Изчислими редици от реални числа

Понятието за изчислимост на безкрайна редица от реални числа е частен случай от понятието за изчислимост на частична функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$, защото всяка такава редица е всъщност функция от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{R}$ и поради това е специален вид частична функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$. В този частен случай обаче изчислимостта може да бъде характеризирана с използване на понятието рекурсивна функция вместо понятия като μ-рекурсивен оператор и μ-рекурсивен функционал.

Теорема 1. За всяка безкрайна редица от реални числа $a_0, a_1, a_2, \ldots$ следните три условия са еквивалентни:

(a) редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е изчислима;

(b) съществуват такива рекурсивни функции f, g и h от $\mathbb{N}^2$ към $\mathbb{N}$, че при всеки избор на естествените числа n и i да бъде в сила неравенството

$$\left|\frac{f(n,i)-g(n,i)}{h(n,i)+1} - a_n\right| < \frac{1}{i+1}; \tag{1}$$

(c) съществуват такива рекурсивни функции f и g от $\mathbb{N}^2$ към $\mathbb{N}$, че при всеки избор на естествените числа n и i да бъде в сила неравенството

$$\left|\frac{f(n,i)-g(n,i)}{i+1} - a_n\right| < \frac{1}{i+1}. \tag{2}$$

Доказателство. Нека $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е безкрайна редица от реални числа. Очевидно е, че от условието (c) следва условието (b). Поради това е достатъчно да докажем, че от условието (a) следва условието (c), а от условието (b) следва условието (a). Да предположим най-напред, че е изпълнено условието (a). Според теорема 2 от текста „Изчислимост в стил на Гжегорчик на реални числа и реални функции“ съществуват такива μ-рекурсивни функционали F и G от $\mathcal{F}_{3,1}$, че

$$\left|\frac{F(f_1,g_1,h_1,i)-G(f_1,g_1,h_1,i)}{i+1} - a_n\right| < \frac{1}{i+1}$$

винаги, когато $n, i \in \mathbb{N}$, $f_1, g_1, h_1 \in \mathbb{T}$ и

$$\left|\frac{f_1(k)-g_1(k)}{h_1(k)+1} - n\right| < \frac{1}{k+1} \tag{3}$$

за всяко $k \in \mathbb{N}$. В такъв случай, ако положим

$$\begin{aligned} f(n,i) &= F(\lambda k.n, \lambda k.0, \lambda k.0, i), \\ g(n,i) &= G(\lambda k.n, \lambda k.0, \lambda k.0, i), \end{aligned}$$

функциите f и g ще бъдат рекурсивни и неравенството (2) ще бъде в сила при всеки избор на естествените числа n и i, значи изпълнено е условието (c). Да предположим сега, че е изпълнено условието (b). Според следствието от теорема 2 в текста „Характеризация на изчислимите реални числа и на изчислимите реални функции без да се използват номерации“, за да покажем, че е изпълнено условието (a), достатъчно е да посочим такива μ-рекурсивни функционали F, G и H от $\mathcal{F}_{3,1}$, че

$$\left| \frac{F(f_1,g_1,h_1,i) - G(f_1,g_1,h_1,i)}{H(f_1,g_1,h_1,i)+1} - a_n \right| < \frac{1}{i+1}$$

винаги, когато $n, i \in \mathbb{N}$, $f_1, g_1, h_1 \in \mathbb{T}$ и

$$\left| \frac{f_1(k) - g_1(k)}{h_1(k)+1} - n \right| < \frac{1}{k+1} \tag{4}$$

за всяко $k \in \mathbb{N}$. За целта да предположим, че f, g и h са рекурсивни функции от $\mathbb{N}^2$ към $\mathbb{N}$ и неравенството (1) е в сила при всеки избор на естествените числа n и i. Отбелязваме, че при $k = 1$ неравенството (4) има вида

$$\left| \frac{f_1(1) - g_1(1)}{h_1(1)+1} - n \right| < \frac{1}{2},$$

и припомняме импликацията

$$|q - n| < \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; n = \left\lfloor q + \frac{1}{2} \right\rfloor,$$

