Лекции по логическо програмиране

Четени през летния семестър на учебната 2002/2003 година.
Лектор тогава беше професор Димитър Скордев.
Използвал съм мои (и на мои колеги) записки от лекции, както и материалите на проф. Скордев на
http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/logic/skordev/ln/.

Префиксни изрази над множество от думи

нека е дадена азбука **A**;
дължина на думата $\alpha \in \mathbf{A}^*$ ще означаваме с $|\alpha|$;
в азбуката **A** част от символите са отделени от другите и имат спомагателна роля:

- **леви ограничители**;
- **десни ограничители**;
- **разделители**;

трите множества са чужди помежду си;

например в термините на езика PROLOG можем да си мислим, че **A** е съставена от всички малки и големи латински букви, десетичните цифри, подчертаване - _, кръглите скоби - **(**, **)**, запетая - **,**, двоеточие - **:**, точка и запетая - **;**; единствен лявограничител е лявата скоба, единствен десен ограничител е дясната скоба, разделители са запетаята, двоеточието и точката със запетая;

нека е дадено множество $\mathbf{\Omega} \subseteq \mathbf{A}^*$, т.е. $\mathbf{\Omega}$ е множество от думи над азбуката **A**; част от думите над **A** ще наречем **префиксни изрази** над $\mathbf{\Omega}$; дефинираме префиксен израз над $\mathbf{\Omega}$ индуктивно:
База: всяка дума от $\mathbf{\Omega}$ е префиксен израз над $\mathbf{\Omega}$;
Предположение: нека $w \in \mathbf{\Omega}$, $E_1, E_2, \ldots, E_n$ $(n \geq 1)$ са префиксни изрази над $\mathbf{\Omega}$, $l \in \mathbf{A}$ е ляв ограничител, $r \in \mathbf{A}$ е десен ограничител и $s_1 \in \mathbf{A}$, $s_2 \in \mathbf{A}$, $\ldots$, $s_{n-1} \in \mathbf{A}$ са разделители;
Стъпка: тогава думата $wlE_1s_1E_2s_2\ldots E_{n-1}s_{n-1}E_nr$ е префиксен израз над $\mathbf{\Omega}$; (многоточието значи изброяване, то не е дума над **A**);
Заключение: няма други префиксни изрази над $\mathbf{\Omega}$;

в конкретния пример за езика PROLOG, думата от индукционната стъпка има следния вид: $w(E_1,E_2, \ldots,E_n)$;

префиксните изрази от базата на индуктивната дефиниция наричаме **прости**, от стъпката наричаме **съставни**;

основен проблем е осигуряването на **еднозначен синтактичен анализ** на префиксните изрази; това означава, че трябва да са изпълнени следните две изисквания:

- простите префиксни изрази трябва да са различни от съставните; например, ако $\mathbf{\Omega} = \mathbf{A}^*$ това изискване очевидно е нарушено;
- съставните префиксни изрази трябва да се прочитат еднозначно, т.е. ако $wlE_1s_1E_2s_2\ldots E_{n-1}s_{n-1}E_nr = w'l'E_1's_1'E_2's_2'\ldots E_{k-1}'s_{k-1}'E_kr'$, то $w = w'$, $l = l'$, $n = k$, $E_1 = E_1'$, $E_2 = E_2'$ $\ldots$, $E_n = E_n'$, $s_1 = s_1'$,

$s_2 = s_2'$, …, $s_{n-1} = s_{n-1}'$; например, ако **,** е разделител в **A**, **(**, **)** са съответно ляв и десен ограничител, $w \in$ **Ω**, **,,** $\in$ **Ω** и **,** $\in$ **Ω**, то думата w**(,,,,)** не се прочита еднозначно;

едно просто достатъчно условие за еднозначен синтактичен анализ е в думите от **Ω** да не участват леви и десни ограничители и разделители; в следващите разглеждания ще предполагаме, че това условие е изпълнено;
нека $\varphi \in$ **A***;
с ЛО (φ) ще означаваме броят на левите ограничители във φ;
с ДО (φ) ще означаваме броят на десните ограничители във φ;

Лема 1.: във всеки префиксен израз, броят на левите ограничители е равен на броя на десните ограничители;
Доказателство:
нека φ е префиксен израз;
провеждаме индукция по построението на φ;
База: ако $\varphi \in$ **Ω**, то ЛО (φ) = ДО (φ) = 0, тъй като по предположение думите от **Ω** не съдържат леви и десни ограничители;
Предположение: нека $\varphi = wlE_1s_1E_2s_2…E_{n-1}s_{n-1}E_nr$, където
нека $w \in$ **Ω**, E_1, E_2, …, E_n ($n \geq 1$) са префиксни изрази над **Ω**,
l е ляв ограничител, r е десен ограничител, s_1, s_2, …, s_{n-1} са разделители и ЛО (E_i) = ДО (E_i) за $i = 1, 2, …, n$;
Стъпка: тогава ЛО (φ) = ЛО ($wlE_1s_1E_2s_2…E_{n-1}s_{n-1}E_nr$) =
= ЛО (w) + ЛО (l) + ЛО (E_1) + ЛО (s_1) + … + ЛО (E_{n-1}) + ЛО (s_{n-1}) +
+ ЛО (E_n) + ЛО (r) = 1 + ЛО (E_1) + … + ЛО (E_n), тъй като множествата на левите ограничители, десните ограничители и разделителите са чужди помежду си и думите от **Ω** не съдържат леви ограничители;
аналогично ДО (φ) = ДО ($wlE_1s_1E_2s_2…E_{n-1}s_{n-1}E_nr$) =
= ДО (w) + ДО (l) + ДО (E_1) + ДО (s_1) + … + ДО (E_{n-1}) + ДО (s_{n-1}) +
+ ДО (E_n) + ДО (r) = ДО (E_1) + … + ДО (E_n) + 1;
от индукционното предположение получаваме, че
1 + ЛО (E_1) + … + ЛО (E_n) = ДО (E_1) + … + ДО (E_n) + 1 и тогава
ЛО (φ) = ДО (φ);

казваме, че думата $\alpha \in$ **A*** е **начало** на думата $\beta \in$ **A***, ако съществува $\gamma \in$ **A***, така че $\beta = \alpha\gamma$; ако $\alpha \neq \beta$, казваме че α е **същинско начало** на β;

Лема 2.: нека φ е префиксен израз над **Ω**; тогава или φ не съдържа разделители, или всяко начало на φ, което завършва с разделител съдържа повече леви ограничители, отколкото десни;
Доказателство:
индукция по построението на φ;
База: ако $\varphi \in$ **Ω**, то по предположение φ не съдържа разделители и твърдението е изпълнено;
Предположение: нека $\varphi = wlE_1s_1E_2s_2…E_{n-1}s_{n-1}E_nr$ и твърдението е изпълнено за префиксните изрази E_1, E_2, …, E_n;

Стъпка: ако $n = 1$ и E_1 не съдържа разделители, то твърдението е изпълнено; нека φ съдържа поне един разделител и нека ψ е произволно начало на φ, което завършва с разделител;
ако ψ завършва в s_k за някое $k \in \{ 1, 2, \dots, n-1\}$ (това може да се случи при $n > 1$), то ЛО (ψ) = ЛО ($wlE_1s_1E_2s_2\dots E_{k-1}s_k$) =
= 1 + ЛО (E_1) + … + ЛО (E_{k-1}) и ДО (ψ) = ДО ($wlE_1s_1E_2s_2\dots E_{k-1}s_k$) =
= ДО (E_1) + … + ДО (E_{k-1});
от лема 1. ЛО (E_i) = ДО (E_i) за $i = 1, 2, \dots, k-1$, така че
ЛО (ψ) > ДО (ψ);
ако ψ завършва в разделител в E_k, $k \in \{ 1, 2, \dots, n\}$, то
$\psi = wlE_1s_1E_2s_2\dots E_{k-1}s_{k-1}\psi_k$, където ψ_k е начало на E_k, което завършва с разделител; тогава ЛО (ψ) = ЛО ($wlE_1s_1E_2s_2\dots E_{k-1}s_{k-1}\psi_k$) =
= 1 + ЛО (E_1) + … + ЛО (E_{k-1}) + ЛО (ψ_k) и ДО (ψ) =
= ДО ($wlE_1s_1E_2s_2\dots E_{k-1}s_{k-1}\psi_k$) = ДО ($E_1$) + … + ДО ($E_{k-1}$) + ДО ($\psi_k$);
от лема 1. имаме ЛО (E_i) = ДО (E_i) за $i = 1, 2, \dots, k-1$ и от индукционното предположение имаме, че ЛО (ψ_k) > ДО (ψ_k);
така ЛО (ψ) > ДО (ψ);

