*

(а) $-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7},$ **(б)** $(-4+3i)^3,$ **(в)** $\frac{(1+i)^8}{(1-i\sqrt{3})^6}.$

Отг. **(а)** $|z| = 1, \quad \arg z = \frac{6\pi}{7} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
(б) $|z| = 125, \quad \arg z = -3\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{4} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
(в) $|z| = \frac{1}{4}, \quad \arg z = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Задача 1.1.6 *Представете в тригонометричен вид числото*

$$z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha, \qquad 0 \le \alpha < 2\pi.$$

Решение. Първо намираме модула на z, $|z|^2 = (1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 2(1-\cos\alpha) = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Тъй като $0 \le \alpha < 2\pi$, то $|z| = 2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = 2\sin\frac{\alpha}{2}$. Тогава

$$\begin{aligned} z &= 2\sin^2\tfrac{\alpha}{2} + 2i\sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2} = 2\sin\tfrac{\alpha}{2}\big(\sin\tfrac{\alpha}{2} + i\cos\tfrac{\alpha}{2}\big) \\ &= 2\sin\tfrac{\alpha}{2}\Bigg(\cos\big(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\alpha}{2}\big) + i\sin\big(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\alpha}{2}\big)\Bigg). \end{aligned}$$

Следователно $z = 2\sin\frac{\alpha}{2} e^{i(2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2})}, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Задача 1.1.7 ♠ *Като използвате формулата на Моавър* (1.7)*, докажете, че*

(а) $\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1,$
$\cos 6\varphi = 32\cos^6\varphi - 48\cos^4\varphi + 18\cos^2\varphi - 1.$

(б) *Намерете реалните корени на уравнението*
$$16x^6 - 28x^4 + 13x^2 - 1 = 0. \tag{1.10}$$

Решение. (а) От формулата на Моавър (1.7) за $n = 4$ последователно получаваме

$$\begin{aligned} &\cos 4\varphi = \mathrm{Re}(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi) = \mathrm{Re}\Big((\cos\varphi + i\sin\varphi)^4\Big) \\ &= \mathrm{Re}\Bigg(\cos^4\varphi + \binom{4}{1}\cos^3\varphi(i\sin\varphi) + \binom{4}{2}\cos^2\varphi(i\sin\varphi)^2 \\ &\qquad + \binom{4}{3}\cos\varphi(i\sin\varphi)^3 + \binom{4}{4}(i\sin\varphi)^4\Bigg) \\ &= \cos^4\varphi - \binom{4}{2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \binom{4}{4}\sin^4\varphi \\ &= \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi(1-\cos^2\varphi) + (1-\cos^2\varphi)^2 = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1. \end{aligned}$$

Формулата за $\cos 6\varphi$ се доказва аналогично.

(б) Нека $x = \cos\varphi$. Тогава от **(а)** следва $16x^6 - 28x^4 + 13x^2 - 1 = \frac{\cos 6\varphi - \cos 4\varphi}{2} = -\sin 5\varphi \sin\varphi$. Ако $\sin\varphi = 0$, то $\cos\varphi = \pm 1$. Следователно ± 1 са корени на уравнението (1.10). Изпълнено е

$16x^6 - 28x^4 + 13x^2 - 1 = (x^2 - 1)(16x^4 - 12x^2 + 1)$. Остава да намерим реалните корени на уравнението

$$16x^4 - 12x^2 + 1 = 0. \tag{1.11}$$

Ако положим $t = 2x$, уравнението (1.11) става $t^4 - 3t^2 + 1 = 0$. За неговите корени имаме $t_{1,2}^2 = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2} > 0$, откъдето следва, че уравнението (1.11) има четири реални корена $\pm\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{8}}$.

Задача 1.1.8 *Използвайки формулата на Моавър* (1.8)*, пресметнете*

$$\textbf{(а)}\ \sqrt{i} \quad \textbf{(б)}\ \sqrt[8]{-1} \quad \textbf{(в)}\ \sqrt[5]{1-i} \quad \textbf{(г)}\ \sqrt[4]{\frac{2}{1-i\sqrt{3}}}.$$

Решение.

