Следствия от Теоремата за Обръщане на Скока за Спектри от Стукрури

Александра Соскова, Иван Сосков [1]

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Униврситет

ФМИ, 2009
София

[1] Supported by BNSF Grant No. D002-258/18.12.08.

- Спектри и скок-спектри
- Всеки скок-спектър е спектър
- Теорема за обръщане на скока за спектри
- Някои приложения

Номерация на структура

Нека $\mathfrak{A} = (A; R_1, \ldots, R_k, =)$ е изброима безкрайна структура.

- Номерация f на $\mathfrak{A}$ е всяко тотално изображение от $\mathbb{N}$ върху A.
- За всеки предикат R на $\mathfrak{A}$:

$$f^{-1}(R) = \{\langle x_1, \ldots, x_r, \rangle \mid R(f(x_1), \ldots, f(x_r))\}.$$

- $f^{-1}(\mathfrak{A}) = f^{-1}(R_1) \oplus \cdots \oplus f^{-1}(R_k) \oplus f^{-1}(=)$.

Спектри на структури

Дефиниция

Спектърът на структурата $\mathfrak{A}$ е множеството

$$\mathrm{DS}(\mathfrak{A}) = \{\mathrm{d_T}(\mathrm{f}^{-1}(\mathfrak{A})) \mid \mathrm{f} \text{ е номерация на } \mathfrak{A}\}.$$

- Л. Ричтър [1981], Дж. Найт [1986].
- Спектрите са затворени нагоре

$$\mathrm{a} \in \mathrm{DS}(\mathfrak{A}) \ \& \ \mathrm{a} \leq \mathrm{b} \Rightarrow \mathrm{b} \in \mathrm{DS}(\mathfrak{A}).$$

- Скок спектърът на $\mathfrak{A}$ е множеството $\mathrm{DS_1}(\mathfrak{A}) = \{\mathrm{a}' \mid \mathrm{a} \in \mathrm{DS}(\mathfrak{A})\}$.

Теорема

Всеки скок спектър е спектър на структура.

- Московакисово разширение на $\mathfrak{A}$
- множество $K_{\mathfrak{A}}$ - аналог на множеството K

Московакисово разширение

Дефиниция

- $\bar{0} \notin \mathrm{A}$, $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A} \cup \{\bar{0}\}$.
- Кодираща функция $\langle ., . \rangle$, $\mathrm{range}(\langle ., . \rangle) \cap \mathrm{A}_0 = \emptyset$.
- Най-малкото множество $\mathrm{A}^* \supseteq \mathrm{A}_0$, затворено относно $\langle ., . \rangle$.
- Московакисово разширение на $\mathfrak{A}$ е структурата $\mathfrak{A}^* = (\mathrm{A}^*, \mathrm{R}_1^*, \ldots, \mathrm{R}_n^*, \mathrm{A}_0, \mathrm{G}_{\langle .,. \rangle}, \mathrm{G}_\mathrm{L}, \mathrm{G}_\mathrm{R}, =)$

За всяка номерация f на $\mathfrak{A}$ съществува номерация f^* на $\mathfrak{A}^*$ такава, че $(\mathrm{f}^*)^{-1}(\mathfrak{A}^*) \equiv_\mathrm{T} \mathrm{f}^{-1}(\mathfrak{A})$.

Твърдение

$\mathrm{DS}(\mathfrak{A}) = \mathrm{DS}(\mathfrak{A}^*)$.