Лема 3: ако $E_1s_1E_2s_2\dots E_{n-1}s_{n-1}E_n = E_1'\,s_1'\,E_2'\,s_2'\dots E_{k-1}'\,s_{k-1}'\,E_k$, където E_i, E_j' са префиксни изрази, s_m, s_p' са разделители, то
$n = k$, $E_1 = E_1'$, …, $E_n = E_n'$, $s_1 = s_1'$, …, $s_{n-1} = s_{n-1}'$;
Доказателство: провеждаме индукция по числото n;
База: ($n = 1$) имаме $E_1 = E_1'\,s_1'\,E_2'\,s_2'\dots E_{k-1}'\,s_{k-1}'\,E_k$;
да допуснем, че $k > 1$; тогава $E_1's_1$ е начало на E_1, което завършва с разделител и от лема 2. ЛО ($E_1's_1$) > ДО ($E_1's_1$) ➔
ЛО (E_1') > ДО (E_1'), което е противоречие с лема 1.;
така $k = 1$ и $E_1 = E_1'$;
Предположение: нека твърдението е изпълнено за $n-1$ ($n > 1$);
Стъпка: ще покажем, че твърдението е изпълнено за n;
имаме $E_1s_1E_2s_2\dots E_{n-1}s_{n-1}E_n = E_1'\,s_1'\,E_2'\,s_2'\dots E_{k-1}'\,s_{k-1}'\,E_k$;
да допуснем, че $k = 1$; тогава $E_1s_1E_2s_2\dots E_{n-1}s_{n-1}E_n = E_1'$ и аналогично на базата ще достигнем до противоречие; така $k > 1$;
ще покажем, че $E_1 = E_1'$; тъй като E_1 и E_1' са начала на една и съща дума, достатъчно е да покажем, че $|E_1| = |E_1'|$;
ако допуснем, че $|E_1| > |E_1'|$, то $E_1's_1'$ е начало на E_1, което завършва с разделител ($k > 1$) и подобно на базата достигаме до противоречие;
ако допуснем, че $|E_1| < |E_1'|$, то E_1s_1 е начало на E_1', което завършва с разделител ($n > 1$) и подобно на базата достигаме до противоречие;
така $|E_1| = |E_1'|$ ➔ $E_1 = E_1'$ ➔
$s_1E_2s_2\dots E_{n-1}s_{n-1}E_n = s_1'\,E_2'\,s_2'\dots E_{k-1}'\,s_{k-1}'\,E_k$ ➔ $s_1 = s_1'$ ➔
$E_2s_2\dots E_{n-1}s_{n-1}E_n = E_2'\,s_2'\dots E_{k-1}'\,s_{k-1}'\,E_k$;
за получените думи прилагаме индукционното предположение;
получаваме $n - 1 = k - 1$ ➔ $n = k$, $E_2 = E_2'$, …, $E_n = E_n'$, $s_2 = s_2'$, …,
$s_{n-1} = s_{n-1}'$;

сега вече можем да покажем следната

Теорема: при направеното предположение е осигурен еднозначен синтактичен анализ на префиксните изрази;
Доказателство:
първото изискване очевидно е изпълнено, тъй като простите префиксни изрази не съдържат леви и десни ограничители;
нека $wlE_1s_1E_2s_2\ldots E_{n-1}s_{n-1}E_nr = w'l'E_1's_1'E_2's_2'\ldots E_{k-1}'s_{k-1}'E_kr'$;
първо ще покажем, че $w = w'$; достатъчно е да покажем, че $|w| = |w'|$;
ако допуснем, че $|w| > |w'|$, то $w'l'$ е начало на w, което е противоречие, тъй като w не съдържа леви разделители;
ако допуснем, че $|w| < |w'|$, то wl е начало на w', което е противоречие, тъй като w' не съдържа леви разделители;
така $|w| = |w'| \Rightarrow lE_1s_1E_2s_2\ldots E_{n-1}s_{n-1}E_nr = l'E_1's_1'E_2's_2'\ldots E_{k-1}'s_{k-1}'E_kr'$
$\Rightarrow l = l' \Rightarrow E_1s_1E_2s_2\ldots E_{n-1}s_{n-1}E_nr = E_1's_1'E_2's_2'\ldots E_{k-1}'s_{k-1}'E_kr' \Rightarrow r = r'$
$\Rightarrow E_1s_1E_2s_2\ldots E_{n-1}s_{n-1}E_n = E_1's_1'E_2's_2'\ldots E_{k-1}'s_{k-1}'E_k$; от лема 3. получаваме $n = k$, $E_1 = E_1'$, ..., $E_n = E_n'$, $s_1 = s_1'$, ..., $s_{n-1} = s_{n-1}'$;

Функции и предикати

нека M е множество; ако n е цяло число, $n > 0$, под M^n ще разбираме n-тата декартова степен на M, т.е. множеството от всички наредени n-торки с елементи от M; ще считаме, че $M^1 = M$;

при $n > 0$, **n-местна функция** в M наричаме тотално изображение на M^n в M;
при $n = 0$, под **0-местна функция** ще разбираме фиксиран елемент на M; 0-местните функции още наричаме **константи**;

при $n > 0$, **n-местен предикат** в M наричаме тотално изображение на M^n в $\{0, 1\}$;
при $n = 0$, под **0-местен предикат** разбираме числото 0 или 1;
под **множество на истинност** на даден предикат разбираме всички наредени n-торки, върху които предикатът има стойност 1;

за определеност, азбуката която разглеждаме е азбуката от езика PROLOG - всички малки и големи латински букви, десетичните цифри, подчертаване - _, кръглите скоби - **(**, **)**,
запетая - **,**, двоеточие - **:**, точка и запетая - **;**; единствен ляв ограничител е лявата скоба, единствен десен ограничител е дясната скоба, разделители са запетаята, двоеточието и точката със запетая;

множеството от думи **Ω** описваме като обединение от следните множества:

- множеството Ξ от всички **променливи**; под променлива разбираме дума, започваща с главна латинска буква или с

подчертаване и състояща се само от латински букви (малки и главни), цифри и подчертаване; изключваме думата _ и думите, които започват с G_ (поради спецификата на PROLOG); ясно е, че Ξ е изброимо безкрайно множество;
- множество Λот **логически знаци** – думата not, празната дума, думата true (знак за истинност), думата fail (знак за неистинност), думата for_all (квантор за общност), думата for_some (квантор за съществуване);
- ще предполагаме, че за всяко цяло n ≥ 0 е избрано множество от думи $\mathbf{\Phi_n}$ на **n-местните функционални символи** и множество от думи $\mathbf{\Pi_n}$ на **n-местните предикатни символи**; за всяко n ≥ 0 думите във $\mathbf{\Phi_n}$ и $\mathbf{\Pi_n}$ започват с малка латинска буква и се състоят от латински букви (малки и големи), цифри и подчертаване;

  двойката редици $\{\mathbf{\Phi_n}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\mathbf{\Pi_n}\}_{n=0}^{\infty}$ наричаме **сигнатура**;

поставяме следните изисквания $\mathbf{\Phi_n} \cap \mathbf{\Pi_n} = \varnothing$, $\mathbf{\Phi_0} \neq \varnothing$, $\mathbf{\Phi_i} \cap \mathbf{\Lambda} = \varnothing$, $\mathbf{\Pi_i} \cap \mathbf{\Lambda} = \varnothing$; ясно е, че думите от редиците в сигнатурата и променливите не могат да съвпадат;

в езика PROLOG е поставено още едно изискване – функционалните и предикатните символи да не са резервирани думи на езика; от логическите знаци празната дума и думите за кванторите не са от езика на PROLOG;

Структури на сигнатури

нека е дадена сигнатура $\{\mathbf{\Phi_n}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\mathbf{\Pi_n}\}_{n=0}^{\infty}$ и M е множество;

за всяко n ≥ 0:

под **интерпретация на думите от** $\mathbf{\Phi_n}$ в M разбираме съответствие, което съпоставя n-местна функция в M на всяка дума от $\mathbf{\Phi_n}$;

под **интерпретация на думите от** $\mathbf{\Pi_n}$ в M разбираме съответствие, което съпоставя n-местен предикат на всяка дума от $\mathbf{\Phi_n}$;

под **интерпретация на** дадена **сигнатура** $\{\mathbf{\Phi_n}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\mathbf{\Pi_n}\}_{n=0}^{\infty}$ в M разбираме редиците $\{\boldsymbol{\varphi_n}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\boldsymbol{\pi_n}\}_{n=0}^{\infty}$, където за n = 0, 1, …$\boldsymbol{\varphi_n}$ е интепретация на $\mathbf{\Phi_n}$ в M и $\boldsymbol{\pi_n}$ е интерпретация на $\mathbf{\Pi_n}$ в M;

под **структура на** дадена **сигнатура** разбираме двойка от множество M, което се нарича **носител** на сигнатурата и интерпретация на сигнатурата в M;

лесно може да се покаже, че във всяка структура M е непразно множество – достатъчно е да се използва, че $\mathbf{\Phi_0} \neq \varnothing$;

нека **S** е структура, M е нейният носител и $\boldsymbol{\varphi_0}$, $\boldsymbol{\varphi_1}$, …; $\boldsymbol{\pi_0}$, $\boldsymbol{\pi_1}$, …; са съответните интерпретации на функционалните и предикатните символи в M;