използвана в забележка 4 в текста „Ефективни метрични пространства и изчислимост в тях. Изчислимост на реални числа и реални функции“. Това ни насочва към следната дефиниция на функционалите F, G и H:

$$\begin{aligned} F(f_1,g_1,h_1,i) &= f(E(f_1,g_1,h_1),i), \\ G(f_1,g_1,h_1,i) &= g(E(f_1,g_1,h_1),i), \\ H(f_1,g_1,h_1,i) &= h(E(f_1,g_1,h_1),i), \end{aligned}$$

където функционалът E от $\mathcal{F}_{3,0}$ се дефинира например чрез равенството

$$E(f_1,g_1,h_1) = \left\lfloor \left| \frac{f_1(1) - g_1(1)}{h_1(1)+1} + \frac{1}{2} \right| \right\rfloor.$$

Така дефинираните функционали F, G и H са μ-рекурсивни и имат желаното свойство. $\square$

Ще илюстрираме доказаната теорема с някои примери за прилагането ѝ.

Пример 1. Редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ с общ член $a_n = \sqrt{n}$ е изчислима, защото за нея неравенството (2) ще бъде в сила за всички стойности на n и i в $\mathbb{N}$ при f и g, дефинирани по следния начин:

$$f(n,i) = \max\{j \in \mathbb{N} \,|\, j^2 \leq n(i+1)^2\}, \quad g(n,i) = 0.$$

Пример 2. Всяка рекурсивна функция от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{Q}$ е изчислима редица от реални числа. Действително, ако редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е рекурсивна функция от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{Q}$, то лявата страна на неравенството (1) е тъждествено равна на 0 при подходящ избор на рекурсивни функции f, g и h (независещи от втория си аргумент).

Пример 3. Нека φ е рекурсивна функция от $\mathbb{N}^2$ към $\mathbb{N}$, за която множеството

$$\{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists j \in \mathbb{N}(\varphi(n,j) = 0)\} \tag{5}$$

не е рекурсивно. Да дефинираме безкрайна редица $a_0, a_1, a_2, \ldots$ по следния начин: ако дадено естествено число n принадлежи на множеството (5), полагаме

$$a_n = \frac{1}{\psi(n)+1},$$

където $\psi(n) = \min\{j \in \mathbb{N} | \varphi(n,j) = 0)\}$, а в противен случай полагаме $a_n = 0$. Нека функцията $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ е дефинирана така: $h(n,i) = i+1$, ако $\varphi(n,j) \neq 0$ за всяко естествено число j, ненадминаващо i, и $h(n,i) = \psi(n)$ в противен случай. Тази функция е рекурсивна и при всеки избор на n и i в $\mathbb{N}$ е вярно неравенството

$$\left| \frac{1}{h(n,i)+1} - a_n \right| < \frac{1}{i+1},$$

следователно редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е изчислима. Макар че всички нейни членове принадлежат на множеството $\mathbb{Q}$, тя обаче не е рекурсивна функция от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{Q}$. И наистина, ако допуснем противното, ще можем да заключим, че множеството (5) е рекурсивно, тъй като то се състои от естествените числа n, за които $a_n = 0$.

От теорема 1, като използваме и следствието от теорема 1 в текста „Характеризация на изчислимите реални числа и на изчислимите реални функции без да се използват номерации“, можем да заключим, че членовете на всяка изчислима редица от реални числа са изчислими реални числа (това може да се види и като се използва твърдение 5 в текста „Изчислимост относно именуващи системи“ заедно с обстоятелството, че естествените числа са изчислими реални числа). Всъщност от обстоятелството, че изчислимостта на реални функции се запазва при суперпозиция, следва и едно по-силно твърдение: ако една частична функция Φ от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$ е изчислима, то за всяка изчислима редица $a_0, a_1, a_2, \ldots$ от реални числа, принадлежащи на дефиниционната област на Φ, съответната редица $\Phi(a_0), \Phi(a_1), \Phi(a_2), \ldots$ е също изчислима.

