Запазване на изчислимостта на реални функции при суперпозиция. Изчислимост на аритметичните операции и на функциите max и min в $\mathbb{R}$

В теоремата по-долу и в нейното доказателство означенията $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ са съкращения съответно за $\xi_1, \dots, \xi_L$ и $\eta_1, \dots, \eta_K$, където $\xi_1, \dots, \xi_L, \eta_1, \dots, \eta_K$ са реални числа.

Теорема 1. Нека K и L са положителни цели числа, Φ_0 е изчислима частична функция от $\mathbb{R}^K$ към $\mathbb{R}$, $\Phi_1, \dots, \Phi_K$ са изчислими частични функции от $\mathbb{R}^L$ към $\mathbb{R}$ и Φ е частичната функция от $\mathbb{R}^L$ към $\mathbb{R}$, дефинирана чрез равенството

$$\Phi(\bar{\xi}) = \Phi_0(\Phi_1(\bar{\xi}), \dots, \Phi_K(\bar{\xi})).$$

Тогава Φ също е изчислима.

Доказателство. Ще използваме теорема 2 от текста „Изчислимост в стил на Гжегорчик на реални числа и реални функции“.[1] От изчислимостта на функциите $\Phi_1, \dots, \Phi_K$ следва съществуването на такива μ-рекурсивни функционали $F_1, G_1, \dots, F_K, G_K$ от $\mathcal{F}_{2L,1}$, че при $n = 1, \dots, K$

$$\left| \frac{F_n(f_1, g_1, \dots, f_L, g_L, i) - G_n(f_1, g_1, \dots, f_L, g_L, i)}{i+1} - \Phi_n(\bar{\xi}) \right| < \frac{1}{i+1} \tag{1}$$

винаги, когато $(\xi_1, \dots, \xi_L) \in \mathrm{dom}(\Phi_n)$, $f_1, g_1, \dots, f_L, g_L \in \mathbb{T}$, $i \in \mathbb{N}$ и

$$\left| \frac{f_1(k) - g_1(k)}{k+1} - \xi_1 \right| < \frac{1}{k+1}, \ \dots, \ \left| \frac{f_L(k) - g_L(k)}{k+1} - \xi_K \right| < \frac{1}{k+1} \tag{2}$$

за всяко $k \in \mathbb{N}$. Изчислимостта на Φ_0 пък осигурява съществуването на μ-рекурсивни функционали F_0, G_0 от $\mathcal{F}_{2K,1}$ със свойството, че

$$\left| \frac{F_0(\hat{f}_1, \hat{g}_1, \dots, \hat{f}_K, \hat{g}_K, i) - G_0(\hat{f}_1, \hat{g}_1, \dots, \hat{f}_K, \hat{g}_K, i)}{i+1} - \Phi_0(\bar{\eta}) \right| < \frac{1}{i+1} \tag{3}$$

винаги, когато $(\eta_1, \dots, \eta_K) \in \mathrm{dom}(\Phi_0)$, $\hat{f}_1, \hat{g}_1, \dots, \hat{f}_K, \hat{g}_K \in \mathbb{T}$, $i \in \mathbb{N}$ и

$$\left| \frac{\hat{f}_1(k) - \hat{g}_1(k)}{k+1} - \eta_1 \right| < \frac{1}{k+1}, \ \dots, \ \left| \frac{\hat{f}_K(k) - \hat{g}_K(k)}{k+1} - \eta_K \right| < \frac{1}{k+1} \tag{4}$$

[1] С цената на малко повече писане бихме могли по напълно аналогичен начин да използваме следствието от теорема 2 в текста „Характеризация на изчислимите реални числа и на изчислимите реални функции без да се използват номерации“.