Множеството $K_{\mathfrak{A}}$

- Добавяме към $\mathfrak{A}^*$ нов предикат $K_{\mathfrak{A}}$ (аналог на множеството на Клини).
- За всеки $e, x \in \mathbb{N}$ и всяка крайна част τ, нека

$$\tau \Vdash F_e(x) \iff x \in W_e^{\tau^{-1}(\mathfrak{A})}$$

- $K_{\mathfrak{A}} = \{\langle \delta^*, e^*, x^* \rangle \mid (\exists \tau \supseteq \delta)(\tau \Vdash F_e(x))\ e^*, x^* \in N^*\}$ $\delta^* = \langle \langle x_1^*, s_1 \rangle, \dots, \langle x_n^*, s_n \rangle \rangle$.
- $\mathfrak{A}_K^* = (\mathfrak{A}^*, K_{\mathfrak{A}})$
- $(f^*)^{-1}(\mathfrak{A}_K^*) \equiv_T f^{-1}(\mathfrak{A}) \oplus (f^*)^{-1}(K_{\mathfrak{A}})$

Теорема

$DS_1(\mathfrak{A}) = DS(\mathfrak{A}_K^*)$

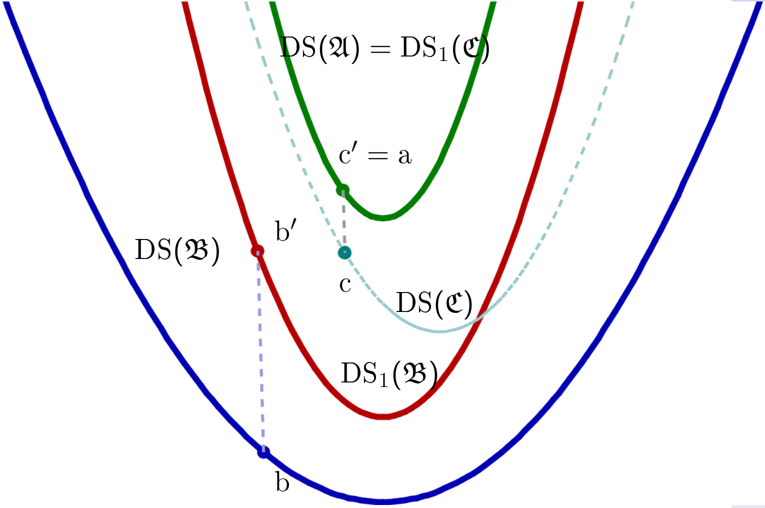
Теорема (Теорема за обръщане на скока)

Ако $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ са структури и $\mathrm{DS}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{DS}_1(\mathfrak{B})$, то съществува структура $\mathfrak{C}$, такава че $\mathrm{DS}(\mathfrak{C}) \subseteq \mathrm{DS}(\mathfrak{B})$ и $\mathrm{DS}_1(\mathfrak{C}) = \mathrm{DS}(\mathfrak{A})$.

- Структурата $\mathfrak{C}$ се построява като Маркерово разширение на $\mathfrak{A}$.
- Кодираме структурата $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{C}$.
- В конструкцията използваме релативизиран вариант на лемата за представянето на Σ^0_2 множества на Гончаров и Хюсеинов

Теорема

$\mathrm{DS}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{DS}_1(\mathfrak{B}) \Rightarrow (\exists \mathfrak{C})(\mathrm{DS}(\mathfrak{C}) \subseteq \mathrm{DS}(\mathfrak{B}) \& \ \mathrm{DS}_1(\mathfrak{C}) = \mathrm{DS}(\mathfrak{A}))$.



Приложения

Дефиниция

n-ти скок спектър на $\mathfrak{A}$ е множеството $DS_n(\mathfrak{A}) = \{a^{(n)} : a \in DS(\mathfrak{A})\}$.

$DS_0(\mathfrak{A}) = DS(\mathfrak{A})$ $DS_{n+1}(\mathfrak{A}) = \{a' : a \in DS_n(\mathfrak{A})\}$.
С индукция по n се вижда, че за всяко n има структура $\mathfrak{A}^{(n)}$, такава че $DS_n(\mathfrak{A}) = DS(\mathfrak{A}^{(n)})$.

Теорема

Нека $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ са структури, такива че $DS(\mathfrak{A}) \subseteq DS_n(\mathfrak{B})$. Тогава съществува структура $\mathfrak{C}$, такава че $DS(\mathfrak{C}) \subseteq DS(\mathfrak{B})$ и $DS_n(\mathfrak{C}) = DS(\mathfrak{A})$.