ако $f \in \mathbf{\Phi_n}$, то често вместо $\boldsymbol{\varphi_n}$ (f) пишем $f^{\mathbf{S}}$;
ако $p \in \mathbf{\Pi_n}$, то често вместо $\boldsymbol{\pi_n}$ (p) пишем $p^{\mathbf{S}}$;
въведеното означение не е съвсем точно – например една дума може да е едновременно функционален и предикатен символ (на различен брой аргументи); затова понякога е удобно да се въведе допълнително ограничение - всяка дума от $\mathbf{\Omega}$ да попада най-много в едно от множествата $\mathbf{\Phi_n}$ и $\mathbf{\Pi_n}$, n = 0, 1, …, но ние засега няма да въвеждаме такова ограничение – ще считаме, че интерпретацията се подразбира от контекста;

пример: нека M е множеството от всички хора в семейството на Иван Вазов – самият Иван Вазов, бащата Минчо Вазов, майката Съба Вазова и другите им девет деца;
определяме сигнатура $\mathbf{\Phi_0}$ = { ivan, mincho, syba}, $\mathbf{\Phi_1}$ = { next, prev}, $\mathbf{\Phi_2} = \varnothing$, $\mathbf{\Phi_3} = \varnothing$, …;
$\mathbf{\Pi_0} = \varnothing$, $\mathbf{\Pi_1}$ = { male, female}, $\mathbf{\Pi_2}$ = { parent, distinct}, $\mathbf{\Pi_3} = \varnothing$, $\mathbf{\Pi_4} = \varnothing$, …;
след това определяме интерпретациите на функционалните и предикатните символи в M:
$\boldsymbol{\varphi_0}$ (ivan) = Иван Вазов,
$\boldsymbol{\varphi_0}$ (mincho) = Минчо Вазов,
$\boldsymbol{\varphi_0}$ (syba) = Съба Вазова,
$\boldsymbol{\varphi_1}$ (next) (A) = A, ако A е Минчо Вазов, Съба Вазова или Иван Вазов (най-голямото дете); иначе, $\boldsymbol{\varphi_1}$ (next) (A) = B, където B е следващото по големина дете след A;
$\boldsymbol{\varphi_1}$ (prev) (A) = A, ако A е Минчо Вазов, Съба Вазова или най-малкото дете; иначе, $\boldsymbol{\varphi_1}$ (prev) (A) = B, където B е предното по големина дете преди A;
$\boldsymbol{\pi_1}$ (male) (A) = 1 $\Leftrightarrow$ A е мъж, $A \in M$,
$\boldsymbol{\pi_1}$ (female) (A) = 1 $\Leftrightarrow$ A е жена, $A \in M$,
$\boldsymbol{\pi_2}$ (parent) (A, B) = 1 $\Leftrightarrow$ A е родител на B, $A, B \in M$,
$\boldsymbol{\pi_2}$ (distinct) (A, B) = 1 $\Leftrightarrow$ A не е B, $A, B \in M$;
няма нужда да се дефинират останалите интерпретации, тъй като те имат празни дефиниционни области;
с това определихме структура **S** с носител M – семейството на Иван Вазов;

Термове

дадена е сигнатура $\{\mathbf{\Phi_n}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\mathbf{\Pi_n}\}_{n=0}^{\infty}$;
за краткост 0-местните функционални символи ще наричаме константи, въпреки че константите са 0-местните функции;
провеждаме индуктивна дефиниция за понятието **терм**:
База: всяка константа е терм; всяка променлива е терм;
Предположение: нека $f \in \mathbf{\Phi_n}$, n > 0 и $T_1, T_2, \ldots, T_n$ са термове;
Стъпка: тогава думата f $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ е терм;
Заключение: няма други термове;

термовете от базата наричаме **прости термове**, термовете от стъпката наричаме **съставни термове**;

примери за термове със сигнатурата на семейство Вазови:
next (ivan)
next (next (ivan))
prev (ivan)
prev (next (ivan))
prev (next (X))

ясно е, че всеки терм е префиксен израз над **Ω**, което допълнително с достатъчното условие осигурява еднозначен синтактичен анализ на термовете;

за всеки терм T определяме VAR (T) – **множеството на променливите** на T с индукция по построението на T:
База: ако T е константа, определяме VAR (T) = ∅; ако T е променлива, определяме VAR (T) = { T};
Предположение: нека $T = f (T_1, T_2, \ldots, T_n)$, където $T_1, T_2, \ldots, T_n$ са термове и $VAR (T_1), VAR (T_2), \ldots, VAR (T_n)$ са дефинирани;
Стъпка: тогава дефинираме
$VAR (T) = VAR (T_1) \cup VAR (T_2) \cup \ldots \cup VAR (T_n)$;
Заключение: за всеки терм T, VAR (T) е дефинирано;

като следствие от еднозначния синтактичен анализ на термовете, множеството VAR (T) е еднозначно определено;

Твърдение: за всеки терм T, VAR (T) е крайно множество;
Доказателство: индукция по построението на T;
База: ако T е константа, то VAR (T) = ∅ и VAR (T) е крайно множество; ако T е променлива, то VAR (T) = { T} и VAR (T) отново е крайно множество;
Предположение: нека $T = f (T_1, T_2, \ldots, T_n)$, където $T_1, \ldots, T_n$ са термове и $VAR (T_1), \ldots, VAR (T_n)$ са крайни множества;
Стъпка: тогава $VAR (T) = VAR (T_1) \cup \ldots \cup VAR (T_n)$ е крайно множество, тъй като е крайно обединение на крайни множества;
Заключение: за всеки терм T, VAR (T) е крайно множество;

за примера със семейство Вазови с индукция по построението може да се покаже, че всеки съставен терм съдържа не повече от една променлива;

казваме, че термът T е **затворен терм**, ако VAR (T) = ∅;

ще дадем още една индуктивна дефиниция за затворен терм;
База: всички константи са затворени термове;
Предположение: нека $f \in \mathbf{\Phi_n}$, $n > 0$ и $T_1, \ldots, T_n$ са затворени термове;
Стъпка: тогава $f (T_1, \ldots, T_n)$ е затворен терм;

Заключение: няма други затворени термове;

Твърдение: Двете дефиниции за затворен терм са еквивалентни; ще покажем, че за всеки затворен терм T (от индукцията) имаме VAR (T) = ∅, т.е. T е затворен в смисъла на първата дефиниция; индукция по построението на затворения терм T;
База: ако T е константа, то VAR (T) = ∅ и твърдението е изпълнено;
Предположение: нека $T = f(T_1, T_2, \ldots, T_n)$, където $T_1, \ldots, T_n$ са затворени термове и $VAR(T_1) = VAR(T_2) = \ldots = VAR(T_n) = \varnothing$;
Стъпка: тогава $VAR(T) = VAR(T_1) \cup VAR(T_2) \cup \ldots \cup VAR(T_n) =$
$= \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots \cup \varnothing = \varnothing$;
ще покажем, че за всеки терм T или VAR (T) ≠ ∅ или T е затворен в смисъла на индуктивната дефиниция;
така, ако VAR (T) = ∅, то T е затворен терм в смисъла на индуктивната дефиниция;
доказателството извършваме с индукция по построението на T;
База: ако T е константа, то T е затворен терм в смисъла на индуктивната дефиниция; ако T е променлива,
то $VAR(T) = \{T\} \neq \varnothing$;
Предположение: нека $T = f(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ и за $T_1, T_2, \ldots, T_n$ твърдението е изпълнено;
Стъпка: ако съществува индекс $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
такъв че $VAR(T_i) \neq \varnothing$, то $VAR(T) = VAR(T_1) \cup \ldots \cup VAR(T_n) \neq \varnothing$ и твърдението е изпълнено; ако $VAR(T_1) = VAR(T_2) = \ldots = VAR(T_n) = \varnothing$, то по индукционното предположение $T_1, T_2, \ldots, T_n$ са затворени термове в смисъла на индуктивната дефиниция и тогава T също е затворен терм в смисъла на индуктивната дефиниция;

Семантика на термовете

фиксираме структура **S** с носител D и интерпретации $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$; $\pi_0, \pi_1, \ldots$; съответно на функционалните и на предикатните символи;

на всеки затворен терм T съпоставяме елемент от D, който наричаме **стойност** на затворения терм T в **S**;
означаваме стойността на T в **S** с $T^{\mathbf{S}}$;
дефиницията е с индукция по построението на T;
База: ако T е константа, то $T^{\mathbf{S}} = \varphi_0(T)$;
Предположение: нека $T = f(T_1, T_2, \ldots, T_n)$, където $T_1, \ldots, T_n$ са затворени термове и $T_1^{\mathbf{S}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S}}$ са дефинирани;
Стъпка: тогава $T^{\mathbf{S}} = f^{\mathbf{S}}(T_1^{\mathbf{S}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S}})$ (или $T^{\mathbf{S}} = \varphi_n(f)(T_1^{\mathbf{S}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S}})$);

под **оценка на променливите** в **S** разбираме тотално изображение на множеството на променливите Ξ в D;
нека **v** е оценка на променливите в **S**; на всеки терм T съпоставяме елемент от D, който наричаме **стойност** на терма T в **S** при оценка **v**;

означаваме стойността на T в **S** при оценка **v** с $T^{\mathbf{S},\mathbf{v}}$;
дефиницията е с индукция по построението на T;
База: ако T е константа, $T^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \boldsymbol{\varphi_0}(T) = T^{\mathbf{S}}$; ако T е променлива, $T^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \mathbf{v}(T)$;
Предположение: нека $T = f(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ и $T_1^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, T_2^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S},\mathbf{v}}$ са дефинирани;
Стъпка: тогава $T^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = f^{\mathbf{S}}(T_1^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, T_2^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S},\mathbf{v}})$;

