Изчислимост в пространството $C[0,1]$

Както обикновено с $C[0,1]$ ще означаваме множеството на всички непрекъснати реални функции с дефиниционна област $[0,1]$. Нека $d : C[0,1]^2 \to \mathbb{R}$ е дефинирана чрез равенството

$$d(\xi', \xi) = \max_{x \in [0,1]} |\xi'(x) - \xi(x)|.$$

Функцията d е метрика в $C[0,1]$. Нека A е множеството на онези функции от $C[0,1]$, които са полиноми с рационални коефициенти. Лесно е да се съобрази, че това множество е изброимо. То е и навсякъде гъсто в $C[0,1]$ относно метриката d. И наистина, нека ξ е произволна функция от $C[0,1]$, а δ е произволно положително число. Теоремата на Вайерщрас за апроксимиране на непрекъснатите функции с полиноми позволява да твърдим, че съществува полином

$$\pi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N$$

с реални коефициенти, такъв, че $d(\pi, \xi) < \dfrac{\delta}{2}$. Нека $a'_0, a'_1, a'_2, \ldots, a'_N$ са рационални числа, удовлетворяващи неравенствата

$$|a'_k - a_k| < \frac{\delta}{2N+2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N,$$

и нека π' е елементът на A, дефиниран чрез равенството

$$\pi'(x) = a'_0 + a'_1 x + a'_2 x^2 + \cdots + a'_N x^N.$$

Тогава $d(\pi', \pi) < \dfrac{\delta}{2}$ и следователно $d(\pi', \xi) < \delta$.

Ще разглеждаме някои ефективни метрични пространства $(C[0,1], d, \alpha)$, където α е номерация на множеството A. Ще използваме обаче не произволни негови номерации, а само такива, които са тотални (т.е. имат дефиниционна област $\mathbb{N}$) и са изчислими в смисъла на следната дефиниция.

Дефиниция 1. Едно изображение α на $\mathbb{N}$ в A ще наричаме *изчислимо*, ако съществуват такава рекурсивна функция на един аргумент α_0 и такива рекурсивни функции на два аргумента $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, че

$$\alpha(i)(x) = \sum_{j < \alpha_0(i)} \frac{\alpha_1(i,j) - \alpha_2(i,j)}{\alpha_3(i,j) + 1} x^j \tag{1}$$

за всяко i от $\mathbb{N}$ и всяко $x \in [0,1]$.

Изчислими тотални номерации на A съществуват. Нека например ν_1, ν_2, ν_3 са такива рекурсивни функции на един аргумент, че

$$\{(\nu_1(t), \nu_2(t), \nu_3(t) \,|\, t \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^3,$$

а $p_0, p_1, p_2, \ldots$ са последователните прости числа. В такъв случай една изчислима тотална номерация на A може да бъде дефинирана чрез равенството (1), ако функциите $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ бъдат определени с помощта на равенствата

$$\alpha_0(i) = \min\{j \in \mathbb{N} \,|\, p_j > \max(\nu_1(i), \nu_2(i)) + 1\},$$
$$\nu_k(i) + 1 = p_0^{\alpha_k(i,0)} p_1^{\alpha_k(i,1)} p_2^{\alpha_k(i,2)} \ldots, \quad k = 1, 2, 3.$$

Оттук нататък ще предполагаме, че е дадена някоя изчислима тотална номерация α на множеството A и че $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ са рекурсивни функции, които свидетелстват за изчислимостта на α по начина от дефиниция 1. Ще ни бъде от полза следната лема.