(а) $z_k = \sqrt{i} = e^{i\frac{\pi/2+2k\pi}{2}} = e^{i\frac{(4k+1)\pi}{4}},\ k = 0, 1$

(б) $z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{8}},\ k = 0, \dots, 7$

(в) $z_k = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[5]{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}} = \sqrt[10]{2}e^{\frac{-\pi+8k\pi}{20}i},\ k = 0, \dots, 4$

(г) $z_k = \sqrt[4]{\frac{2}{1-i\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{e^{\frac{i\pi}{9}}} = e^{i\frac{\pi/3+2k\pi}{4}} = e^{i\frac{(6k+1)\pi}{12}},\ k = 0, \dots, 3$

Задача 1.1.9 *Решете уравненията*

$$\textbf{(а)}\ z^2 = 3 - 4i \qquad \textbf{(б)}\ \bar{z} = z^3 \qquad \textbf{(в)}\ |z| - z = 1 - 2i.$$

Решение. (а) $z^2 = 3 - 4i = 5\left(\frac{3}{5} - i\frac{4}{5}\right) \Rightarrow |z| = \sqrt{5}$. Ако означим $\arg z = \varphi$, то $\arg z^2 = 2\varphi$, следователно $\cos 2\varphi = \frac{3}{5}$ и $\sin 2\varphi = -\frac{4}{5}$. Тогава $\cos\varphi$ ще намерим чрез формулата $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$ откъдето получаваме $\cos\varphi = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. Също така от $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ намираме $\sin\varphi = \mp\frac{1}{\sqrt{5}}$. Така получаваме $z = \sqrt{5}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \pm(2 - i)$.

(б) $\bar{z} = z^3 \Rightarrow |z| = |z|^3 \Rightarrow |z| = 0$ или $|z| = 1$. Ако $|z| = 0$ следва, че $z = 0$. Ако $|z| = 1$, имаме $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{-i\varphi} = e^{3i\varphi} \Rightarrow$

$$-\varphi = 3\varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi = -\frac{k\pi}{2} \Rightarrow z = e^{-ik\pi/2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Окончателно, решенията на уравнението са $z = 0;\ \pm i;\ \pm 1$.

(в) $|z| - z = 1 - 2i \Rightarrow \operatorname{Im}(|z| - z) = -\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(1 - 2i) = -2 \Rightarrow \operatorname{Im} z = 2 \Rightarrow z = a + 2i$. Замествайки в уравнението, намираме $\sqrt{a^2 + 4} - a = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow z = \frac{3}{2} + 2i$.

Задача 1.1.10 *Нека* $\varphi,\ \psi \in \mathbb{R}$ *са такива, че* $0 \le \varphi - \psi \le \pi$. *Представете в тригонометричен вид числата* $e^{i\,\varphi} \pm e^{i\,\psi}$.

Решение. Имаме $e^{i\,\varphi} \pm e^{i\,\psi} = e^{i\,\frac{\varphi+\psi}{2}}(e^{i\,\frac{\varphi-\psi}{2}} \pm e^{-i\,\frac{\varphi-\psi}{2}})$. От формулите (1.5) следва

$$\begin{aligned} e^{i\,\varphi} + e^{i\,\psi} &= 2\cos\tfrac{\varphi-\psi}{2} e^{i\,\frac{\varphi+\psi}{2}}, \\ e^{i\,\varphi} - e^{i\,\psi} &= 2\,i\,\sin\tfrac{\varphi-\psi}{2} e^{i\,\frac{\varphi+\psi}{2}} = 2\sin\tfrac{\varphi-\psi}{2} e^{i\,\frac{\varphi+\psi+\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Задача 1.1.11 *Нека* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Използвайки формулите* (1.5), *пресметнете сумите* **(а)** $A = \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha$, **(б)** $B = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha$.

Решение. Ще пресметнем числото $A + iB$. Имаме

$$\begin{aligned} A + iB &= \sum_{k=1}^{n} (\cos k\alpha + i \sin k\alpha) = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\alpha} = e^{i\alpha}\frac{e^{i\alpha n} - 1}{e^{i\alpha} - 1} \\ &= \frac{\left(e^{i\frac{n}{2}\alpha} - e^{-i\frac{n}{2}\alpha}\right) e^{i\frac{n+1}{2}\alpha}}{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2} e^{i\frac{n+1}{2}\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Отделяйки реалната и имагинерна части, получаваме

$$A = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \qquad B = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 1.1.12 ♠

(а) *Нека* $P_{n-1}(z) = \frac{z^n-1}{z-1}$, $n \ge 2$. *Намерете* $P_{n-1}(1)$.