Твърдение: ако T е затворен терм, то $T^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = T^{\mathbf{S}}$ за всяка оценка **v**;
Доказателство: нека **v** е произволна оценка; провеждаме индукция по построението на T;
База: ако T е константа, то от дефиницията на $T^{\mathbf{S},\mathbf{v}}$ имаме $T^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \boldsymbol{\varphi_0}(T) = T^{\mathbf{S}}$;
Предположение: нека $T = f(T_1, T_2, \ldots, T_n)$, където $T_1, \ldots, T_n$ са затворени термове и $T_1^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = T_1^{\mathbf{S}}, T_2^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = T_2^{\mathbf{S}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = T_n^{\mathbf{S}}$;
Стъпка: тогава $T^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = f^{\mathbf{S}}(T_1^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, T_2^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S},\mathbf{v}}) =$
$= f^{\mathbf{S}}(T_1^{\mathbf{S}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S}}) = T^{\mathbf{S}}$; индукционното предположение използваме при второто равенство;

Твърдение: ако T е терм, **v** и **u** са оценки, които съвпадат върху VAR (T), то $T^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = T^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$;
Доказателство: индукция по построението на T;
База: ако T е константа, то $T^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = T^{\mathbf{S}} = T^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$; ако T е променлива, то $T^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \mathbf{v}(T)$, $T^{\mathbf{S},\mathbf{u}} = \mathbf{u}(T)$; но $T \in \mathrm{VAR}(T) \Rightarrow \mathbf{v}(T) = \mathbf{u}(T) \Rightarrow$
$T^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = T^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$;
Предположение: нека $T = f(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ и твърдението е изпълнено за $T_1, \ldots, T_n$;
Стъпка: тъй като **v** и **u** съвпадат върху VAR (T) и
$\mathrm{VAR}(T) = \mathrm{VAR}(T_1) \cup \mathrm{VAR}(T_2) \cup \ldots \cup \mathrm{VAR}(T_n)$, то **v** и **u** съвпадат върху $\mathrm{VAR}(T_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; от индукционното предположение
$T_1^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = T_1^{\mathbf{S},\mathbf{u}}, T_2^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = T_2^{\mathbf{S},\mathbf{u}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = T_n^{\mathbf{S},\mathbf{u}} \Rightarrow$
$T^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = f^{\mathbf{S}}(T_1^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, T_2^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S},\mathbf{v}}) = f^{\mathbf{S}}(T_1^{\mathbf{S},\mathbf{u}}, T_2^{\mathbf{S},\mathbf{u}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S},\mathbf{u}}) = T^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$;

Атомарни формули

фиксирана е сигнатура $\{\mathbf{\Phi_n}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\mathbf{\Pi_n}\}_{n=0}^{\infty}$;
дефинираме **атомарна формула**:
ако $p \in \mathbf{\Pi_n}$, $n > 0$ и $T_1, T_2, \ldots, T_n$ са термове, то $p(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ е атомарна формула;
ако $p \in \mathbf{\Pi_0}$, то p е атомарна формула;

ясно е, че всяка атомарна формула е префиксен израз над $\mathbf{\Omega}$, което допълнително с достатъчното условие осигурява еднозначен синтактичен анализ на атомарните формули; също, атомарните формули и термове съществено се различават, тъй като
$\mathbf{\Phi_n} \cap \mathbf{\Pi_n} = \varnothing$, $n = 0, 1, \ldots$;
примери за атомарни формули със сигнатурата на семейство Вазови:

parent (mincho, ivan)
distinct (X, mincho)
female (Y)
parent (X, Y)
parent (ivan, next (X))

за всяка атомарна формула A определяме VAR (A) – **множеството на променливите** на A;
ако $A = p\ (T_1, T_2, \ldots, T_n)$, $VAR\ (A) = VAR\ (T_1) \cup VAR\ (T_2) \cup \ldots \cup VAR\ (T_n)$;
ако $A \in \mathbf{\Pi_0}$, $VAR\ (A) = \varnothing$;
очевидно VAR (A) е крайно множество, тъй като е или крайно обединение на крайни множества или празното множество;

една атомарна формула наричаме **затворена**, ако $VAR\ (A) = \varnothing$;
от дефиницията за множеството на променливите на атомарна формула е ясно, че атомарната формула A е затворена $\Leftrightarrow$
$A \in \mathbf{\Pi_0}$ или $A = p\ (T_1, T_2, \ldots, T_n)$, където $T_1, T_2, \ldots, T_n$ са затворени термове;

Семантика на атомарните формули

фиксираме структура **S** с носител D и интерпретации $\boldsymbol{\varphi_0}, \boldsymbol{\varphi_1}, \ldots$; $\boldsymbol{\pi_0}, \boldsymbol{\pi_1}, \ldots$; съответно на функционалните и на предикатните символи;

на всяка затворена атомарна формула A съпоставяме елемент от $\{ 0, 1\}$, наречен **стойност** на A в **S**;
стойността на A бележим с $A^{\mathbf{S}}$;
по дефиниция, ако $A = p\ (T_1, \ldots, T_n)$, то $A^{\mathbf{S}} = p^{\mathbf{S}}\ (T_1^{\mathbf{S}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S}})$;
(дефиницията е коректна, тъй като $T_1, \ldots, T_n$ са затворени термове); ако $A \in \mathbf{\Pi_0}$, то $A^{\mathbf{S}} = \boldsymbol{\pi_0}\ (A)$;
ако $A^{\mathbf{S}} = 1$, казваме че A е **вярна** в **S**;
ако $A^{\mathbf{S}} = 0$, казваме че A **не е вярна** в **S**;

нека **v** е оценка на променливите; на всяка атомарна формула A съпоставяме елемент от $\{ 0, 1\}$, наречен **стойност** на A в **S** при оценка **v**; бележим стойността на A в **S** при оценка **v** с $A^{\mathbf{S}, \mathbf{v}}$;
по дефиниция, ако $A = p\ (T_1, T_2, \ldots, T_n)$,
то $A^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = p^{\mathbf{S}}\ (T_1^{\mathbf{S}, \mathbf{v}}, T_2^{\mathbf{S}, \mathbf{v}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S}, \mathbf{v}})$; ако $A \in \mathbf{\Pi_0}$, то $A^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = \boldsymbol{\pi_0}\ (A)$;

Твърдение: ако A е затворена атомарна формула, то $A^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = A^{\mathbf{S}}$ за всяка оценка **v**;
Доказателство: нека **v** е произволна оценка;
ако $A = p\ (T_1, T_2, \ldots, T_n)$, където $T_1, \ldots, T_n$ са затворени термове, то $A^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = p^{\mathbf{S}}\ (T_1^{\mathbf{S}, \mathbf{v}}, T_2^{\mathbf{S}, \mathbf{v}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S}, \mathbf{v}}) = p^{\mathbf{S}}\ (T_1^{\mathbf{S}}, T_2^{\mathbf{S}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S}}) = A^{\mathbf{S}}$; (от съответната теорема при семантика на термовете)
ако $A \in \mathbf{\Pi_0}$, то $A^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = \boldsymbol{\pi_0}\ (A) = A^{\mathbf{S}}$;

Твърдение: ако A е атомарна формула, а **v** и **u** са оценки, които съвпадат върху VAR (A), то $A^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = A^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}$;
Доказателство:
ако $A = p\ (T_1, T_2, \ldots, T_n)$, то $VAR\ (T_i) \subseteq VAR\ (A)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ➔ **v** и **u** съвпадат върху $VAR\ (T_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и от съответната теорема при семантика на термовете имаме $T_i^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = T_i^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$; така $A^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = p^{\mathbf{S}}\ (T_1^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}}, T_2^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}}) =$
$= p^{\mathbf{S}}\ (T_1^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}, T_2^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}) = A^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}$;
ако $A \in \mathbf{\Pi_0}$, то $A^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = A^{\mathbf{S}} = A^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}$;

Логически формули

фиксирана е сигнатура $\{\mathbf{\Phi_n}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\mathbf{\Pi_n}\}_{n=0}^{\infty}$;

дефинираме индуктивно **логическа формула**:
База: всяка атомарна формула е логическа формула;
думите true, fail са логически формули;
Предположение: нека F е логическа формула, $n > 1$ и $F_1, F_2, \ldots, F_n$ са логически формули;
Стъпка: думата not (F) е логическа формула – нарича се **отрицание** на F; думата $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ е логическа формула – нарича се **конюнкция** на формулите $F_1, F_2, \ldots, F_n$; думата $(F_1; F_2; \ldots; F_n)$ е логическа формула – нарича се **дизюнкция** на формулите $F_1, F_2, \ldots, F_n$; ако x е променлива, думата for_all (x: F) е логическа формула – нарича се **генерализация** на F по x; ако x е променлива, думата for_some (x: F) е логическа формула – нарича се **екзистенциализация** на F по x;

