Един клас от рекурсивни функционали

Димитър Скордев

Софийски университет
Факултет по математика и информатика

skordev@fmi.uni-sofia.bg .

Пролетна научна сесия на ФМИ
16 март 2019 г.

Посвещавам на паметта на

проф. В. А. Успенски

(1930–2018)

Резюме

Върху функции, дефинирани навсякъде в $\mathbb{N}$, всеки рекурсивен функционал съвпада с някой μ-рекурсивен. Ако разглеждаме функционалите и върху частични функции, то μ-рекурсивните функционали съставляват същински подклас на рекурсивните.

В настоящия доклад се разглежда един клас от функционали, който е промеждутъчен между тези два класа.

Някои дефиниции

Ще означаваме с $\mathcal{P}$ множеството на всички частични функции от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$. При $n \in \mathbb{N}$ нека $\mathcal{E}_n = \mathcal{P} \times \mathbb{N}^n$.

Един елемент $(f, x_1, \ldots, x_n)$ на $\mathcal{E}_n$ ще наричаме *финитен*, ако $\mathrm{dom}(f)$ е крайно множество.

Ако $e = (f, x_1, \ldots, x_n)$ и $e' = (f', x'_1, \ldots, x'_n)$ са елементи на $\mathcal{E}_n$, то ще казваме, че e' *предхожда* e тогава, когато f' е рестрикция на f и $x'_j = x_j$ при $j = 1, \ldots, n$.

Под *минимален елемент* на едно подмножество $\mathcal{D}$ на $\mathcal{E}_n$ ще разбираме такъв елемент на $\mathcal{D}$, който не се предхожда от никой друг елемент на $\mathcal{D}$.

Ще казваме, че едно подмножество $\mathcal{D}$ на $\mathcal{E}_n$ е *отворено*, ако за принадлежността към $\mathcal{D}$ на един елемент на $\mathcal{E}_n$ е необходимо и достатъчно този елемент да се предхожда от някой финитен елемент на $\mathcal{D}$.

Едно очевидно твърдение и една дефиниция

Твърдение

Ако $\mathcal{D}$ е отворено подмножество на $\mathcal{E}_n$, то всеки елемент на $\mathcal{D}$ се предхожда от поне един минимален елемент на $\mathcal{D}$ и всички минимални елементи на $\mathcal{D}$ са финитни.

Дефиниция

Нека $e_i = (f_i, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, k$ са елементи на $\mathcal{E}_n$, които предхождат даден елемент на $\mathcal{E}_n$. Полагаме

$$e_1 \vee \cdots \vee e_k = (f, x_1, \ldots, x_n),$$

където f е общото продължение на $f_1, \ldots, f_k$, за което

$$\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(f_1) \cup \cdots \cup \mathrm{dom}(f_k).$$

Рекурсивни функционали

Нека $\mathfrak{F}_n$ е множеството на всички частични изображения на $\mathcal{E}_n$ в $\mathbb{N}$.

При $\Phi \in \mathfrak{F}_n$ казваме, че Φ е *рекурсивен функционал*, ако множеството $\Phi^{-1}(t)$ е отворено при всеки избор на t в $\mathbb{N}$ и при ефективна номерация $e_0, e_1, e_2, \ldots$ на финитните елементи на $\mathcal{E}_n$ функцията $\lambda s.\Phi(e_s)$ е частично рекурсивна.
Множеството на всички изображения от $\mathfrak{F}_n$, които са рекурсивни функционали, ще означаваме с $\mathfrak{R}_n$. Полагаме

$$\mathfrak{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{R}_n.$$

Прости примери за рекурсивни функционали са *базисните примитивно рекурсивни функционали*, т.е. изображенията

$$f \mapsto 0, \quad (f, x) \mapsto x + 1,$$
$$(f, x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j \text{ при } j \in \{1, \ldots, n\},$$
$$(f, x) \mapsto f(x).$$

Някои операции, запазващи рекурсивността

Запазват рекурсивността например следните три операции (при $\bar{x} = x_1, \ldots, x_n$).