(б) *Нека* z_k, $k = 1, \dots, n$, *са върховете на правилен многоъгълник, вписан в единичната окръжност. Нека* d_k *е разстоянието между* z_k *и* z_1. *Докажете, че* $\prod_{k=2}^{n} d_k = n$.

(в) *Докажете, че* $2^{n-1} \sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \dots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = n$.

Решение.

(а) Тъй като $P_{n-1}(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + 1$, то $P_{n-1}(1) = n$.

(б) Без ограничение можем да считаме, че $z_1 = 1$. Тогава z_k са n-тите корени на единицата и $P_{n-1}(z) = \prod_{k=2}^{n}(z - z_k)$. Следователно $P_{n-1}(1) = \prod_{k=2}^{n}(1 - z_k) = n$. Тъй като $d_k = |1 - z_k|$, $k = 2, \dots, n$, то $\prod_{k=2}^{n} d_k = n$.

(в) Последователно получаваме

$$\begin{aligned} n &= \textstyle\prod_{k=2}^{n} |1 - z_k| = \prod_{k=1}^{n-1} |1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}| = \prod_{k=1}^{n-1} |e^{i\frac{k\pi}{n}}||e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}}| \\ &= \textstyle\prod_{k=1}^{n-1} |-2i\sin\frac{k\pi}{n}| = 2^{n-1} \sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \dots \sin\frac{(n-1)\pi}{n}. \end{aligned}$$

Задача 1.1.13 (закон на успоредника) *Нека a и b са произволни комплексни числа. Докажете, че $|a+b|^2+|a-b|^2=2|a|^2+2|b|^2$. Каква е геометричната интерпретация на доказаното тъждество?*

Решение.

$$|a+b|^2+|a-b|^2=(a+b)(\bar{a}+\bar{b})+(a-b)(\bar{a}-\bar{b})=2a\bar{a}+2b\bar{b}=2|a|^2+2|b|^2.$$

Задача 1.1.14 *Да се докаже, че за всеки n на брой числа $z_1,\dots z_n$, е в сила неравенството $|z_1+z_2+\ldots+z_n|\leq|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|$.*

Решение. Неравенството се доказва чрез индукция по n. Ще отбележим, че за $n=1$ получаваме неравенството на триъгълника (1.2), което можем да докажем и аналитично по следния начин:

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2\\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\leq|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\bar{z}_2|\\ &= (|z_1|+|z_2|)^2.\end{aligned}$$

Задача 1.1.15 (неравенство на Коши) *Да се докаже, че за всеки $2n$ на брой комплексни числа $z_1,z_2,\dots,z_n$; $\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n$ е изпълнено неравенството*

$$\left|\sum_{j=1}^n z_j\bar{\zeta}_j\right|^2\leq\sum_{j=1}^n|z_j|^2\sum_{j=1}^n|\zeta_j|^2. \tag{1.12}$$

Решение. Полагаме $A:=\sum_{j=1}^n|z_j|^2$, $B:=\sum_{j=1}^n|\zeta_j|^2$, $C:=\sum_{j=1}^n z_j\bar{\zeta}_j$. Ще докажем, че $|C|^2\leq AB$. Имаме

$$\begin{aligned}0 &\leq \sum_{j=1}^n|Bz_j-C\zeta_j|^2=\sum_{j=1}^n(Bz_j-C\zeta_j)(B\bar{z}_j-\bar{C}\bar{\zeta}_j) \qquad (1.13)\\ &= B^2\sum_{j=1}^n|z_j|^2-B\bar{C}\sum_{j=1}^n z_j\bar{\zeta}_j-BC\sum_{j=1}^n\bar{z}_j\zeta_j+|C|^2\sum_{j=1}^n|\zeta_j|^2\\ &= B^2A-2BC\bar{C}+|C|^2B\\ &= B^2A-B|C|^2=B(AB-|C|^2).\end{aligned}$$

От (1.13) следва, че в (1.12) има равенство тогава и само тогава, когато $Bz_j=C\zeta_j$, $j=1,\dots n$, т.е. когато $z_j=\alpha\zeta_j$, $j=1,\dots n$, $\alpha\in\mathbb{C}$.

Задача 1.1.16 (Питагорова теорема) *Нека z_1, z_2, z_3 са три различни комплексни числа. Докажете, че следните равенства*

$$|z_1 - z_3|^2 = |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 \tag{1.14}$$

$$z_3 - z_2 = i\beta(z_2 - z_1), \qquad \beta \neq 0,\ \beta \in \mathbb{R} \tag{1.15}$$

са еквивалентни и направете геометрична интерпретация на получения резултат.