Приложение 1

Дефиниция

Една степен a се нарича n-та скок степен на структурата $\mathfrak{A}$, ако a е най-малкият елемент на $DS_n(\mathfrak{A})$.

- Дауни и Найт
- за произволен рекурсивен ординал α съществува линейна нардба $\mathfrak{A}$, която има α-та скок степен равна на $0^{(\alpha)}$, но за всеки $\beta < \alpha$, $\mathfrak{A}$ няма β-та скок степен
- много сложна конструкция
- ние ще покажем, че за всяко n може да се построи структура, която има $(n+1)$-ва скок степен равна на $0^{(n+1)}$, но няма k-та скок степен за $k \leq n$.

Приложение 1

(C1) $DS(\mathfrak{A}) \subseteq \{a : 0^{(n)} \leq a\}$.

(C2) $DS(\mathfrak{A})$ няма най-малък елемент.

(C3) $\mathfrak{A}$ има първа скок степен равна на $0^{(n+1)}$.

- $\mathfrak{B} = (N; =)$
- $DS(\mathfrak{A}) \subseteq DS_n(\mathfrak{B})$.

JIT съществува $\mathfrak{C}$, такава че $DS_n(\mathfrak{C}) = DS(\mathfrak{A})$

- $\mathfrak{C}$ няма n-та скок степен и следователно k-та скок степен за $k \leq n$
- Но $DS_{n+1}(\mathfrak{C}) = DS_1(\mathfrak{A})$ и следователно $(n+1)$-вата скок степен на $\mathfrak{C}$ е $0^{(n+1)}$.

Приложение 2

Теорема (Wehner)

Има фамилия от крайни множества, която няма р.н номерация (т.е р.н. универсално множество), и която за всяко нерекурсивно множество X има номерация, рекусивна в X

Теорема (Релативен вариант)

Нека $B \subseteq N$. Има фамилия от множества, която няма р.н в B номерация, и която за всяко множество $X >_T B$ има номерация, рекурсивна в X.

Приложение 2

(Калимулин, Сосков)

$$\mathcal{F} = \{\{0\} \oplus B\} \cup \{\{1\} \oplus \overline{B}\} \cup \{\{n+2\} \oplus F \mid F \text{ кр.} F \neq W_n^B\}$$

Твърдение

Нека $X \subseteq N$. Ако за $\mathcal{F}$ има универсално множество U р. н. в X, то $X >_T B$.

- $B \leq_T X$;
- Ако $B \equiv_T X$, можем да построим рекурсивна в B функция g, такава че $(\forall n)(W_{g(n)}^B \neq W_n^B)$.
- Противоречи на втора теорема за рекурсията.

Приложение 2

$$\mathcal{F} = \{\{0\} \oplus B\} \cup \{\{1\} \oplus \overline{B}\} \cup \{\{n+2\} \oplus F \mid F \text{ кр.} F \neq W_n^B\}$$

Твърдение

Нека $B \leq_T X$. Съществува универсално множество U за фамилията $\mathcal{F}$, $U \leq_T X$.

- Множеството U строим на стъпки;
- $U^0 = \{(0,0)\} \cup \{(0, 2x+1) \mid x \in B\} \cup \{(1,2)\} \cup \{(1, 2x+1) \mid x \notin B\} \cup \{(\langle n, F, i\rangle + 2, 2n+4)\} \cup \{(\langle n, F, i\rangle + 2, 2x+1) \mid x \in F\}$.

Приложение 2

$$\mathcal{F} = \{\{0\} \oplus \mathrm{B}\} \cup \{\{1\} \oplus \overline{\mathrm{B}}\} \cup \{\{n+2\} \oplus \mathrm{F} \mid \mathrm{F} \text{ кр.} \mathrm{F} \neq W_n^{\mathrm{B}}\}$$

- X или $\overline{\mathrm{X}}$ не е р.н в. B. Нека да е X.
- $\mathrm{X} = \{x_1, \dots, x_s, \dots\}, \nu_s = \langle x_1, \dots, x_s \rangle$
- $\mathrm{F}^s_{\langle n, \mathrm{F}, i \rangle} = \{x \mid (\langle n, \mathrm{F}, i \rangle + 2, 2x+1) \in \mathrm{U}^s\}$.
- Ако $\mathrm{F}^s_{\langle n, \mathrm{F}, i \rangle} = W^{\mathrm{B}}_{n,s}$, добавяме $(\langle n, \mathrm{F}, i \rangle + 2, 2\nu_s + 1)$ към U^{s+1}.

