Частично рекурсивни, рекурсивни и примитивно рекурсивни функции. Рекурсивни и рекурсивно номеруеми множества

Този текст съдържа някои сведения от теорията на изчислимостта, които ще се предполагат известни по-нататък (изложените доказателства биха могли евентуално да се пропуснат).

Ще означаваме с $\mathbb{N}$ множеството $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ на естествените числа, а с $\mathcal{F}_k$ при $k \in \mathbb{N}$ – множеството на всички частични функции от $\mathbb{N}^k$ към $\mathbb{N}$.[1] Някои такива функции ще посочваме с помощта на λ-означения, като за променливите в тези означения ще приемаме, че пробягват $\mathbb{N}$.[2]

За една функция от $\mathcal{F}_k$ се казва, че е *алгоритмично изчислима*, ако съществува алгоритъм, преобразуващ всяка точка от дефиниционната ѝ област в съответната функционална стойност (подразбира се. че естествените числа се означават по някой от обичайните стандартни начини). Ако въпросният алгоритъм дава резултат само за онези точки от $\mathbb{N}^k$, които принадлежат на дефиниционната област на функцията, ще казваме, че тази функция е *алгоритмично изчислима в тесен смисъл на думата.*[3] Има няколко еквивалентни помежду си начина за уточняване на това интуитивно понятие. Един от тях е с помощта на понятието *частично рекурсивна функция.* То може да се въведе по следния индуктивен начин.

Дефиниция 1. Приемаме, че:

1. При $1 \leq i \leq l$ функцията $\lambda x_1 \ldots x_l . x_i$ е частично рекурсивна.
2. Функцията $\lambda x . x + 1$ е частично рекурсивна.
3. Ако функцията f_0 от $\mathcal{F}_k$ и функциите $f_1, \ldots, f_k$ от $\mathcal{F}_l$ са частично рекурсивни, то функцията

$$\lambda x_1 \ldots x_l . f_0(f_1(x_1, \ldots, x_l), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_l)) \tag{1}$$

[1] Частични функции от $\mathbb{N}^k$ към $\mathbb{N}$ – това са функциите, на които дефиниционната област е подмножество на $\mathbb{N}^k$, а стойностите принадлежат на $\mathbb{N}$. С $\mathbb{N}^k$, разбира се, означаваме множеството на всички k-членни редици от естествени числа (приемаме, че $\mathbb{N}^1 = \mathbb{N}$, като отъждествяваме всяка едночленна редица от естествени числа с нейния единствен член). Множеството $\mathbb{N}^0$ има един единствен елемент – празната редица. Ако f е функция от $\mathcal{F}_0$, дефинирана за празната редица, съответната стойност на f ще означаваме с $f()$ и ще наричаме *стойност на* f (когато използваме означение от вида $f(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k)$ за произволни $k \in \mathbb{N}$, ще го тълкуваме като $f()$ при $k = 0$).

[2] Означение от вида $\lambda x_1 \ldots x_k . \mathfrak{a}$ се тълкува като знак за функцията f от $\mathcal{F}_k$, определена чрез равенството $f(x_1, \ldots, x_k) = \mathfrak{a}$ (включително и тогава, когато $k = 0$).

[3] Разбира се, това понятие съвпада с общото понятие за алгоритмична изчислимост в случая, когато функцията е дефинирана навсякъде в $\mathbb{N}^k$.

също е частично рекурсивна.

4. Ако функцията f_0 от $\mathcal{F}_l$ и функцията f_1 от $\mathcal{F}_{l+2}$ са частично рекурсивни, то частично рекурсивна е и функцията f от $\mathcal{F}_{l+1}$, определена чрез равенствата

$$\begin{aligned} f(x_1,\dots,x_l,0) &= f_0(x_1,\dots,x_l), \\ f(x_1,\dots,x_l,t+1) &= f_1(x_1,\dots,x_l,t,f(x_1,\dots,x_l,t)). \end{aligned} \tag{2}$$

5. Ако функцията f_0 от $\mathcal{F}_{l+1}$ е частично рекурсивна, то функцията

$$\lambda x_1 \dots x_l.\mu t[f_0(x_1,\dots,x_l,t) = 0] \tag{3}$$

също е частично рекурсивна.[4]

Частично рекурсивните функции от $\mathcal{F}_k$, които са дефинирани навсякъде в $\mathbb{N}^k$, се наричат *рекурсивни*.

Забележка 1. Функциите, за които става дума в точка 1 на горната дефиниция, се наричат *проекционни функции*, функцията (1) се нарича *суперпозиция* на функциите $f_0, f_1, \dots, f_k$, за функцията f от точка 4 се казва, че е получена от f_0 и f_1 чрез *примитивна рекурсия*, а за функцията (3) – че е получена от f_0 чрез *минимизация*.

Забележка 2. Обикновено в индуктивната дефиниция на понятието частично рекурсивна функция се включва и точка, според която константата 0 е частично рекурсивна функция. Такава точка обаче е излишна, защото за всяко естествено число l функцията от $\mathcal{F}_l$, приемаща стойност 0 навсякъде в $\mathbb{N}^l$, може да се получи от проекционната функция $\lambda x_1 \dots x_l t.t$ чрез минимизация. Ако в горната дефиниция пропуснем точка 5 и заменим в останалите точки думата „частично“ с думата „примитивно“, като обаче добавим точка, според която функцията от $\mathcal{F}_0$ със стойност 0 е примитивно рекурсивна, получаваме индуктивна дефиниция на един важен същински подклас на класа на рекурсивните функции – класа на *примитивно рекурсивните функции*. От нея лесно следва, че при всяко естествено число k навсякъде дефинираните константни функции от $\mathcal{F}_k$ са примитивно рекурсивни, а значи и рекурсивни.

Благодарение на точки 1 и 3 от дефиницията на понятието частично рекурсивна функция класът на тези функции е затворен относно явни дефиниции, т.е. такива, при които стойността на една функция в $\mathbb{N}$ за произволни стойности на аргументите ѝ се определя чрез израз, получен от означения на аргументи на функцията и означения на дадени функции чрез някакъв брой прилагания на функция към вече построени изрази. Например, ако g

[4] С $\mu t[f_0(x_1,\dots,x_l,t) = 0]$ се означава такова естествено число s, удовлетворяващо условието $f_0(x_1,\dots,x_l,s) = 0$, че $f_0(x_1,\dots,x_l,t)$ да бъде дефинирано и различно от 0 за всяко естествено число t, по-малко от s.

и h са частично рекурсивни функции съответно от $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_1$, то частично рекурсивна е и функцията f от $\mathcal{F}_3$, дефинирана чрез равенството

$$f(x, y, z) = h(g(g(x, h(z)), h(x))).$$

Затворени относно явни дефиниции са също класът на рекурсивните функции и класът на примитивно рекурсивните функции.

Поради примитивната рекурсивност на константните функции, казаното в предходния абзац остава в сила и ако разширим обхвата на термина явна дефиниция, допускайки наред с означенията на аргументи на функцията още и означения на конкретни естествени числа.

Функциите събиране и умножение в $\mathbb{N}$ са примитивно рекурсивни благодарение на равенствата

$$x + 0 = x, \quad x + (t + 1) = (x + t) + 1, \quad x.0 = 0, \quad x.(t + 1) = x.t + x.$$

Ако се условим под 0^0 да разбираме 1, функцията степенуване в $\mathbb{N}$ също ще бъде примитивно рекурсивна – благодарение на равенствата

$$x^0 = 1, \quad x^{t+1} = x^t.x.$$

Примитивно рекурсивна е и функцията $\lambda t.t!$ (където под $0!$ се разбира 1). Това е така благодарение на равенството $(t + 1)! = t!(t + 1)$.

