Непрекъснатост на изчислимите реални функции

Нека $f \in \mathcal{F}_1$. За всяко крайно подмножество E на дефиниционната област на f полагаме $\mathcal{U}_E(f) = \{g \in \mathcal{F}_1 \,|\, g \restriction E = f \restriction E\}$. Множествата от вида $\mathcal{U}_E(f)$, където E е крайно подмножество на $\mathrm{dom}(f)$, ще наричаме *околности* на f.

Множеството $\mathcal{F}_1$ е околност на всеки свой елемент f, защото $\varnothing$ е крайно подмножество на $\mathrm{dom}(f)$ и е в сила равенството $\mathcal{U}_\varnothing(f) = \mathcal{F}_1$.

Ако $f \in \mathcal{F}_1$, то сечението на всеки две околности на f е пак околност на f благодарение на това, че за всеки две крайни подмножества E_1 и E_2 на $\mathrm{dom}(f)$ множеството $E_1 \cup E_2$ също е крайно подмножество на $\mathrm{dom}(f)$ и е в сила равенството $\mathcal{U}_{E_1 \cup E_2}(f) = \mathcal{U}_{E_1}(f) \cap \mathcal{U}_{E_2}(f)$.

Едно подмножество $\mathcal{V}$ на $\mathcal{F}_1$ ще наричаме *отворено*, ако всеки елемент на $\mathcal{V}$ има околност, съдържаща се в $\mathcal{V}$. Например множеството $\mathcal{F}_1$ е отворено. От твърдението в предходния абзац следва, че сечението на всеки две отворени подмножества на $\mathcal{F}_1$ е пак отворено. Тъй като очевидно обединението на произволно множество от отворени подмножества на $\mathcal{F}_1$ е пак отворено, виждаме, че множеството на всички отворени подмножества на $\mathcal{F}_1$ е една топология в $\mathcal{F}_1$.

Ще дефинираме подобна топология и в множеството $\mathcal{F}_1^k$ за произволно дадено цяло число k, по-голямо от 1 (приемаме, разбира се, че $\mathcal{F}_1^1 = \mathcal{F}_1$). Ако $(f_1, \ldots, f_k) \in \mathcal{F}_1^k$, то ще наричаме *околност* на $(f_1, \ldots, f_k)$ всяко множество от вида $\mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_k$, където $\mathcal{U}_i$ е околност на f_i при $i = 1, \ldots, k$. Тогава $\mathcal{F}_1^k$ е околност на всеки свой елемент и сечението на всеки две околности на даден елемент на $\mathcal{F}_1^k$ е пак околност на този елемент. Топологията, за която стана дума, получаваме, като наречем *отворени* подмножествата $\mathcal{V}$ на $\mathcal{F}_1^k$ със свойството всеки елемент на $\mathcal{V}$ да има околност, съдържаща се в $\mathcal{V}$.

Лема. Нека $\Gamma : \mathcal{F}_1^k \to \mathcal{F}_1^l$ е μ-рекурсивен оператор. Тогава при всеки избор на естествените числа $a_1, \ldots, a_l, b$ множеството

$$\Gamma^-(a_1, \ldots, a_l, b) = \{(f_1, \ldots, f_k) \in \mathcal{F}_1^k \,|\, \Gamma(f_1, \ldots, f_k)(a_1, \ldots, a_l) = b\} \qquad (1)$$

е отворено.

Доказателство. Ще използваме индукция относно построението на Γ. За краткост ще пишем $\mathbf{f}$ вместо $f_1, \ldots, f_k$. Ако за всеки елемент $(\mathbf{f})$ на $\mathcal{F}_1^k$ и всички $x_1, \ldots, x_l$ в $\mathbb{N}$ имаме равенството

$$\Gamma(\mathbf{f})(x_1, \ldots, x_l) = \varphi(x_1, \ldots, x_l),$$

където φ е някоя от първоначалните примитивно рекурсивни функции, то множеството $\Gamma^{-}(a_1, \ldots, a_l, b)$ е отворено, защото