ще възприемем и други означения:
логическата формула not(F) често ще означаваме с $\neg F$;
логическата формула $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ често ще означаваме с $F_1\ \&\ F_2\ \&\ \ldots\ \&\ F_n$;
логическата формула $(F_1; F_2; \ldots; F_n)$ често ще означаваме с $F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$;
логическата формула for_all (x: F) често ще означаваме с $\forall x\ F$;
логическата формула for_some (x: F) често ще означаваме с $\exists x\ F$;

въпросът за еднозначност на синтактичния анализ отново се решава от факта, че логическите формули са префиксни изрази над $\mathbf{\Omega}$ и е изпълнено достатъчното условие; атомарните формула се прочитат еднозначно, тъй като предикатните символи са различни от логическите знаци; също не е възможно логическа формула да е терм, тъй като функционалните символи са различни от логическите знаци;

удобно е да се въведе конюнкция и дизюнкция на една формула – под конюнкция или дизюнкция на една формула ще разбираме самата формула;

под **празна конюнкция** (конюнкция на нула формули) ще разбираме логическата формула true;
под **празна дизюнкция** (дизюнкция на нула формули) ще разбираме логическата формула fail;

нека **S** е структура; за всяка формула F дефинираме **множество на променливите** на F – VAR (F) с индукция по построението;
База: ако F е атомарна формула, то VAR (F) е вече дефинирано;
ако F = true или F = fail, дефинираме VAR (F) = $\varnothing$;
Предположение: нека F, F_1, …, F_n (n > 1) са формули и VAR (G), VAR (F_1), …, VAR (F_n) са вече дефинирани;
Стъпка: дефинираме VAR ($\neg$F) = VAR (F),
VAR (F_1 & F_2 & …& F_n) = VAR (F_1) $\cup$ VAR (F_2) $\cup$ …$\cup$ VAR (F_n);
VAR ($F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$) = VAR ($F_1$) $\cup$ VAR (F_2) $\cup$ …$\cup$ VAR (F_n);
VAR ($\forall x$ F) = VAR (F) $\cup$ { x}, VAR ($\exists x$ F) = VAR (F) $\cup$ { x};

както при термове, с индукция по построението може да се покаже, че за всяка формула F, VAR (F) е крайно множество;

нека **S** е структура, F е формула;
за формулата F дефинираме **множество на свободните променливите** на F – FVAR (F) с индукция по построението;
База: ако F е атомарна формула, то FVAR (F) = VAR (F);
ако F = true или F = fail, дефинираме FVAR (F) = $\varnothing$;
Предположение: нека F, F_1, …, F_n (n > 1) са формули и FVAR (F), FVAR (F_1), …, FVAR (F_n) са вече дефинирани;
Стъпка: дефинираме FVAR ($\neg$F) = FVAR (F),
FVAR (F_1 & F_2 & … F_n) = FVAR (F_1) $\cup$ FVAR (F_2) $\cup$ …$\cup$ FVAR (F_n);
FVAR ($F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$) = FVAR ($F_1$) $\cup$ FVAR (F_2) $\cup$ …$\cup$ FVAR (F_n);
FVAR ($\forall x$ F) = FVAR (F)\{ x}, FVAR ($\exists x$ F) = FVAR (F)\{ x};

например FVAR ($\forall$X p(X)) = $\varnothing$;

казваме, че една формула е **затворена**, ако FVAR (F) = $\varnothing$;
ако A е атомарна формула, то FVAR (A) = VAR (A), така че за атомарни формули тази дефиниция съвпада с предишната дефиниция за затвореност;

ще дадем индуктивна дефиниция за **безкванторни формули**;
База: всяка атомарна формула е безкванторна формула;
думите true, fail са безкванторни формули;
Предположение: нека F е безкванторна формула, n > 1 и F_1, F_2, …, F_n са безкванторни формули;
Стъпка: тогава $\neg$F, F_1 & F_2 & …& F_n, $F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$ са безкванторни формули;
Заключение: няма други безкванторни формули;

Твърдение: ако F е безкванторна формула, то FVAR (F) = VAR (F);

Доказателство: индукция по построението на F;
База: ако F е атомарна формула, то FVAR (F) = VAR (F) по дефиниция; ако F е true или fail, то FVAR (F) = VAR (F) = $\varnothing$ по дефиниция;
Предположение: нека G, $F_1, \ldots, F_n$ (n > 1) са безкванторни формули и VAR (G) = FVAR (G), VAR (F_1) = FVAR (F_1), …, VAR (F_n) = FVAR (F_n);
Стъпка: ако F = $\neg$G, то VAR (F) = VAR ($\neg$G) = VAR (G) = FVAR (G), FVAR (F) = FVAR ($\neg$G) = FVAR (G) $\Rightarrow$ VAR (F) = FVAR (F);
ако F = F_1 & F_2 & … & F_n, то VAR (F) = VAR (F_1 & F_2 & … & F_n) =
= VAR (F_1) $\cup$ VAR (F_2) $\cup \ldots \cup$ VAR (F_n) =
= FVAR (F_1) $\cup$ FVAR (F_2) $\cup \ldots \cup$ FVAR (F_n),
FVAR (F) = FVAR (F_1 & F_2 & … & F_n) = FVAR (F_1) $\cup$ FVAR (F_2) $\cup \ldots \cup$
$\cup$ FVAR (F_n) $\Rightarrow$ VAR (F) = FVAR (F);
ако F = $F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$, то VAR (F) = VAR ($F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$) =
= VAR (F_1) $\cup$ VAR (F_2) $\cup \ldots \cup$ VAR (F_n) =
= FVAR (F_1) $\cup$ FVAR (F_2) $\cup \ldots \cup$ FVAR (F_n),
FVAR (F) = FVAR ($F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$) = FVAR ($F_1$) $\cup$ FVAR (F_2) $\cup \ldots \cup$
$\cup$ FVAR (F_n) $\Rightarrow$ VAR (F) = FVAR (F);

Семантика на логическите формули

фиксираме структура **S** с носител D и интерпретации $\boldsymbol{\varphi_0}, \boldsymbol{\varphi_1}, \ldots$; $\boldsymbol{\pi_0}, \boldsymbol{\pi_1}, \ldots$; съответно на функционалните и на предикатните символи;

нека **v** е оценка на *x* е променлива и d $\in$ D;
дефинираме оценка **u** по следния начин:
u (y) = d, ако y = x, **u** (y) = **v** (y) при $y \neq x$;
оценката **u** наричаме **модификация** на **v** върху *x* чрез d;
модификацията бележим по следния начин: **v**[x : d];

нека **v** е произволна оценка; на всяка логическа формула F съпоставяме елемент от { 0, 1}, наречен **стойност** на F в **S** при оценката **v**; стойността на F в **S** при оценка **v** означаваме с $F^{\mathbf{S},\mathbf{v}}$;
дефинираме индуктивно стойност на формулата F при произволна оценка **v**;
База: ако F е атомарна формула, то при произволна оценка **v** $F^{\mathbf{S},\mathbf{v}}$ е вече дефинирано при семантика на атомарните формули;
ако F = true, то при произволна оценка **v**, $F^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1$;
ако F = fail, то при произволна оценка **v**, $F^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 0$;
Предположение: нека $F^{\mathbf{S},\mathbf{v}}$, $F_1^{\mathbf{S},\mathbf{v}}$, $F_2^{\mathbf{S},\mathbf{v}}$, …, $F_n^{\mathbf{S},\mathbf{v}}$ са дефинирани за произволна оценка **v**;
Стъпка: тогава за произволна оценка **v** дефинираме:
$\text{not}(F)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1 - F^{\mathbf{S},\mathbf{v}}$;
$(F_1, F_2, \ldots, F_n)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \min \{ F_1^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, F_2^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\mathbf{v}}\}$,
$(F_1; F_2; \ldots; F_n)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \max \{ F_1^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, F_2^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\mathbf{v}}\}$,
$\text{for\_all } (x\text{: } F)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \min \{ F^{\mathbf{S},\mathbf{v}[x\,:\,d]} \mid d \in D\}$,
$\text{for\_some } (x\text{: } F)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \max \{ F^{\mathbf{S},\mathbf{v}[x\,:\,d]} \mid d \in D\}$;

казваме, че F е **вярна** в **S** при оценка **v**, ако $F^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1$;
това записваме още по следния начин: **S**, **v** ‘ F;

нека F и G са логически формули; под **импликация** на F и G разбираме формулата (¬F) ∨ G; бележим импликацията с F → G;

Твърдение: нека F и G са логически формули;
ако **S**, **v** ‘ F → G и **S**, **v** ‘ F, то **S**, **v** ‘ G;
Доказателство: да допуснем, че $G^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 0$; тогава от $F^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1$ получаваме $\neg F^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 0$ ➔ $(\neg F) \vee G^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 0$, което е противоречие;
така **S**, **v** ‘ G;

ясно е, че **S**, **v** — F → G ⇔ **S**, **v** ‘ F, **S**, **v** — G;
Твърдение: нека е изпълнено, че ако **S**, **v** ‘ F, то **S**, **v** ‘ G;
тогава **S**, **v** ‘ F → G;
Доказателство: да допуснем, че **S**, **v** — F → G; тогава
S, **v** ‘ F, **S**, **v** — G, което е противоречие;

нека **S** е структура, F е формула; казваме, че F е **тъждествено вярна** в **S**, ако F е вярна в **S** при всяка оценка на променливите;

