Московакисово разширение на ефективно топологично пространство

Димитър Скордев

Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика

Пролетна научна сесия на ФМИ
28 март 2015 г.

Посвещавам на светлата памет
на колегата и приятеля

блестящия математик

Иван Проданов
(1935–1985)

База на топология

Дефиниция

База на една топология $\mathcal{T}$ се нарича такава фамилия от $\mathcal{T}$-отворени множества, че всяко $\mathcal{T}$-отворено множество да бъде обединение на множества от тази фамилия.

Напр. отворените интервали в $\mathbb{R}$, имащи за краища рационални числа, съставляват база на обичайната топология в $\mathbb{R}$.

За да бъде дадена фамилия от подмножества на едно множество X база на някаква топология в X, необходимо и достатъчно е множеството X и сечението на кои да е две множества от дадената фамилия да могат да се представят като обединения на множества от тази фамилия.

Когато горното условие е изпълнено, дадената фамилия от подмножества на X е база на точно една топология $\mathcal{T}$ в X – на онази, чиито $\mathcal{T}$-отворени множества са всевъзможните обединения на множества от въпросната фамилия.

Ефективни топологични пространства

Дефиниция

Ефективно топологично пространство (ЕТП) ще наричаме всяка наредена двойка $(X, \mathcal{U})$, където X е множество, а $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ е база на някоя топология в X със свойството T_0.

Пример 1. Нека $i \mapsto \mathcal{U}_i$ е тотална номерация на множеството на отворените интервали в $\mathbb{R}$, имащи за краища рационални числа. Тогава $(\mathbb{R}, \{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}})$ е ЕТП.

Пример 2. Нека X е множеството на всички частични функции от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$, а $f_0, f_1, f_2, \ldots$ е ефективно подреждане в редица на онези от тях, които са с крайна дефиниционна област. За всяко $i \in \mathbb{N}$ нека $\mathcal{U}_i$ е множеството на всички функции от X, които са продължения на f_i. Тогава $(X, \{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}})$ е ЕТП.

Пример 3. Нека (X, d) е сепарабелно метрично пространство, A е изброимо навсякъде гъсто множество в него, а $i \mapsto \mathcal{U}_i$ е тотална номерация на множеството на отворените кълбета в (X, d) с центрове в A и радиуси от вида 2^{-k}, където $k \in \mathbb{N}$. Тогава $(X, \{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}})$ е ЕТП.

Изчислими ЕТП

Дефиниция

Казваме, че ЕТП $(X, \mathcal{U})$ е *изчислимо*, ако съществува такова рекурсивно номеруемо подмножество S на $\mathbb{N}^3$, че $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \bigcup \{\mathcal{U}_k \mid (i, j, k) \in S\}$ при всеки избор на i и j в $\mathbb{N}$.

Пример 1′. Ако номерацията $i \mapsto \mathcal{U}_i$ от пример 1 е изчислима, то ЕТП $(\mathbb{R}, \{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}})$ е изчислимо.

Пример 2′. ЕТП, разгледано в пример 2, е изчислимо.

Пример 3′. Нека K е положително цяло число, $X = \mathbb{R}^K$, d е Евклидовата метрика в $\mathbb{R}^K$, $A = \mathbb{Q}^K$ и номерацията $i \mapsto \mathcal{U}_i$ от пример 3 е изчислима. Тогава ЕТП, разгледано в пример 3, е изчислимо.

И в трите примера по-горе можем да си послужим с $S = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \mid \mathcal{U}_k \subseteq \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j\}$. В първите два от тях може да се използва и $S = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \mid \mathcal{U}_k = \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j\}$.

Изчислими елементи на ЕТП

Дефиниция

Нека $(X,\mathcal{U})$ е ЕТП. При $x \in X$ полагаме $\mathcal{U}^{-1}(x) = \{i \in \mathbb{N} \mid x \in \mathcal{U}_i\}$. Казваме, че елементът x е *$\mathcal{U}$-изчислим*, ако множеството $\mathcal{U}^{-1}(x)$ е рекурсивно номеруемо.