$$\Gamma^{-}(a_1, \ldots, a_l, b) = \begin{cases} \mathcal{F}_1^k, & \text{ако } \varphi(a_1, \ldots, a_l) = b, \\ \varnothing & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Ако $l = 1$, $j \in \{1, \ldots, k\}$ и $\Gamma(\mathbf{f}) = f_j$ за всеки елемент $(\mathbf{f})$ на $\mathcal{F}_1^k$, то при всеки избор на естествените числа a и b имаме равенството

$$\Gamma^{-}(a, b) = \{(\mathbf{f}) \in \mathcal{F}_1^k \,|\, f_j(a) = b\}.$$

В такъв случай, ако $(\mathbf{f})$ принадлежи на $\Gamma^{-}(a, b)$, то $\mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_k$ ще бъде околност на $(\mathbf{f})$, съдържаща се в $\Gamma^{-}(a, b)$, например при следния избор на множествата $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k$:

$$\mathcal{U}_i = \begin{cases} \mathcal{U}_{\{a\}}(f_j) & \text{при } i = j, \\ \mathcal{F}_1 & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

.

За да покажем, че доказваното свойство се запазва при дефиниция чрез суперпозиция, да предположим, че $\Gamma_0 : \mathcal{F}_1^k \to \mathcal{F}_m$ и $\Gamma_i : \mathcal{F}_1^k \to \mathcal{F}_l$, $i = 1, \ldots, m$, са μ-рекурсивни оператори, които имат това свойство. Ще покажем, че то е налице и за оператора $\Gamma : \mathcal{F}_1^k \to \mathcal{F}_l$, дефиниран чрез равенството

$$\Gamma(\mathbf{f})(x_1, \ldots, x_l) = \Gamma_0(\mathbf{f})(\Gamma_1(\mathbf{f})(x_1, \ldots, x_l), \ldots, \Gamma_m(\mathbf{f})(x_1, \ldots, x_l)).$$

С други думи, ще предполагаме, че при $i = 1, \ldots, m$ и всеки избор на естествените числа $a_1, \ldots, a_l, c$ е отворено множеството

$$\Gamma_i^{-}(a_1, \ldots, a_l, c) = \{(\mathbf{f}) \in \mathcal{F}_1^k \,|\, \Gamma_i(\mathbf{f})(a_1, \ldots, a_l) = c\}$$

и при всеки избор на естествените числа $c_1, \ldots, c_m, b$ е отворено множеството

$$\Gamma_0^{-}(c_1, \ldots, c_m, b) = \{(\mathbf{f}) \in \mathcal{F}_1^k \,|\, \Gamma_0(\mathbf{f})(c_1, \ldots, c_m) = b\},$$

а ще докажем, че при всеки избор на естествените числа $a_1, \ldots, a_l, b$ е отворено множеството (1). Ще постигнем това чрез следната верига от равенства:

$$\begin{aligned} \Gamma^{-}(a_1, \ldots, a_l, b) &= \{(\mathbf{f}) \in \mathcal{F}_1^k \,|\, \exists c_1 \ldots \exists c_m (\Gamma_1(\mathbf{f})(a_1, \ldots, a_l) = c_1 \,\&\, \ldots \\ &\quad \& \, \Gamma_m(\mathbf{f})(a_1, \ldots, a_l) = c_m \,\&\, \Gamma_0(\mathbf{f})(c_1, \ldots, c_m) = b)\} \\ &= \{(\mathbf{f}) \in \mathcal{F}_1^k \,|\, \exists c_1 \ldots \exists c_m ((\mathbf{f}) \in \Gamma_1^{-}(a_1, \ldots, a_l, c_1) \,\&\, \ldots \\ &\quad \& \, (\mathbf{f}) \in \Gamma_m^{-}(a_1, \ldots, a_l, c_m) \,\&\, (\mathbf{f}) \in \Gamma_0^{-}(c_1, \ldots, c_m, b))\} \\ &= \bigcup_{c_1 \in \mathbb{N}} \ldots \bigcup_{c_m \in \mathbb{N}} \Gamma_1^{-}(a_1, \ldots, a_l, c_1) \cap \ldots \cap \Gamma_m^{-}(a_1, \ldots, a_l, c_m) \cap \Gamma_0^{-}(c_1, \ldots, c_m, b). \end{aligned}$$