примери със структурата на семейство Вазови:
въвеждаме едноместни предикатни символи male, female;
π_1 (male) (A) = 1 ⇔ A е мъж, A ∈ M;
π_1 (female) (A) = 1 ⇔ A е жена, A ∈ M;
ясно е, че формулите male (X) ∨ female (X), ¬(male (X) & female (X)), parent (X, Y) → distinct (X, Y) са тъждествено вярни в структурата;

нека **S** е структура с носител D;
да разгледаме формулата ∀X p(X), където p е едноместен предикатен символ; нека **v** е произволна оценка на променливите;
тогава $\forall X\, p(X)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \min \{ p(X)^{\mathbf{S},\mathbf{v}[X:d]} \mid d \in D\} = \min \{ p^{\mathbf{S}}(d) \mid d \in D\}$ и така верността на формулата ∀X p(X) не зависи от оценката **v**;

ще докажем едно по-силно

Твърдение: нека **S** е структура с носител D; за произволна формула F, ако две оценки **v** и **u** съвпадат върху FVAR (F), то $F^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = F^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$;
Доказателство: индукция по построението на F;
База: ако F е атомарна формула, то FVAR (F) = VAR (F) и твърдението е вярно (от съответното твърдение при семантика на атомарните формули); ако F = true, то $F^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = F^{\mathbf{S},\mathbf{u}} = 1$;
ако F = fail, то $F^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = F^{\mathbf{S},\mathbf{u}} = 0$;
Предположение: нека твърдението е изпълнено за формулите G, F_1, F_2, …, F_n, n > 1 за произволни оценки **v**, **u**, съвпадащи върху върху съответните множества;
Стъпка:

нека **v** и **u** са произволни оценки, които съвпадат върху FVAR (F);
ако F = ¬G, то FVAR (F) = FVAR (G) ➔ **v** и **u** съвпадат върху FVAR (G) ➔ $G^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = G^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}$; така $F^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = 1 - G^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = 1 - G^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}} = F^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}$;
ако $F = F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n$, то FVAR ($F_i$) ⊆ FVAR (F) ➔
$F_i^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = F_i^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}}$, i = 1, 2, …, n; така $F^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = \min \{ F_1^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}}, F_2^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}}, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} \} =$
$= \min \{ F_1^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}, F_2^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}} \} = F^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}$;
ако $F = F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$, то FVAR ($F_i$) ⊆ FVAR (F) ➔
$F_i^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = F_i^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}}$, i = 1, 2, …, n; така $F^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = \max \{ F_1^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}}, F_2^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}}, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} \} =$
$= \max \{ F_1^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}, F_2^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}} \} = F^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}$;
нека F = ∀*x* G; **v** и **u** съвпадат върху FVAR (F) = FVAR (G)\{ *x*};
имаме $F^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = \min \{ G^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}[x\,:\,d]} \mid d \in D \}$, $F^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}} = \min \{ G^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}[x\,:\,d]} \mid d \in D \}$;
за всяко d ∈ D имаме, че **v**[*x* : d], **u**[*x* : d] съвпадат върху FVAR (G);
действително, ако *y* ∈ VAR (G), *y* ≠ *x*, то *y* ∈ FVAR (F) ➔
v[*x* : d] (*y*) = **v** (*y*) = **u** (*y*) = **u**[*x* : d] (*y*); ако *y* ∈ VAR (G), *y* = *x*, то
v[*x* : d] (*y*) = d = **v**[*x* : d]; така по индукционното предположение
$G^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}[x\,:\,d]} = G^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}[x\,:\,d]}$ за всяко d ∈ D ➔ $F^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = F^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}$;

Следствие: ако F е затворена формула, то за произволни оценки **u** и **v** имаме $F^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = F^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}$;
Доказателство: произволни оценки **v** и **u** съвпадат върху FVAR (F) = ∅;

ако F е затворена формула, по дефиниция $F^{\mathbf{S}} = F^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}}$ за коя да е оценка **v**; ще казваме, че F е **вярна** в **S**, ако$F^{\mathbf{S}} = 1$;
означаваме **S** ‘ F; ще казваме, че F **не е вярна** в **S**, ако $F^{\mathbf{S}} = 0$;

Запазване на тъждествена вярност или изпълнимост при поставяне или премахване на съответните квантори

нека **S** е структура с носител D;

казваме, че формулата F е **изпълнима** в **S**, ако съществува оценка **v**, такава че $F^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = 1$;

пример със структурата на семейство Вазови: male (X) – например всяка оценка **v**, такава че **v** (x) = Иван Вазов;

ясно е, че ако F е затворена формула, то
F е тъждествено вярна в **S** ⇔ F е вярна в **S** ⇔ F е изпълнима в **S**;

нека **S** е структура с носител D, F е формула, *x* ∈ Ξ;

Твърдение: F е тъждествено вярна в **S** ⇔ ∀*x* F е тъждествено вярна в **S**; F е изпълнима в **S** ⇔ ∃*x* F е изпълнима в **S**;
Доказателство:
нека F е тъждествено вярна в **S**; нека **v** е произволна оценка;

тогава $\forall x\, F^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}}$ = min { $F^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]}$ | d ∈ D}; тъй като F е тъждествено вярна в **S**, то $F^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} = 1$ за всяко d ∈ D ➔
min { $F^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]}$ | d ∈ D} = 1 ➔ $\forall x$ F е тъждествено вярна в **S**;
нека $\forall x$ F е тъждествено вярна в **S**; тогава за всяко d ∈ D имаме $F^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} = 1$ при d = **v** (x) получаваме $F^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,\mathbf{v}(x)]} = F^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1$ ➔
F е тъждествено вярна в **S**;
нека F е изпълнима в **S**; нека **v** е оценка, такава че $F^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1$;
тогава $\exists x\, F^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}}$ = max { $F^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]}$ | d ∈ D} = 1, тъй като
$F^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,\mathbf{v}(x)]} = F^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1$ ➔ $\exists x$ F е изпълнима в **S**;
нека $\exists x$ F е изпълнима в **S**; тогава съществува оценка **v**, такава че $\exists x\, F^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1$ ➔ max { $F^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]}$ | d ∈ D} = 1 ➔ съществува d ∈ D, така че $F^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} = 1$ ➔ F е изпълнима в **S**;

Следствие: нека F е формула и FVAR (F) = { x_1, x_2, …, x_n};
тогава F е тъждествено вярна в **S** ⇔ $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n$ F е тъждествено вярна в **S**, т.е. $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n$ F е вярна в **S**, тъй като тя е затворена формула; формулата $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n$ F наричаме **универсално затваряне** на F, то е определено с точност до подредбата на кванторите;

Следствие: нека F е формула и FVAR (F) = { x_1, x_2, …, x_n};
тогава F е изпълнима в **S** ⇔ $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n$ F е изпълнима в **S**, т.е. $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n$ F е вярна в **S**, тъй като тя е затворена формула; формулата $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n$ F наричаме **екзистенциално затваряне** на F, то е определено с точност до подредбата на кванторите;

нека **S** е структура; F е произволна формула; в сила е:
F е тъждествено вярна в **S** ⇔ ¬F не е изпълнима в **S**;
F е изпълнима в **S** ⇔ ¬F не е тъждествено вярна в **S**;

казваме, че една формула F е **тъждествено вярна**, ако F е тъждествено вярна във всяка структура **S**;
казваме, че една формула F е **изпълнима**, ако F е изпълнима във някоя структура **S**;
например формулата p (X) ∨ ¬p (X) е тъждествено вярна, формулата p (X) ∨ ¬p (Y) е изпълнима;

ясно е, че F е тъждествено вярна ⇔ ¬F не е изпълнима;
също F е изпълнима ⇔ ¬F не е тъждествено вярна;

ще отбележим, че не съществува алгоритъм, който разпознава дали произволна формула е тъждествено вярна (Гьодел);

Субституции

субституция наричаме изображение σ на множеството на променливите Ξ в множеството на термовете, такова че

$\sigma(x) \neq x$ най-много за краен брой променливи;
ако $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са две по две различни променливи и $u_1, u_2, \ldots, u_n$ са термове, то със $[x_1/u_1, x_2/u_2, \ldots, x_n/u_n]$ означаваме субституцията σ, определена по следния начин: $\sigma(x_i) = u_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\sigma(x) = x$ за $x \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$;
ако σ е произволна субституция и от $x \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ➔ $\sigma(x) = x$ (такова крайно множество съществува по дефиниция), то е ясно, че $\sigma = [x_1/\sigma(x_1), x_2/\sigma(x_2), \ldots, x_n/\sigma(x_n)]$;
тъждествената субституция бележим с ι, $\iota(x) = x$ за всяко $x \in \Xi$;
например $\iota = [x_1/x_1]$, където x_1 е произволна променлива;

нека T – терм, σ - субституция; дефинираме индуктивно термът $T\sigma$, който ще наричаме **резултат от прилагането** на σ към T;
База: ако $T \in \mathbf{\Phi_0}$, то $T\sigma = T$; ако $T \in \Xi$, $T\sigma = \sigma(T)$;
Предположение: нека $T = f(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ и $T_1\sigma, T_2\sigma, \ldots, T_n\sigma$ са дефинирани;
Стъпка: тогава $T\sigma = f(T_1\sigma, T_2\sigma, \ldots, T_n\sigma)$;