Решение. Да положим $\mu := \frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}$. Тогава

$$z_3 - z_2 = \mu(z_2 - z_1),\ z_3 - z_1 = z_3 - z_2 + z_2 - z_1 = (1 + \mu)(z_2 - z_1).$$

Равенството (1.14) е еквивалентно на $|1+\mu|^2 = 1+|\mu|^2$, т. е. $(1+\mu)(1+\bar{\mu}) = 1 + \mu\bar{\mu}$, откъдето получаваме $\mu + \bar{\mu} = 2\operatorname{Re}\mu = 0$. Последното равенство е еквивалентно на $\mu = i\,\beta$, което е точно неравенството (1.15) ($\beta \neq 0$ следва от $z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_1$).

Задача 1.1.17 *Докажете, че уравнението $a\,z - \bar{a}\,\bar{z} + b = 0$, където $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $b = ih$, $h \in \mathbb{R}$, е декартово уравнение на права, т. е. уравнение от вида $Ax + By + C = 0$, A, B, $C \in \mathbb{R}$.*

Решение. Като заместим в даденото уравнение със $z = x + iy$, получаваме $a(x + iy) - \bar{a}(x - iy) + ih = (a - \bar{a})x + i(a + \bar{a})y + ih = 2i\operatorname{Im} a\,x + 2i\operatorname{Re} a\,y + ih = 0$. Като положим $A := \operatorname{Re} a$, $B := \operatorname{Im} a$, $C := h$, получаваме исканото твърдение.

Задача 1.1.18 *Докажете, че уравнението $z\bar{z} + l\,z + \bar{l}\bar{z} + m = 0$, където $m \in \mathbb{R}$, $m < |l|^2$, е декартово уравнение на окръжност, т. е. уравнение от вида $(x-A)^2 + (y-B)^2 = C^2$, A, B, $C \in \mathbb{R}$. Каква е връзката между центъра и радиуса на окръжността и числата l и m?*

Задача 1.1.19 *Нека $\triangle a\,b\,c$ е положително ориентиран.*[3] *Докажете, че $\triangle a\,b\,c$ е равностранен $\Leftrightarrow a + b\omega + c\omega^2 = 0$, където $\omega = e^{\frac{2}{3}\pi\, i}$.*

Решение. Първо ще покажем, че ако транслираме $\triangle a\,b\,c$ на произволен вектор $d \neq 0$, $d \in \mathbb{C}$, твърдението остава в сила, т. е. ще докажем, че $a+d+(b+d)\omega+(c+d)\omega^2 = a+b\omega+c\omega^2$. Последното равенство следва от $1+\omega+\omega^2 = \frac{1-w^3}{1-w} = 0$, защото $\omega = e^{\frac{2}{3}\pi\, i}$. Сега да транслираме $\triangle a\,b\,c$ така, че $a \equiv 0$. Остава да докажем, че $\triangle 0\,b\,c$ е равностранен $\Leftrightarrow b + c\omega = 0$.

$\triangle 0\,b\,c$ е равностранен $\Leftrightarrow$ $c = be^{\frac{i\pi}{3}}$ $\Leftrightarrow$ $b + c\omega = b + be^{\frac{i\pi}{3}}e^{\frac{2}{3}\pi\, i} = b - b = 0$.

[3] $\triangle a\,b\,c$ наричаме **положително ориентиран**, ако ориентираният ъгъл $\angle\,b\,a\,c$ е такъв, че $0 < \angle\,b\,a\,c < \pi$. Съответно, $\triangle a\,b\,c$ е **отрицателно ориентиран**, ако $0 < \angle\,c\,a\,b < \pi$.