Забележка 1. Нека $\mathbb{R}_c$ е множеството на изчислимите реални числа. За една частична функция от $\mathbb{R}_c$ към $\mathbb{R}_c$ се казва, че е *изчислима в смисъл на Банах и Мазур*, ако при всеки избор на изчислима редица от числа, принадлежащи на дефиниционната област на функцията, редицата от съответните нейни стойности също е изчислима. От казаното в предходния абзац става ясно, че рестрикцията върху $\mathbb{R}_c$ на всяка изчислима частична функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$ е функция, изчислима в смисъл на Банах и Мазур.

Изчислимите редици от реални числа намират многобройни приложения за доказване на изчислимост на реални числа. Въпросните приложения се основават на следната теорема.

Теорема 2. Нека $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е изчислима редица от реални числа, която клони ефективно към дадено реално число a. Тогава числото a е изчислимо.

Доказателство. Направените предположения осигуряват съществуването на рекурсивни функции f и g от $\mathbb{N}^2$ към $\mathbb{N}$ със свойството при всеки избор на естествените числа n и i да бъде в сила неравенството (2) и на рекурсивна функция δ от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$ със свойството при $k, n \in \mathbb{N}$ и $n > \delta(k)$ винаги да е налице неравенството

$$|a_n - a| < \frac{1}{k+1}.$$

От тези свойства на въпросните функции получаваме, че при $k, n \in \mathbb{N}$ и $n > \delta(2k+1))$ имаме

$$\left|\frac{f(n,2k+1) - g(n,2k+1)}{(2k+1)+1} - a\right| \leq \left|\frac{f(n,2k+1) - g(n,2k+1)}{(2k+1)+1} - a_n\right| + |a_n - a| < \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{k+1}.$$

Следователно за всяко $k \in \mathbb{N}$ е в сила неравенството

$$\left|\frac{f(\delta(2k+1)+1, 2k+1) - g(\delta(2k+1)+1, 2k+1)}{(2k+1)+1} - a\right| < \frac{1}{k+1}.$$

Тъй като функциите $\lambda k.f(\delta(2k+1)+1, 2k+1)$, $\lambda k.g(\delta(2k+1)+1, 2k+1)$ и $\lambda k.2k+1$ са рекурсивни, оттук следва изчислимостта на числото a. $\square$

За добрата приложимост на горната теорема силно допринася и следното обстоятелство.

Теорема 3. Ако редицата от членовете на един безкраен ред е изчислима, то и редицата от частичните му суми е изчислима.

Доказателство. Нека $u_0, u_1, u_2, \ldots$ е изчислима редица от реални числа и нека $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$ Ще покажем, че редицата

$s_0, s_1, s_2, \ldots$ е изчислима. Изчислимостта на редицата $u_0, u_1, u_2, \ldots$ осигурява съществуването на рекурсивни функции f и g от $\mathbb{N}^2$ към $\mathbb{N}$ със свойството при всеки избор на естествените числа m и i да бъде в сила неравенството

$$\left|\frac{f(m,i) - g(m,i)}{i+1} - u_m\right| < \frac{1}{i+1}.$$

Като използваме това, ще покажем, че съществуват рекурсивни функции F, G и H от $\mathbb{N}^2$ към $\mathbb{N}$ със свойството при всеки избор на естествените числа n и j да бъде в сила неравенството

$$\left|\frac{F(n,j) - G(n,j)}{H(n,j)+1} - s_n\right| < \frac{1}{j+1}.$$

Нека функциите $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ от $\mathbb{N}^2$ към $\mathbb{N}$ са дефинирани чрез равенствата

$$\begin{aligned}\tilde{f}(m,j) &= f(m,(j+1)2^{m+1}-1),\\ \tilde{g}(m,j) &= g(m,(j+1)2^{m+1}-1).\end{aligned}$$

Тогава при всеки избор на m и j в $\mathbb{N}$ ще имаме неравенството

$$\left|\frac{\tilde{f}(m,j) - \tilde{g}(m,j)}{(j+1)2^{m+1}} - u_m\right| < \frac{1}{(j+1)2^{m+1}}.$$