Лема 1. Ако β е изчислимо изображение на $\mathbb{N}$ в множеството A, то съществува такава рекурсивна функция на един аргумент τ, че за всяко i от $\mathbb{N}$ да бъде в сила равенството

$$\beta(i) = \alpha(\tau(i)). \tag{2}$$

Доказателство. Нека β е изчислимо изображение на $\mathbb{N}$ в множеството A, т.е. съществуват такава рекурсивна функция на един аргумент β_0 и такива рекурсивни функции на два аргумента $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, че за всяко i от $\mathbb{N}$ и всяко $x \in [0, 1]$ да бъде изпълнено равенството

$$\beta(i)(x) = \sum_{j<\beta_0(i)} \frac{\beta_1(i,j) - \beta_2(i,j)}{\beta_3(i,j) + 1} x^j. \tag{3}$$

Дефинираме функция $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ с помощта на равенството

$$\tau(i) = \min\{t \in \mathbb{N} \,|\, \alpha(t) = \beta(i)\}.$$

Дефиниционната област на τ съдържа всички естествени числа, защото $\mathrm{rng}(\alpha) = \mathbb{N}$. Равенството (2) следва непосредствено от дефиницията на функцията τ. Що се касае до рекурсивността на τ, тя следва от обстоятелството, че равенството $\alpha(t) = \beta(i)$ е изпълнено точно тогава, когато са налице следните три условия:

(a) за всички естествени числа j, по-малки от $\min(\alpha_0(t), \beta_0(i))$ е в сила равенството
$$\frac{\alpha_1(t,j) - \alpha_2(t,j)}{\alpha_3(t,j) + 1} = \frac{\beta_1(i,j) - \beta_2(i,j)}{\beta_3(i,j) + 1};$$

(b) измежду естествените числа j, които са по-малки от $\alpha_0(t)$, не съществува такова, за което да са в сила неравенствата $j \geq \beta_0(i)$ и $\alpha_1(t,j) - \alpha_2(t,j) \neq 0$;

(c) измежду естествените числа j, които са по-малки от $\beta_0(i)$, не съществува такова, за което да са в сила неравенствата $j \geq \alpha_0(t)$ и $\beta_1(i,j) - \beta_2(i,j) \neq 0$. $\square$

Забележка. Вярно е и обратното твърдение на твърдението на лема 1. И наистина, нека $\beta : \mathbb{N} \to A$ и нека τ е такава рекурсивна функция, че за всяко i от $\mathbb{N}$ е изпълнено равенството (2). Тогава за за всяко i от $\mathbb{N}$ ще имаме равенството (3) с $\beta_0(i) = \alpha_0(\tau(i))$ и $\beta_k(i,j) = \alpha_k(\tau(i),j)$ при $k = 1,2,3$.

Ще се занимаем с изчислимостта в ефективното метрично пространство $\mathbf{X} = (C[0,1], d, \alpha)$, като първо ще охарактеризираме изчислимите му елементи.

Теорема 1. Всеки изчислим елемент на $\mathbf{X}$ е изчислима функция.

Доказателство. Нека ξ е изчислим елемент на $\mathbf{X}$. Ако $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ са рекурсивни функции, за които при всеки избор на i в $\mathbb{N}$ и на x в $[0,1]$ имаме равенството (1), а f е рекурсивно представяне на ξ в $\mathbf{X}$, то за всяко m в $\mathbb{N}$ ще имаме неравенството

$$d(\alpha(f(m)), \xi) < \frac{1}{m+1}$$

и следователно

$$\left| \sum_{j<\alpha_0(f(m))} \frac{\alpha_1(f(m),j) - \alpha_2(f(m),j)}{\alpha_3(f(m),j)+1} x^j - \xi(x) \right| < \frac{1}{m+1}$$

за всяко m в $\mathbb{N}$ и всяко x в $[0,1]$. Ще построим такива μ-рекурсивни оператори $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ от $\mathcal{F}_1^3$ към $\mathcal{F}_1$, че винаги, когато една тройка (f_1, f_2, f_3) е представяне на някое число x от интервала $[0,1]$, тройката

$$(\Gamma_1(f_1,f_2,f_3), \Gamma_2(f_1,f_2,f_3), \Gamma_3(f_1,f_2,f_3))$$

е представяне на съответното число $\xi(x)$. За целта ще използваме, че за всяко x от интервала $[0,1]$, всяка тройка (f_1, f_2, f_3), представяща x, и произволни m и n в $\mathbb{N}$ имаме

