

Може ли всеки ден да бъде Великден?

Димитър Скордев

(допълнена и поправена версия
на презентация от 9 юни 2011 г.)

Посвещавам на паметта
на сина си Генчо
(1970–2008)

Определяне на датата на Великден

Грубо казано, след Никейския църковен събор през 325 г. Великден се празнува в първата неделя след първото пълнолуние, което е след или в деня на пролетното равноденствие. Астрономическите понятия в това описание обаче не се разбират буквално, а се използват някои техни формални тълкувания (в частност приема се, че пролетното равноденствие е винаги на 21 март).

Оттогава до създаването на григорианския календар през 1582 г., църквите в различните страни празнуват Великден общо взето на една и съща (зависеща от годината) дата между 22 март и 25 април вкл. по юлианския календар. След това източно-православните църкви продължават да правят така, а католическите (по-късно също и протестантските) започват да го празнуват на дати в същия интервал, но по григорианския календар, като освен това използват правилото за първата неделя след първото пълнолуние с известна промяна в тълкуването. Поради изоставането на юлианския календар от григорианския и от годишния астрономически кръговрат интервалът от 22 март до 25 април по стар стил постепенно се придвижва към по-късно време на годината (понастоящем е с 13 дни по-късно).

Формула на Гаус за датата на православния Великден

Да предположим, че работим с дати по стар стил. За да определим на кой ден се пада православният Великден през годината Y , полагаме

$$a = Y \bmod 4,$$

$$b = Y \bmod 7,$$

$$c = Y \bmod 19,$$

$$d = (19c + 16) \bmod 30,$$

$$e = (2a + 4b + 6d) \bmod 7.$$

Търсеният ден е $d + e$ дни след 21 март.

Пример. При $Y = 2011$ получаваме $a = 3$, $b = 2$, $c = 16$, $d = 20$, $e = 1$, $d + e = 21$, следователно имаме Великден на 11 април 2011 г. по стар стил (това е 24 април 2011 г. по нов стил).

Числото $d + e$ като функция на Y

Очевидно $d + e$ е периодична функция на Y с период $4.7.19 = 532$, а стойностите на тази функция са естествени числа, ненадминаващи $29 + 6 = 35$. Кратността на нейните стойности, когато Y взема 532 последователни стойности, е следната:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $d + e$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| кратност | 0 | 4 | 8 | 8 | 12 | 16 | 16 | 20 | 16 | 16 | 20 | 16 | 16 | 20 | 16 | 20 | 20 | 16 |
| $d + e$ | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |
| кратност | 20 | 16 | 16 | 20 | 16 | 16 | 20 | 16 | 20 | 16 | 16 | 20 | 16 | 12 | 12 | 8 | 8 | 4 |

Оттук е ясно, че възможните дати на православния Великден по стар стил образуват интервала от 22 март до 25 април включително, като празникът се пада най-рядко на крайните дати на този интервал, а най-често – на 28 и 31 март и на 3, 5, 6, 8, 11, 14, 16 и 19 април.

Минимални поредици от последователни години, в течение на които православният Великден попада на всички възможни за него дати по стар стил

Сред 532-те естествени числа от 1600 до 2131 вкл. точно шест са начални членове на минимални поредици от последователни години, за които $d + e$ приема всички стойности от 1 до 35.

Съответните минимални поредици са следните:

- ▶ 1600, ..., 1671
- ▶ 1668, ..., 1763
- ▶ 1736, ..., 1915
- ▶ 1888, ..., 1983
- ▶ 1980, ..., 2051
- ▶ 2040, ..., 2143

Дати на православния Великден по нов стил, възможни през 20 или 21 век

През годините от 1901 до 2099 вкл. е налице изоставане на стария стил от новия с 13 дни. Следователно през тези години датите на православния Великден по нов стил са в интервала от 4 април до 8 май вкл. От предходния слайд следва, че всяка дата от този интервал е дата на празника по нов стил през някоя година от 1980 до 2051 вкл. За 2100 г. формулата на Гаус дава, че православният Великден тогава е на 18 април по стар стил, което е 2 май по нов и значи пак е дата в интервала от 4 април до 8 май вкл.