за всяко $k \in \mathbb{N}$. За да докажем изчислимостта на функцията Φ, разглеждаме временно произволна точка $(\xi_1, \dots, \xi_L)$ от нейната дефиниционна област и произволни $f_1, g_1, \dots, f_K, g_K \in \mathbb{T}$, за които при всеки избор на $k \in \mathbb{N}$ са в сила неравенствата (2). Тогава при $n = 1, \dots, K$ точката $(\xi_1, \dots, \xi_L)$ принадлежи на $\mathrm{dom}(\Phi_n)$ и са изпълнени неравенствата (1). При $n = 1, \dots, K$ да положим

$$\begin{aligned} \eta_n &= \Phi_n(\bar{\xi}), \\ \hat{f}_n &= \lambda l. F_n(f_1, g_1, \dots, f_L, g_L, l), \\ \hat{g}_n &= \lambda l. G_n(f_1, g_1, \dots, f_L, g_L, l). \end{aligned}$$

Тогава $(\eta_1, \dots, \eta_N) \in \mathrm{dom}(\Phi_0)$, $\hat{f}_1, \hat{g}_1, \dots, \hat{f}_K, \hat{g}_K \in \mathbb{T}$ и за всяко $k \in \mathbb{N}$ са изпълнени неравенствата (4), следователно за всяко $i \in \mathbb{N}$ е в сила неравенството (3). То обаче може да се напише във вида

$$\left| \frac{F(f_1, g_1, \dots, f_L, g_L, i) - G(f_1, g_1, \dots, f_L, g_L, i)}{i+1} - \Phi(\bar{\xi}) \right| < \frac{1}{i+1},$$

ако за произволни $f_1, g_1, \dots, f_K, g_K \in \mathbb{T}$ и произволно $i \in \mathbb{N}$ положим

$$\begin{aligned} F(f_1, g_1, \dots, f_L, g_L, i) = F_0(&\lambda l. F_1(f_1, g_1, \dots, f_L, g_L, l), \lambda l. G_1(f_1, g_1, \dots, f_L, g_L, l), \\ &\dots, \lambda l. F_K(f_1, g_1, \dots, f_L, g_L, l), \lambda l. G_K(f_1, g_1, \dots, f_L, g_L, l), i), \\ G(f_1, g_1, \dots, f_L, g_L, i) = G_0(&\lambda l. F_1(f_1, g_1, \dots, f_L, g_L, l), \lambda l. G_1(f_1, g_1, \dots, f_L, g_L, l), \\ &\dots, \lambda l. F_K(f_1, g_1, \dots, f_L, g_L, l), \lambda l. G_K(f_1, g_1, \dots, f_L, g_L, l), i). \end{aligned}$$

Тъй като функционалите F и G, дефинирани по този начин, са μ-рекурсивни, с това изчислимостта на функцията Φ е доказана. □

Следствие. Нека K е положително цяло число, Φ_0 е изчислима частична функция от $\mathbb{R}^K$ към $\mathbb{R}$, а $\eta_1, \dots, \eta_K$ са изчислими реални числа, за които $(\eta_1, \dots, \eta_K) \in \mathrm{dom}(\Phi_0)$. Тогава числото $\Phi_0(\eta_1, \dots, \eta_K)$ също е изчислимо.

Доказателство. Прилагаме теоремата при $L = 1$, като в качеството на $\Phi_1, \dots, \Phi_K$ вземаме константните функции от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$ със стойности съответно $\eta_1, \dots, \eta_K$. Изчислимостта на тези функции е ясна от твърдение 6 в текста „Изчислимост относно именуващи системи“, а прилагането на теоремата позволява да заключим, че константната функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$ със стойност $\Phi_0(\eta_1, \dots, \eta_K)$ е изчислима. Оттук изчислимостта на въпросната стойност следва с помощта на твърдение 5 от споменатия текст.[2] □

Забележка 1. От току-що доказаната теорема, като се използва и твърдението от пример 5 в текста „Характеризация на изчислимите реални числа и на изчислимите реални функции без да се използват номерации“,

[2]При $K = 1$ може да се използва направо въпросното твърдение 5 (без да се разглежда константна функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$ със стойност η_1 и без да се използва теоремата). Всъщност бихме могли да постъпим по подобен начин и при $K > 1$, но след като покажем, че елементът $(\eta_1, \dots, \eta_K)$ на $\mathbb{R}^K$ е $\mathbf{R}_K$-изчислим.