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{j<\alpha_0(f(2m+1))} \frac{\alpha_1(f(2m+1),j) - \alpha_2(f(2m+1),j)}{\alpha_3(f(2m+1),j)+1} \left(\frac{f_1(n)-f_2(n)}{f_3(n)+1}\right)^j - \xi(x) \right| \\
\leq &\left| \sum_{j<\alpha_0(f(2m+1))} \frac{\alpha_1(f(2m+1),j) - \alpha_2(f(2m+1),j)}{\alpha_3(f(2m+1),j)+1} \left(\left(\frac{f_1(n)-f_2(n)}{f_3(n)+1}\right)^j - x^j\right) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{j<\alpha_0(f(2m+1))} \frac{\alpha_1(f(2m+1),j) - \alpha_2(f(2m+1),j)}{\alpha_3(f(2m+1),j)+1} x^j - \xi(x) \right| \\
< &\frac{1}{n+1} \sum_{j<\alpha_0(f(2m+1))} \frac{|\alpha_1(f(2m+1),j) - \alpha_2(f(2m+1),j)|}{\alpha_3(f(2m+1),j)+1} (2^j - 1) + \frac{1}{2m+2}
\end{aligned}$$

(използвали сме, че при

$$y = \frac{f_1(n) - f_2(n)}{f_3(n) + 1}$$

имаме равенството $y^j - x^j = (y-x)(y^{j-1} + y^{j-2}x + \cdots + yx^{j-2} + x^{j-1})$ и неравенството $|y| < 2$). При това положение достатъчно е операторите $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ да бъдат такива, че за произволни функции f_1, f_2, f_3 от $\mathcal{F}_1$ и произволно m от $\mathbb{N}$ да имаме

$$\frac{\Gamma_1(f_1, f_2, f_3)(m) - \Gamma_2(f_1, f_2, f_3)(m)}{\Gamma_3(f_1, f_2, f_3)(m) + 1} =$$
$$\sum_{j < \alpha_0(f(2m+1))} \frac{\alpha_1(f(2m+1), j) - \alpha_2(f(2m+1), j)}{\alpha_3(f(2m+1), j) + 1} \left(\frac{f_1(\nu(m)) - f_2(\nu(m))}{f_3(\nu(m)) + 1} \right)^j,$$

където

$$\nu(m) = \left\lfloor (2m+2) \sum_{j < \alpha_0(f(2m+1))} \frac{|\alpha_1(f(2m+1), j) - \alpha_2(f(2m+1), j)|}{\alpha_3(f(2m+1), j) + 1} (2^j - 1) \right\rfloor .[1]$$

Построяването на такива оператори става чрез рутинни преобразования, като първо се показва, че функцията ν е рекурсивна. □

Оказва се, че и обратното твърдение на твърдение 1 е вярно – в смисъл, че всяка изчислима реална функция с дефиниционна област $[0, 1]$ е изчислим елемент на ефективното метрично пространство **X**. За да покажем това, ще докажем една конструктивна версия на апроксимационната теорема на Вайерщрас (нейна версия от такъв характер е била публикувана през 1975 г. от Pour-El и Caldwell).

За всяка функция $\xi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ и всяко положително цяло число n да положим

$$B_n(\xi)(x) = \sum_{k=0}^{n} \xi\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x),$$

където

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

(така дефинираният полином $B_n(\xi)(x)$ се нарича *n-ти Бернщайнов полином* за функцията ξ).

