

Някои случаи, когато от локално наличие на свойства на функции следва глобално

Димитър Скордев

Факултет по математика и информатика
Софийски университет „Св. Климент Охридски“

skordev@fmi.uni-sofia.bg

Пролетна конференция на ФМИ
26 март 2016 г.

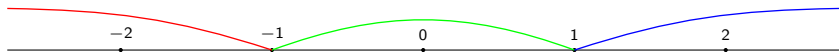
Уводен пример

Следното твърдение е друг изказ на [лемата на Вайраух за снаждане на функции](#):

Твърдение 1

Винаги, когато c е изчислимо реално число и рестрикциите на една частична функция от \mathbb{R} към \mathbb{R} върху $[c, \infty)$ и върху $(-\infty, c]$ са изчислими, дадената функция също е изчислима

Нека $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е $\lambda x. \operatorname{arctg} x$ и искаме да докажем, че f е изчислима. Можем да направим това, като последователно докажем, че са изчислими рестрикциите $f \upharpoonright [-1, 1]$, $f \upharpoonright [1, \infty)$, $f \upharpoonright (-\infty, -1]$, и след това приложим твърдение 1 първо за $c = 1$ и функцията $f \upharpoonright [-1, \infty)$, а след това за $c = -1$ и функцията f .



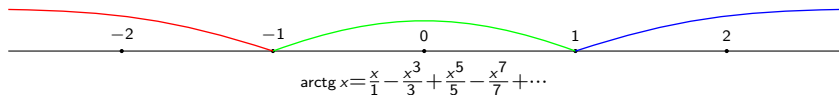
Уводен пример

Следното твърдение е друг изказ на [лемата на Вайраух за снаждане на функции](#):

Твърдение 1

Винаги, когато c е изчислимо реално число и рестрикциите на една частична функция от \mathbb{R} към \mathbb{R} върху $[c, \infty)$ и върху $(-\infty, c]$ са изчислими, дадената функция също е изчислима

Нека $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е $\lambda x. \operatorname{arctg} x$ и искаме да докажем, че f е изчислима. Можем да направим това, като последователно докажем, че са изчислими рестрикциите $f \upharpoonright [-1, 1]$, $f \upharpoonright [1, \infty)$, $f \upharpoonright (-\infty, -1]$, и след това приложим твърдение 1 първо за $c = 1$ и функцията $f \upharpoonright [-1, \infty)$, а след това за $c = -1$ и функцията f .



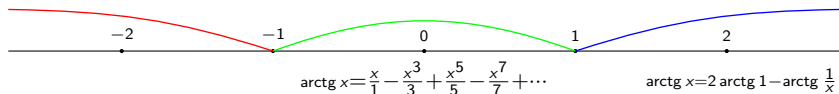
Уводен пример

Следното твърдение е друг изказ на [лемата на Вайраух за снаждане на функции](#):

Твърдение 1

Винаги, когато c е изчислимо реално число и рестрикциите на една частична функция от \mathbb{R} към \mathbb{R} върху $[c, \infty)$ и върху $(-\infty, c]$ са изчислими, дадената функция също е изчислима

Нека $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е $\lambda x. \arctg x$ и искаме да докажем, че f е изчислима. Можем да направим това, като последователно докажем, че са изчислими рестрикциите $f \upharpoonright [-1, 1]$, $f \upharpoonright [1, \infty)$, $f \upharpoonright (-\infty, -1]$, и след това приложим твърдение 1 първо за $c = 1$ и функцията $f \upharpoonright [-1, \infty)$, а след това за $c = -1$ и функцията f .



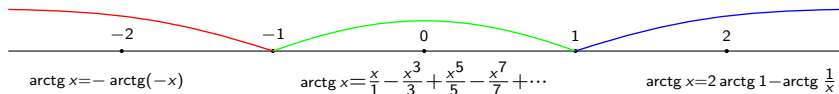
Уводен пример

Следното твърдение е друг изказ на [лемата на Вайраух за снаждане на функции](#):

Твърдение 1

Винаги, когато c е изчислимо реално число и рестрикциите на една частична функция от \mathbb{R} към \mathbb{R} върху $[c, \infty)$ и върху $(-\infty, c]$ са изчислими, дадената функция също е изчислима

Нека $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е $\lambda x. \arctg x$ и искаме да докажем, че f е изчислима. Можем да направим това, като последователно докажем, че са изчислими рестрикциите $f \upharpoonright [-1, 1]$, $f \upharpoonright [1, \infty)$, $f \upharpoonright (-\infty, -1]$, и след това приложим твърдение 1 първо за $c = 1$ и функцията $f \upharpoonright [-1, \infty)$, а след това за $c = -1$ и функцията f .