Понеже разликата на две естествени числа не винаги е естествено число, функцията изваждане в $\mathbb{N}$ не е навсякъде дефинирана в $\mathbb{N}^2$ и поради това не е рекурсивна. Една тясно свързана с нея примитивно рекурсивна функция от $\mathcal{F}_2$ се дефинира обаче с помощта на понятието отсечена разлика. А именно, ако x и y са две естествени числа, то *отсечена разлика* на x и y се нарича естественото число $x \dot{-} y$, определено по следния начин:

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{ако } x \geq y, \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Функцията $\lambda xy.x \dot{-} y$ е примитивно рекурсивна. Това се установява, като се използват равенствата

$$0 \dot{-} 1 = 0, \quad (t + 1) \dot{-} 1 = t, \quad x \dot{-} 0 = x, \quad x \dot{-} (t + 1) = (x \dot{-} t) \dot{-} 1$$

– първите две от тях показват, че функцията $\lambda z.z \dot{-} 1$ е примитивно рекурсивна, а оттук, като използваме другите две, виждаме примитивната рекурсивност и на $\lambda xy.x \dot{-} y$.

От примитивната рекурсивност на функцията отсечена разлика и равенството

$$\min(x, y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$$

следва, че и функцията $\lambda xy.\min(x, y)$ е примитивно рекурсивна. Примитивно рекурсивни са също функциите $\lambda xy.\max(x, y)$ и $\lambda xy.|x - y|$ – това следва от равенствата

$$\max(x, y) = y + (x \dot{-} y), \quad |x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x),$$

като се използва примитивната рекурсивност на отсечената разлика и събирането.[5]

За всяко естествено число x числата $\mathrm{sg}\,x$ и $\overline{\mathrm{sg}}\,x$ се дефинират така:

$$\mathrm{sg}\,x = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = 0, \\ 1 & \text{в противен случай,} \end{cases} \qquad \overline{\mathrm{sg}}\,x = \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0, \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Като използваме равенствата $\overline{\mathrm{sg}}\,x = 1 \dot{-} x$ и $\mathrm{sg}\,x = \overline{\mathrm{sg}}\,\overline{\mathrm{sg}}\,x$, виждаме последователно, че функциите $\lambda x.\overline{\mathrm{sg}}\,x$ и $\lambda x.\mathrm{sg}\,x$ също са примитивно рекурсивни.

Следното твърдение е полезно за доказване на примитивната рекурсивност на някои други функции.

Лема 1. Нека f е примитивно рекурсивна функция от $\mathcal{F}_{k+1}$, която е строго растяща относно последния си аргумент, т.е.

$$f(x_1, \ldots, x_k, s) < f(x_1, \ldots, x_k, s+1)$$

при всеки избор на естествените числа $x_1, \ldots, x_k, s$. Тогава функцията g от $\mathcal{F}_{k+1}$, определена чрез равенството

$$g(x_1, \ldots, x_k, t) = \min\{s \in \mathbb{N} \mid f(x_1, \ldots, x_k, s) \geq t\}, \tag{4}$$

също е примитивно рекурсивна.

Доказателство. С индукция относно s се показва, че $f(x_1, \ldots, x_k, s) \geq s$ при всеки избор на естествените числа $x_1, \ldots, x_k, s$. Оттук е ясно, че равенството (4) определя функция g, която е дефинирана навсякъде в $\mathbb{N}^{k+1}$. Очевидно $g(x_1, \ldots, x_k, 0) = 0$ при всеки избор на естествените числа $x_1, \ldots, x_k$. От друга страна лесно се проверява, че

$$g(x_1, \ldots, x_k, t+1) = g(x_1, \ldots, x_k, t) + \mathrm{sg}((t+1) \dot{-} f(x_1, \ldots, x_k, g(x_1, \ldots, x_k, t)))$$

при всеки избор на $x_1, \ldots, x_k, t$ в $\mathbb{N}$. □

Следствие 1. Нека f удовлетворява предположенията на горната лема и нека освен това $f(x_1, \ldots, x_k, 0) = 0$ при всеки избор на естествените числа $x_1, \ldots, x_k$. Тогава функцията h от $\mathcal{F}_{k+1}$, определена чрез равенството

$$h(x_1, \ldots, x_k, t) = \max\{s \in \mathbb{N} \mid f(x_1, \ldots, x_k, s) \leq t\}, \tag{5}$$

е примитивно рекурсивна.

Доказателство. Равенството (5) определя функция h, която е дефинирана навсякъде в $\mathbb{N}^{k+1}$, защото, както и да изберем естествените числа $x_1, \ldots, x_k, t$, неравенството $f(x_1, \ldots, x_k, s) \leq t$ е изпълнено поне при $s = 0$ и е

[5] Като използваме примитивната рекурсивност на функцията $\lambda xy.|x-y|$ и на събирането, можем да покажем, че изваждането в множеството на естествените числа е частично рекурсивна функция. А именно, достатъчно е да забележим, че функцията изваждане в $\mathbb{N}$ може да се получи чрез минимизация от функцията $f_0(x, y, t) = |x - (y+t)|$.

нарушено за всяко s, по-голямо от t. Примитивната рекурсивност на тази функция следва от равенството

$$h(x_1, \ldots, x_k, t) = g(x_1, \ldots, x_k, t+1) \dot{-} 1,$$

където g е функцията, определена чрез равенството (4). $\square$

За произволно реално число a най-голямото цяло число, ненадминаващо a, се означава с $\lfloor a \rfloor$. Очевидно е, че при всеки избор на естествените числа x и t е в сила равенството

$$\left\lfloor \frac{t}{x+1} \right\rfloor = \max\{s \in \mathbb{N} \,|\, (x+1)s \leq t\}.$$

Оттук, като приложим следствие 1 при $k = 1$ към функция f, определена чрез равенството $f(x, s) = (x+1)s$, заключаваме, че функцията

$$\lambda xt. \left\lfloor \frac{t}{x+1} \right\rfloor$$

е примитивно рекурсивна.

Ако m е естествено число, различно от 0, то за произволно естествено число y остатъкът от делението на t с m се означава с $t \bmod m$. Функцията $\lambda xt.t \bmod (x+1)$ е примитивно рекурсивна, защото при всеки избор на естествените числа x и t е в сила равенството

$$t \mod (x+1) = t \dot{-} \left\lfloor \frac{t}{x+1} \right\rfloor (x+1).$$

Следната теорема твърди, грубо казано, че съществува взаимно еднозначно съответствие между $\mathbb{N}^2$ и $\mathbb{N}$, което се осъществява чрез примитивно рекурсивни функции.

Теорема 1. Съществуват такава примитивно рекурсивна функция J от $\mathcal{F}_2$ и такива примитивно рекурсивни функции L и R от $\mathcal{F}_1$, че при всеки избор на естествените числа x и y са в сила равенствата $L(J(x,y)) = x$, $R(J(x,y)) = y$, а при всеки избор на естественото число t имаме равенството $J(L(t), R(t)) = t$. При това $J(x,y) \geq \max(x,y)$ при всеки избор x и y в $\mathbb{N}$, като равенството е налице само при $x = 0,\ y \leq 1$.