Пример 1″. Ако $\mathcal{U}$ е изчислима номерация от вида, разгледан в пример 1, то едно реално число е $\mathcal{U}$-изчислимо точно тогава, когато то е изчислимо в обичайния смисъл.

Пример 2″. Ако $\mathcal{U}$ е номерация от вида, разгледан в пример 2, то една частична функция от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$ е $\mathcal{U}$-изчислима точно тогава, когато тя е частично рекурсивна.

Пример 3″. При предположенията на пример 3′ един елемент на $\mathbb{R}^K$ е $\mathcal{U}$-изчислим точно тогава, когато неговите компоненти са изчислими реални числа.

Изчислимост на частични функции от ЕТП към ЕТП

Дефиниция

Нека $(X, \mathcal{U})$ и $(Y, \mathcal{V})$ са ЕТП, а f е частична функция от X към Y. За едно изображение F на $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ в $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ще казваме, че *реализира* f, ако $F(\mathcal{U}^{-1}(x)) = \mathcal{V}^{-1}(f(x))$ за всяко $x \in \mathrm{dom}(f)$. Ще казваме, че f е $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$-*изчислима*, ако съществува номерационен оператор, който реализира f.

Пример 1‴. Ако $\mathcal{U}$ е изчислима номерация от вида, разгледан в пример 1, то една частична функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$ е $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$-изчислима точно тогава, когато тя е изчислима в обичайния смисъл.

Пример 3‴. При предположенията на пример 3′, ако $\mathcal{V}$ е изчислима номерация от вида, разгледан в пример 1, то една частична функция от $\mathbb{R}^K$ към $\mathbb{R}$ е $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$-изчислима точно тогава, когато тя е изчислима в обичайния смисъл.

Някои твърдения за запазване на изчислимостта

Твърдение 1

Ако $(X,\mathcal{U})$ и $(Y,\mathcal{V})$ са ЕТП, f е $(\mathcal{U},\mathcal{V})$-изчислима частична функция от X към Y и a е $\mathcal{U}$-изчислим елемент на $\mathrm{dom}(f)$, то $f(a)$ е $\mathcal{V}$-изчислим елемент на Y.

Твърдение 2

Ако $(X,\mathcal{U})$ и $(Y,\mathcal{V})$ са ЕТП, а b е $\mathcal{V}$-изчислим елемент на Y, то константната функция от X към Y със стойност b е $(\mathcal{U},\mathcal{V})$-изчислима.

За произволни функции f и g ще означаваме с gf функцията $x \mapsto g(f(x))$ $(\mathrm{dom}(gf) = \{x \in \mathrm{dom}(f) \mid f(x) \in \mathrm{dom}(g)\})$.

Твърдение 3

Ако $(X,\mathcal{U})$, $(Y,\mathcal{V})$ и $(Z,\mathcal{W})$ са ЕТП, f е $(\mathcal{U},\mathcal{V})$-изчислима частична функция от X към Y и g е $(\mathcal{V},\mathcal{W})$-изчислима частична функция от Y към Z, то частичната функция gf от X към Z е $(\mathcal{U},\mathcal{W})$-изчислима.

Изчислимост на частични функции от ЕТП към $\mathbb{N}$

Нека $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, където $\mathcal{A}_i = \{i\}$. Очевидно $(\mathbb{N}, \mathcal{A})$ е едно изчислимо ЕТП и всички елементи на $\mathbb{N}$ са $\mathcal{A}$-изчислими.