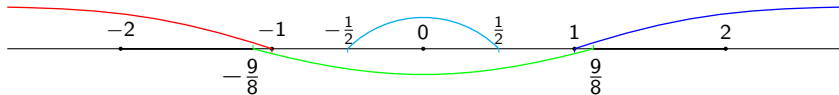


Модификация на уводния пример

Твърдение 2

Нека $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и f е частична функция от \mathbb{R} към \mathbb{R} . Ако $f \upharpoonright (a, \infty)$ и $f \upharpoonright (-\infty, b)$ са изчислими, то f също е изчислима.

Доказателството за изчислимост в уводния пример не е задоволително от гледна точка на числените пресмятания. От тази гледна точка е за предпочитане например доказателство, при което последователно се установява изчислимостта напр. на рестрикциите $f \upharpoonright (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $f \upharpoonright (-\frac{9}{8}, \frac{9}{8})$, $f \upharpoonright (1, \infty)$, $f \upharpoonright (-\infty, -1)$ и след това се прилага твърдение 2 първо за $a = 1$, $b = \frac{9}{8}$ и функцията $f \upharpoonright (-\frac{9}{8}, \infty)$, а след това за $a = -\frac{9}{8}$, $b = -1$ и функцията f .

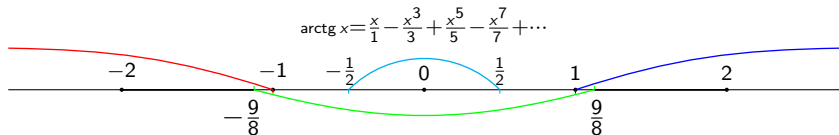


Модификация на уводния пример

Твърдение 2

Нека $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и f е частична функция от \mathbb{R} към \mathbb{R} . Ако $f \upharpoonright (a, \infty)$ и $f \upharpoonright (-\infty, b)$ са изчислими, то f също е изчислима.

Доказателството за изчислимост в уводния пример не е задоволително от гледна точка на числените пресмятания. От тази гледна точка е за предпочитане например доказателство, при което последователно се установява изчислимостта напр. на рестрикциите $f \upharpoonright (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $f \upharpoonright (-\frac{9}{8}, \frac{9}{8})$, $f \upharpoonright (1, \infty)$, $f \upharpoonright (-\infty, -1)$ и след това се прилага твърдение 2 първо за $a = 1$, $b = \frac{9}{8}$ и функцията $f \upharpoonright (-\frac{9}{8}, \infty)$, а след това за $a = -\frac{9}{8}$, $b = -1$ и функцията f .

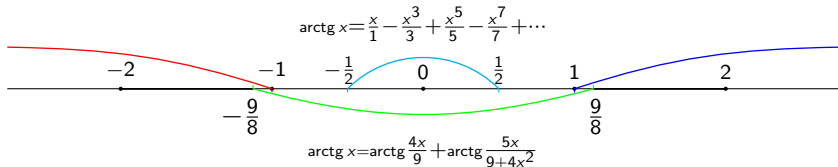


Модификация на уводния пример

Твърдение 2

Нека $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и f е частична функция от \mathbb{R} към \mathbb{R} . Ако $f \upharpoonright (a, \infty)$ и $f \upharpoonright (-\infty, b)$ са изчислими, то f също е изчислима.

Доказателството за изчислимост в уводния пример не е задоволително от гледна точка на числените пресмятания. От тази гледна точка е за предпочитане например доказателство, при което последователно се установява изчислимостта напр. на рестрикциите $f \upharpoonright (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $f \upharpoonright (-\frac{9}{8}, \frac{9}{8})$, $f \upharpoonright (1, \infty)$, $f \upharpoonright (-\infty, -1)$ и след това се прилага твърдение 2 първо за $a = 1$, $b = \frac{9}{8}$ и функцията $f \upharpoonright (-\frac{9}{8}, \infty)$, а след това за $a = -\frac{9}{8}$, $b = -1$ и функцията f .