следва, че по-общо при всяко дефиниране на реална функция чрез други реални функции с помощта на явен израз получената функция е изчислима, ако въпросните други функции са изчислими.[3]

Пример 1. Ако Ψ е изчислима частична функция от $\mathbb{R}^2$ към $\mathbb{R}$, а Θ е изчислима частична функция от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$, то частичната функция Φ от $\mathbb{R}^2$ към $\mathbb{R}$, дефинирана чрез равенството

$$\Phi(\xi_1,\xi_2) = \Psi(\xi_1,\Theta(\xi_2)),$$

също е изчислима. Това може да се покаже, като се приложи теоремата при $K = L = 2$, $\Phi_0 = \Psi$, $\Phi_1 = \lambda\xi_1\xi_2.\xi_1$, $\Phi_2 = \lambda\xi_1\xi_2.\Theta(\xi_2)$. За целта трябва първо да се покаже изчислимостта на функцията $\lambda\xi_1\xi_2.\Theta(\xi_2)$, а това става чрез прилагане на теоремата при $K = 1$, $L = 2$, $\Phi_0 = \Theta$, $\Phi_1 = \lambda\xi_1\xi_2.\xi_2$.

Теорема 2. Функцията $\lambda\xi_1\xi_2.\xi_1+\xi_2$ от $\mathbb{R}^2$ към $\mathbb{R}$ е изчислима.

Доказателство. Ще използваме теорема 2 от текста „Характеризация на изчислимите реални числа и на изчислимите реални функции без да се използват номерации“. Нека $(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2$, а θ_1 и θ_2 са стандартно апроксимиращи редици съответно за ξ_1 и ξ_2. За произволно $i\in\mathbb{N}$ са в сила неравенствата

$$\theta_1(2i+1) < \frac{1}{2i+2},\ \theta_2(2i+1) < \frac{1}{2i+2},$$

следователно ако дефинираме функция $\theta:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ с помощта на равенството

$$\theta(i) = \theta_1(2i+1)+\theta_2(2i+1), \tag{5}$$

то за всяко $i\in\mathbb{N}$ ще имаме

$$\begin{aligned}|\theta(i)-(\xi_1+\xi_2)| &= |(\theta_1(2i+1)-\xi_1)+(\theta_2(2i+1)-\xi_2)|\\ &\le |\theta_1(2i+1)-\xi_1|+|\theta_2(2i+1)-\xi_2| < \frac{1}{i+1}\end{aligned}$$

и значи θ ще бъде стандартно апроксимираща редица за числото $\xi_1+\xi_2$. Да означим с Δ изображението на $(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})^2$ в $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, което на всеки елемент (θ_1,θ_2) на $(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})^2$ съпоставя функцията θ, дефинирана чрез равенството (5). Теоремата ще бъде доказана, ако покажем, че изображението Δ е ефективно. Това обаче е ясно от обстоятелството, че при всеки избор на f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2 в $\mathbb{T}$ имаме

$$\begin{aligned}&\Delta\left(\lambda k.\frac{f_1(k)-g_1(k)}{h_1(k)+1},\lambda k.\frac{f_2(k)-g_2(k)}{h_2(k)+1}\right)\\ &\qquad = \lambda i.\frac{f_1(2i+1)-g_1(2i+1)}{h_1(2i+1)+1}+\frac{f_2(2i+1)-g_2(2i+1)}{h_2(2i+1)+1}\\ &\qquad\qquad \frac{F(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i)-G(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i)}{H(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i)+1},\end{aligned}$$

[3] Имат се предвид явни изрази, построени в съгласие със следната индуктивна дефиниция: всяка променлива е явен израз и ако след означение на K-местна функция поставим като аргументи K явни израза, получаваме пак явен израз.

където функционалите F, G и H от $\mathcal{F}_{6,1}$ се дефинират чрез равенствата

$$\begin{aligned}
F(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i) &= f_1(2i+1)(h_2(2i+1)+1)+f_2(2i+1)(h_1(2i+1)+1),\\
G(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i) &= g_1(2i+1)(h_2(2i+1)+1)+g_2(2i+1)(h_1(2i+1)+1),\\
H(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i) &= h_1(2i+1)h_2(2i+1) + h_1(2i+1) + h_2(2i+1),
\end{aligned}$$

а така дефинираните функционали са μ-рекурсивни. □

Следствие. Функцията $\lambda\xi_1\xi_2.\xi_1 - \xi_2$ от $\mathbb{R}^2$ към $\mathbb{R}$ е изчислима.