Доказателство. Дефинираме релация $\prec$ в $\mathbb{N}^2$ чрез следното условяне:

$$(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2) \iff x_1 + y_1 < x_2 + y_2 \text{ или } (x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \text{ и } x_1 < x_2).$$

Лесно се проверява, че така дефинираната релация е строга линейна наредба в $\mathbb{N}^2$, като за всеки елемент (x, y) на $\mathbb{N}^2$ множеството

$$\left\{ (x_1, y_1) \in \mathbb{N}^2 \,\middle|\, (x_1, y_1) \prec (x, y) \right\} \tag{6}$$

е крайно и броят на елементите му е

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (x+y) + x = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x.$$

Нека функцията J е онази, която на всеки елемент (x,y) на $\mathbb{N}^2$ съпоставя броя на елементите на множеството (6). Ясно е, че тази функция е примитивно рекурсивна и е в сила формулираното в теоремата неравенство. Непосредствена проверка показва, че че $J(x,y) = y = \max(x,y)$, когато x е 0, а y е 0 или 1. За да докажем, че $J(x,y) = \max(x,y)$ само тогава, да предположим, че x и y са естествени числа с това свойство. Ако допуснем, че $x \neq 0$, числото $x+y$ също ще е различно от 0, а оттук би следвало, че $J(x,y) \geq 2x+y > \max(x,y)$. Следователно $x = 0$ и значи ще имаме равенството $1+2+3+\cdots+y = y$. То обаче е невъзможно при $y > 1$. Лесно се съобразява, че функцията J е обратима и множеството на стойностите ѝ е цялото множество $\mathbb{N}$. При това положение съществуват такива навсякъде дефинирани функции L и R от $\mathcal{F}_1$, че изображението $t \mapsto (L(t), R(t))$ на $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}^2$ да бъде обратното изображение на J. За тези функции ще бъдат изпълнени равенствата, фигуриращи във формулировката на теоремата, и остава само да се докаже, че L и R са примитивно рекурсивни. За целта отбелязваме, че винаги, когато за дадени естествени числа x, y и t е изпълнено равенството $J(x,y) = t$, ще имаме и равенствата

$$x + y = h(t), \quad x = t \dot{-} f(h(t)), \quad y = h(t) \dot{-} (t \dot{-} f(h(t))),$$

където f и h са функциите от $\mathcal{F}_2$, определени чрез равенствата

$$f(s) = \frac{s(s+1)}{2}, \quad h(t) = \max\{s \in \mathbb{N} \mid f(s) \leq t\}.$$

Функцията f, разбира се, е примитивно рекурсивна, а като използваме (при $k = 0$) следствие 1, виждаме, че и функцията h е примитивно рекурсивна. Оттук примитивната рекурсивност на функциите L и R става ясна, тъй като изложеното по-горе показва, че

$$L(t) = t \dot{-} f(h(t)), \quad R(t) = h(t) \dot{-} (t \dot{-} f(h(t)))$$

при всеки избор на естественото число t. □

Нека J е функцията от горната теорема. За всяко положително цяло число k да дефинираме функция J_k от $\mathcal{F}_k$, като положим

$$J_1(x) = x, \quad J_{k+1}(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) = J(J_k(x_1, \ldots, x_k), x_{k+1}).$$

Очевидно функциите $J_1, J_2, J_3, \ldots$ са примитивно рекурсивни, като J_2 е всъщност функцията J. Индуктивно се показва, че за всяко положително цяло число k съществуват примитивно рекурсивни функции $A_{k,1}, \ldots, A_{k,k}$ от $\mathcal{F}_1$, такива че

$$A_{k,i}(J_k(x_1, \ldots, x_k)) = x_i, \quad i = 1, \ldots, k,$$

при всеки избор на естествените числа $x_1, \ldots, x_k$ и

$$J_k(A_{k,1}(t), \ldots, A_{k,k}(t)) = t$$

за всяко естествено число t (полагаме $A_{1,1} = J_1$, $A_{k+1,i}(x) = A_{k,i}(L(x))$ при $i = 1,\dots,k$, $A_{k+1,k+1} = R$). Грубо казано, при $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ съществува взаимно еднозначно съответствие между $\mathbb{N}^k$ и $\mathbb{N}$. което се осъществява чрез примитивно рекурсивни функции.

Лема 2. Съществува такава примитивно рекурсивна функция $\gamma \in \mathcal{F}_2$, че всяка непразна крайна редица от естествени числа може да се представи във вида $\gamma(z,0), \gamma(z,1), \dots, \gamma(z,t)$ при някой избор на естествени числа z и t.

Доказателство. Да положим например $\gamma(z,i) = R(L^i(z))$, където $L^i(z)$ означава $L(\dots(L(L(z))\dots)$ с i-кратно прилагане на L (така дефинираната функция има желаното свойство, защото при произволен избор на естествени числа t и $s_0, s_1, \dots, s_t$, ако $z = J_{t+2}(0, s_t, \dots, s_1, s_0)$, то $\gamma(z,i) = s_i$ за $i = 0,1,\dots,t$). □

Ако $f \in \mathcal{F}_k$, да разгледаме функцията $\widehat{f}$ от $\mathcal{F}_1$, определена чрез равенството

$$\widehat{f}(t) = \begin{cases} f(A_{k,1}(t), \dots, A_{k,k}(t)), & \text{ако } k \neq 0, \\ f() & \text{при } k = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Ще наричаме тази функция *едноаргументен образ на* f. От нейната дефиниция следва, че

$$f(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} \widehat{f}(J_k(x_1, \dots, x_k)), & \text{ако } k \neq 0, \\ \widehat{f}(0) & \text{при } k = 0. \end{cases} \tag{8}$$

От равенствата (7) и (8) е ясно, че функцията f е примитивно рекурсивна точно тогава, когато е примитивно рекурсивна функцията $\widehat{f}$, и аналогични твърдения са в сила за свойствата рекурсивност и частична рекурсивност. Това дава принципна възможност понятията примитивна рекурсивност и частична рекурсивност да се дефинират за функции от $\mathcal{F}_1$ с помощта на индуктивни дефиниции в рамките само на $\mathcal{F}_1$. Една такава дефиниция за понятието частична рекурсивност е следната (възможни са и значително по-прости негови дефиниции в този дух).[6]

Дефиниция 2. Приемаме, че:

A. Функциите $\lambda x.x+1$, L и R са частично рекурсивни.

B. Ако f_0 и f_1 са частично рекурсивни функции от $\mathcal{F}_1$, то частично рекурсивни са също функциите $\lambda x.f_0(f_1(x))$ и $\lambda x.J(f_0(x), f_1(x))$.

C. Ако f_0 и f_1 са частично рекурсивни функции от $\mathcal{F}_1$, то частично рекурсивна е и функцията f от $\mathcal{F}_1$, определена чрез равенството

$$f(z) = \begin{cases} f_0(L(z)), & \text{ако } R(z) = 0, \\ f_1(J(\pi(z), f(\pi(z)))) & \text{в противен случай,} \end{cases} \tag{9}$$

[6] В приложение 1 е изложено доказателство, че една функция от $\mathcal{F}_1$ е частично рекурсивна в смисъл на тази дефиниция точно тогава, когато тя е частично рекурсивна в смисъл на дефиниция 1.

където $\pi = \lambda z.J(L(z), R(z) \dot{-} 1)$.[7]

D. Ако f_0 е частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_1$, то частично рекурсивна е и функцията f от $\mathcal{F}_1$, определена чрез равенството

$$f(x) = \mu t[f_0(J(x,t)) = 0].$$

Забележка 3. Ако в горната дефиниция пропуснем точка D, а в останалите точки заменим „частично“ с „примитивно“, ще получим една индуктивна дефиниция в рамките на $\mathcal{F}_1$ на понятието примитивна рекурсивност. В приложение 1 е доказано, че една функция от $\mathcal{F}_1$ е примитивно рекурсивна в смисъл на тази дефиниция точно тогава, когато тя е примитивно рекурсивна е смисъл на дефиницията, спомената в забележка 1.