Преминаваме към индуктивната стъпка за случая на дефиниция чрез примитивна рекурсия. Нека $\Gamma_0 : \mathcal{F}_1^k \to \mathcal{F}_{l-1}$ и $\Gamma_1 : \mathcal{F}_1^k \to \mathcal{F}_{l+1}$ са μ-рекурсивни оператори с доказваното свойство. Ще докажем, че то е налице и при оператора $\Gamma : \mathcal{F}_1^k \to \mathcal{F}_l$, дефиниран чрез равенствата

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathbf{f})(x_1,\dots,x_{l-1},0) &= \Gamma_0(\mathbf{f})(x_1,\dots,x_{l-1}),\\ \Gamma(\mathbf{f})(x_1,\dots,x_{l-1},s+1) &= \Gamma_1(\mathbf{f})(x_1,\dots,x_{l-1},s,\Gamma(\mathbf{f})(x_1,\dots,x_{l-1},s)).\end{aligned}$$

С други думи, ще предполагаме, че при всеки избор на естествените числа $a_1,\dots,a_{l-1},a_l,a_{l+1},b$ са отворени множествата

$$\begin{aligned}\Gamma_0^-(a_1,\dots,a_{l-1},b) &= \{(\mathbf{f}) \in \mathcal{F}_1^k \,|\, \Gamma_0(\mathbf{f})(a_1,\dots,a_{l-1}) = b\},\\ \Gamma_1^-(a_1,\dots,a_{l-1},a_l,a_{l+1},b) &= \{(\mathbf{f}) \in \mathcal{F}_1^k \,|\, \Gamma_1(\mathbf{f})(a_1,\dots,a_{l-1}a_l,a_{l+1}) = b\},\end{aligned}$$

а ще докажем, че при всеки избор на естествените числа $a_1,\dots,a_l,b$ е отворено множеството (1). Доказателството ще извършим чрез индукция относно a_l. При $a_l = 0$ въпросното множество е отворено, защото

$$\begin{aligned}\Gamma^-(a_1,\dots,a_{l-1},0,b) = \{(\mathbf{f}) \in \mathcal{F}_1^k \,|\, \Gamma_0(\mathbf{f})(a_1,\dots,a_{l-1}) = b\}&\\ = \Gamma_0^-(a_1,\dots,a_{l-1},b).&\end{aligned}$$

Нека сега $a_1,\dots,a_{l-1},a_l$ са естествени числа, за които множеството

$$\Gamma^-(a_1,\dots,a_{l-1},a_l,b)$$

е отворено при всеки избор на естественото число b. Ще покажем, че и множеството

$$\Gamma^-(a_1,\dots,a_{l-1},a_l+1,b)$$

е отворено при всеки избор на естественото число b. Ще постигнем това чрез следната верига от равенства:

$$\begin{aligned}\Gamma^-(a_1,\dots,a_{l-1},a_l+1,b) &= \{(\mathbf{f}) \in \mathcal{F}_1^k \,|\, \exists c(\Gamma(\mathbf{f})(a_1,\dots,a_{l-1},a_l) = c\\ &\qquad \& \, \Gamma_1(\mathbf{f})(a_1,\dots,a_{l-1},a_l,c) = b)\}\\ &= \{(\mathbf{f}) \in \mathcal{F}_1^k \,|\, \exists c((\mathbf{f}) \in \Gamma^-(a_1,\dots,a_{l-1},a_l,c)\\ &\qquad \& \, (\mathbf{f}) \in \Gamma_1^-(a_1,\dots,a_{l-1},a_l,c,b))\}\\ &= \bigcup_{c\in\mathbb{N}} \Gamma^-(a_1,\dots,a_{l-1},a_l,c) \cap \Gamma_1^-(a_1,\dots,a_{l-1},a_l,c,b).\end{aligned}$$