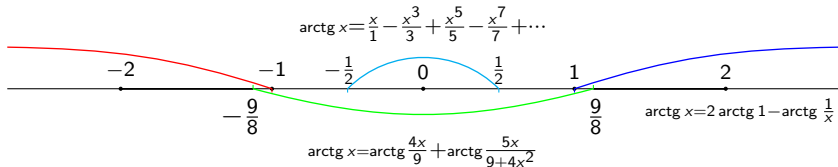


Модификация на уводния пример

Твърдение 2

Нека $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и f е частична функция от \mathbb{R} към \mathbb{R} . Ако $f \upharpoonright (a, \infty)$ и $f \upharpoonright (-\infty, b)$ са изчислими, то f също е изчислима.

Доказателството за изчислимост в уводния пример не е задоволително от гледна точка на числените пресмятания. От тази гледна точка е за предпочитане например доказателство, при което последователно се установява изчислимостта напр. на рестрикциите $f \upharpoonright (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $f \upharpoonright (-\frac{9}{8}, \frac{9}{8})$, $f \upharpoonright (1, \infty)$, $f \upharpoonright (-\infty, -1)$ и след това се прилага твърдение 2 първо за $a = 1$, $b = \frac{9}{8}$ и функцията $f \upharpoonright (-\frac{9}{8}, \infty)$, а след това за $a = -\frac{9}{8}$, $b = -1$ и функцията f .

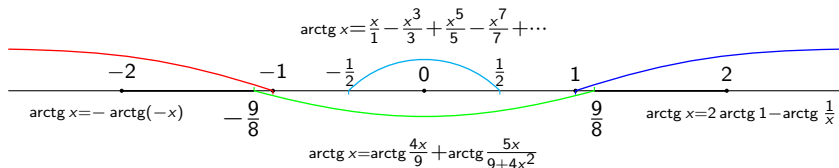


Модификация на уводния пример

Твърдение 2

Нека $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и f е частична функция от \mathbb{R} към \mathbb{R} . Ако $f \upharpoonright (a, \infty)$ и $f \upharpoonright (-\infty, b)$ са изчислими, то f също е изчислима.

Доказателството за изчислимост в уводния пример не е задоволително от гледна точка на числените пресмятания. От тази гледна точка е за предпочитане например доказателство, при което последователно се установява изчислимостта напр. на рестрикциите $f \upharpoonright (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $f \upharpoonright (-\frac{9}{8}, \frac{9}{8})$, $f \upharpoonright (1, \infty)$, $f \upharpoonright (-\infty, -1)$ и след това се прилага твърдение 2 първо за $a = 1$, $b = \frac{9}{8}$ и функцията $f \upharpoonright (-\frac{9}{8}, \infty)$, а след това за $a = -\frac{9}{8}$, $b = -1$ и функцията f .



Обобщение на уводния пример и модификацията му

Обобщение на уводния пример

Нека $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n$ са изчислими реални числа и са в сила неравенствата $c_0 < c_1 < \dots < c_{n-1} < c_n$. Ако рестрикцията на една частична функция от \mathbb{R} към \mathbb{R} върху всеки от интервалите

$$(-\infty, c_0], [c_1, c_2], \dots, [c_{n-1}, c_n], [c_n, \infty)$$

е изчислима, то дадената функция също е изчислима.

Обобщение на модификацията на уводния пример

Нека $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n \in \mathbb{R}$, като при $i = 1, 2, \dots, n$ са в сила неравенствата $a_i < b_i$, а при $i = 0, 1, 2, \dots, n$ – неравенствата $b_i > a_{i+1}$. Ако рестрикцията на една частична функция от \mathbb{R} към \mathbb{R} върху всеки от интервалите

$$(-\infty, b_0), (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{n-1}, b_{n-1}), (a_n, b_n), (a_{n+1}, \infty)$$

е изчислима, то дадената функция също е изчислима.