Дефиницията, посочена в забележка 3, може да се използва, за да се подредят ефективно в една редица

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots \tag{10}$$

всички примитивно рекурсивни функции от $\mathcal{F}_1$. Ще я дефинираме индуктивно по следния начин:

$$\varphi_0 = \lambda x.x + 1, \quad \varphi_1 = L, \quad \varphi_2 = R,$$
$$\varphi_{3J(m,n)+3} = \lambda x.\varphi_m(\varphi_n(x)), \quad \varphi_{3J(m,n)+4} = \lambda x.J(\varphi_m(x), \varphi_n(x)),$$

а $\varphi_{3J(m,n)+5}$ е функцията f, която се определя чрез равенството (9) при $f_0 = \varphi_m$ и $f_1 = \varphi_n$.[8].

Това, че всяка примитивно рекурсивна функция от $\mathcal{F}_1$ е член на редицата (10), се вижда чрез индукция, съобразена с посочената в забележка 3 индуктивна дефиниция. За да докажем пък, че всеки член φ_r на редицата (10) е примитивно рекурсивна функция, ще си послужим с индукция относно r. Понеже функциите φ_r с $r \leq 2$ са примитивно рекурсивни, достатъчно е да покажем следното: винаги, когато s е естествено число, по-голямо от 2, и функциите φ_r с $r < s$ са примитивно рекурсивни, функцията φ_s също е примитивно рекурсивна. Нека s е такова естествено число, по-голямо от 2, че функциите φ_r с $r < s$ са примитивно рекурсивни. Съществуват естествени

[7]Равенството (9) определя еднозначно частичната функция f, защото, както лесно се вижда, $\pi(z) < z$ при $R(z) > 0$.

[8]Тази дефиниция е коректна, защото за всяко естествено число s, по-голямо от 2, е вярно следното: (a) числото s може да се представи по единствен начин във вида $s = 3J(m,n) + d$, където $m, n \in \mathbb{N}$, $d \in \{3,4,5\}$; (b) числата m и n във въпросното представяне са по-малки от s. Верността на твърдението (a) следва от обстоятелството, че условията

$$m, n \in \mathbb{N}, \quad d \in \{3,4,5\}, \quad s = 3J(m,n) + d$$

са еквивалентни на условията

$$m = L\left(\left\lfloor \frac{s-3}{3} \right\rfloor\right), \quad n = R\left(\left\lfloor \frac{s-3}{3} \right\rfloor\right), \quad d = 3 + s \bmod 3.$$

Твърдението (b) следва от неравенството $J(x,y) \geq \max(x,y)$.

числа m и n, по-малки от s, и число $d \in \{3,4,5\}$, за които е в сила равенството $s = 3J(m,n) + d$. Благодарение на неравенствата $m < s$ и $n < s$ функциите φ_m и φ_n са примитивно рекурсивни. При $d = 3$ имаме равенството $\varphi_s = \lambda x.\varphi_m(\varphi_n(x))$, а при $d = 4$ – равенството $\varphi_s = \lambda x.J(\varphi_m(x), \varphi_n(x))$, значи в тези два случая е ясно, че функцията φ_s е примитивно рекурсивна. Остава да се убедим, че тя е примитивно рекурсивна и тогава, когато $d = 5$. В този случай за всяко $z \in \mathbb{N}$ е в сила равенството

$$\varphi_s(z) = \begin{cases} \varphi_m(L(z)), & \text{ако } R(z) = 0, \\ \varphi_n(J(\pi(z), \varphi_s(\pi(z)))) & \text{в противен случай,} \end{cases}$$

където $\pi(z) = J(L(z), R(z) - 1)$. Да разгледаме функцията g от $\mathcal{F}_2$, определена чрез равенството $g(x,t) = \varphi_s(J(x,t))$. Лесно се вижда, че

$$g(x,0) = \varphi_m(x),$$
$$g(x,t+1) = \varphi_n(J_3(x,t,g(x,t)))$$

за всички x и t в $\mathbb{N}$. От тези равенства следва, че функцията g е примитивно рекурсивна. Тъй като $\varphi_s = \widehat{g}$, функцията φ_s също е примитивно рекурсивна.

Да разгледаме навсякъде дефинираната функция Φ от $\mathcal{F}_2$, определена чрез равенството

$$\Phi(s,x) = \varphi_s(x).$$

Тя е алгоритмично изчислима и може да се докаже, че е рекурсивна.[9] Функцията Φ обаче не е примитивно рекурсивна. И наистина, да допуснем, че Φ е примитивно рекурсивна. Тогава ще бъде примитивно рекурсивна и функцията $\lambda x.\Phi(x,x)+1$ от $\mathcal{F}_1$, следователно тя ще бъде някой член φ_e на редицата (10). Значи за всяко x от $\mathbb{N}$ ще имаме равенството $\varphi_e(x) = \Phi(x,x)+1$, а то може да се напише и във вида $\Phi(e,x) = \Phi(x,x)+1$. От последното равенство обаче при $x = e$ получаваме невъзможното равенство $\Phi(e,e) = \Phi(e,e) + 1$.

Всички частично рекурсивни функции от $\mathcal{F}_1$ също могат да се подредят ефективно в редица

$$\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots \tag{11}$$

– като се използва по аналогичен начин дефиниция 2. След като се направи това, може да се разгледа функцията Ψ от $\mathcal{F}_2$, определена чрез равенството

$$\Psi(s,x) = \psi_s(x).$$

[9] С пример, в който се 0пресмята $\Phi(1001,8)$, ще илюстрираме един алгоритъм за пресмятане на функцията Φ. По дефиницията ѝ имаме, че $\Phi(1001,8) = \varphi_{1001}(8)$. Като използваме дефиницията на редицата (10) и равенствата $1001 = 3J(7,18) + 5$, $8 = J(2,1)$, $J(2,0) = 5$, $7 = 3J(0,1) + 4$, $18 = 3J(2,0) + 3$, получаваме

$$\varphi_{1001}(8) = \varphi_{18}(J(5, \varphi_{1001}(5)) = \varphi_{18}(J(5, \varphi_7(2))) = \varphi_{18}(J(5, J(\varphi_0(2), \varphi_1(2)))) = \varphi_{18}(J(5, J(3, \varphi_1(2)))) = \varphi_{18}(J(5, J(3,1))) = \varphi_{18}(J(5,13)) = \varphi_{18}(176) = \varphi_2(\varphi_0(176)) = \varphi_2(177) = 12.$$

Доказателство за рекурсивността на Φ ще бъде изложено в приложение 2.

Тя ще бъде алгоритмично изчислима в тесния смисъл на думата и ще може да се докаже, че е частично рекурсивна. Разсъждения за функцията $\lambda x.\Psi(x,x)+1$, подобни на горните разсъждения за функцията $\lambda x.\Phi(x,x)+1$, биха ни довели обаче само до заключение, че функцията

$$\lambda x.\Psi(x,x) \tag{12}$$

не е дефинирана в точката e, до която се достига при тях.[10] С помощта на малко по-сложно разсъждение може да се покаже, че функцията (12) не може да бъде продължена до рекурсивна функция от $\mathcal{F}_1$. И наистина, нека θ е произволна частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_1$, която е продължение на функцията (12). Тогава $\lambda x.\theta(x)+1$ също е частично рекурсивна функция и следователно е някой член ψ_e на редицата (11). Значи за всяко x от $\mathbb{N}$ ще имаме равенството $\psi_e(x)=\theta(x)+1$, а то може да се напише и във вида $\Psi(e,x)=\theta(x)+1$. При $x=e$ то добива вида $\Psi(e,e)=\theta(e)+1$. От него следва, че ако числото e принадлежи на дефиниционната област на θ, то ще принадлежи и на дефиниционната област на функцията $\lambda x.\Psi(x,x)$, поради което нейната стойност в точката e ще бъде стойност и на θ в тази точка и значи ще имаме равенството $\theta(e)=\theta(e)+1$. Оттук е ясно, че числото e не може да принадлежи на дефиниционната област на θ. С това показахме, че за всяка частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_1$, която е продължение на функцията (12), съществува естествено число, непринадлежащо на дефиниционната ѝ област. Разбира се, щом функцията (12) не може да бъде продължена до рекурсивна функция от $\mathcal{F}_1$, функцията Ψ не може да бъде продължена до рекурсивна функция от $\mathcal{F}_2$.