Остава да покажем, че разглежданото свойство се запазва и при дефиниция чрез μ-операция. Нека $\Gamma_0 : \mathcal{F}_1^k \to \mathcal{F}_{l+1}$ е μ-рекурсивен оператор с това свойство. Ще покажем, че то е налице и при оператора $\Gamma : \mathcal{F}_1^k \to \mathcal{F}_l$, дефиниран чрез равенството

$$\Gamma(\mathbf{f})(x_1,\dots,x_l) = \mu s[\Gamma_0(\mathbf{f})(x_1,\dots,x_l,s) = 0]. \tag{2}$$

С други думи, ще предполагаме, че при всеки избор на естествените числа $a_1,\dots,a_l,a_{l+1},b$ е отворено множеството

$$\Gamma_0^-(a_1,\dots,a_l,a_{l+1},b) = \{(\mathbf{f}) \in \mathcal{F}_1^k \,|\, \Gamma_0(\mathbf{f})(a_1,\dots,a_l,a_{l+1}) = b\},$$

а ще докажем, че при всеки избор на естествените числа $a_1, \ldots, a_l, b$ е отворено множеството (1). Ще постигнем това чрез следната верига от равенства, където $\mathbf{a}$ е съкращение за $a_1, \ldots, a_l$:

$$\begin{aligned}
\Gamma^-(\mathbf{a}, b) = \{(\mathbf{f}) \in \mathcal{F}_1^k \mid \exists c_0 \exists c_1 \ldots \exists c_{b-1} (\Gamma_0(\mathbf{f})(\mathbf{a}, 0) = c_0 + 1 \\
\& \, \Gamma_0(\mathbf{f})(\mathbf{a}, 1) = c_1 + 1 \, \& \, \ldots \\
\& \, \Gamma_0(\mathbf{f})(\mathbf{a}, b-1) = c_{b-1} + 1 \, \& \, \Gamma_0(\mathbf{f})(\mathbf{a}, b) = 0)\} \\
= \{(\mathbf{f}) \in \mathcal{F}_1^k \mid \exists c_0 \exists c_1 \ldots \exists c_{b-1} ((\mathbf{f}) \in \Gamma_0^-(\mathbf{a}, 0, c_0 + 1) \\
\& \, (\mathbf{f}) \in \Gamma_0^-(\mathbf{a}, 1, c_1 + 1) \, \& \ldots \\
\& \, (\mathbf{f}) \in \Gamma_0^-(\mathbf{a}, b-1, c_{b-1} + 1) \, \& \, (\mathbf{f}) \in \Gamma_0^-(\mathbf{a}, b, 0))\}
\end{aligned}$$

$$\bigcup_{c_0 \in \mathbb{N}} \bigcup_{c_1 \in \mathbb{N}} \ldots \bigcup_{c_{b-1} \in \mathbb{N}} \Gamma_0^-(\mathbf{a}, 0, c_0+1) \cap \Gamma_0^-(\mathbf{a}, 1, c_1+1) \cap \ldots \cap \Gamma_0^-(\mathbf{a}, b-1, c_{b-1}+1) \cap \Gamma_0^-(\mathbf{a}, b, 0).$$

□

Теорема. Нека $\theta : D \to \mathbb{R}$, където $D \subseteq \mathbb{R}^N$, и нека θ е изчислима. Тогава θ е непрекъсната във всяка точка от D.

Доказателство (за случая $N = 1$). Нека $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ са такива μ-рекурсивни оператори от $\mathcal{F}_1^3$ към $\mathcal{F}_1$, че всеки път, когато $\xi \in D$ и една тройка (f_1, f_2, f_3) от $\mathcal{F}_1^3$ представя ξ, тройката $(\Gamma_1(f_1, f_2, f_3), \Gamma_2(f_1, f_2, f_3), \Gamma_3(f_1, f_2, f_3))$ представя $\theta(\xi)$. Нека ξ е произволна точка от D, а ε е произволно положително число. Ще докажем съществуването на такова положително число δ, че за всяка точка ξ' от D, за която $|\xi' - \xi| < \delta$, да бъде в сила неравенството $|\theta(\xi') - \theta(\xi)| < \varepsilon$. За тази цел да изберем първо едно естествено число a, за което е изпълнено меравенството

$$\frac{1}{a+1} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека (f_1, f_2, f_3) е тройка от $\mathcal{F}_1^3$, която представя ξ, и нека

$$\Gamma_i(f_1, f_2, f_3)(a) = b_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