Задача 1.1.20 *Нека $\triangle a\,b\,c$ е отрицателно ориентиран. Докажете, че $\triangle a\,b\,c$ е равностранен $\Leftrightarrow$ $a\omega^2 + b\omega + c = 0$, където $\omega = e^{\frac{2}{3}\pi\, i}$.*

Задача 1.1.21 *Намерете медицентъра на $\triangle a\,b\,c$.* **Отг.** $\frac{a+b+c}{3}$

Задача 1.1.22 *Докажете, че лицето S на положително ориентирания $\triangle a\,b\,c$ е $S = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,(\bar{a}\,b + \bar{b}\,c + \bar{c}\,a)$.*

Решение. Първо ще покажем, че ако транслираме $\triangle a\,b\,c$ на вектор $d \neq 0$, където $d \in \mathbb{C}$, е изпълнено

$$\mathrm{Im}\,(\bar{a}\,b + \bar{b}\,c + \bar{c}\,a) = \mathrm{Im}\,\big(\overline{a+d}\,(b+d) + \overline{b+d}\,(c+d) + \overline{c+d}\,(a+d)\big),$$

т. е. S е инвариантно при транслация на $\triangle a\,b\,c$. След разкриване на скобите получаваме, че горното равенство е еквивалентно на

$$\mathrm{Im}\,\big((\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})d + (a+b+c)\bar{d} + 3|d|^2\big) = 0.$$

Това равенство е вярно, защото първите две събираеми са комплексно спрегнати и освен това $|d| \in \mathbb{R}$. Нека сега транслираме $\triangle a\,b\,c$ така, че $a \equiv 0$. Трябва да покажем, че лицето на $\triangle 0\,b\,c$ е $S = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\bar{b}c$. Да означим с α ориентирания ъгъл при върха 0. Тогава $c = \frac{|c|}{|b|}e^{i\alpha}b$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\bar{b}c = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\big(\tfrac{|c|}{|b|}e^{i\alpha}b.\bar{b}\big) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\big(|b||c|e^{i\alpha}\big) = \frac{1}{2}\,|b||c|\sin\alpha = S.$$

Задача 1.1.23 *Нека $\triangle a\,b\,c$ е положително ориентиран и p е негова вътрешна точка. Нека $a_1,\ b_1,\ c_1$ са медицентрове съответно на $\triangle b\,c\,p$, $\triangle c\,a\,p$, $\triangle a\,b\,p$. Докажете, че $S_{a_1b_1c_1} = \frac{1}{9}S_{abc}$.*

Решение. Без ограничение ще предполагаме, че $p \equiv 0$. Тогава от зад. 1.1.22 и зад. 1.1.21 следва

$$\begin{aligned}
S_{a_1b_1c_1} &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,(\overline{a_1}\,b_1 + \overline{b_1}\,c_1 + \overline{c_1}\,a_1)\\
&= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\big(\overline{\tfrac{b+c+p}{3}}\cdot\tfrac{a+c+p}{3} + \overline{\tfrac{a+c+p}{3}}\cdot\tfrac{a+b+p}{3}\\
&\quad + \overline{\tfrac{a+b+p}{3}}\cdot\tfrac{b+c+p}{3}\big)\\
&= \tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\big(\overline{\tfrac{b+c}{3}}\;\tfrac{a+c}{3} + \overline{\tfrac{a+c}{3}}\;\tfrac{a+b}{3} + \overline{\tfrac{a+b}{3}}\;\tfrac{b+c}{3}\big)\\
&= \tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\Big(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a + |a|^2 + |b|^2 + |c|^2\\
&\quad + (\bar{a}b + a\bar{b}) + (\bar{a}c + a\bar{c}) + (\bar{b}c + b\bar{c})\Big)\\
&= \tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\big(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a\big) = \tfrac{1}{9}\,S.
\end{aligned}$$

Задача 1.1.24 *Нека $a_1a_2\dots a_n$ е положително ориентиран многоъгълник. Докажете, че*

$$S_{a_1a_2\dots a_n} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,(\bar{a}_1a_2 + \bar{a}_2a_3 + \ldots + \bar{a}_na_1).$$

Упътване. Прекарайте диагоналите на многоъгълника през върха a_1 и използвайте зад. 1.1.22.

Задача 1.1.25 *Нека $a_1a_2\dots a_{2n}$ е положително ориентиран многоъгълник. Докажете, че ако транслираме нечетните му върхове на вектор b, то лицето на получения многоъгълник е равно на лицето на първоначалния многоъгълник.*

Упътване. Използвайте зад. 1.1.22.

Задача 1.1.26 *Нека p е произволна права през началото O и нека комплексните числа $z_1, \ldots, z_n$, $n \in \mathbb{N}$, лежат в една и съща полуравнина относно p. Докажете, че $z_1 + z_2 + \ldots + z_n \neq 0$ и $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n} \neq 0$. Твърдението е вярно и ако всички числа с изключение на едно лежат върху p.*

Решение. От геометрични съображения е ясно, че ако z_1 и z_2 са от едната страна на p, то сумата $z_1 + z_2$ като диагонал на съответния успоредник е също от тази страна на p. За второто неравенство е достатъчно да забележим, че $\arg \bar{z} = \arg \frac{1}{z}$.