- *Суперпозиция* – при дадени $\Phi_0 \in \mathfrak{F}_l$ и $\Phi_1, \ldots, \Phi_l \in \mathfrak{F}_n$ дефинираме $\Phi \in \mathfrak{F}_n$ чрез равенството
$$\Phi(f, \bar{x}) = \Phi_0(f, \Phi_1(f, \bar{x}), \ldots, \Phi_l(f, \bar{x})).$$

- *Примитивна рекурсия* – при дадени $\Phi_0 \in \mathfrak{F}_n$ и $\Phi_1 \in \mathfrak{F}_{n+2}$ дефинираме $\Phi \in \mathfrak{F}_{n+1}$ чрез равенствата
$$\Phi(f, \bar{x}, 0) = \Phi_0(f, \bar{x}), \quad \Phi(f, \bar{x}, y+1) = \Phi_1(f, \bar{x}, y, \Phi(f, \bar{x}, y)).$$

- *μ-операция* – при дадено $\Phi_0 \in \mathfrak{F}_{n+1}$ дефинираме $\Phi \in \mathfrak{F}_n$ чрез равенството
$$\Phi(f, \bar{x}) = \mu y[\Phi_0(f, \bar{x}, y) = 0].$$

μ-рекурсивни функционали

При $\Phi \in \mathfrak{F}_n$ казваме, че Φ е *μ-рекурсивен функционал*, ако Φ може да се получи от базисни примитивно рекурсивни функционали чрез някакъв брой прилагания на суперпозиция, примитивна рекурсия и μ-операция. Множеството на всички изображения от $\mathfrak{F}_n$, които са μ-рекурсивни функционали, ще означаваме с $\mathfrak{M}_n$. Полагаме

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{M}_n.$$

Очевидно $\mathfrak{M}_n \subseteq \mathfrak{R}_n$. Всъщност включването е строго. Това може да се види например като се използва следното твърдение, лесно следващо от дефиницията по-горе:

Ако $\Phi \in \mathfrak{M}$, то за всяко e от $\mathrm{dom}(\Phi)$ измежду елементите на $\mathrm{dom}(\Phi)$, предхождащи e, има един, който предхожда всички тях.

Пример 1 (функционал от $\mathfrak{R}_n \setminus \mathfrak{M}_n$)

Такъв е Φ от $\mathfrak{F}_n$, който е определен чрез еквивалентността

$$\Phi(f, \bar{x}) = t \Leftrightarrow \mathrm{dom}(f) \neq \varnothing \ \& \ t = 0.$$

Предхождащи минимални елементи на дефиниционните области на рекурсивните функционали

От дефиницията на класа $\mathfrak{R}$ следва, че ако $\Phi \in \mathfrak{R}$, то $\mathrm{dom}(\Phi)$ е отворено множество, следователно всеки елемент на $\mathrm{dom}(\Phi)$ се предхожда от поне един минимален елемент на $\mathrm{dom}(\Phi)$ и всички минимални елементи на $\mathrm{dom}(\Phi)$ са финитни.

Те могат да бъдат много. Например ако $\mathrm{dom}(\Phi)$ е функционалът от пример 1, то минималните елементи на $\mathrm{dom}(\Phi)$, предхождащи $(f, \bar{x})$, са елементите $(g, \bar{x})$ на $\mathcal{E}_n$, за които g е рестрикция на f върху едноточково множество.

При $n \in \mathbb{N}$ да означим с $\mathfrak{M}'_n$ множеството на онези функционали Φ от $\mathfrak{R}_n$, за които всеки елемент на $\mathrm{dom}(\Phi)$ се предхожда от точно един минимален елемент на $\mathrm{dom}(\Phi)$.

При $\Phi \in \mathfrak{R}_n$ условието $\Phi \in \mathfrak{M}'_n$ е еквивалентно на това, щото за всяко e от $\mathrm{dom}(\Phi)$ измежду елементите на $\mathrm{dom}(\Phi)$, предхождащи e, да има един, който предхожда всички тях. Следователно $\mathfrak{M}_n \subseteq \mathfrak{M}'_n$. Всъщност включването е строго.