Оттук следва, че при всеки избор на естествените числа n и j имаме

$$\left|\sum_{m=0}^{n}\frac{\tilde{f}(m,j) - \tilde{g}(m,j)}{(j+1)2^{m+1}} - s_n\right| \le \sum_{m=0}^{n}\left|\frac{\tilde{f}(m,j) - \tilde{g}(m,j)}{(j+1)2^{m+1}} - u_m\right| < \frac{1}{j+1}.$$

Значи достатъчно би било рекурсивните функции F, G и H от $\mathbb{N}^2$ към $\mathbb{N}$ да бъдат такива, че при всеки избор на m и j в $\mathbb{N}$ да е вярно равенството

$$\frac{F(n,j) - G(n,j)}{H(n,j)+1} = \sum_{m=0}^{n}\frac{\tilde{f}(m,j) - \tilde{g}(m,j)}{(j+1)2^{m+1}}.$$

Това е равносилно със следното: за всяко j в $\mathbb{N}$ да имаме равенствата

$$\frac{F(0,j)-G(0,j)}{H(0,j)+1} = \frac{\tilde{f}(0,j)-\tilde{g}(0,j)}{2j+2},$$

$$\frac{F(n,j)-G(n,j)}{H(n,j)+1} = \frac{F(n-1,j)-G(n-1,j)}{H(n-1,j)+1} + \frac{\tilde{f}(n,j) - \tilde{g}(n,j)}{(j+1)2^{n+1}}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Верността на тези равенства можем да осигурим, като положим

$$H(n,j) = (j+1)2^{n+1} - 1$$

и дефинираме функциите F и G по следния начин:

$$F(n,j) = \begin{cases} \tilde{f}(0,j) & \text{при } n = 0, \\ 2F(n-1,j) + \tilde{f}(n,j) & \text{при } n > 0, \end{cases}$$

$$G(n,j) = \begin{cases} \tilde{g}(0,j) & \text{при } n = 0, \\ 2G(n-1,j) + \tilde{g}(n,j) & \text{при } n > 0, \end{cases}$$

Очевидно така дефинираните функции F, G и H са рекурсивни. □

Следствие. Ако един безкраен ред е ефективно сходящ, а редицата от членовете му е изчислима, то сумата му е изчислимо реално число.

Ще дадем два примера за приложения на горното следствие.

Пример 4. Ще покажем, че числото e е изчислимо. За целта ще използваме факта, че то е сума на безкрайния ред

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Да положим

$$u_i = \frac{1}{i!}.$$

Тъй като

$$0 < \frac{u_{i+1}}{u_i} = \frac{1}{i+1} \leq \frac{1}{2}$$

за всяко естествено число i, различно от 0, теорема 3 от текста „Ефективно сходящи редици от реални числа. Ефективно сходящи безкрайни редове“ позволява да твърдим, че разглежданият ред е ефективно сходящ. От друга страна редицата $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ е изчислима, защото е рекурсивна функция от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{Q}$.

Пример 5. Ще покажем, че числото π е изчислимо. Ще направим това, като използваме равенството

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

За реда в дясната му страна виждаме, че е ефективно сходящ, като си послужим с теорема 4 от текста, посочен в предходния пример. От друга страна и на този ред редицата от членовете е рекурсивна функция от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{Q}$ – това може да се покаже, като се използва например равенството

$$(-1)^i = (i+1) \bmod 2 - i \bmod 2.$$

Следователно сумата и на този ред е изчислимо реално число, а оттук разбира се следва, че и числото π е изчислимо.

Забележка 2. Главното предположение на теоремата, която използвахме в предходния пример, е за една редица от реални числа, за която се изисква да бъде монотонно намаляваща и да клони ефективно към 0. За да можем да приложим следствието от теорема 3, наложи се да покажем още, че редицата от членовете на реда е изчислима. Както ще видим след малко, при обстоятелства като в този пример е достатъчно за разглежданата монотонно намаляваща редица да се покаже, че клони към 0, защото оттук при такива обстоятелства ще следва, че въпросната редица клони ефективно към 0 (разбира се, в конкретния пример, за който става дума, проверката, че редицата клони ефективно към 0 не е съществено по-трудна от проверката, че клони към 0).