[1] Този избор на $\nu(m)$ осигурява неравенството

$$\frac{1}{\nu(m) + 1} \sum_{j < \alpha_0(f(2m+1))} \frac{|\alpha_1(f(2m+1), j) - \alpha_2(f(2m+1), j)|}{\alpha_3(f(2m+1), j) + 1} (2^j - 1) < \frac{1}{2m+2},$$

което пък гарантира, че ще имаме неравенството

$$\left| \frac{\Gamma_1(f_1, f_2, f_3)(m) - \Gamma_2(f_1, f_2, f_3)(m)}{\Gamma_3(f_1, f_2, f_3)(m) + 1} - \xi(x) \right| < \frac{1}{m+1}.$$

Лема 2. Нека $\xi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$ и $|\xi(x)| \leq M$ за всяко $x \in [0,1]$. Нека ε и δ са положителни числа и всеки път, когато $x, x' \in [0,1]$ и $|x' - x| < \delta$, да е в сила неравенството $|\xi(x') - \xi(x)| < \varepsilon$. Тогава за всяко положително цяло число n и всяко $x \in [0,1]$ е изпълнено неравенството

$$|B_n(\xi)(x) - \xi(x)| < \varepsilon + \frac{M}{2\delta^2 n}. \tag{4}$$

Доказателство. Нека $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x \in [0,1]$. От тъждеството

$$(s+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^k t^{n-k} \tag{5}$$

при $s = x$, $t = 1 - x$ получаваме равенството

$$1 = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x), \tag{6}$$

а оттук следва, че

$$\begin{aligned} |B_n(\xi)(x) - \xi(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(\xi\left(\frac{k}{n}\right) - \xi(x) \right) B_{n,k}(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| \xi\left(\frac{k}{n}\right) - \xi(x) \right| B_{n,k}(x). \end{aligned}$$

Неравенството (4) ще докажем, като разгледаме поотделно членовете на последната сума, отговарящи на стойности на k, за които $\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta$, и останалите членове на сумата. Сборът на първия вид членове е по-малък от ε, защото той е по-малък от сумата

$$\sum_{k=0}^{n} \varepsilon B_{n,k}(x),$$

а тя е равна на ε. При това положение е достатъчно да покажем, че сборът на членовете от втория вид не надминава $\frac{M}{2\delta^2 n}$. Нека k е такова измежду числата $0, 1, 2, \ldots, n$, че да е изпълнено неравенството $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta$. Тогава

$$\left| \xi\left(\frac{k}{n}\right) - \xi(x) \right| B_{n,k}(x) \leq 2M B_{n,k}(x) \leq 2M \left(\frac{k - nx}{\delta n}\right)^2 B_{n,k}(x).$$

Оттук виждаме, че сборът на членовете от втория вид не надминава

$$\frac{2M}{\delta^2 n^2} \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 B_{n,k}(x),$$

тъй че целта ни ще бъде постигната, ако докажем неравенството

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 B_{n,k}(x) \le \frac{n}{4}.$$

Имаме равенството

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x) - 2nx\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x) + n^2x^2\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x).$$

Последният член в дясната страна на горното равенство е равен на n^2x^2 благодарение на равенството (6). Ще намерим прости изрази и за сумите в другите два члена, като използваме две други подобни равенства. Чрез двукратно диференциране на тъждеството (5) спрямо s получаваме последователно

$$n(s+t)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} s^{k-1}t^{n-k},$$
$$n(n-1)(s+t)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} s^{k-2}t^{n-k}.$$

Като умножим двете страни на тези равенства съответно с s и с s^2, ще получим равенствата

$$n(s+t)^{n-1}s = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} s^{k}t^{n-k},$$
$$n(n-1)(s+t)^{n-2}s^2 = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} s^{k}t^{n-k},$$

а те при $s=x$, $t=1-x$ дават, че

$$nx = \sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x),$$
$$n(n-1)x^2 = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}(x).$$

Оттук чрез събиране получаваме още равенството

$$n(n-1)x^2 + nx = \sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x).$$

В крайна сметка получаваме, че

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 B_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 + nx - 2(nx)^2 + n^2x^2$$
$$= n(x-x^2) = n\left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right) \le \frac{n}{4}. \qquad \square$$

Теорема 2. Нека $\xi : [0,1] \to \mathbb{R}$ е изчислима функция. Тогава ξ е изчислим елемент на ефективното метрично пространство $\mathbf{X}$.