Теорема

Нека $(X, \mathcal{U})$ е ЕНП, а f е частична функция от X към $\mathbb{N}$. За да бъде функцията f $(\mathcal{U}, \mathcal{A})$-изчислима, достатъчно е да съществува такава частично рекурсивна функция на един аргумент φ, че за всяко $x \in \mathrm{dom}(f)$ и всяко $y \in \mathbb{N}$ да е в сила еквивалентността

$$f(x) = y \Leftrightarrow \mathcal{U}^{-1}(x) \cap \varphi^{-1}(y) \neq \varnothing.$$

Ако $\mathrm{rng}(f) \subseteq \{0, 1\}$, то за да бъде функцията f $(\mathcal{U}, \mathcal{A})$-изчислима, достатъчно е да съществуват такива непресичащи се рекурсивно номеруеми подмножества E_0 и E_1 на $\mathbb{N}$, че за всяко $x \in \mathrm{dom}(f)$ да бъдат в сила еквивалентностите

$$f(x) = y \Leftrightarrow \mathcal{U}^{-1}(x) \cap E_y \neq \varnothing, \quad y = 0, 1.$$

Ако ЕНП $(X, \mathcal{U})$ е изчислимо, тези условия са и необходими.

Московакисово разширение на ЕТП (I)

Нека $(X,\mathcal{U})$ е ЕТП. Московакисово разширение X^* на X строим по обичайния начин: X^* е затварянето на $X \cup \{o\}$ относно образуване на наредени двойки при предположение, че $o \notin X$ и никой елемент на $X \cup \{o\}$ не е наредена двойка. Дефинираме фамилия $\mathcal{U}^* = \{\mathcal{U}_j^*\}_{j\in\mathbb{N}}$ от подмножества на X^* по следния начин, където $(m,n) \mapsto \langle m,n\rangle$ е такова изчислимо биективно изображение на $\mathbb{N}^2$ върху $\mathbb{N}$, че $\langle m,n\rangle \geq \max(m,n)$ за всички $m,n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{U}_0^* = \{o\},\ \mathcal{U}_{2i+2}^* = \mathcal{U}_i,\ \mathcal{U}_{2\langle m,n\rangle+1}^* = \mathcal{U}_m^* \times \mathcal{U}_n^*.$$

Теорема

Наредената двойка $(X^*,\mathcal{U}^*)$ е ЕТП, а тъждественото изображение id_X е $(\mathcal{U},\mathcal{U}^*)$-изчислима функция от X към X^* и $(\mathcal{U}^*,\mathcal{U})$-изчислима частична функция от X^* към X.

По дефиниция $0^* = o$, $(n+1)^* = (n^*,o)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Теорема

Функцията $n \mapsto n^*$ от $\mathbb{N}$ към X^* е $(\mathcal{A},\mathcal{U}^*)$-изчислима, а обратната ѝ функция е $(\mathcal{U}^*,\mathcal{A})$-изчислима.

Следствие

Ако $(X^*, \mathcal{U}^*)$ е Московакисово разширение на ЕТП $(X, \mathcal{U})$, то:

- *За произволна частична функция от X към X свойството $(\mathcal{U}, \mathcal{U})$-изчислимост е еквивалентно с всяко от следните три: $(\mathcal{U}, \mathcal{U}^*)$-изчислимост като частична функция от X към X^*, $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U})$-изчислимост като частична функция от X^* към X, $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$-изчислимост като частична функция от X^* към X^*.*
- *За да бъде една частична функция от X към $\mathbb{N}$ $\mathcal{U}$-изчислима, необходимо и достатъчно е тя да бъде $\mathcal{U}^*$-изчислима като частична функция от X^* към $\mathbb{N}$.*
- *За да бъде една частична функция f от X^* към $\mathbb{N}$ $\mathcal{U}^*$-изчислима, необходимо и достатъчно е частичната функция $z \mapsto f(z)^*$ от X^* към X^* да бъде $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$-изчислима.*

Оттук нататък ще предполагаме, че е дадено някое ЕТП $(X, \mathcal{U})$ и е фиксирано негово Московакисово разширение $(X^*, \mathcal{U}^*)$.