Теорема 4. Нека $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е монотонна изчислима редица от реални числа и нека тя клони към едно изчислимо число a. Тогава редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ клони ефективно към a.

Доказателство. При направените предположения редицата с общ член $|a_n - a|$ ще бъде монотонно намаляваща изчислима редица, която клони към 0,[1] а ако покажем, че тя клони ефективно към 0, оттам очевидно ще следва, че редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ клони ефективно към a. Ето защо без ограничение на общността можем да смятаме, че дадената редица $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е монотонно намаляваща, а числото a е 0. Нека f и g са такива рекурсивни функции от $\mathbb{N}^2$ към $\mathbb{N}$, че при всеки избор на естествените числа n и i да бъде в сила неравенството (2). Тогава за всяко $n \in \mathbb{N}$ ще имаме неравенството

$$\left| \frac{f(n,n) - g(n,n)}{n+1} - a_n \right| < \frac{1}{n+1}.$$

Оттук следва, че редицата с общ член

$$\frac{f(n,n) - g(n,n)}{n+1} - a_n$$

клони към 0. Като използваме равенството

$$\frac{f(n,n) - g(n,n)}{n+1} + \frac{1}{n+1} = \left(\frac{f(n,n) - g(n,n)}{n+1} - a_n \right) + a_n + \frac{1}{n+1},$$

виждаме, че и редицата с общ член

$$\frac{f(n,n) - g(n,n)}{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

клони към 0, следователно за всяко естествено число k съществува неин член, който не надминава $\frac{1}{k+1}$. Да дефинираме функция $\delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ чрез равенството

$$\delta(k) = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{f(n,n) - g(n,n)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{k+1} \right\}.$$

[1] В изчислимостта ѝ бихме могли да се убедим, като използваме, че изчислимостта на функции се запазва при суперпозиция.

Лесно се проверява, че тази функция е рекурсивна, а при $k, n \in \mathbb{N}$ и $n > \delta(k)$ ще имаме винаги

$$|a_n - a| = a_n \leq a_{\delta(k)} < \frac{f(\delta(k), \delta(k)) - g(\delta(k), \delta(k))}{\delta(k)+1} + \frac{1}{\delta(k)+1} \leq \frac{1}{k+1},$$

С това показахме, че редицата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ клони ефективно към a. □

Следствие. Нека $a_0, a_1, a_2, \ldots$ е монотонно намаляваща изчислима редица от реални числа, която клони към 0. Тогава сумата на реда

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots \tag{6}$$

е изчислимо реално число.

Доказателство. Като приложим току-що доказаната теорема и теорема 4 от текста „Ефективно сходящи редици от реални числа. Ефективно сходящи безкрайни редове“, заключаваме, че редът (6) е ефективно сходящ. От друга страна редицата от членовете му може да се получи чрез почленно умножение на изчислимите редици $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ и $a_0, a_1, a_2, \ldots$, следователно тя също е изчислима и значи можем да използваме следствието от теорема 3. □

Като се възползваме пак от теорема 4 от настоящия текст, ще дадем пример за монотонно растяща изчислима редица, която клони към неизчислимо реално число.

Пример 6. В пример 7 от текста „Ефективно сходящи редици от реални числа. Ефективно сходящи безкрайни редове“ показахме, че при подходящо избрана рекурсивна функция f от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{N}$ редът

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(f(n)+1)^2}$$

се оказва сходящ, без да е ефективно сходящ, и значи редицата от частичните му суми е сходяща, без да е ефективно сходяща. От теорема 3 следва, че тази редица е изчислима.[2] Понеже тя е и монотонно растяща, допускането, че границата ѝ е изчислима, би противоречало на теорема 4.

[2] Всъщност може директно да се покаже, че тя е даже рекурсивна функция от $\mathbb{N}$ към $\mathbb{Q}$.