Съвкупности от множества, позволяващи глобализация за даден клас от функции

Дефиниция 1

Нека \mathbf{C} е даден клас от функции, а \mathcal{A} е някоя съвкупност от множества. Ще казваме, че \mathcal{A} *позволява глобализация за \mathbf{C}* , ако за всяка функция f с дефиниционна област $\bigcup \mathcal{A}$ е вярна импликацията

$$\forall A \in \mathcal{A} (f \upharpoonright_A \in \mathbf{C}) \implies f \in \mathbf{C}. \quad (1)$$

Ще казваме, че \mathcal{A} *напълно позволява глобализация за \mathbf{C}* , ако импликацията (1) е вярна за всяка функция f , чиято дефиниционна област се съдържа в $\bigcup \mathcal{A}$.

Пример 1

Ако \mathbf{C} е класът на изчислимите частични функции от \mathbb{R} към \mathbb{R} , а \mathcal{A} е съвкупността от интервали, разгледана в обобщението на уводния пример или в обобщението на модификацията му, то \mathcal{A} напълно позволява глобализация за \mathbf{C} .

Други примери

Пример 2 (лема 4.4.1 от дисертацията на Иван Георгиев)

Нека \mathcal{F} е клас от функции в \mathbb{N} , който удовлетворява предположението в [споменатата лема](#), c е \mathcal{F} -изчислимо реално число, \mathbf{C} е класът на равномерно \mathcal{F} -изчислимите частични функции от \mathbb{R} към \mathbb{R} , дефинирани в точката c . Тогава $\{(-\infty, c], [c, \infty)\}$ напълно позволява глобализация за \mathbf{C} .

Пример 3 (позволена глобализация, но не напълно)

Нека $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$, където $A_1 \setminus A_2 \neq \emptyset$, $A_2 \setminus A_1 \neq \emptyset$, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, и нека \mathbf{C} се състои от константните частични изображения на $A_1 \cup A_2$ в себе си. Тогава \mathcal{A} позволява глобализация за \mathbf{C} , но не напълно.

Пример 4 (тривиално наличие на пълна позволеност)

Ако \mathbf{C} е класът на едноместните частично рекурсивни функции, то всяка крайна съвкупност от множества напълно позволява глобализация за \mathbf{C} .

Кратко описание на основното в доклада

За някои видове класове от функции ще бъдат формулирани неочевидни резултати в сходен дух за пълна позволеност на глобализация в случая на крайна съвкупност \mathcal{A} . Всеки от резултатите дава достатъчно условие, което е необходимо поне при доста слаби предположения и изисква при всеки избор на подсъвкупност \mathcal{K} на \mathcal{A} множеството

$$\bigcup \mathcal{K} \setminus \bigcup (\mathcal{A} \setminus \mathcal{K})$$

да бъде отделимо от множеството

$$\bigcup (\mathcal{A} \setminus \mathcal{K}) \setminus \bigcup \mathcal{K}$$

чрез множество от даден специален вид. Отделимостта е в смисъл на следната дефиниция:

Дефиниция 2

Ще казваме, че едно множество H отделя дадено множество P от дадено множество Q , ако $H \supseteq P$ и $H \cap Q = \emptyset$.

Глобализация за класа на n -местните потенциално частично рекурсивни функции

При дадено n нека \mathbf{C} е класът на всички такива функции.

Теорема 1

Една крайна съвкупност \mathcal{A} от подмножества на \mathbb{N}^n напълно позволява глобализация за \mathbf{C} точно тогава, когато за всяка подсъвкупност \mathcal{K} на \mathcal{A} някое р. н. подмножество на \mathbb{N}^n отделя $\bigcup \mathcal{K} \setminus \bigcup (\mathcal{A} \setminus \mathcal{K})$ от $\bigcup (\mathcal{A} \setminus \mathcal{K}) \setminus \bigcup \mathcal{K}$.

Следствие 1

Всяка крайна съвкупност от рекурсивно номеруеми подмножества на \mathbb{N}^n напълно позволява глобализация за \mathbf{C} .

Следствие $\bar{1}$

Всяка крайна съвкупност от допълнения на рекурсивно номеруеми подмножества на \mathbb{N}^n напълно позволява глобализация за \mathbf{C} .