$\mathfrak{M}_n \subset \mathfrak{M}'_n$

Пример 2 (функционал от $\mathfrak{M}'_n \setminus \mathfrak{M}_n$)

Такъв е Φ от $\mathfrak{F}_n$, който е определен чрез еквивалентността

$$\Phi(f,\bar{x}) = t \Leftrightarrow$$
$$(f(1) = f(2) = 0 \vee f(2) = f(0) = 1 \vee f(0) = f(1) = 2)$$
$$\& \ t = 0.$$

В случая, когато $n = 0$, това е показано на стр. 32 в моя статия, публикувана в Изв. на Мат. инст. на БАН, **7**, 1963. Общият случай следва лесно оттук.

Относно рекурсивните функционали с единственост на предхождащия минимален елемент на дефиниционната област

Нека

$$\mathfrak{M}' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{M}'_n.$$

Тогава $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{R}$. Разсъжденията, чрез които се вижда, че $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}'$, всъщност показват, че суперпозицията, примитивната рекурсия и μ-операцията запазват принадлежността към $\mathfrak{M}'$. Поради това $\mathfrak{M}'$ е един промеждутъчен клас между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{R}$, който заслужава известно внимание. За съжаление обаче и той както $\mathfrak{M}$ не е затворен относно прилагане на паралелен условен оператор.

Паралелен условен оператор

Ако са дадени логически израз $\mathfrak{p}$ и два израза $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$, то прилагането към тях на обикновения условен оператор дава израз $\supset\mathfrak{p}\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ със следната семантика: един обект a е стойност на $\supset\mathfrak{p}\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ точно тогава, когато или $\mathfrak{p}$ има стойност истина и a е стойност на $\mathfrak{x}$, или $\mathfrak{p}$ има стойност лъжа и a е стойност на $\mathfrak{y}$.

Паралелният условен оператор, въведен от Г. Д. Плоткин, преобразува $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ в израз $:\supset\mathfrak{p}\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ със следната семантика: един обект a е стойност на $:\supset\mathfrak{p}\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ точно тогава, когато a е стойност на $\supset\mathfrak{p}\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ или a е стойност както на $\mathfrak{x}$, така и на $\mathfrak{y}$.

Пример 3 (различен резултат от двата условни оператора)

Първият от изразите

$$\supset\left(\frac{1}{s}\in\mathbb{N}\right)s^2s^3 \quad \text{и} \quad :\supset\left(\frac{1}{s}\in\mathbb{N}\right)s^2s^3$$

има стойност s^3 за всяко естествено число s, различно от 0, но няма стойност при $s=0$, докато вторият има стойност s^3 за всяко естествено число s.

Незатвореност на $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ относно прилагане на паралелен условен оператор

Ако $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{C}$, където $\mathfrak{C} = \mathfrak{M}_n$ или $\mathfrak{C} = \mathfrak{M}'_n$, а изображението Φ от $\mathfrak{F}_n$ се дефинира чрез равенството

$$\Phi(e) = \supset (\Phi_0(e) > 0)\Phi_1(e)\Phi_2(e),$$

то и $\Phi \in \mathfrak{C}$. Това е така, защото Φ може да се получи от Φ_0, Φ_1, Φ_2 и базисни примитивно рекурсивни функционали чрез прилагания на суперпозиция и примитивна рекурсия. Нещата обаче се променят, ако заменим знака $\supset$ със знака $:\supset$.

Пример 4

При $k = 0, 1, 2$ нека $\Phi_i \in \mathfrak{F}_0$ се дефинира чрез равенството $\Phi_k(f) = f(k)$, а $\Phi \in \mathfrak{F}_{1,0}$ се дефинира чрез равенството

$$\Phi(f) = :\supset (\Phi_0(f) > 0)\Phi_1(f)\Phi_2(f).$$

Тогава $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{M}$, но $\Phi \notin \mathfrak{M}'$ (защото $f \in \mathrm{dom}(\Phi)$ и f се предхожда от два различни минимални елемента на $\mathrm{dom}(\Phi)$, когато f е константа и $\mathrm{dom}(f) \supseteq \{0, 1, 2\}$).