Забележка. Тъй като през годините от 2101 до 2199 вкл. е налице изоставане на стария стил от новия с 14 дни, през тези години датите на православния Великден по нов стил са в интервала от 5 април до 9 май вкл. Една дата от този интервал обаче, а именно 7 май, не ще бъде дата на празника по нов стил през никоя година от 22 век.

През поне една от кои да е 79 последователни години православният Великден е на 8 април по стар стил

Твърдението е еквивалентно с това, че от всеки 79 последователни стойности на Y поне една дава на $d + e$ стойност 18. Лесно се проверява, че при

$$Y \in \{3, 14, 87, 109, 182, 255, 288, 361, 372, 451, 456\}$$

имаме $d + e = 18$ и че от всяко естествено число, по-малко от 532, с най-много 78 прибавяния на 1 по модул 532 може да се получи число, принадлежащо на горното множество. Оттук следва, че от всеки 79 последователни стойности на Y поне една дава при деление на 532 остатък, принадлежащ на това множество, и значи за нея $d + e = 18$.

Денят 8 април по стар стил, преобразуван в нов стил, ще попадне някога сто пъти подред в произволно избран ден от годината, различен от 29 февруари (слайд 1)

От описанията на юлианския и григорианския календар следва, че всеки път, когато k , i и Y са цели числа, удовлетворяващи неравенствата

$$k > 0, \quad 0 \leq i \leq 3, \quad (4k + i)100 \leq Y \leq (4k + i)100 + 99,$$

денят 1 март в годината Y по стар стил е $3k + i - 2$ дни по-късно от едноименния ден по нов стил и следователно 8 април в годината Y по стар стил е $3k + i + 36$ дни по-късно от 1 март в годината Y по нов стил. При $k = 109$ и $i \leq 1$ числото $3k + i + 36$ има стойностите 363 и 364, а при $k < 109$ и $4k + i > 20$ то взема всички стойности от 52 до 362, като за всички такива стойности на k и i очевидно $(4k + i)100 \geq 2100$. Това показва верността на твърдението в случаите, когато избраният ден е от 22 април до 31 декември или от 1 януари до 28 февруари включително.

Денят 8 април по стар стил, преобразуван в нов стил, ще попадне някога сто пъти подред в произволно избран ден от годината, различен от 29 февруари (слайд 2)

Нека $k = 48687 + h$, където h е неотрицателно цяло число, а i е цяло число, удовлетворяващо неравенствата $0 \leq i \leq 3$. Тогава $3k + i + 36 = 146097 + 3h + i$. Понеже 146097 е броят на дните в кои да е 400 последователни години от григорианския календар, при $(4k + i)100 \leq Y \leq (4k + i)100 + 99$ денят 8 април в годината Y по стар стил ще бъде $3h + i$ дни по-късно от 1 март в годината $Y + 400$ по нов стил. Понеже при $h < 17$ числото $3h + i$ взема всички стойности от 0 до 51, това доказва верността на твърдението в случая, когато избраният ден е от 1 март до 21 април включително.

Всеки ден от годината може да бъде дата по нов стил на православния Великден

Нека е дадена произволна допустима комбинация от име на месец и пореден номер на ден от него, различна от комбинацията [февруари, 29]. Някога в бъдеще поне сто пъти подред, а значи и поне 79 пъти подред, денят 8 април по стар стил ще се окаже на дата по нов стил, отговаряща на въпросната комбинация. Знаем обаче, че поне един път през този период от време православният Великден ще бъде на 8 април по стар стил. Значи всеки ден от годината с евентуално изключение на 29 февруари може да бъде дата по нов стил на православния Великден (при предположение, разбира се, че сегашните правила за определяне на датата му останат в сила достатъчно дълго!). За 29 февруари въпросът се решава, като директно се провери, че православният Великден, който по стар стил би бил през 42459 година, би се оказал на 29 февруари 42460 г. по нов стил.