Доказателство на теорема 1

(\Leftarrow) Нека за всяка подсвкупност \mathcal{K} на \mathcal{A} някое р. н. подмножество $H_{\mathcal{K}}$ на \mathbb{N}^n отделя $\bigcup \mathcal{K} \setminus \bigcup (\mathcal{A} \setminus \mathcal{K})$ от $\bigcup (\mathcal{A} \setminus \mathcal{K}) \setminus \bigcup \mathcal{K}$. Нека f е такава функция, че $\text{dom}(f) \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ и за всяко $A \in \mathcal{A}$ $f|_A$ е рестрикция на някоя n -местна ч. р. ф. φ_A . Полагаме $E = \{(x, y) \mid \exists \mathcal{K} \subseteq \mathcal{A} (x \in H_{\mathcal{K}} \ \& \ \forall A \in \mathcal{K} (\varphi_A(x) = y))\}$. Понеже E е р. н. множество, съществува такава n -местна ч. р. ф. φ , че $\forall x (\exists y ((x, y) \in E) \implies x \in \text{dom}(\varphi) \ \& \ (x, \varphi(x)) \in E)$. Доказва се, че за всяко $x \in \text{dom}(f)$ и всяко y е в сила еквивалентността $f(x) = y \iff (x, y) \in E$. Оттук следва, че f е рестрикция на φ .

(\implies) Нека \mathcal{A} напълно позволява глобализация за \mathbf{C} , а $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$. Разглеждаме частична функция f от \mathbb{N}^n към $\{0, 1\}$, за която $f^{-1}(0) = \bigcup \mathcal{K} \setminus \bigcup (\mathcal{A} \setminus \mathcal{K})$ и $f^{-1}(1) = \bigcup (\mathcal{A} \setminus \mathcal{K}) \setminus \bigcup \mathcal{K}$. Тогава $\text{dom}(f) \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ и се проверява, че за всяко $A \in \mathcal{A}$ функцията $f|_A$ е константа и значи принадлежи на \mathbf{C} . Ако φ е ч. р. продължение на f , то $\varphi^{-1}(0)$ е р. н. множество, отделящо $\bigcup \mathcal{K} \setminus \bigcup (\mathcal{A} \setminus \mathcal{K})$ от $\bigcup (\mathcal{A} \setminus \mathcal{K}) \setminus \bigcup \mathcal{K}$.

Глобализация за класа на непрекъснатите частични функции от едно топологично пространство в друго

Нека X и Y са топологични пространства с носители X и Y , а C е класът на непрекъснатите частични функции от X към Y .

Теорема 2

Нека A е крайна съвкупност от подмножества на X . Ако за всяка подсъвкупност K на A някое отворено множество на X отделя $\bigcup K \setminus \bigcup(A \setminus K)$ от $\bigcup(A \setminus K) \setminus \bigcup K$, то A напълно позволява глобализация за C . В случай че в Y съществува отворено множество, различно от \emptyset и Y , в сила е и обратното.

Следствие 2 (непосредствено очевидно)

Всяка крайна съвкупност от отворени множества на X напълно позволява глобализация за C .

Следствие $\bar{2}$

Всяка крайна съвкупност от затворени множества на X напълно позволява глобализация за C .

Изчислимост относно редици от множества

Дефиниция 3

Ако $\mathcal{U} = \{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ е редица от множества, за всяко $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$ полагаме $\mathcal{U}^{-1}(x) = \{k \in \mathbb{N} \mid x \in U_k\}$. Тоталните номерации на множеството $\mathcal{U}^{-1}(x)$ ще наричаме \mathcal{U} -имена на x . Ще казваме, че елементът x е \mathcal{U} -изчислим, ако множеството $\mathcal{U}^{-1}(x)$ е р. н.

Ако \mathcal{U} е база на T_0 -топологично пространство, тази изчислимост съвпада със съответната обичайно разглеждана за такива пространства).

Дефиниция 4

Ако $\mathcal{U} = \{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ и $\mathcal{V} = \{V_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ са редици от множества, една частична функция f от $\bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$ към $\bigcup_{l=0}^{\infty} V_l$ ще наричаме $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ -изчислима, ако съществува рекурсивен оператор, който за всяко $x \in \text{dom}(f)$ преобразува \mathcal{U} -имената на x в \mathcal{V} -имена на $f(x)$.