Московакисовото разширение на изчислимо ЕТП е изчислимо

Теорема

Ако ЕТП $(X,\mathcal{U})$ е изчислимо, то ЕТП $(X^*,\mathcal{U}^*)$ също е изчислимо.

Доказателство. Нека $S \subseteq \mathbb{N}^3$, S е рекурсивно номеруемо и

$$\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \bigcup\{\mathcal{U}_k \,|\, (i,j,k) \in S\}$$

при всеки избор на $i,j \in \mathbb{N}$. Определяме индуктивно $S^* \subseteq \mathbb{N}^3$ по следния начин:

- $(0,0,0) \in S^*$.
- $(2i+2, 2j+2, 2k+2) \in S^*$ винаги, когато $(i,j,k) \in S$.
- Ако $(m,\bar{m},r) \in S^*$ и $(n,\bar{n},s) \in S^*$, то $(2\langle m,n\rangle+1, 2\langle \bar{m},\bar{n}\rangle+1, 2\langle r,s\rangle+1) \in S^*$.

Множеството S^* е рекурсивно номеруемо и

$$\mathcal{U}_i^* \cap \mathcal{U}_j^* = \bigcup\{\mathcal{U}_k^* \,|\, (i,j,k) \in S^*\}$$

при всеки избор на $i,j \in \mathbb{N}$. $\square$

Изчислими елементи на Московакисовото разширение

Твърдение 1

Един елемент на X е $\mathcal{U}^*$-изчислим точно тогава, когато е $\mathcal{U}$-изчислим. Елементът о е $\mathcal{U}^*$-изчислим.

Твърдение 2

Ако x и y са произволни елементи на X^*, то елементът (x, y) е $\mathcal{U}^*$-изчислим точно тогава, когато x и y са $\mathcal{U}^*$-изчислими.

Следствие

Един елемент на X^* е $\mathcal{U}^*$-изчислим точно тогава, когато той може да се получи от $\mathcal{U}$-изчислими елементи на X и елемента о чрез краен брой прилагания на образуване на наредена двойка.

$(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$-изчислимост на функциите π и δ на Московакис

Функциите π и δ от X^* към X^* се дефинират чрез равенствата

$$\pi(x,y) = x,\ \ \delta(x,y) = y,\ \ \pi(o) = \delta(o) = o,$$
$$\pi(z) = \delta(z) = (o,o) \text{ при } z \in X.$$

Теорема

Функциите π и δ са $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$-изчислими.

Доказателство. Ще докажем $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$-изчислимостта на функцията π, а разсъжденията за δ са аналогични. Нека $z \in X^*$. Условието $\pi(z) \in \mathcal{U}_j^*$ е изпълнено за дадено $j \in \mathbb{N}$ точно тогава, когато е налице някой от следните случаи:

- $z \in \mathcal{U}^*_{2\langle j,n\rangle+1}$ за някое $n \in \mathbb{N}$;
- $j = 0$ и $z \in \mathcal{U}_0^*$;
- $j = 1$ и $z \in \mathcal{U}_2^* \cup \mathcal{U}_4^* \cup \mathcal{U}_6^* \cup \cdots$.

Оттук е ясно, че π се реализира от изображението $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, дефинирано по следния начин:

$$F(M) = \{j \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\,(2\langle j,n\rangle + 1 \in M) \vee (j = 0\ \&\ 0 \in M)$$
$$\vee\,(j = 1\ \&\ M \cap \{2,4,6,\ldots\} \neq \varnothing).\} \qquad \square$$

Запазване на $(\mathcal{U}^*,\mathcal{U}^*)$-изчислимостта при съчетаване

Теорема

Нека f, g и e са частични функции от X^* към X^*, като $\mathrm{dom}(e) = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ и $e(z) = (f(z), g(z))$ за всяко $z \in \mathrm{dom}(e)$. Ако функциите f и g са $(\mathcal{U}^*,\mathcal{U}^*)$-изчислими, то функцията e също е $(\mathcal{U}^*,\mathcal{U}^*)$-изчислима.