Едно подмножество на $\mathbb{N}^k$ се нарича *рекурсивно*, ако съществува рекурсивна функция от $\mathcal{F}_k$, на която стойността е различна от 0 точно в онези точки от $\mathbb{N}^k$, които принадлежат на въпросното подмножество.[11] От интуитивна гледна точка рекурсивността на едно подмножество на $\mathbb{N}^k$ означава съществуване на алгоритъм за разпознаване кои точки от $\mathbb{N}^k$ принадлежат на даденото подмножество. Като пример за нерекурсивно подмножество на $\mathbb{N}$ можем да посочим дефиниционната област на функцията (12). Тази дефиниционна област не е рекурсивно подмножество на $\mathbb{N}$, защото функцията (12) е частично рекурсивна, а е в сила следното твърдение:

Лема 3. Ако една частично рекурсивна функция ψ от $\mathcal{F}_k$ има рекурсивна дефиниционна област, то съществува рекурсивна функция от $\mathcal{F}_k$, която е продължение на ψ.

Доказателство. Нека ψ е частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_k$, а h е такава рекурсивна функция от $\mathcal{F}_k$, че

$$\mathrm{dom}(\psi)=\left\{(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{N}^k \;\middle|\; h(x_1,\ldots x_k)\neq 0\right\}.$$

[10] Това заключение все пак заслужава внимание, защото дефиниционната област на споменатата функция е безкрайно множество – то съдържа например всички естествени числа z, за които функцията ψ_z е примитивно рекурсивна.

[11] Еквивалентна дефиниция получаваме, ако вместо „различна от 0“ напишем „равна на 0“ и/или поискаме всяка стойност на функцията да принадлежи на множеството $\{0,1\}$.

Разглеждаме функцията f от $\mathcal{F}_{k+1}$, определена чрез равенствата

$$f(x_1,\dots,x_k,0)=0,$$
$$f(x_1,\dots,x_k,t+1)=\psi(x_1,\dots,x_k).$$

Тя е частично рекурсивна, защото се получава чрез примитивна рекурсия от частично рекурсивните функции $\lambda x_1\dots x_k.0$ и $\lambda x_1\dots x_k ty.\psi(x_1,\dots,x_k)$. Да определим функция θ от $\mathcal{F}_k$, като положим

$$\theta(x_1,\dots,x_k)=f(x_1,\dots,x_k,h(x_1,\dots,x_k)).$$

Очевидно функцията θ е продължение на ψ и е дефинирана навсякъде в $\mathbb{N}^k$. Но тя е и рекурсивна, защото е суперпозиция на функцията f, проекционните функции от $\mathcal{F}_k$ и функцията h. □

От дефиницията на понятието рекурсивно множество лесно следва, че за всяко $k\in\mathbb{N}$ рекурсивните подмножества на $\mathbb{N}^k$ образуват булева алгебра, т.е. празното множество и цялото $\mathbb{N}^k$ са рекурсивни и съвкупността на рекурсивните подмножества на $\mathbb{N}^k$ е затворена относно действията обединение, сечение и допълнение.

Макар примитивно рекурсивните функции да образуват същински подклас на класа на рекурсивните функции (и толкова повече – на класа на частично рекурсивните), този подклас е в известен смисъл доста широк. А именно, чрез индукция, съобразена с дадената в началото индуктивна дефиниция на понятието частично рекурсивна функция, ще докажем следното твърдение:

Теорема 2. За всяко $k\in\mathbb{N}$ и всяка частично рекурсивна функция f от $\mathcal{F}_k$ съществува такава примитивно рекурсивна функция g от $\mathcal{F}_{k+2}$, че при всеки избор на естествените числа $x_1,\dots,x_k,y$ да бъде в сила еквивалентността

$$f(x_1,\dots,x_k)=y\iff\exists z(g(x_1,\dots,x_k,y,z)=0).$$

Доказателство. Ако f е функция от вида в точка 1 или точка 2 на дефиницията, полагаме $g=\lambda x_1\dots x_k yz.|y-f(x_1,\dots,x_k)|$.

Нека f има вида (1), където $f_0\in\mathcal{F}_k$, $f_1,\dots,f_k\in\mathcal{F}_l$, и нека $g_0\in\mathcal{F}_{k+2}$, $g_1,\dots,g_k\in\mathcal{F}_{l+2}$ са такива примитивно рекурсивни функции, че

$$f_0(t_1,\dots,t_k)=y\iff\exists z(g_0(t_1,\dots,t_k,y,z)=0)$$

при всеки избор на естествените числа $t_1,\dots,t_k,y$ и

$$f_i(x_1,\dots,x_l)=t\iff\exists z(g_i(x_1,\dots,x_l,t,z)=0),\quad i=1,\dots,k,$$

при всеки избор на естествените числа $x_1,\dots,x_l,t$. Тогава при всеки избор на естествените числа $x_1,\dots,x_l,y$ равенството $f(x_1,\dots,x_l)=y$ е еквивалентно на съществуването на естествени числа $t_1,\dots,t_k$, за които са в сила равенствата $f_1(x_1,\dots,x_l)=t_1,\ \dots,\ f_k(x_1,\dots,x_l)=t_k,\ f_0(t_1,\dots,t_k)=y$, а значи и на съществуването на естествени числа $t_1, \ldots, t_k, z_1, \ldots, z_k, z_0$, удовлетворяващи равенството

$$g_1(x_1, \ldots, x_l, t_1, z_1) + \cdots + g_k(x_1, \ldots, x_l, t_k, z_k) + g_0(t_1, \ldots, t_k, y, z_0) = 0.$$

Оттук следва, че при всеки избор на естествените числа $x_1, \ldots, x_l, y$ е вярна еквивалентността

$$f(x_1, \ldots, x_l) = y \Longleftrightarrow \exists z(g(x_1, \ldots, x_l, y, z) = 0),$$

където функцията g от $\mathcal{F}_{l+2}$ се определя чрез равенството

$$\begin{aligned} g(x_1, \ldots, x_l, y, z) = g_1(x_1, \ldots, x_l, A_{2k+1,1}(z), A_{2k+1,2}(z)) + \\ \cdots \\ + g_k(x_1, \ldots, x_l, A_{2k+1,2k-1}(z), A_{2k+1,2k}(z)) \\ + g_0(A_{2k+1,1}(z), \ldots, A_{2k+1,2k-1}(z), y, A_{2k+1,2k+1}(z)) \end{aligned}$$

и следователно е примитивно рекурсивна.

В разсъжденията във връзка с точки 4 и 5 на дефиницията ще използваме функция γ със свойствата от лема 2.