Ако \mathcal{U} и \mathcal{V} са бази на T_0 -топологични пространства, тази изчислимост съвпада с обичайно разглежданата.

Две допълнителни дефиниции

Дефиниция 5

Нека D_0, D_1, D_2, \dots е стандартната номерация на множеството на крайните подмножества на \mathbb{N} . За всяка редица от множества $\mathcal{U} = \{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ дефинираме редицата $\hat{\mathcal{U}} = \{\hat{U}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, като полагаме $\hat{U}_m = \bigcap_{k \in D_m} U_k$ и приемаме, че $\bigcap_{k \in \emptyset} U_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$.

Забележка 1. За всяко $m \in \mathbb{N}$ и всяко $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$ е в сила еквивалентността $x \in \hat{U}_m \iff D_m \subseteq \mathcal{U}^{-1}(x)$.

Дефиниция 6

За всяка редица от множества $\mathcal{U} = \{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ множествата от вида $\bigcup_{k \in S} U_k$, където S е р. н. подмножество на \mathbb{N} , ще наричаме *ефективни \mathcal{U} -обединения*.

Забележка 2. Ефективните \mathcal{U} -обединения са също и ефективни $\hat{\mathcal{U}}$ -обединения. Ако операцията сечение на два члена на \mathcal{U} е изчислима в един естествен смисъл, то е вярно и обратното.

Глобализация за класа на $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ -изчислимите функции

Нека $\mathcal{U} = \{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ и $\mathcal{V} = \{V_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ са редици от множества, а \mathbf{C} е класът на $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ -изчислимите функции от $\bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$ към $\bigcup_{l=0}^{\infty} V_l$.

Теорема 3

Нека \mathcal{A} е крайна съвкупност от подмножества на $\bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$. Ако за всяка подсъвкупност \mathcal{K} на \mathcal{A} някое ефективно $\hat{\mathcal{U}}$ -обединение отделя $\bigcup \mathcal{K} \setminus \bigcup (\mathcal{A} \setminus \mathcal{K})$ от $\bigcup (\mathcal{A} \setminus \mathcal{K}) \setminus \bigcup \mathcal{K}$, то съвкупността \mathcal{A} напълно позволява глобализация за \mathbf{C} . В случай че за някои естествени числа l_1 и l_2 всяко от множества V_{l_1} и $V_{l_2} \setminus V_{l_1}$ съдържа \mathcal{V} -изчислим елемент, в сила е и обратното.

Следствие 3

Всяка крайна съвкупност от ефективни $\hat{\mathcal{U}}$ -обединения напълно позволява глобализация за \mathbf{C} .

Следствие $\bar{3}$

Всяка крайна съвкупност от допълнения на ефективни $\hat{\mathcal{U}}$ -обединения до $\bigcup_{k=0}^{\infty} U_k$ напълно позволява глобализация за \mathbf{C} .

Приложение към изчислимостта на реални функции

Следствие 4

Нека n е дадено положително цяло число, а \mathcal{A} е такава крайна съвкупност от подмножества на \mathbb{R}^n , че всяко от тях е ефективно отворено или всяко от тях има ефективно отворено допълнение. Ако за една частична функция f от $\bigcup \mathcal{A}$ към \mathbb{R} рестрикциите $f \upharpoonright A$, където $A \in \mathcal{A}$, са изчислими, то f също е изчислима.

Пример 5

Нека $n \geq 2$. Ако за една частична функция f от \mathbb{R}^n към \mathbb{R} функциите $f \upharpoonright \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \leq x_2\}$ и $f \upharpoonright \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \geq x_2\}$ са изчислими, то f също е изчислима. В частност изчислима е

$$\text{cases}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} x_3, & \text{ако } x_1 < x_2 \text{ или } x_3 = x_4, \\ x_4, & \text{ако } x_1 > x_2 \text{ или } x_3 = x_4, \end{cases}$$

разглеждана от Ескардо (M. H. Escardó. *Effective and sequential definition by cases on the reals via infinite signed-digit numerals*. Electron. Notes Theor. Comput. Sci. **13** (1998), 53–68).