Доказателство. Нека F и G са номерационни оператори, реализиращи съответно функцията f и функцията g. При $z \in \mathrm{dom}(e)$ и $j \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
& j \in \mathcal{U}^{*-1}(e(z)) \\
& \quad \Leftrightarrow \exists m \in \mathcal{U}^{*-1}(f(z))\, \exists n \in \mathcal{U}^{*-1}(g(z))\, (j = 2\langle m, n\rangle + 1) \\
& \quad \Leftrightarrow \exists m \in F(\mathcal{U}^{*-1}(z))\, \exists n \in G(\mathcal{U}^{*-1}(z))\, (j = 2\langle m, n\rangle + 1).
\end{aligned}
$$

Значи за всяко $z \in \mathrm{dom}(e)$ имаме $U^{*-1}(e(z)) = E(\mathcal{U}^{*-1}(z))$, където $E : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ се дефинира чрез равенството $E(M) = \{j \mid \exists m \in F(M)\, \exists n \in G(M)\, (j = 2\langle m, n\rangle + 1)\}$. $\square$

Функцията e, разгледана в теоремата, ще означаваме с (f, g).

Ако f, g и h са частични функции от X^* към X^*, с $(h \supset f, g)$ ще означаваме функцията e (*разклонение към f и g, управлявано от h*), определена така: $e(z) = z'$ точно тогава, когато
$(z\in h^{-1}(X\cup\{o\})\,\&\, f(z)=z')\vee(z\in h^{-1}(X^*\setminus(X\cup\{o\}))\,\&\, g(z)=z')$.

Теорема

Ако f, g и h са $(\mathcal{U}^*,\mathcal{U}^*)$-изчислими частични функции от X^* към X^*, то и функцията $(h \supset f, g)$ е $(\mathcal{U}^*,\mathcal{U}^*)$-изчислима.

Доказателство. Нека F, G и H са номерационни оператори, които реализират съответно функциите f, g и h. При $e = (h \supset f, g)$, $z \in \mathrm{dom}(e)$ и $j \in \mathbb{N}$

$$e(z) \in \mathcal{U}_j^* \Leftrightarrow (h(z) \in \mathcal{U}_0^* \cup \mathcal{U}_2^* \cup \mathcal{U}_4^* \cup \cdots \;\&\; f(z) \in \mathcal{U}_j^*)$$
$$\vee\, (h(z) \in \mathcal{U}_1^* \cup \mathcal{U}_3^* \cup \mathcal{U}_5^* \cup \cdots \;\&\; g(z) \in \mathcal{U}_j^*),$$

т.е. при $M = \mathcal{U}^{*-1}(z)$ имаме

$$j \in \mathcal{U}^{*-1}(e(z)) \Leftrightarrow (H(M) \cap \{0, 2, 4, \ldots\} \neq \varnothing \;\&\; j \in F(M))$$
$$\vee\, (H(M) \cap \{1, 3, 5, \ldots\} \neq \varnothing \;\&\; j \in G(M)). \qquad \square$$

Запазване на $(\mathcal{U}^*,\mathcal{U}^*)$-изчислимостта при итерация (I)

Ако f и h са частични функции от X^* към X^*, под *итерация на f, управлявана от h* ще разбираме частичната функция e от X^* към X^*, определена по следния начин: $e(z) = z'$ точно тогава, когато съществува такава крайна редица $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$ от елементи на X^*, че

- $z_0 = z$, $z_n = z'$;
- $z_k \in h^{-1}(X^* \setminus (X \cup \{o\}))$ и $z_{k+1} = f(z_k)$ при $k < n$;
- $z_n \in h^{-1}(X \cup \{o\})$.

Ще означаваме тази функция с $[f, h]$.

Теорема

Нека f и h са частични функции от X^* към X^*. Ако f и h са $(\mathcal{U}^*,\mathcal{U}^*)$-изчислими, то и $[f, h]$ е $(\mathcal{U}^*,\mathcal{U}^*)$-изчислима.