Рекурсивни функционали с краен брой предхождащи минимални елементи

Дефиниция

Ще означаваме с $\mathfrak{Q}$ класа на елементите Φ на $\mathfrak{R}$ със следното свойство: за всеки елемент e на $\mathrm{dom}(\Phi)$ множеството на минималните елементи на $\mathrm{dom}(\Phi)$, които предхождат e, е крайно.

Забележка. В горната дефиниция разрешаваме условието за крайност на множеството на минималните елементи на $\mathrm{dom}(\Phi)$, които предхождат e, да се разбира по неконструктивен начин.

Понеже $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{Q}$, а функционалът Φ от пример 4 принадлежи на $\mathfrak{Q}$, класът $\mathfrak{M}'$ е същински подклас на $\mathfrak{Q}$.

Теорема

Класът $\mathfrak{Q}$ е затворен относно суперпозиция, примитивна рекурсия, μ-операция и паралелен условен оператор.

Една характеризация на $\mathfrak{Q}$, удобна за доказателството

Дефиниция

Ако $e \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}^n$, то ще наричаме *базово подмножество на* $\mathcal{D}$ *за* e такова подмножество $\mathcal{B}$ на $\mathcal{D}$, че всеки елемент на $\mathcal{D}$, предхождащ e, се предхожда от някой елемент на $\mathcal{B}$.

Лема

За да принадлежи на $\mathfrak{Q}$ един функционал Φ от $\mathfrak{R}$, необходимо и достатъчно е при всеки избор на елемент e на $\mathrm{dom}(\Phi)$ да съществува крайно базово подмножество на $\mathrm{dom}(\Phi)$ за e.

Необходимост. Ако $\Phi \in \mathfrak{Q}$ и $e \in \mathrm{dom}(\Phi)$, то множеството на минималните елементи на $\mathrm{dom}(\Phi)$, предхождащи e, е крайно базово подмножество на $\mathcal{D}$ за e.
Достатъчност. Ако $\Phi \in \mathfrak{R}$, $e \in \mathrm{dom}(\Phi)$ и $\mathcal{B}$ е базово подмножество на $\mathrm{dom}(\Phi)$ за e, то минималните елементи на $\mathrm{dom}(\Phi)$, предхождащи e, принадлежат на $\mathcal{B}$.

Затвореност на $\mathfrak{Q}$ относно суперпозиция

Нека $\Phi_0 \in \mathfrak{F}_l$ и $\Phi_1, \ldots, \Phi_l \in \mathfrak{F}_n$ са от класа $\mathfrak{Q}$, а $\Phi \in \mathfrak{F}_n$ се дефинира чрез равенството $\Phi(f, \bar{x}) = \Phi_0(f, \Phi_1(f, \bar{x}), \ldots, \Phi_l(f, \bar{x}))$. Тогава $\Phi \in \mathfrak{Q}$.

Ясно е, че $\Phi \in \mathfrak{R}_n$. Нека $(f, \bar{x}) \in \mathrm{dom}(\Phi)$, следователно $(f, \bar{x}) \in \mathrm{dom}(\Phi_k)$ при $k = 1, \ldots, l$ и $(f, y_1, \ldots, y_l) \in \mathrm{dom}(\Phi_0)$ при $y_1 = \Phi_1(f, \bar{x}), \ldots, y_l = \Phi_l(f, \bar{x})$. Нека $\mathcal{B}_0$ е крайно базово подмножество на $\mathrm{dom}(\Phi_0)$ за $(f, y_1, \ldots, y_l)$, а при $k = 1, \ldots, l$ $\mathcal{B}_k$ е крайно базово подмножество на $\mathrm{dom}(\Phi_k)$ за $(f, \bar{x})$. Да положим

$$\mathcal{B} = \{(g, \bar{x}) \vee e_1 \vee \cdots \vee e_l \mid (g, y_1, \ldots, y_l) \in \mathcal{B}_0,\ e_1 \in \mathcal{B}_1, \ldots, e_l \in \mathcal{B}_l\}.$$

Тогава $\mathcal{B}$ е крайно базово подмножество на $\mathrm{dom}(\Phi)$ за $(f, \bar{x})$.