например нека към терма $f(g(X), Y)$ да приложим субституцията $\sigma = [X/Y, Y/g(Z)]$; последователно получаваме:
$f(g(X), Y)\sigma = f(g(X)\sigma, Y\sigma) = f(g(X\sigma), g(Z)) = f(g(Y), g(Z))$;

Твърдение: нека T е терм; ако σ и τ са субституции, които съвпадат върху VAR (T), то $T\sigma = T\tau$;
Доказателство: индукция по построението на T;
База: ако $T \in \mathbf{\Phi_0}$, то $T\sigma = T = T\tau$ за всеки две субституции σ и τ;
ако $T \in \Xi$, то $T\sigma = T = T\tau$, тъй като $T \in$ VAR (T), а σ и τ съвпадат върху VAR (T);
Предположение: нека $T = f(T_1, \ldots, T_n)$ и твърдението е изпълнено за термовете $T_1, \ldots, T_n$ за произволни субституции σ и τ, съвпадащи върху съответните множества;
Стъпка: нека σ и τ са произволни субституции, които съвпадат върху VAR (T); за $i = 1, 2, \ldots, n$ имаме VAR $(T_i) \subseteq$ VAR (T), така че от индукционното предположение $T_i\sigma = T_i\tau$;
имаме $T\sigma = f(T_1\sigma, \ldots, T_n\sigma) = f(T_1\tau, \ldots, T_n\tau) = T\tau$;

Твърдение: нека T е терм; тогава $T\iota = T$;
Доказателство: индукция по построението на T;
База: ако $T \in \mathbf{\Phi_0}$, то $T\iota = T$ по дефиниция;
ако $T \in \Xi$, то $T\iota = \iota(T) = T$;
Предположение: нека $T = f(T_1, \ldots, T_n)$ и $T_1\iota = T_1, \ldots, T_n\iota = T_n$;
Стъпка: тогава $T\iota = f(T_1\iota, \ldots, T_n\iota) = f(T_1, \ldots, T_n) = T$;

Твърдение: ако T е затворен терм, то $T\sigma = T$ за всяка субституция σ;
Доказателство: нека σ е произволна субституция; тогава σ и ι съвпадат върху VAR (T) = $\varnothing$ ➔ $T\sigma = T\iota = T$;

Твърдение: нека T е терм, σ е субституция;
тогава $VAR(T\sigma) = \bigcup_{x \in VAR(T)} VAR(\sigma(x))$;
Доказателство: индукция по построението на T;
База: ако $T \in \mathbf{\Phi_0}$, то $VAR(T\sigma) = VAR(T) = \varnothing$ и $\bigcup_{x \in \varnothing} VAR(\sigma(x)) = \varnothing$ - твърдението е изпълнено; ако $T \in \Xi$, то $VAR(T) = \{T\}$,
$VAR(T\sigma) = VAR(\sigma(T))$ и $\bigcup_{x \in \{T\}} VAR(\sigma(x)) = VAR(\sigma(T))$ - твърдението е изпълнено;
Предположение: нека $T = f(T_1, \ldots, T_n)$ и твърдението е изпълнено за термовете $T_1, \ldots, T_n$;
Стъпка: $VAR(T\sigma) = VAR(f(T_1\sigma, \ldots, T_n\sigma)) = VAR(T_1\sigma) \cup \ldots \cup VAR(T_n\sigma)$
$= \bigcup_{x \in VAR(T_1)} VAR(\sigma(x)) \cup \ldots \cup \bigcup_{x \in VAR(T_n)} VAR(\sigma(x)) = \bigcup_{x \in VAR(T_1) \cup \ldots \cup VAR(T_n)} VAR(\sigma(x))$
$= \bigcup_{x \in VAR(T)} VAR(\sigma(x))$;

нека F е безкванторна формула, σ е субституция; дефинираме индуктивно безкванторната формула Fσ, която ще наричаме **резултат от прилагането** на σ към F:
База: ако F е атомарна формула, $F = p(T_1, \ldots, T_n)$ дефинираме $F\sigma = p(T_1\sigma, \ldots, T_n\sigma)$, ако $F \in \mathbf{\Pi_0}$, то $F\sigma = F$;
ако F = true или F = fail, дефинираме Fσ = F;
Предположение: нека $G, F_1, \ldots, F_n$ $(n > 1)$ са безкванторни формули и $G\sigma, F_1\sigma, \ldots, F_n\sigma$ са дефинирани;
Стъпка: ако $F = \neg G$, дефинираме $F\sigma = \neg(G\sigma)$;
ако $F = F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n$, дефинираме $F\sigma = F_1\sigma \,\&\, F_2\sigma \,\&\, \ldots \,\&\, F_n\sigma$;
ако $F = F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$, дефинираме $F\sigma = F_1\sigma \vee F_2\sigma \vee \ldots \vee F_n\sigma$;

Твърдение: нека F е безкванторна формула; ако σ и τ са субституции, които съвпадат върху VAR (F), то Fσ = Fτ;
Доказателство: индукция по построението на F;
База: нека σ и τ са субституции, които съвпадат върху VAR (F);
ако F е атомарна формула и $F = p(T_1, \ldots, T_n)$, то за
$i = 1, 2, \ldots, n$ от $VAR(T_i) \subseteq VAR(F)$ и от по-горе ➔ $T_i\sigma = T_i\tau$;
така $F\sigma = f(T_1\sigma, \ldots, T_n\sigma) = f(T_1\tau, \ldots, T_n\tau) = F\tau$;
ако F е атомарна формула и $F \in \mathbf{\Pi_0}$, то $F\sigma = F\tau = F$;
ако F = true или F = fail, то Fσ = Fτ = F;
Предположение: нека твърдението е изпълнено за $G, F_1, \ldots, F_n$, $n > 1$ за произволни субституции σ и τ, които съвпадат върху съответните множества;
Стъпка: нека σ и τ са произволни субституции, които съвпадат върху VAR (F);
ако $F = \neg G$, то VAR (G) = VAR (F) и от индукционното предположение Gσ = Gτ; тогава $F\sigma = \neg(G\sigma) = \neg(G\tau) = F\tau$;
ако $F = F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n$, то $VAR(F_i) \subseteq VAR(F)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и от индукционното предположение $F_i\sigma = F_i\tau$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

така $F\sigma = F_1\sigma \,\&\, F_2\sigma \,\&\, \dots \,\&\, F_n\sigma = F_1\tau \,\&\, F_2\tau \,\&\, \dots \,\&\, F_n\tau = F\tau$;
ако $F = F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n$, то $VAR(F_i) \subseteq VAR(F)$, $i = 1, 2, \dots, n$ и от индукционното предположение $F_i\sigma = F_i\tau$, $i = 1, 2, \dots, n$;
така $F\sigma = F_1\sigma \vee F_2\sigma \vee \dots \vee F_n\sigma = F_1\tau \vee F_2\tau \vee \dots \vee F_n\tau = F\tau$;

Твърдение: F – безкванторна формула; тогава $F\iota = F$;
Доказателство: индукция по построението на F;
База: ако F е атомарна формула и $F = p(T_1, \dots, T_n)$, то $F\iota = p(T_1\iota, \dots, T_n\iota) = p(T_1, T_2, \dots, T_n) = F$ (от съответното твърдение за термове); ако $F \in \mathbf{\Pi_0}$, то $F\iota = F$; ако F = fail или F = true, то $F\iota = F$;
Предположение: нека $G, F_1, \dots, F_n$ $(n > 1)$ са такива, че $G\iota = G$, $F_1\iota = F_1, \dots, F_n\iota = F_n$;
Стъпка: ако $F = \neg G$, то $F\iota = \neg(G\iota) = \neg G = F$;
ако $F = F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \dots \,\&\, F_n$, то $F\iota = F_1\iota \,\&\, \dots \,\&\, F_n\iota = F_1 \,\&\, \dots \,\&\, F_n = F$;
ако $F = F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n$, то $F\iota = F_1\iota \vee \dots \vee F_n\iota = F_1 \vee \dots \vee F_n = F$;