Доказателство. Използваме пример 1 с $\Psi = \lambda\xi_1\xi_2.\xi_1 + \xi_2$ и $\Theta = \lambda\xi_2.-\xi_2$ заедно с обстоятелството, че втората от тези функции е изчислима съгласно пример 6 в текста „Характеризация на изчислимите реални числа и на изчислимите реални функции без да се използват номерации“. □

Теорема 3. Функцията $\lambda\xi_1\xi_2.\xi_1\xi_2$ от $\mathbb{R}^2$ към $\mathbb{R}$ е изчислима.

Доказателство. Нека $(\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^2$, а θ_1 и θ_2 са стандартно апроксимиращи редици съответно за ξ_1 и ξ_2. При $n = 1,2$ и $k \in \mathbb{N}$ да положим

$$\delta_n(k) = \theta_n(k) - \xi_n.$$

Тогава

$$|\delta_n(k)| < \frac{1}{k+1}, \quad \theta_n(k) = \xi_n + \delta_n(k), \quad \xi_n = \theta_n(k) - \delta_n(k).$$

Оттук получаваме, че за произволни k_1 и k_2 в $\mathbb{N}$ ще имаме

$$\begin{aligned}
|\theta_1(k_1)\theta(k_2) - \xi_1\xi_2| &= |\xi_1\delta_2(k_2) + \delta_1(k_1)\xi_2 + \delta_1(k_1)\delta_2(k_2)|\\
&< \frac{|\xi_1|}{k_2+1} + \frac{|\xi_2|}{k_1+1} + \frac{1}{(k_1+1)(k_2+1)}\\
&< \frac{|\theta_1(0)|+1}{k_2+1} + \frac{|\theta_2(0)|+1}{k_1+1} + \frac{1}{(k_1+1)(k_2+1)}\\
&\le \frac{\lceil|\theta_1(0)|\rceil+1}{k_2+1} + \frac{\lceil|\theta_2(0)|\rceil+1}{k_1+1} + \frac{1}{(k_1+1)(k_2+1)}.
\end{aligned}$$

При $i \in \mathbb{N}$, $k_1 = \lceil|\theta_2(0)|\rceil(2i+3)+2i+2$ и $k_2 = \lceil|\theta_1(0)|\rceil(2i+3)+2i+2$ това дава

$$\begin{aligned}
|\theta_1(k_1)\theta(k_2) - \xi_1\xi_2| &< \frac{2}{2i+3} + \frac{1}{(2i+3)^2} = \frac{4i+7}{(2i+3)^2}\\
&= \frac{(4i+7)(i+1)}{(2i+3)^2}\frac{1}{i+1} < \frac{1}{i+1}.
\end{aligned}$$

По такъв начин виждаме,че функцията $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, дефинирана чрез равенството

$$\theta(i) = \theta_1(\lceil|\theta_2(0)|\rceil(2i+3)+2i+2)\theta_2(\lceil|\theta_1(0)|\rceil(2i+3)+2i+2), \tag{6}$$

е стандартно апроксимираща редица за числото $\xi_1\xi_2$. Да означим с Δ изображението на $(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})^2$ в $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, което на всеки елемент (θ_1, θ_2) на $(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})^2$ съпоставя функцията θ, дефинирана чрез равенството (6). Теоремата ще бъде доказана, ако покажем, че изображението Δ е ефективно. За да направим това, отбелязваме, че при всеки избор на $f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, h_2$ в $\mathbb{T}$ имаме

$$\begin{aligned}
&\Delta\left(\lambda k.\frac{f_1(k) - g_1(k)}{h_1(k)+1}, \lambda k.\frac{f_2(k) - g_2(k)}{h_2(k)+1}\right)\\
&\qquad = \lambda i.\prod_{n=1}^{2} \frac{F_n(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i) - G_n(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i)}{H_n(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i)+1}\\
&\qquad\qquad = \frac{F(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i) - G(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i)}{H(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i)+1},
\end{aligned}$$