В такъв случай тройката (f_1, f_2, f_3) принадлежи на множеството

$$\Gamma_1^-(a, b_1) \cap \Gamma_2^-(a, b_2) \cap \Gamma_3^-(a, b_3),$$

а от доказаната лема следва, че то е отворено. Това позволява да заключим, че съществуват крайни подмножества E_1, E_2, E_3 на $\mathbb{N}$, за които

$$\mathcal{U}_{E_1}(f_1) \times \mathcal{U}_{E_2}(f_2) \times \mathcal{U}_{E_3}(f_3) \subseteq \Gamma_1^-(a, b_1) \cap \Gamma_2^-(a, b_2) \cap \Gamma_3^-(a, b_3).$$

Тъй като за всяко t от $\mathbb{N}$ е в сила неравенството

$$\left| \frac{f_1(t) - f_2(t)}{f_3(t) + 1} - \xi \right| < \frac{1}{t+1},$$

можем да изберем такова положително число δ, че за всяко t от множеството $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ да имаме

$$\left|\frac{f_1(t) - f_2(t)}{f_3(t) + 1} - \xi\right| + \delta \le \frac{1}{t+1}.$$

При такъв избор на δ нека ξ' е точка от D, за която $|\xi' - \xi| < \delta$. Тогава при $t \in E_1 \cup E_2 \cup E_3$ ще имаме

$$\left|\frac{f_1(t) - f_2(t)}{f_3(t) + 1} - \xi'\right| \le \left|\frac{f_1(t) - f_2(t)}{f_3(t) + 1} - \xi\right| + |\xi - \xi'| < \left|\frac{f_1(t) - f_2(t)}{f_3(t) + 1} - \xi\right| + \delta \le \frac{1}{t+1}.$$

Благодарение на това съществува такава тройка (f_1', f_2', f_3') от $\mathcal{F}_1^3$, представяща ξ', че функциите f_1', f_2', f_3' да съвпадат съответно с функциите f_1, f_2, f_3 върху множеството $E_1 \cup E_2 \cup E_3$. В такъв случай обаче

$$(f_1', f_2', f_3') \in \mathcal{U}_{E_1}(f_1) \times \mathcal{U}_{E_2}(f_2) \times \mathcal{U}_{E_3}(f_3)$$

и следователно

$$(f_1', f_2', f_3') \in \Gamma_1^-(a, b_1) \cap \Gamma_2^-(a, b_2) \cap \Gamma_3^-(a, b_3).$$

Оттук получаваме, че

$$\frac{\Gamma_1(f_1', f_2', f_3')(a) - \Gamma_2(f_1', f_2', f_3')(a)}{\Gamma_3(f_1', f_2', f_3')(a) + 1} = \frac{b_1 - b_2}{b_3 + 1}.$$

Тъй като тройката $(\Gamma_1(f_1', f_2', f_3'), \Gamma_2(f_1', f_2', f_3'), \Gamma_3(f_1', f_2', f_3'))$ представя $\theta(\xi')$, виждаме, че

$$\left|\frac{b_1 - b_2}{b_3 + 1} - \theta(\xi')\right| < \frac{1}{a+1}.$$

Същевременно имаме и равенството

$$\frac{\Gamma_1(f_1, f_2, f_3)(a) - \Gamma_2(f_1, f_2, f_3)(a)}{\Gamma_3(f_1, f_2, f_3)(a) + 1} = \frac{b_1 - b_2}{b_3 + 1},$$

от което пък по аналогичен начин се вижда, че

$$\left|\frac{b_1 - b_2}{b_3 + 1} - \theta(\xi)\right| < \frac{1}{a+1}.$$

Поради това

$$|\theta(\xi') - \theta(\xi)| < \frac{2}{a+1} \le \varepsilon. \qquad \square$$