Добавка

Дефиниция 7

Нека \mathbf{C} и \mathbf{D} са дадени класове от функции, а \mathcal{A} е някоя съвкупност от множества. Ще казваме, че \mathcal{A} *позволява глобализация за \mathbf{C} в рамките на \mathbf{D}* , ако за всяка функция f от \mathbf{D} е вярна импликацията $\forall A \in \mathcal{A} (f \upharpoonright_A \in \mathbf{C}) \implies f \in \mathbf{C}$.

Пример 6

\mathcal{A} позволява глобализация за $\mathbf{C} \iff \mathcal{A}$ позволява глобализация за \mathbf{C} в рамките на $\{f \mid f \text{ е функция и } \text{dom}(f) = \bigcup \mathcal{A}\}$; \mathcal{A} напълно позволява глобализация за $\mathbf{C} \iff \mathcal{A}$ позволява глобализация за \mathbf{C} в рамките на $\{f \mid f \text{ е функция и } \text{dom}(f) \subseteq \bigcup \mathcal{A}\}$.

Пример 7 (лема 4.4.3 от дисертацията на Иван Георгиев)

Нека \mathcal{F} е както в [лемата](#), c е \mathcal{F} -изчислимо реално число, \mathbf{C} и \mathbf{D} се състоят съответно от частичните функции от \mathbb{R} към \mathbb{R} , които са равномерно \mathcal{F} -изчислими, и от онези, които са дефинирани и непрекъснати в c и имат там \mathcal{F} -изчислима стойност. Тогава $\{(-\infty, c), (c, \infty)\}$ позволява глобализация за \mathbf{C} в рамките на \mathbf{D} .

Благодаря за вниманието!

Допълнителна информация

На стр. 112

Lemma 4.3.5 (join of functions). Let $f_1, f_2 : \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be computable real functions and let $c \in \mathbb{R}$ be a computable real number. Then the function $f : \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, defined by

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{if } x < c, \\ f_2(x) & \text{if } x > c, \\ f_1(c) & \text{if } x = c \text{ and } f_1(c) = f_2(c), \\ \text{div} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

is computable.



Дисертацията на Иван Георгиев

Иван Димитров Георгиев.

Субрекурсивна изчислимост в анализа.

Дисертация за присъждане на образователна и научна степен „доктор“. Софийски университет „Св. Климент Охридски“, 2015.

[http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/logic/theses/
ivan-georgiev-phd-thesis.pdf](http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/logic/theses/ivan-georgiev-phd-thesis.pdf)



От дисертацията на Иван Георгиев (1)

От стр. 76

Дефиниция 4.3.4. Един клас от функции \mathcal{F} е *удобен*, ако $\mathcal{M}^2 \subseteq \mathcal{F}$ и \mathcal{F} е затворен относно суперпозиция.

От стр. 86

Лема 4.4.1. Нека \mathcal{F} е удобен клас и $\theta : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ е реална функция. Нека c е \mathcal{F} -изчислимо реално число, такова че $c \in D$ и рестрикциите на θ до множествата $D \cap (-\infty, c]$ и $D \cap [c, +\infty)$ са равномерно \mathcal{F} -изчислими. Тогава θ е равномерно \mathcal{F} -изчислима върху цялата си дефиниционна област.



От дисертацията на Иван Георгиев (2)

От стр. 70

Дефиниция 4.2.13. Класът от функции \mathcal{F} изпълнява условието за мажориране, ако за всяко естествено число m и функция $f \in \mathcal{T}_m \cap \mathcal{F}$ съществува функция $\tilde{f} \in \mathcal{T}_m \cap \mathcal{F}$, която мажорира f и е монотонно растяща по отношение на всичките си аргументи.

От стр. 89

Лема 4.4.3 (за едноточково разширение). Нека \mathcal{F} е удобен клас, удовлетворяващ условието за мажориране, и $\theta : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ е реална функция. Нека c е \mathcal{F} -изчислимо реално число, такова че $c \in D$, $\theta(c)$ също е \mathcal{F} -изчислимо и θ е непрекъснатата в c . Нека рестрикциите на θ до $D \cap (-\infty, c)$ и до $D \cap (c, +\infty)$ са равномерно \mathcal{F} -изчислими. Тогава θ е равномерно \mathcal{F} -изчислима върху цялата си дефиниционна област.