Затвореност на $\mathfrak{Q}$ относно примитивна рекурсия

Нека $\Phi_0 \in \mathfrak{R}_n$ и $\Phi_1 \in \mathfrak{R}_{n+2}$ са от класа $\mathfrak{Q}$, а $\Phi \in \mathfrak{F}_{n+1}$ е дефиниран чрез равенствата

$$\Phi(f, \bar{x}, 0) = \Phi_0(f, \bar{x}), \quad \Phi(f, \bar{x}, y+1) = \Phi_1(f, \bar{x}, y, \Phi(f, \bar{x}, y)).$$

Тогава $\Phi \in \mathfrak{Q}$.

Ясно е, че $\Phi \in \mathfrak{R}_{n+1}$. Нека $(f, \bar{x}, y) \in \mathrm{dom}(\Phi)$, следователно $(f, \bar{x}) \in \mathrm{dom}(\Phi_0)$ и съществуват такива $z_0, z_1, \ldots, z_y$, че $z_0 = \Phi_0(f, \bar{x})$, а при $k = 1, \ldots, y$ $(f, \bar{x}, k-1, z_{k-1}) \in \mathrm{dom}(\Phi_1)$ и $z_k = \Phi_1(f, \bar{x}, k-1, z_{k-1})$. Нека $\mathcal{B}_0$ е крайно базово подмножество на $\mathrm{dom}(\Phi_0)$ за $(f, \bar{x})$, а при $k = 1, \ldots, y$ $\mathcal{B}_k$ е крайно базово подмножество на $\mathrm{dom}(\Phi_1)$ за $(f, \bar{x}, k-1, z_{k-1})$. Да означим с $\mathcal{B}$ множеството на елементите на $\mathcal{E}_{n+1}$ от вида

$$(g_0, \bar{x}, y) \vee (g_1, \bar{x}, y) \vee \cdots \vee (g_y, \bar{x}, y),$$

където $(g_0, \bar{x}) \in \mathcal{B}_0$ и $(g_k, \bar{x}, k-1, z_{k-1}) \in \mathcal{B}_k$ при $k = 1, \ldots, y$. Тогава $\mathcal{B}$ е крайно базово подмножество на $\mathrm{dom}(\Phi)$ за $(f, \bar{x}, y)$.

Затвореност на $\mathfrak{Q}$ относно μ-операция

Нека $\Phi_0 \in \mathfrak{R}_{n+1}$ е от класа $\mathfrak{Q}$, а $\Phi \in \mathfrak{F}_n$ е дефиниран чрез равенството

$$\Phi(f, \bar{x}) = \mu y[\Phi_0(f, \bar{x}, y) = 0].$$

Тогава $\Phi \in \mathfrak{Q}$.

Ясно е, че $\Phi \in \mathfrak{R}_{n+1}$. Нека $(f, \bar{x}) \in \mathrm{dom}(\Phi)$. В такъв случай $(f, \bar{x}, y) \in \mathrm{dom}(\Phi_0)$ при $y = 0, 1, \ldots, t$, където $t = \Phi(f, \bar{x})$. При $y = 0, 1, \ldots, t$ нека $\mathcal{B}_y$ е крайно базово подмножество на $\mathrm{dom}(\Phi_0)$ за $(f, \bar{x}, y)$. Да означим с $\mathcal{B}$ множеството на елементите на $\mathcal{E}_n$ от вида

$$(g_0, \bar{x}) \vee \cdots \vee (g_t, \bar{x}),$$

където $(g_y, \bar{x}, y) \in \mathcal{B}_y$ при $y = 0, 1, \ldots, t$. Тогава $\mathcal{B}$ е крайно базово подмножество на $\mathrm{dom}(\Phi)$ за $(f, \bar{x})$.