Доказателство. Благодарение на изчислимостта си функцията ξ принадлежи на $C[0,1]$. Нещо повече, тя е ефективно равномерно непрекъсната, т.е. съществува такава рекурсивна функция на един аргумент h, че за всяко естествено число m и всеки две числа x и x' от интервала $[0,1]$, за които $|x' - x| < \dfrac{1}{h(m)+1}$, да е в сила неравенството $|\xi(x') - \xi(x)| < \dfrac{1}{m+1}$. В такъв случай лема 2 позволява да твърдим, че ако M е една горна граница на абсолютната стойност на функцията ξ, то за всяко естествено число m, всяко положително цяло число n и всяко x от интервала $[0,1]$ е изпълнено неравенството

$$|B_n(\xi)(x) - \xi(x)| < \frac{1}{m+1} + \frac{M(h(m)+1)^2}{2n}.$$

Разбира се, горната граница M може да се избере така, че тя да бъде положително цяло число. Тогава, ако i е произволно естествено число, то при $m = 4i+3$ и $n = (2i+2)M(h(4i+3)+1)^2$ получаваме, че

$$|B_n(\xi)(x) - \xi(x)| < \frac{1}{4i+4} + \frac{1}{4i+4} = \frac{1}{2i+2}$$

за всяко $x \in [0,1]$ и значи

$$d(B_{\nu(i)}(\xi), \xi) < \frac{1}{2i+2} \tag{7}$$

при $\nu(i) = (2i+2)M(h(4i+3)+1)^2$. Изчислимостта на функцията ξ позволява да твърдим още, че съществуват такива рекурсивни функции на три променливи g_1, g_2, g_3, че винаги, когато n е положително цяло число, а k е някое от числата $0, 1, 2, \dots, n$, при всеки избор на естественото число l да имаме неравенството

$$\left| \frac{g_1(k,n,l) - g_2(k,n,l)}{g_3(k,n,l)+1} - \xi\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{1}{l+1}.$$

При този избор на функциите g_1, g_2, g_3 за всяко i в $\mathbb{N}$ и всяко $x \in [0,1]$ ще имаме

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=0}^{\nu(i)} \frac{g_1(k,\nu(i),2i+1)-g_2(k,\nu(i),2i+1)}{g_3(k,\nu(i),2i+1)+1} B_{\nu(i),k}(x) - B_{\nu(i)}(\xi)(x)\right| \\
&\quad = \left|\sum_{k=0}^{\nu(i)} \left(\frac{g_1(k,\nu(i),2i+1)-g_2(k,\nu(i),2i+1)}{g_3(k,\nu(i),2i+1)+1} - \xi\left(\frac{k}{\nu(i)}\right)\right) B_{\nu(i),k}(x)\right| \\
&\quad \le \sum_{k=0}^{\nu(i)} \left|\frac{g_1(k,\nu(i),2i+1)-g_2(k,\nu(i),2i+1)}{g_3(k,\nu(i),2i+1)+1} - \xi\left(\frac{k}{\nu(i)}\right)\right| B_{\nu(i),k}(x) \\
&\qquad\qquad < \frac{1}{2i+2} \sum_{k=0}^{\nu(i)} B_{\nu(i),k}(x) = \frac{1}{2i+2}.
\end{aligned}
$$

Нека β е изображението на $\mathbb{N}$ в A, дефинирано с помощта на равенството

$$\beta(i)(x) = \sum_{k=0}^{\nu(i)} \frac{g_1(k,\nu(i),2i+1)-g_2(k,\nu(i),2i+1)}{g_3(k,\nu(i),2i+1)+1} B_{\nu(i),k}(x).$$

Гореизложеното показва, че за всяко i от $\mathbb{N}$ имаме неравенството

$$d(\beta(i), B_{\nu(i)}(\xi)) < \frac{1}{2i+2}.$$

Като вземем предвид и неравенството (7), виждаме, че

$$d(\beta(i), \xi) < \frac{1}{i+1}$$

за всяко i от $\mathbb{N}$. С помощта на рутинни преобразования се вижда, че изображението β е изчислимо. В такъв случай по лема 1 съществува такава рекурсивна функция на един аргумент τ, че всяко i от $\mathbb{N}$ да е в сила равенството (2). За нея при всеки избор на i в $\mathbb{N}$ ще имаме неравенството

$$d(\alpha(\tau(i)), \xi) < \frac{1}{i+1}$$

и следователно τ е представяне на ξ в $\mathbf{X}$. $\square$

Следващата теорема дава един важен пример за изображение на $C[0,1]$ в себе си, което е $(\mathbf{X},\mathbf{X})$-изчислимо.