където функционалите F_1, G_1, H_1, F_2, G_2, H_2, F, G, H от $\mathcal{F}_{6,1}$ се дефинират така:

$$\begin{aligned}
F_n(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i) &= f_n\left(\left\lceil \frac{|f_{3-n}(0) - g_{3-n}(0)|}{h_{3-n}(0)+1} \right\rceil (2i+3) + 2i + 2\right),\\
G_n(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i) &= g_n\left(\left\lceil \frac{|f_{3-n}(0) - g_{3-n}(0)|}{h_{3-n}(0)+1} \right\rceil (2i+3) + 2i + 2\right),\\
H_n(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i) &= h_n\left(\left\lceil \frac{|f_{3-n}(0) - g_{3-n}(0)|}{h_{3-n}(0)+1} \right\rceil (2i+3) + 2i + 2\right),\\
F(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i) &=\\
&\prod_{n=1}^{2} F_n(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i) + \prod_{n=1}^{2} G_n(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i),\\
G(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i) &=\\
&\sum_{n=1}^{2} F_n(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i) G_{3-n}(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i),\\
H(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i) &=\\
&\prod_{n=1}^{2} H_n(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i) + \sum_{n=1}^{2} H_n(f_1,g_1,h_1,f_2,g_2,h_2,i).
\end{aligned}$$

Ефективността на изображението Δ следва от μ-рекурсивността на функционалите F, G, H, а тя може да се установи, като се забележи, че функцията

$$\lambda ijkl.\left\lceil \frac{|j-k|}{l+1} \right\rceil (2i+3) + 2i + 2$$

от $\mathbb{N}^4$ към $\mathbb{N}$ е рекурсивна, и това се използва, за да се види, че функционалите F_1, G_1, H_1, F_2, G_2, H_2 са μ-рекурсивни. □

Забележка 2. От теореми 2 и 3, като се използват още твърдението от забележка 1 в настоящия текст и твърдение 6 от текста „Изчислимост относно именуващи системи“, следва, че всеки полином с изчислими коефициенти е изчислима функция.

Теорема 4. Частичната функция $\lambda\xi.\frac{1}{\xi}$ от $\mathbb{R}$ към $\mathbb{R}$ е изчислима.

Доказателство. Дефиниционната област на разглежданата функция се състои от реалните числа, които са различни от 0. Нека ξ_1 е такова число, а θ_1 е стандартно апроксимираща редица за ξ_1. Благодарение на неравенството $\xi_1 \neq 0$ съществува естествено число k, за което

$$\frac{3}{k+1} < |\xi_1|.$$

За всяко такова k имаме неравенствата

$$|\theta_1(k)| \geq |\xi_1| - |\xi_1 - \theta_1(k)| > |\xi_1| - \frac{1}{k+1} > \frac{2}{k+1}.$$

Нека $m = m_{\theta_1}$ е най-малкото от естествените числа k, за които

$$|\theta_1(k)| \geq \frac{2}{k+1}. \tag{7}$$

Тогава може да се твърди, че

$$|\xi_1| \geq |\theta_1(m)| - |\theta_1(m) - \xi_1| > \frac{2}{m+1} - \frac{1}{m+1} = \frac{1}{m+1}$$

и значи за всяко естествено число k, по-голямо от $2m$, ще имаме

$$|\theta_1(k)| \geq |\xi_1| - |\xi_1 - \theta_1(k)| > \frac{1}{m+1} - \frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{m+1} - \frac{1}{2m+2} = \frac{1}{2(m+1)}.$$

Оттук е ясно, че за всяко такова k

$$\left|\frac{1}{\theta_1(k)} - \frac{1}{\xi_1}\right| = \frac{|\xi_1 - \theta_1(k)|}{|\theta_1(k)||\xi_1|} < \frac{2(m+1)^2}{k+1}.$$