Затвореност на $\mathfrak{Q}$ относно паралелен условен оператор

Нека Φ_0, Φ_1, Φ_1 са функционали от $\mathfrak{F}_n$, принадлежащи на класа $\mathfrak{Q}$. Тогава на $\mathfrak{Q}$ принадлежи и функционалът Φ от $\mathfrak{F}_n$, дефиниран чрез равенството $\Phi(e) =: \supset (\Phi_0(e) > 0)\Phi_1(e)\Phi_2(e)$.

При $e \in \mathrm{dom}(\Phi)$ са възможни са следните три случая:

(1) $e \in \mathrm{dom}(\Phi_0) \cup \mathrm{dom}(\Phi_1)$, $\Phi_0(e) > 0$, $\Phi(e) = \Phi_1(e)$.

(2) $e \in \mathrm{dom}(\Phi_0) \cup \mathrm{dom}(\Phi_2)$, $\Phi_0(e) = 0$, $\Phi(e) = \Phi_2(e)$.

(3) $e \in \mathrm{dom}(\Phi_1) \cup \mathrm{dom}(\Phi_2)$, $\Phi(e) = \Phi_1(e) = \Phi_2(e)$.

Нека за даден елемент e на $\mathrm{dom}(\Phi)$ имаме например едновременно случая (1) и случая (3). При $i = 0, 1, 2$ нека $\mathcal{B}_i$ е крайно базово подмножество на $\mathrm{dom}(\Phi_i)$ за e. Да положим

$$\mathcal{B} = \{e_0 \vee e_1 \mid e_0 \in \mathcal{B}_0,\ e_1 \in \mathcal{B}_1\} \cup \{e_1 \vee e_2 \mid e_1 \in \mathcal{B}_1,\ e_2 \in \mathcal{B}_2\}.$$

Тогава $\mathcal{B}$ е крайно базово подмножество на $\mathrm{dom}(\Phi)$ за e. Аналогично се разглеждат и останалите възможности.

Една връзка между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{R}$

За да принадлежи на $\mathfrak{R}_n$ един елемент Φ на $\mathfrak{F}_n$, необходимо и достатъчно е да съществува функционал Ψ от $\mathfrak{M}_{n+1}$, тъждествено удовлетворяващ следното условие:

$$\Phi(f, \bar{x}) = t \Leftrightarrow \exists k(\Psi(f, \bar{x}, k) = t)$$

Необходимостта и достатъчността следват съответно например от теорема 8 и лема 22 в моята статия в Изв. на Мат. инст. на БАН, **7**, 1963.

Един другояче дефиниран клас от функционали, притежаващ отбелязаните свойства на $\mathfrak{Q}$

Дефиниция

Ще означаваме с $\mathfrak{N}_n$ класа на елементите Φ на $\mathfrak{F}_n$ със следното свойство: съществува функционал Ψ от $\mathfrak{M}_{n+1}$, удовлетворяващ тъждествено условието

$$\Phi(f, \bar{x}) = t \Leftrightarrow \exists k(\Psi(f, \bar{x}, k) = t),$$

за който множеството $\{k \mid (f, \bar{x}, k) \in \mathrm{dom}(\Psi)\}$ да бъде крайно при всеки избор на $(f, \bar{x})$ в $\mathcal{P} \times \mathbb{N}^n$ (разрешава се крайността да се разбира неконструктивно). Обединението на всички $\mathfrak{N}_n$ ще означаваме с $\mathfrak{N}$.

Лесно се вижда, че $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{Q}$. Доказва се, че класът $\mathfrak{N}$ също е затворен относно суперпозиция, примитивна рекурсия, μ-операция и паралелен условен оператор. Въпрос: дали $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{Q}$?

Благодаря за вниманието!