Търсене на първото бъдещо попадане на православния Великден в даден ден на годината

За някои дни от годината разсъжденията, които направихме, дават изключително много завишен срок до първото попадане на православния Великден в тези дни. За намиране на първите такива попадания можем да използваме подходяща компютърна програма, чието изпълнение да включва в себе си прилагане на формулата на Гаус за последователни предстоящи години и преобразуване на получените резултати от стар в нов стил. За съставянето на програмата е нужно подробно описание на алгоритъм за такова преобразуване.

Преобразуване на датите от стар към нов стил (слайд 1)

При преобразуването на една дата от стар към нов стил е удобно да се работи с броя на дните до нея от последния предхождащ я или съвпадащ с нея първи март. Например за датата на православния Великден по стар стил този брой е $20 + d + e$, където d и e се определят по формулата на Гаус.

Нека k е дадено естествено число. Да означим с $J(Y)$ и $G(Y)$ броя на дните от първи март през годината $400k$ до първи март през коя да е следваща година Y съответно за стар стил (юлиански календар) и нов стил (григориански календар).

Имаме равенствата

$$\begin{aligned} J(Y) &= 365(Y - 400k) + \left\lfloor \frac{Y - 400k}{4} \right\rfloor = 365Y + \left\lfloor \frac{Y}{4} \right\rfloor - 146100k, \\ G(Y) &= 365(Y - 400k) + \left\lfloor \frac{Y - 400k}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{Y - 400k}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y - 400k}{400} \right\rfloor \\ &= 365Y + \left\lfloor \frac{Y}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{Y}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{Y}{400} \right\rfloor - 146097k. \end{aligned}$$

Преобразуване на датите от стар към нов стил (слайд 2)

При дадено Y ще потърсим последния първи март по нов стил, който не е по-късно от православния Великден през годината Y по стар стил. Нека k е естествено число, за което $400k \leq Y$. Първи март през годината $400k$ по стар стил е $3k - 2$ дни по-късно от първи март през годината $400k$ по нов стил.

Тогава дните от първи март през годината $400k$ по нов стил до споменатия Великден са $J(Y) + 3k + 18 + d + e$ на брой и трябва да намерим най-голямото естествено число Z , за което $G(Z) \leq J(Y) + 3k + 18 + d + e$, т.е.

$$365Z + [Z/4] - [Z/100] + [Z/400] \leq 365Y + [Y/4] + 18 + d + e.$$

При така намереното Z броят на дните от първи март през годината Z по нов стил до интересувания ни Великден ще бъде равен на разликата $J(Y) + 3k + 18 + d + e - G(Z)$, т.е. на

$$365(Y - Z) + [Y/4] - [Z/4] + [Z/100] - [Z/400] + 18 + d + e$$

(поне при $Y < 40000$ имаме $Z = Y$ и значи тогава този брой е $[Y/100] - [Y/400] + 18 + d + e$).

Преобразуване на датите от стар към нов стил (слайд 3)

Нека даден ден е n дни след последния първи март, който го предхожда или съвпада с него, и нека въпросният първи март е през годината Z . Ако $n < 306$, то разглежданият ден също е през годината Z , а в противен случай той е през годината $Z + 1$. Да положим

$$p = [n/153], \quad q = n \bmod 153,$$

$$r = [q/61], \quad s = q \bmod 61,$$

$$t = [s/31], \quad u = s \bmod 31,$$

$$v = 5p + 2r + t + 1.$$

Тогава въпросният ден е през месеца с пореден номер $(v + 1) \bmod 12 + 1$ и има в него пореден номер $u + 1$.