Теорема 3. Изображението $\theta : C[0,1] \to C[0,1]$, дефинирано с помощта на равенството

$$\theta(\xi)(x) = \int_0^x \xi(t)dt,$$

е $(\mathbf{X},\mathbf{X})$-изчислимо.

Доказателство. Да разгледаме изображението β на $\mathbb{N}$ в A, дефинирано с помощта на равенството

$$\beta(i)(x) = \int_0^x \alpha(i)(t)dt.$$

За всяко естествено число i и всяко x от интервала $[0,1]$ имаме равенството (3), където

$$\beta_0(i) = \alpha_0(i) + 1,$$
$$\beta_k(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{при } j = 0, \\ \dfrac{\alpha_k(i,j-1)}{j} & \text{при } j > 0,\ k = 1,2, \\ \alpha_3(i,j-1) & \text{при } j > 0,\ k = 3. \end{cases}$$

Това показва, че изображението β е изчислимо. Следователно съществува такава рекурсивна функция на един аргумент τ, че всяко i от $\mathbb{N}$ да е в сила равенството (2). Да дефинираме оператора $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$ с помощта на равенството

$$\Gamma(f)(i) = \tau(f(i)).$$

Той очевидно е μ-рекурсивен. Ще покажем, че винаги, когато функцията f е представяне в $\mathbf{X}$ на даден елемент ξ на множеството $C[0,1]$, функцията $\Gamma(f)$ е представяне в $\mathbf{X}$ на съответния елемент $\theta(\xi)$. Нека $\xi \in C[0,1]$ и f е представяне на ξ в $\mathbf{X}$. Последното означава, че f е функция от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$ и за всяко i от $\mathbb{N}$ е в сила неравенството

$$d(\alpha(f(i)), \xi) < \frac{1}{i+1}.$$

Значи за за всяко i от $\mathbb{N}$ при $t \in C[0,1]$ имаме неравенството

$$|\alpha(f(i))(t) - \xi(t)| < \frac{1}{i+1}.$$

Оттук следва, че за всяко i от $\mathbb{N}$ при $x \in [0,1]$ имаме също

$$\left| \int_0^x \alpha(f(i))(t)dt - \int_0^x \xi(t)dt \right| = \left| \int_0^x (\alpha(f(i))(t) - \xi(t))dt \right|$$
$$\leq \int_0^x |\alpha(f(i))(t) - \xi(t)|dt < \frac{1}{i+1},$$

т.е.

$$|\beta(f(i))(x) - \theta(\xi)(x)| < \frac{1}{i+1}.$$

Значи за всяко i от $\mathbb{N}$ имаме неравенството

$$d(\beta(f(i)), \theta(\xi)) < \frac{1}{i+1}$$

и за да заключим, че $\Gamma(f)$ е представяне в $\mathbf{X}$ на $\theta(\xi)$, остава само да забележим, че $\beta(f(i)) = \alpha(\tau(f(i))) = \alpha(\Gamma(f)(i))$. $\square$

Следствие. Ако $\xi : [0,1] \to \mathbb{R}$ е изчислима функция, то

$$\int_0^1 \xi(t)dt$$

е изчислимо реално число.

Доказателство. Използваме два пъти обстоятелството, че изчислимите функции преобразуват изчислимите елементи от дефиниционната си област в изчислими елементи. Първия път прилагаме това за функцията θ от теорема 3 и елемента ξ от дефиниционната ѝ област, а втория път – за функцията $\theta(\xi)$ и точката 1 от дефиниционната ѝ област. $\square$