Ще дадем и аналитично решение: Завъртаме комплексната равнина така, че правата p да съвпада с имагинерната ос, т. е. умножаваме с $e^{-i\alpha}$, където α е ъгъла, който p сключва с положителната посока на реалната ос. Тогава

$$\mathrm{Re} z_j > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z_1 + z_2 + \ldots + z_n) > 0 \;\Rightarrow\; z_1 + z_2 + \ldots + z_n \neq 0,$$

$$\mathrm{Re}\frac{1}{z_j} > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n}\right) > 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n} \neq 0.$$

Задача 1.1.27 *Нека $z_1, z_2, \ldots, z_n$ са комплексни числа, такива че $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0$. Тогава всяка права g, минаваща през началото O, разделя тези числа, т. е. те лежат и от двете страни на правата (с изключение на частния случай, при който всичките точки са върху правата).*

Решение. Ако допуснем, че съществува права, такава, че всички точки да лежат от едната ѝ страна, то от задача 1.1.26 следва, че $z_1 + z_2 + \ldots + z_n \neq 0$.

Задача 1.1.28 *Нека $z_1, z_2, \ldots, z_n$ са произволни числа в комплексната равнина и нека $m_1 > 0$, $m_2 > 0, \ldots$, $m_n > 0$ са такива, че $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 1$. Нека $z = m_1 z_1 + m_2 z_2 + ... + m_n z_n$. Да се докаже, че всяка права през точката z разделя точките $z_1, z_2, \ldots, z_n$, с изключение на случая, когато всички те лежат върху тази права (точката z се нарича* **център на тежестта** *на системата от точки $z_1, \ldots, z_n$ със съответни маси $m_1, \ldots, m_n$).*

Решение. Имаме $m_1(z_1 - z) + m_2(z_2 - z) + ... + m_n(z_n - z) = 0$. Според задача 1.1.27, всяка права през точката 0 разделя множеството от точки $m_j(z_j - z)$. Тогава тя разделя и множеството от точки $(z_j - z)$, понеже аргументите на $m_j(z_j - z)$ и $(z_j - z)$ съвпадат. По-нататък, след транслация с вектор z, получаваме, че всяка права, минаваща през точка z, разделя множеството от точки z_j.

Задача 1.1.29 (Теорема на Гаус-Люка) *Нека $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ е произволен полином с комплексни коефициенти. Нека M е изпъкналата обвивка[4] на нулите на $f(z)$. Докажете, че нулите на $f'(z)$ също принадлежат на M.*

Решение. Нека $z_1, z_2, \ldots, z_n$ са нулите на $f(z)$ и нека $f'(z_0) = 0$. Ако $f(z_0) = 0$, твърдението е очевидно. Нека $f(z_0) \neq 0$. Тогава е изпълнено

$$0 = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{z_0 - z_\nu}. \tag{1.16}$$

Да допуснем, че $z_0 \notin M$. Тогава съществува права през z_0, която не пресича M и следователно $z_0 - z_\nu$ се намират от едната ѝ страна. От задача 1.1.26 следва, че $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{z_0 - z_\nu} \neq 0$, което е противоречие с (1.16).

[4]**Изпъкнала обвивка** на множеството A се нарича най-малкото изпъкнало множество, което съдържа A, т. е. сечението на всички изпъкнали множества, съдържащи A. Ако A се състои от краен брой точки (както в разглежданата задача), то изпъкналата му обвивка е изпъкнал многоъгълник, т. е. сечение на полуравнини.

Ръководството съдържа 181 внимателно подбрани и подредени задачи от комплексния анализ, по-голямата част от които са решени, а останалите са с упътвания и отговори. Накратко са представени и сведения от теорията, улесняващи ползването и усвояването на материала. Част от теоремите са приведени с доказателства. Накрая са представени и 27 задачи, давани на контролни и писмени изпити за специалността „Приложна математика“ във ФМИ на СУ.

Основни приоритети на авторите при съставянето на ръководството са били краткостта, яснотата и достъпността на изложението. Ръководството е предназначено за студентите от ФМИ на СУ и е написано на ниво, достъпно за II курс. Подходящо е и за други висши учебни заведения.