Първо попадане на православния Великден на дадена дата по нов стил след 2011 г.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----|-------|-------|-------|-------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 33809 | 37818 | 41542 | 45703 | 2016 | 5175 | 9184 | 13345 | 17411 | 21420 | 25581 | 29647 |
| 2 | 33972 | 37913 | 41884 | 45893 | 2021 | 5365 | 9499 | 13440 | 17506 | 21667 | 25828 | 29742 |
| 3 | 33904 | 38160 | 42047 | 46140 | 2043 | 5460 | 9431 | 13687 | 17848 | 21762 | 25991 | 29837 |
| 4 | 34189 | 38255 | 41979 | 46455 | 2059 | 5775 | 9526 | 13782 | 18011 | 21857 | 25923 | 29932 |
| 5 | 34341 | 38350 | 42169 | 2037 | 2013 | 5707 | 9716 | 13877 | 17943 | 21952 | 26113 | 30179 |
| 6 | 34436 | 38749 | 42321 | 2132 | 2040 | 5802 | 10031 | 13972 | 18133 | 22199 | 26208 | 30274 |
| 7 | 34531 | 38692 | 42579 | 2075 | 2051 | 5992 | 9963 | 14287 | 18228 | 22294 | 26455 | 30369 |
| 8 | 34626 | 38787 | 42511 | 2018 | 2078 | 6459 | 10153 | 14219 | 18475 | 22389 | 26550 | 30616 |
| 9 | 34721 | 38977 | 42606 | 2034 | 2173 | 6239 | 10248 | 14314 | 18570 | 22636 | 26645 | 30779 |
| 10 | 34968 | 39129 | 42701 | 2061 | 2268 | 6334 | 10495 | 14504 | 18665 | 22799 | 26740 | 30711 |
| 11 | 35063 | 39224 | 43100 | 2083 | 2583 | 6524 | 10590 | 14819 | 18760 | 22731 | 26987 | 30901 |
| 12 | 35158 | 39319 | 43043 | 2015 | 2515 | 6839 | 10685 | 14751 | 19075 | 22921 | 27082 | 31148 |
| 13 | 35405 | 39414 | 43138 | 2031 | 2610 | 6771 | 10780 | 14941 | 19007 | 23016 | 27177 | 31243 |
| 14 | 35500 | 39509 | 43480 | 2058 | 2705 | 6961 | 11095 | 15036 | 19102 | 23263 | 27424 | 31338 |
| 15 | 35595 | 39756 | 43643 | 2012 | 3104 | 7056 | 11027 | 15283 | 19444 | 23358 | 27587 | 31433 |
| 16 | 35785 | 39851 | 43575 | 2017 | 3047 | 7371 | 11122 | 15378 | 19607 | 23453 | 27519 | 31528 |
| 17 | 35937 | 39946 | 43765 | 2039 | 3142 | 7303 | 11312 | 15473 | 19539 | 23548 | 27709 | 31775 |
| 18 | 36032 | 40345 | 43917 | 2055 | 3332 | 7493 | 11627 | 15568 | 19729 | 23795 | 27804 | 31870 |
| 19 | 36127 | 40288 | 44175 | 2020 | 3647 | 7588 | 11559 | 15883 | 19824 | 23890 | 28051 | 31965 |
| 20 | 36222 | 40383 | 44107 | 2014 | 3579 | 8055 | 11749 | 15815 | 20071 | 23985 | 28146 | 32212 |
| 21 | 36317 | 40573 | 44202 | 2041 | 3769 | 7835 | 11844 | 15910 | 20166 | 24232 | 28241 | 32375 |
| 22 | 36564 | 40725 | 44544 | 2063 | 3864 | 7930 | 12091 | 16100 | 20261 | 24395 | 28336 | 32307 |
| 23 | 36659 | 40820 | 44859 | 2079 | 4179 | 8120 | 12186 | 16415 | 20356 | 24327 | 28583 | 32592 |
| 24 | 36754 | 40915 | 44639 | 2022 | 4111 | 8435 | 12281 | 16347 | 20671 | 24517 | 28678 | 32744 |
| 25 | 37001 | 41010 | 44734 | 2038 | 4206 | 8367 | 12376 | 16537 | 20603 | 24612 | 28773 | 32839 |
| 26 | 37096 | 41105 | 45076 | 2065 | 4301 | 8557 | 12691 | 16632 | 20793 | 24859 | 29020 | 32934 |
| 27 | 37191 | 41352 | 45239 | 2087 | 4700 | 8652 | 12623 | 16879 | 21040 | 24954 | 29183 | 33029 |
| 28 | 37381 | 41447 | 45171 | 2019 | 4643 | 8899 | 12718 | 16974 | 21203 | 25049 | 29115 | 33124 |
| 29 | 37533 | 42460 | 45361 | 2035 | 4738 | 8994 | 12908 | 17069 | 21135 | 25144 | 29305 | 33371 |
| 30 | 37628 | | 45513 | 2062 | 4928 | 9089 | 13223 | 17164 | 21325 | 25391 | 29400 | 33466 |
| 31 | 37723 | | 45771 | | 5243 | | 13155 | 17479 | | 25486 | | 33561 |