Във връзка с точка 4 да предположим, че функцията $f \in \mathcal{F}_{l+1}$ е определена чрез равенствата (2), където $f_0 \in \mathcal{F}_l$, $f_1 \in \mathcal{F}_{l+2}$, а $g_0 \in \mathcal{F}_{l+2}$, $g_1 \in \mathcal{F}_{l+4}$ са такива примитивно рекурсивни функции, че

$$f_0(x_1, \ldots, x_l) = y \Longleftrightarrow \exists z(g_0(x_1, \ldots, x_l, y, z) = 0)$$

при всеки избор на естествените числа $x_1, \ldots, x_l, y$ и

$$f_1(x_1, \ldots, x_l, t, y) = y' \Longleftrightarrow \exists z(g_1(x_1, \ldots, x_l, t, y, y', z) = 0)$$

при всеки избор на естествените числа $x_1, \ldots, x_l, t, y, y'$. Тогава при всеки избор на естествените числа $x_1, \ldots, x_l, t, y$ равенството $f(x_1, \ldots, x_l, t) = y$ е еквивалентно на съществуването на естествени числа $y_0, y_1, \ldots, y_t$, за които са в сила равенствата $f_0(x_1, \ldots, x_l) = y_0, \quad y_t = y$ и равенствата

$$f_1(x_1, \ldots, x_l, i, y_i) = y_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, t-1.$$

Това от своя страна е еквивалентно на съществуването на естествени числа $y_0, z_0, y_1, z_1, \ldots, y_t, z_t$, удовлетворяващи равенството

$$g_0(x_1, \ldots, x_l, y_0, z_0) + |y_t - y| + \sum_{i<t} g_1(x_1, \ldots, x_l, i, y_i, y_{i+1}, z_{i+1}) = 0.$$

Оттук следва, че при всеки избор на естествените числа $x_1, \ldots, x_l, t, y$ е вярна еквивалентността

$$f(x_1, \ldots, x_l, t) = y \Longleftrightarrow \exists z(g(x_1, \ldots, x_l, t, y, z) = 0),$$

където функцията g от $\mathcal{F}_{l+2}$ се определя чрез равенството

$$g(x_1,\dots,x_l,t,y,z) = g_0(x_1,\dots,x_l,\gamma(z,0),\gamma(z,1)) + |\gamma(z,2t+2)-y| + \sum_{i<t} g_1(x_1,\dots,x_l,i,\gamma(z,2i),\gamma(z,2i+2),\gamma(z,2i+3))$$

и следователно (както лесно се вижда) е примитивно рекурсивна.

Във връзка с точка 5 да предположим, че функцията $f \in \mathcal{F}_l$ е функцията (3), където $f_0 \in \mathcal{F}_{l+1}$, а $g_0 \in \mathcal{F}_{l+3}$ е такава примитивно рекурсивна функция, че

$$f_0(x_1,\dots,x_l,t) = y \Longleftrightarrow \exists z(g_0(x_1,\dots,x_l,t,y,z)=0)$$

при всеки избор на естествените числа $x_1,\dots,x_l,t,y$. Тогава при всеки избор на естествените числа $x_1,\dots,x_l,s$ равенството $f(x_1,\dots,x_l)=s$ е еквивалентно на съществуването на естествени числа $t_0,t_1,\dots,t_{s-1},t_s$, за които са изпълнени равенствата

$$f_0(x_1,\dots,x_l,i) = t_i, \quad i=0,1,\dots,s-1,s,$$

равенствата

$$\overline{\mathrm{sg}}(t_i) = 0, \quad i=0,1,\dots,s-1,$$

и равенството $t_s = 0$. Това от своя страна е еквивалентно на съществуването на естествени числа $t_0,z_0,t_1,z_1,\dots,t_{s-1},z_{s-1},t_s,z_s$, удовлетворяващи равенството

$$\sum_{i=0}^{s} g_0(x_1,\dots,x_l,i,t_i,z_i) + \sum_{i<s}\overline{\mathrm{sg}}(t_i) + t_s = 0.$$

Оттук следва, че при всеки избор на естествените числа $x_1,\dots,x_l,s$ е вярна еквивалентността

$$f(x_1,\dots,x_l) = s \Longleftrightarrow \exists z(g(x_1,\dots,x_l,s,z)=0),$$

където функцията g от $\mathcal{F}_{l+2}$ се определя чрез равенството

$$g(x_1,\dots,x_l,s,z) = \sum_{i=0}^{s} g_0(x_1,\dots,x_l,i,\gamma(z,2i),\gamma(z,2i+1)) + \sum_{i<s}\overline{\mathrm{sg}}(\gamma(z,2i)) + \gamma(z,2s)$$

и следователно е примитивно рекурсивна. □

Следствие 2. Ако f е частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_k$, то съществува такава примитивно рекурсивна функция h от $\mathcal{F}_{k+1}$, че

$$f(x_1,\dots,x_k) = L(\mu t[h(x_1,\dots,x_k,t)=0])$$

при всеки избор на естествените числа $x_1,\dots,x_k$ и следователно

$$\mathrm{dom}(f) = \left\{ (x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{N}^k \;\middle|\; \exists t(h(x_1,\dots,x_k,t)=0)\right\}.$$

Доказателство. Полагаме $h(x_1,\dots,x_k,t) = g(x_1,\dots,x_k,L(t),R(t))$, където g е със свойствата от теорема 2. $\square$

Следствие 3. Множеството на частично рекурсивните функции от $\mathcal{F}_k$ съвпада с множеството на функциите от вида

$$\lambda x_1\dots x_k.L(\mu t[\varphi_s(J_{k+1}(x_1,\dots,x_k,t)) = 0], \tag{13}$$

където $s \in \mathbb{N}$, а $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\dots$ е редицата (10).

Доказателство. Очевидно всяка функция от вида (13) е частично рекурсивна, а ако f е частично рекурсивна функции от $\mathcal{F}_k$ и h е примитивно рекурсивна функция със свойството от следствие 2, то функцията f ще има вида (13) при $\varphi_s = \widehat{h}$. $\square$

Едно подмножество на $\mathbb{N}^k$ се нарича *рекурсивно номеруемо*, ако то е дефиниционна област на някоя частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_k$. От следствие 2 е ясно, че всяко рекурсивно номеруемо подмножество на $\mathbb{N}^k$ може да се представи във вида $\left\{(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{N}^k \,\middle|\, \exists t(h(x_1,\dots,x_k,t) = 0)\right\}$ при някой избор на примитивно рекурсивна функция $h \in \mathcal{F}_{k+1}$. Обратното също е вярно, защото за всяка примитивно рекурсивна функция $h \in \mathcal{F}_k$ множеството $\left\{(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{N}^k \,\middle|\, \exists t(h(x_1,\dots,x_k,t) = 0)\right\}$ е дефиниционна област например на функцията $\lambda x_1,\dots,x_k.\mu t[h(x_1,\dots,x_k,t) = 0]$.

Множеството на стойностите на всяка частично рекурсивна функция е рекурсивно номеруемо подмножество на $\mathbb{N}$. И наистина, ако f е частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_k$, а g е със свойствата от теорема 2, то

$$\mathrm{rng}(f) = \{y \in \mathbb{N} \,|\, \exists t(h(y,t) = 0\},$$

където $h = \lambda yt.g(A_{k+1,1}(t),\dots,A_{k+1,k}(t),y,A_{k+1,k+1}(t))$. Обратното също е вярно, защото за всяка частично рекурсивна функция f от $\mathcal{F}_1$ множеството $\mathrm{dom}(f)$ съвпада с множеството на стойностите на функцията $\lambda x.f_0(x,f(x))$, където $f_0 = \lambda xy.x$.

Всички рекурсивни множества са рекурсивно номеруеми, защото за всяка примитивно рекурсивна функция $g \in \mathcal{F}_k$ имаме равенството

$$\left\{(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{N}^k \,\middle|\, g(x_1,\dots,x_k) \neq 0\right\} = \\ \left\{(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{N}^k \,\middle|\, \exists t(\overline{\mathrm{sg}}\, g(x_1,\dots,x_k) = 0)\right\}.$$

Обратното твърдение не е вярно – например дефиниционната област на функцията (12) е нерекурсивно рекурсивно номеруемо подмножество на $\mathbb{N}$.