Запазване на $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$-изчислимостта при итерация (II)

Доказателство. Нека F и H са номерационни оператори, които реализират съответно функциите f и h, и нека $e = [f, h]$. За всяко $m \in \mathbb{N}$ нека D_m е крайното подмножество на $\mathbb{N}$ с каноничен индекс m. Да предположим, че $z \in \mathrm{dom}(e)$. Проверява се, че едно естествено число j принадлежи на $\mathcal{U}^{*-1}(e(z))$ точно тогава, когато за някоя крайна редица $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_n$ от естествени числа са изпълнени следните условия:

1. $D_{m_0} \subseteq \mathcal{U}^{*-1}(z)$, $j \in D_{m_n}$;
2. $H(D_{m_k}) \cap \{1, 3, 5, \ldots\} \neq \varnothing$ и $D_{m_{k+1}} \subseteq F(D_{m_k})$ при $k < n$;
3. $H(D_{m_n}) \cap \{0, 2, 4, \ldots\} \neq \varnothing$.

Следователно $\mathcal{U}^{*-1}(e(z)) = E(\mathcal{U}^{*-1}(z))$, където $E : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ се дефинира по следния начин: едно естествено число j принадлежи на $E(M)$ точно тогава, когато някоя крайна редица $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_n$ от естествени числа удовлетворява условията $D_{m_0} \subseteq M$, $j \in D_{m_n}$ и условията 2 и 3 по-горе. $\square$

Едно понятие за изчислимост на оператори в множеството на частичните функции от X^* към X^*

Нека $\mathcal{F}$ е множеството на всички частични функции от X^* към X^*. Някои изображения на $\mathcal{F}$ в себе си ще наречем $(\mathcal{U}^*,\mathcal{U}^*)$-*изчислими по построение (ИПП)*. Това ще направим чрез следната индуктивна дефиниция:

- Тъждественото изображение $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ е ИПП.
- Изображение, което съпоставя на всяка функция от $\mathcal{F}$ една и съща $(\mathcal{U}^*,\mathcal{U}^*)$-изчислима функция от $\mathcal{F}$, е ИПП.
- Ако Γ_1 и Γ_2 са ИПП изображения на $\mathcal{F}$ в себе си, то изображенията $f \mapsto \Gamma_1(f)\Gamma_2(f)$, $f \mapsto (\Gamma_1(f), \Gamma_2(f))$ и $f \mapsto [\Gamma_1(f), \Gamma_2(f)]$ също са ИПП.
- Ако Γ_1, Γ_2 и Γ_3 са ИПП изображения на $\mathcal{F}$ в себе си, то изображението $f \mapsto (\Gamma_3(f) \supset \Gamma_1(f), \Gamma_2(f))$ също е ИПП.

Пример. Изображението $f \mapsto (\mathrm{id}_{X^*} \supset \mathrm{id}_{X^*}, (f\delta, f\pi))$ е ИПП.

Изображението от горния пример има точно една неподвижна точка (тя е с дефиниционна област X^*).

Теорема

Ако Γ е ИПП изображение на $\mathcal{F}$ в себе си, то Γ има неподвижна точка, която е минимална относно естествената наредба в $\mathcal{F}$ и е $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$-изчислима.

Доказателство. Използваме теоремата за рекурсия от [2] и запазването на $(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}^*)$-изчислимостта при композиция, съчетаване, разклонение и итерация. □

Литература

[1] Moschovakis, Y.N. *Abstract first order computability. I.* Trans. Amer. Math. Soc., **138** (1969), 427–464.

[2] Skordev, D. *Recursion theory on iterative combinatory spaces.* Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astr. Phys., **24** (1976), 23–31.

[3] Weihrauch, K. and Grubba, T. *Elementary computable topology.* J. Univers. Comput. Sci., **15** (2009), 1381–1422.