Проблемът „Великден след Гергьовден“

С изключение на седемте години от 1969 до 1976 вкл. Българската православна църква чества Св. Георги Победоносец на 23 април по стар стил (понастоящем това е 6 май по нов стил), докато пък през споменатия 7-годишен период денят на този светия е бил на 23 април по нов стил (което, разбира се, е 10 април по стар стил). Понякога (12 пъти в течение на 532 последователни години) се случва православният Великден да е на 24 или 25 април по стар стил и поради това денят 23 април по стар стил да бъде по време на Великденския пост (последните два такива случая са били през 1888 и 1983 г., а следващите два ще са през 2051 и 2078 г.). Случаите на Великден след Гергьовден биха били многократно по-чести обаче при празнуване на Гергьовден на 23 април по нов стил. Например през седемте години, когато празникът на Св. Георги Победоносец е бил на тази дата, православният Великден се е случил четири пъти след нея, а именно бил е на датите 26.4.1970, 29.4.1973, 4.5.1975 и 25.4.1976 по нов стил.

Забележка 1

По решение на Светия синод на Българската православна църква (основаващо се на решение на някои представители на православни църкви, прието през 1923 г.) неподвижните църковни празници в България, както е и Гергьовден, от края на 1968 г. започват вместо на дотогавашните техни дати по стар стил да се честват на едноименните дати по тъй наречения поправен юлиански календар, който всъщност ще съвпада с григорианския до 2799 г. вкл. Например Гергьовден, който дотогава се е празнувал на 23 април по стар стил, т.е. на 6 май по нов, през 1969 г. се празнува на 23 април по нов стил, а Коледа, празнувана дотогава на 25 декември по стар стил, т.е. на 7 януари по нов, още в края на 1968 г. вече бива празнувана на 25 декември по нов стил (така че през 1968 г. тя е празнувана два пъти – един през януари и втори път през декември). През 1977 г. обаче е направено за Гергьовден изключение от приетите общи правила и празнуването му е върнато на предишната дата.

Някои полезни Интернет страници

- ▶ *Великденски календар*
(автор Петко Йотов)
<http://5ko.free.fr/bg/easter.php>
- ▶ *Calculation of the Ecclesiastical Calendar*
(автор Marcos J. Montes)
<http://smart.net/~mmontes/ec-cal.html>
- ▶ *Calendar FAQ*
(автор Claus Tøndering)
<http://www.tondering.dk/main/index.php/calendar-information>
- ▶ *Computus*
<http://en.wikipedia.org/wiki/Computus>
- ▶ *JavaScript превод на написана от Генчо Д. Скордев програма*
<http://ut13.hit.bg/postings/scb/comments/easterhljs.htm>
- ▶ *NASA Javascript Calendar Converter*
<http://eclipse.gsfc.nasa.gov/SEhelp/julian.html>

Забележка 2

Някои онлайн програми за пресмятане на датата на православния Великден могат да дават погрешен резултат за години от далечното бъдеще. Такъв е случаят при програмата с автор Андрей Лебедев, която е на страницата

Расчет Православной Пасхалии на любой год

<http://alebedev.narod.ru/app/app01.html>

(напр. датите по нов стил, които тя дава за годините 25390 и 25391, са с разлика 384 дни, а числото 384 не се дели на 7). Цитираният на предния слайд JavaScript превод на програма, написана от Генчо Д. Скордев, също е с ограничена приложимост (за години след 32767 са възможни проблеми), но това е отбелязано изрично в Интернет страницата, сочена от линка. За програмата на Marcos Montes пък е съществено, че годината, която се въвежда, се тълкува като година от юлианския календар, а православният Великден, който е в нея, може да се окаже в друга григорианска година (посочвана от програмата).