От дадената по-горе дефиниция съвсем лесно следва, че сечението на две рекурсивно номеруеми подмножества на $\mathbb{N}^k$ е пак рекурсивно номеруемо. Обединението им също е рекурсивно номеруемо, защото за всеки две примитивно рекурсивни функции h_1 и h_2 от $\mathcal{F}_{k+1}$ е в сила равенството

$$\bigcup_{i=1}^{2}\left\{(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{N}^k \,\middle|\, \exists t(h_i(x_1,\dots,x_k,t) = 0)\right\} = \\ \left\{(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{N}^k \,\middle|\, \exists t(\min(h_1(x_1,\dots,x_k,t),h_2(x_1,\dots,x_k,t)) = 0)\right\}.$$

Допълнението на рекурсивно номеруемо множество не винаги е рекурсивно номеруемо. Например нека D е дефиниционната област на функцията (12), т.е.

$$D = \{x \in \mathbb{N} \,|\, (x, x) \in \mathrm{dom}(\Psi)\}. \tag{14}$$

Тогава D е рекурсивно номеруемо подмножество на $\mathbb{N}$, но ако допуснем, че и множеството $\mathbb{N} \setminus D$ е рекурсивно номеруемо, това би означавало и $\mathbb{N} \setminus D$ да е дефиниционна област на някоя частично рекурсивна функция от $\mathcal{F}_1$. Тя би имала вида ψ_e за някое естествено число e и значи бихме имали равенството

$$\mathbb{N} \setminus D = \{x \in \mathbb{N} \,|\, (e, x) \in \mathrm{dom}(\Psi)\}. \tag{15}$$

От равенствата (14) и (15) обаче следва абсурдното заключение, че условията $e \in D$ и $e \in \mathbb{N} \setminus D$ са еквивалентни.

Оказва се, че едно рекурсивно номеруемо подмножество на $\mathbb{N}^k$ е рекурсивно точно тогава, когато и неговото допълнение до $\mathbb{N}^k$ е рекурсивно номеруемо. В едната посока това следва от обстоятелството, че рекурсивността на подмножествата на $\mathbb{N}^k$ се запазва при образуване на тяхно допълнение до $\mathbb{N}^k$ и че рекурсивните множества са рекурсивно номеруеми. За разсъждението в обратната посока да предположим, че $M \subseteq \mathbb{N}^k$ и всяко от множествата M и $\mathbb{N}^k \setminus M$ е рекурсивно номеруемо. В такъв случай

$$\begin{aligned} M &= \left\{ (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \,\middle|\, \exists t(h(x_1, \ldots, x_k, t) = 0) \right\}, \\ \mathbb{N}^k \setminus M &= \left\{ (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \,\middle|\, \exists t(\overline{h}(x_1, \ldots, x_k, t) = 0) \right\} \end{aligned}$$

при някой избор на примитивно рекурсивни функции h и $\overline{h}$ от $\mathcal{F}_{k+1}$. Нека функцията g от $\mathcal{F}_k$ се определя чрез равенството

$$g(x_1, \ldots, x_k) = \overline{h}(x_1, \ldots, x_k, \mu t[\min(h(x_1, \ldots, x_k, t), \overline{h}(x_1, \ldots, x_k, t)) = 0]).$$

Тя е рекурсивна, а $M = \left\{ (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \,\middle|\, g(x_1, \ldots, x_k) \neq 0 \right\}$, следователно множеството M е рекурсивно.

Приложение 1

Ще докажем първо, че за функциите от $\mathcal{F}_1$ частичната рекурсивност в смисъл на дефиниция 1 е еквивалентна на частичната им рекурсивност в смисъл на дефиниция 2.

Очевидно функциите, за които става дума в точка A от дефиниция 2, са частично рекурсивни в смисъл на дефиниция 1, а образуването на нови функции по начините от точки B и D запазва частичната рекурсивност в смисъл на дефиниция 1. Ще покажем, че тя се запазва и при образуване на нова функция по начина от точка C, и с това ще бъде показано, че всички функции от $\mathcal{F}_1$, частично рекурсивни в смисъл на дефиниция 2, са частично рекурсивни в смисъл на дефиниция 1.

Нека f_0 и f_1 са функции от $\mathcal{F}_1$, частично рекурсивни в смисъл на дефиниция 1, а f е съответната функция, дефинирана чрез равенството (9).

Ще покажем, че и тя е частично рекурсивна в смисъл на дефиниция 1. За целта да разгледаме функцията g от $\mathcal{F}_2$, определена чрез равенството $g(x,t) = f(J(x,t))$. Лесно се вижда, че

$$g(x,0) = f_0(x),$$
$$g(x,t+1) = f_1(J_3(x,t,g(x,t)))$$

за всички x и t в $\mathbb{N}$. От тези равенства следва, че функцията g е частично рекурсивна в смисъл на дефиниция 1. Тъй като $f = \widehat{g}$, функцията f също е частично рекурсивна в смисъл на дефиниция 1.

Това, че функциите от $\mathcal{F}_1$, частично рекурсивни в смисъл на дефиниция 1, са частично рекурсивни в смисъл на дефиниция 2, ще докажем, като покажем, че едноаргументният образ на всяка функция, частично рекурсивна в смисъл на дефиниция 1, е функция, частично рекурсивна в смисъл на дефиниция 2, и използваме обстоятелството, че $\widehat{f} = f$ за всяка функция f от $\mathcal{F}_1$.

Ако f е проекционната функция $\lambda x_1 \dots x_k.x_i$ за някои естествени числа k и i, удовлетворяващи неравенствата $1 \leq i \leq k$, то $\widehat{f} = A_{k,i}$, а с индукция относно k се доказва, че функциите от този вид са частично рекурсивни в смисъл на дефиниция 2. За функцията $A_{1,1}$ това е вярно благодарение на равенството $A_{1,1} = \lambda x.J(L(x),R(x))$, а от друга страна за всяко положително цяло число k имаме равенствата $A_{k+1,i} = \lambda x.A_{k,i}(L(x))$ при $i = 1,\dots,k$ и равенството $A_{k+1,k+1} = R$.

Ако f е функцията $\lambda x.x+1$, то $\widehat{f} = f$, тъй че и в този случай функцията $\widehat{f}$ е частично рекурсивна в смисъл на дефиниция 2.

Целта, към която се стремим, ще бъде постигната, ако покажем, че частичната рекурсивност на едноаргументния образ в смисъл на дефиниция 2 се запазва при суперпозиция, примитивна рекурсия и минимизация.

Преди да се занимаем със запазването на разглежданото свойство при суперпозиция, отбелязваме, че при всеки избор на положително цяло число k и на функции $g_1,\dots,g_k$ от $\mathcal{F}_1$, частично рекурсивни в смисъл на дефиниция 2, функцията $\lambda x.J_k(g_1(x),\dots,g_k(x))$ също е частично рекурсивна в смисъл на дефиниция 2. Това се доказва с индукция относно k: при $k = 1$ твърдението е тривиално, а при произволно положително цяло число k и произволни функции $g_1,\dots,g_k,g_{k+1}$ от $\mathcal{F}_1$ имаме равенството

$$J_k(g_1(x),\dots,g_k(x),g_{k+1}(x)) = J(J_k(g_1(x),\dots,g_k(x)),g_{k+1}(x)).$$

Да предположим, че f има вида (1), където $f_0 \in \mathcal{F}_k$, $f_1,\dots,f_k \in \mathcal{F}_l$ и функциите $\widehat{f_i}$, $i = 0,1,\dots,k$, са частично рекурсивни в смисъл на дефиниция 2. Лесно се вижда, че ако $k = 0$, то $\widehat{f} = \widehat{f_0}$ (разглеждат се поотделно случаят, когато $l \neq 0$, и случаят, когато $l = 0$), а ако $k \neq 0$, то

$$\widehat{f}(x) = f_0(\widehat{f_1}(x),\dots,\widehat{f_k}(x)) = \widehat{f_0}(J_k(\widehat{f_1}(x),\dots,\widehat{f_k}(x)))$$

за всяко $x \in \mathbb{N}$. Следователно във всички случаи функцията $\widehat{f}$ е частично рекурсивна в смисъл на дефиниция 2.