Тъй като за всяко $i \in \mathbb{N}$ при $k = 2(m+1)^2(i+1) - 1$ имаме равенството

$$\frac{2(m+1)^2}{k+1} = \frac{1}{i+1}$$

и неравенството $k > 2m$, виждаме, че функцията $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, дефинирана чрез равенството

$$\theta(i) = \frac{1}{\theta_1(2(m_{\theta_1}+1)^2(i+1) - 1)}, \tag{8}$$

е стандартно апроксимираща редица за числото $\frac{1}{\xi_1}$. Да означим с Δ частичното изображение на $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ в $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, което съпоставя функцията θ, дефинирана чрез равенството (8), на всяка функция θ_1 от $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ със свойството да съществува естествено число k, удовлетворяващо неравенството (7), и знаменателят в дясната страна на (8) да е различен от 0 за всяко $i \in \mathbb{N}$. Теоремата ще бъде доказана, ако покажем, че изображението Δ е ефективно. За да направим това, отбелязваме, че при всеки избор на функции f_1, g_1, h_1 от $\mathbb{T}$, за които

$$\lambda k.\frac{f_1(k) - g_1(k)}{h_1(k) + 1} \in \mathrm{dom}(\Delta),$$

имаме

$$\begin{aligned}\Delta\left(\lambda k.\frac{f_1(k) - g_1(k)}{h_1(k) + 1}\right) &= \frac{h_1(E(f_1, g_1, h_1, i)) + 1}{f_1(E(f_1, g_1, h_1, i)) - g_1(E(f_1, g_1, h_1, i))} \\ &= \frac{(h_1(E(f_1, g_1, h_1, i)) + 1)\,\mathrm{sgn}(f_1(E(f_1, g_1, h_1, i)) - g_1(E(f_1, g_1, h_1, i))}{|f_1(E(f_1, g_1, h_1, i)) - g_1(E(f_1, g_1, h_1, i)|} \\ &= \frac{F(f_1, g_1, h_1, i) - G(f_1, g_1, h_1, i)}{H(f_1, g_1, h_1, i) + 1},\end{aligned}$$

където функционалите E, F, G, H от $\mathcal{F}_{3,1}$ се дефинират така (за произволни f_1, g_1, h_1 от $\mathbb{T}$):

$$\begin{aligned}&E(f_1, g_1, h_1, i) = 2(M(f_1, g_1, h_1) + 1)^2(i + 1) - 1, \\ &F(f_1, g_1, h_1, i) = \\ &\qquad (h_1(E(f_1, g_1, h_1, i)) + 1)\,\mathrm{sg}(f_1(E(f_1, g_1, h_1, i)) \dot{-} g_1(E(f_1, g_1, h_1, i))), \\ &G(f_1, g_1, h_1, i) = \\ &\qquad (h_1(E(f_1, g_1, h_1, i)) + 1)\,\mathrm{sg}(g_1(E(f_1, g_1, h_1, i)) \dot{-} f_1(E(f_1, g_1, h_1, i))), \\ &H(f_1, g_1, h_1, i) = |f_1(E(f_1, g_1, h_1, i)) - g_1(E(f_1, g_1, h_1, i)| \dot{-} 1\end{aligned}$$

при $M(f_1, g_1, h_1) = \mu k[2(h_1(k)+1) \dot{-} (k+1)|f_1(k) - g_1(k)| = 0]$. Последователно се вижда, че функционалите M и E са μ-рекурсивни, а това показва, че и функционалите F, G, H са такива. □

Следствие. Частичната функция $\lambda \xi_1 \xi_2 . \frac{\xi_1}{\xi_2}$ от $\mathbb{R}^2$ към $\mathbb{R}$ е изчислима.

Теорема 5. Функциите $\lambda \xi_1 \xi_2 . \max(\xi_1, \xi_2)$ и $\lambda \xi_1 \xi_2 . \min(\xi_1, \xi_2)$ от $\mathbb{R}^2$ към $\mathbb{R}$ са изчислими.

Доказателство. Използваме равенствата

$$\max(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}((\xi_1 + \xi_2) + |\xi_1 - \xi_2|), \quad \min(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}((\xi_1 + \xi_2) - |\xi_1 - \xi_2|),$$

изчислимостта на функцията абсолютна стойност[4] и обстоятелството, че константната функция от $\mathbb{R}^2$ към $\mathbb{R}$ със стойност $\frac{1}{2}$ е изчислима.[5] □

[4]Вж. пример 7 от текста „Характеризация на изчислимите реални числа и на изчислимите реални функции без да се използват номерации“.

[5]Вж. пример 4 от текста „Ефективни метрични пространства и изчислимост в тях. Изчислимост на реални числа и реални функции“ и твърдение 6 от текста „Изчислимост относно именуващи системи“.