Приложение 2

$\mathcal{F} = \{\{0\} \oplus \mathrm{B}\} \cup \{\{1\} \oplus \overline{\mathrm{B}}\} \cup \{\{n+2\} \oplus F \mid F \text{ кр.} F \neq W_n^B\}$

- Ако допуснем, че в полученото универсално множество $U = \bigcup_s U^s$ е индексирано множество, което не е от фамилията т.е. $F_{\langle n,F,i\rangle} = W_n^B$, то получаваме редица $\nu_{s_1} < \dots < \nu_{s_k} < \dots$, такава, че $W_n^B = \{\nu_{s_k} \mid k \in N\} \cup F$. Следователно X е р.н. в B. Противоречие.
- $(\langle n, F, i\rangle, 2x + 1) \in U$ точно ако:
  - $x \in F$ или
  - $x = \nu_s$, за някое s.
- Следователно U е рекурсивно в X.

Приложение 2

Теорема (Wehner, Slaman)

Съществува структура $\mathfrak{C}$, за която $DS(\mathfrak{C}) = \{x \mid x >_T 0\}$.

Теорема

За всяко n и тюрингова степен $b \geq 0^{(n)}$ съществува структура $\mathfrak{C}$, за която $DS_n(\mathfrak{C}) = \{x \mid x >_T b\}$.

- Построяваме структура $\mathfrak{A}$, за която $DS(\mathfrak{A}) = \{x \mid x >_T b\}$, използвайки фамилията $\mathcal{F}$.
- Нека $\mathfrak{B} = (N; =)$. Ясно е, че $b \in DS_n(\mathfrak{B})$, $b \geq 0^{(n)}$.
- $DS(\mathfrak{A}) \subseteq DS_n(\mathfrak{B})$.

JIT Съществува структура $\mathfrak{C}$, такава че $DS_n(\mathfrak{C}) = DS(\mathfrak{A})$.

Приложение 2

Теорема

За всяко n и тюрингова степен $b \geq 0^{(n)}$ съществува структура $\mathfrak{C}$, за която
$DS_n(\mathfrak{C}) = \{x \mid x >_T b\} = \{x^{(n)} \mid x \in DS(\mathfrak{C}) \;\&\; x^{(n)} > b\}$.

Теорема (Goncharov, Harizanov, Knight, McCoy, Miller, Solomon)

За всяко n има структура $\mathfrak{C}$, такава че
$DS(\mathfrak{C}) = \{x \mid x^{(n)} >_T 0^{(n)}\}$, т.е. спектърът ѝ съдържа точно всички $non-low_n$ тюрингови степени.

Теорема (Harizanov, R. Miller)

За произволна тюрингова степен b, има структура $\mathfrak{C}$, такава че $DS(\mathfrak{C}) = \{x \mid x' \geq_T b\}$

S. Goncharov, V. Harizanov, J. Knight, Ch. McCoy, R. Miller, and R. Solomon
Enumerations in computable structure theory.
Ann. Pure Appl. Logic, 13(3) : 219–246, 2005.

V. Harizanov and R. Miller
Spectra of structures and relations
J. Symbolic Logic, 72(1) : 324–348 2007.

A. Soskova and I. N. Soskov,
A Jump Inversion Theorem for the Degree Spectra
J Logic Computation 19 : 199–215, 2009.

St. Wehner
Enumerations, Countable Structures and Turing Degrees.
Proc. of Amer. Math. Soc., 126 : 2131–2139, 1998.