Да предположим сега, че една функция f от $\mathcal{F}_{l+1}$ е определена чрез равенствата (2), където $f_0 \in \mathcal{F}_l$, $f_1 \in \mathcal{F}_{l+2}$, и че функциите $\widehat{f_0}$ и $\widehat{f_1}$ са частично рекурсивни в смисъл на дефиниция 2. Ще покажем, че и функцията $\widehat{f}$ е частично рекурсивна в смисъл на дефиниция 2.

Първо ще разгледаме случая, когато $l \neq 0$, и ще покажем, че тогава е изпълнено равенството (9), ако в качеството на f_0, f_1 и f вземем съответно функциите $\widehat{f_0}$, $\widehat{f_1}$ и $\widehat{f}$. И наистина, в този случай за всяко $z \in \mathbb{N}$ имаме

$$\widehat{f}(z) = f(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}),$$

където $x_i = A_{l+1,i}(z)$ при $i = 1, \ldots, l, l+1$ и следователно

$$\begin{gathered} z = J_{l+1}(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}) = J(J_l(x_1, \ldots, x_l), x_{l+1}), \\ L(z) = J_l(x_1, \ldots, x_l), \quad R(z) = x_{l+1}, \\ \widehat{f}(z) = f(x_1, \ldots, x_l, R(z)). \end{gathered}$$

Ако $R(z) = 0$, то

$$\widehat{f}(z) = f_0(x_1, \ldots, x_l) = \widehat{f_0}(J_l(x_1, \ldots, x_l)) = \widehat{f_0}(L(z)),$$

а в противен случай

$$\begin{aligned} \widehat{f}(z) = f_1(x_1, \ldots, x_l, R(z) - 1, f(x_1, \ldots, x_l, R(z) - 1)) = \\ \widehat{f_1}(J_{l+2}(x_1, \ldots, x_l, R(z) - 1, f(x_1, \ldots, x_l, R(z) - 1))) = \\ \widehat{f_1}(J(J_{l+1}(x_1, \ldots, x_l, R(z) - 1), \widehat{f}(J_{l+1}(x_1, \ldots, x_l, R(z) - 1)))) \end{aligned}$$

и тъй като

$$\begin{aligned} J_{l+1}(x_1, \ldots, x_l, R(z) - 1) = \\ J(J_l(x_1, \ldots, x_l), R(z) - 1) = J(L(z), R(z) - 1) = \pi(z), \end{aligned}$$

получаваме равенството

$$\widehat{f}(z) = \widehat{f_1}(J(\pi(z), \widehat{f}(\pi(z)))).$$

Случая, когато $l = 0$, ще сведем към вече разгледаните, като си послужим с функцията g от $\mathcal{F}_2$, определена чрез равенството $g(x,t) = f(t)$. За нея имаме равенствата

$$\begin{gathered} g(x, 0) = \widehat{f_0}(x), \\ g(x, t+1) = g_1(x, t, g(x, t)), \end{gathered}$$

където $g_1(x, t, y) = f_1(t, y)$ за всички стойности на x, t, y в $\mathbb{N}$. Тъй като $\widehat{f_0} \in \mathcal{F}_1$, едноаргументният образ на $\widehat{f_0}$ е $\widehat{f_0}$ и значи е функция, частично рекурсивна в смисъл на дефиниция 2. Едноаргументният образ на функцията g_1 също е функция, частично рекурсивна в смисъл на дефиниция 2, защото g_1 е суперпозиция на функции, чиито едноаргументни образи са такива функции (а именно на функцията f_1 и проекционните функции $\lambda xty.t$ и $\lambda xty.y$). Понеже g се получава от $\widehat{f_0}$ и g_1 чрез примитивна рекурсия от разгледания вече вид, функцията $\widehat{g}$ също ще бъде частично рекурсивна в смисъл на дефиниция 2. За всяко t от $\mathbb{N}$ обаче е в сила равенството $f(t) = g(t,t)$ и значи f също е суперпозиция на функции, чиито едноаргументни образи са частично рекурсивни в смисъл на дефиниция 2. Следователно функцията $\widehat{f}$ (т.е. самата f) е частично рекурсивна в смисъл на дефиниция 2.

Да предположим накрая, че една функция f от $\mathcal{F}_l$ е определена чрез равенството

$$f(x_1,\ldots,x_l) = \mu t[f_0(x_1,\ldots,x_l,t) = 0],$$

където $f_0 \in \mathcal{F}_{l+1}$ и функцията $\widehat{f_0}$ е частично рекурсивна в смисъл на дефиниция 2. Ако $l \neq 0$, то лесно се вижда, че

$$\widehat{f}(z) = \mu t[\widehat{f_0}(J(z,t)) = 0]$$

за всяко $z \in \mathbb{N}$ и следователно функцията $\widehat{f}$ е частично рекурсивна в смисъл на дефиниция 2. Случая, когато $l = 0$, свеждаме към вече разгледаните, като използваме, че $\widehat{f}$ съвпада с едноаргументния си образ и при $l = 0$ имаме равенството

$$\widehat{f} = \lambda x.\mu t[g_0(x,t) = 0],$$

където функцията g_0 от $\mathcal{F}_2$ се дефинира чрез равенството $g_0(x,t) = f_0(t)$.

В забележка 3 беше посочена една индуктивна дефиниция на класа на примитивно рекурсивните функции от $\mathcal{F}_1$ и трябва да докажем, че за функциите от $\mathcal{F}_1$ примитивната рекурсивност в смисъл на тази дефиниция е еквивалентна на примитивна рекурсивност в смисъла на дефиницията, спомената в забележка 2. Доказателството може да се получи от горното чрез следните промени:

1. Пропускаме последния му абзац.

2. В останалата част на доказателството заменяме „начините от точки B и D“, „частичната“, „частично“, „дефиниция 1“ и „дефиниция 2“ съответно с „начина от точка B“, „примитивната“, „примитивно“, „забележка 2“ и „забележка 3“.

3. Добавяме доказателство, че едноаргументният образ на функцията от $\mathcal{F}_0$ със стойност 0 е функция, примитивно рекурсивна в смисъл на забележка 3, като доказваме равенство от вида $0 = f(g(x))$, където f се определя чрез равенството (9) при подходящо избрани функции f_0 и f_1 от $\mathcal{F}_1$, примитивно рекурсивни в смисъл на забележка 3, и функцията g също е функция от $\mathcal{F}_1$, примитивно рекурсивна в този смисъл.

Последната от гореспоменатите промени може да се осъществи например чрез избора $f_0 = L$, $f_1 = \lambda z.L(R(z))$, като се използва, че $L(0) = 0$ и че

$L(t) < t$ за всяко положително цяло число t. Че наистина е в сила това неравенство, следва от свойствата на функцията J – ако допуснем, че $L(t) \geq t$ за някое такова t, ще получим противоречие с това, че

$$t = J(L(t), R(t)) \geq \max(L(t), R(t)) \geq L(t),$$

а от равенството $J(L(t), R(t)) = \max(L(t), R(t))$ следва, че $L(t) = 0$. Нека f е функцията, определена чрез равенството (9) при споменатия избор на f_0 и f_1. С индукция относно i се показва, че $f(J(x,i)) \leq x \dot{-} (i+1)$ при всеки избор на естествени числа x и i. Оттук получаваме, че $f(J(x,x)) = 0$ за всяко $x \in \mathbb{N}$.

Приложение 2

Предстои да бъде написано.