Твърдение: ако F е безкванторна формула и σ е субституция, то
$VAR(F\sigma) = \bigcup_{x \in VAR(F)} VAR(\sigma(x))$;
Доказателство: индукция по построението на F;
База: ако F е атомарна формула и $F = p(T_1, \dots, T_n)$, то
$F\sigma = p(T_1\sigma, \dots, T_n\sigma)$, $VAR(F\sigma) = VAR(T_1\sigma) \cup \dots \cup VAR(T_n\sigma) =$
$= \bigcup_{x \in VAR(T_1)} VAR(\sigma(x)) \cup \dots \cup \bigcup_{x \in VAR(T_n)} VAR(\sigma(x)) = \bigcup_{x \in VAR(T_1) \cup \dots \cup VAR(T_n)} VAR(\sigma(x))$
$= \bigcup_{x \in VAR(F)} VAR(\sigma(x))$; ако F е атомарна формула и $F \in \mathbf{\Pi_0}$ или F = fail или F = true то $VAR(F\sigma) = VAR(F) = \varnothing$ и $\bigcup_{x \in \varnothing} VAR(\sigma(x)) = \varnothing$;
Предположение: нека твърдението е изпълнено за формулите $G, F_1, \dots, F_n$ $(n > 1)$;
Стъпка:
ако $F = \neg G$, то $VAR(F\sigma) = VAR(\neg(G\sigma)) = VAR(G\sigma)$; от индукционното предположение $VAR(G\sigma) = \bigcup_{x \in VAR(G)} VAR(\sigma(x)) = \bigcup_{x \in VAR(F)} VAR(\sigma(x))$;
ако $F = F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \dots \,\&\, F_n$, то $VAR(F\sigma) = VAR(F_1\sigma \,\&\, F_2\sigma \,\&\, \dots \,\&\, F_n\sigma) =$
$= VAR(F_1\sigma) \cup VAR(F_2\sigma) \cup \dots \cup VAR(F_n\sigma)$; от индукционното предположение имаме $VAR(F_1\sigma) \cup VAR(F_2\sigma) \cup \dots \cup VAR(F_n\sigma) =$
$= \bigcup_{x \in VAR(F_1)} VAR(\sigma(x)) \cup \bigcup_{x \in VAR(F_2)} VAR(\sigma(x)) \cup \dots \cup \bigcup_{x \in VAR(F_n)} VAR(\sigma(x)) =$
$= \bigcup_{x \in VAR(F_1) \cup VAR(F_2) \cup \dots \cup VAR(F_n)} VAR(\sigma(x)) = \bigcup_{x \in VAR(F)} VAR(\sigma(x))$;
ако $F = F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n$, то $VAR(F\sigma) = VAR(F_1\sigma \vee F_2\sigma \vee \dots \vee F_n\sigma) =$
$= VAR(F_1\sigma) \cup VAR(F_2\sigma) \cup \dots \cup VAR(F_n\sigma)$; от индукционното предположение имаме $VAR(F_1\sigma) \cup VAR(F_2\sigma) \cup \dots \cup VAR(F_n\sigma) =$
$= \bigcup_{x \in VAR(F_1)} VAR(\sigma(x)) \cup \bigcup_{x \in VAR(F_2)} VAR(\sigma(x)) \cup \dots \cup \bigcup_{x \in VAR(F_n)} VAR(\sigma(x)) =$
$= \bigcup_{x \in VAR(F_1) \cup VAR(F_2) \cup \dots \cup VAR(F_n)} VAR(\sigma(x)) = \bigcup_{x \in VAR(F)} VAR(\sigma(x))$;

Твърдение: нека E е терм или безкванторна формула; ако съществуват субституции σ и τ, такива че Eσ = Eτ, то σ и τ съвпадат върху VAR (E);
Доказателство: първо да разгледаме случая когато E е терм; провеждаме индукция по построението на E;
База: нека σ и τ са такива субституции, че Eσ = Eτ;
ако E е константа, то очевидно σ и τ съвпадат върху VAR (E) = ∅; ако E ∈ Ξ, то Eσ = σ (E), Eτ = τ (E) ➔ σ (E) = τ (E) ➔ σ и τ съвпадат върху VAR (E) = { E};
Предположение: нека E = f (T_1, T_2, …, T_n) и твърдението е изпълнено за термовете T_1, T_2, …, T_n;
Стъпка: нека σ и τ са субституции, такива че Eσ = Eτ;
имаме Eσ = f ($T_1σ$, $T_2σ$, …, $T_nσ$), Eτ = f ($T_1τ$, $T_2τ$, …, $T_nτ$); от еднозначния синтактичен анализ на термовете получаваме $T_1σ = T_1τ$, $T_2σ = T_2τ$, …, $T_nσ = T_nτ$; използваме индукционното предположение за термовете T_1, T_2, …, T_n и получаваме, че σ и τ съвпадат върху VAR (T_1), VAR (T_2), …, VAR (T_n); тогава σ и τ съвпадат върху VAR (T_1) ∪ VAR (T_2) ∪ … ∪ VAR (T_n) = VAR (E);
сега да разгледаме случая когато E е безкванторна формула; провеждаме индукция по построението на E;
База: нека σ и τ са такива субституции, че Eσ = Eτ;
нека E = p (T_1, T_2, …, T_n); тогава Eσ = p ($T_1σ$, $T_2σ$, …, $T_nσ$), Eτ = p ($T_1τ$, $T_2τ$, …, $T_nτ$); от еднозначния синтактичен анализ на атомарните формули получаваме, че $T_1σ = T_1τ$, $T_2σ = T_2τ$, …, $T_nσ = T_nτ$; тъй като T_1, T_2, …, T_n са термове от по-горе σ и τ съвпадат върху VAR (T_1), VAR (T_2), …, VAR (T_n) ➔ σ и τ съвпадат върху VAR (T_1) ∪ VAR (T_2) ∪ … ∪ VAR (T_n) = VAR (E);
ако E ∈ $\mathbf{\Pi_0}$, E = true или E = fail, то σ и τ върху VAR (E) = ∅;
Предположение: нека твърдението е изпълнено за безкванторните формули G, F_1, F_2, …, F_n (n > 2);
Стъпка: нека σ и τ са такива субституции, че Eσ = Eτ;
ако E = ¬G, то Eσ = ¬(Gσ), Eτ = ¬(Gτ) ➔ Gσ = Gτ; от индукционното предположение σ и τ съвпадат върху VAR (G) = VAR (F);
ако E = F_1 & F_2 & … & F_n, то Eσ = $F_1σ$ & $F_2σ$ & … & $F_nσ$, Eτ = $F_1τ$ & $F_2τ$ & … & $F_nτ$; от еднозначния синтактичен анализ на формулите получаваме, че $F_1σ = F_1τ$, $F_2σ = F_2τ$, …, $F_nσ = F_nτ$ и от индукционното предположение σ и τ съвпадат върху VAR (F_1), VAR (F_2), …, VAR (F_n) ➔ σ и τ съвпадат върху VAR (F_1) ∪ VAR (F_2) ∪ … VAR (F_n) = VAR (E);
ако E = $F_1 \vee F_2 \vee … \vee F_n$, то Eσ = $F_1σ \vee F_2σ \vee … \vee F_nσ$, Eτ = $F_1τ \vee F_2τ \vee … \vee F_nτ$; от еднозначния синтактичен анализ на формулите получаваме, че $F_1σ = F_1τ$, $F_2σ = F_2τ$, …, $F_nσ = F_nτ$ и от индукционното предположение σ и τ съвпадат върху VAR (F_1), VAR (F_2), …, VAR (F_n) ➔ σ и τ съвпадат върху VAR (F_1) ∪ VAR (F_2) ∪ … VAR (F_n) = VAR (E);

Оператори за присвояване, съответни на субституции

нека **S** е структура, σ е субституция; дефинираме $\sigma^{\mathbf{S}}$ – **оператор за присвояване**, съответен на σ в **S**, който съпоставя на всяка оценка **v** на променливите в **S** друга оценка $\sigma^{\mathbf{S}}(\mathbf{v})$ на променливите в **S**, така че $(\sigma^{\mathbf{S}}(\mathbf{v}))(x) = \sigma(x)^{\mathbf{S},\mathbf{v}}$;
например, ако $\sigma = [x_1/T_1, x_2/T_2, \ldots, x_n/T_n]$, то $(\sigma^{\mathbf{S}}(\mathbf{v}))(x_i) = T_i^{\mathbf{S},\mathbf{v}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$; при $x \neq x_i$, $(\sigma^{\mathbf{S}}(\mathbf{v}))(x) = \sigma(x)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = x^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \mathbf{v}(x)$;
ако $\sigma = [x_0/T_0]$ и **v** е оценка, то $\sigma^{\mathbf{S}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}[x_0: T_0^{\mathbf{S},\mathbf{v}}]$;
действително, $(\sigma^{\mathbf{S}}(\mathbf{v}))(x_0) = T_0^{\mathbf{S},\mathbf{v}}$, $(\sigma^{\mathbf{S}}(\mathbf{v}))(x) = \mathbf{v}(x)$ за всяко $x \neq x_0$;

Теорема: нека **S** е структура, σ е субституция, **v** е оценка на променливите в **S**; ако E е терм или безкванторна формула, то $(E\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = E^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$, където $\mathbf{u} = \sigma^{\mathbf{S}}(\mathbf{v})$;
Доказателство: първо да разгледаме случая когато E е терм; провеждаме индукция по построеието на E;
База: ако E е константа, то $E\sigma = E \Rightarrow (E\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = E^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = E^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$;
ако $E \in \Xi$, то $E\sigma = \sigma(E)$ и $(E\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \sigma(E)^{\mathbf{S},\mathbf{v}}$; от друга страна $E^{\mathbf{S},\mathbf{u}} = \mathbf{u}(E) = \sigma(E)^{\mathbf{S},\mathbf{v}}$ по дефиницията на оператора за присвояване; така $(E\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = E^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$;
Предположение: нека $E = f(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ и твърдението е изпълнено за термовете $T_1, T_2, \ldots, T_n$;
Стъпка: имаме $E\sigma = f(T_1\sigma, T_2\sigma, \ldots, T_n\sigma) \Rightarrow$
$(E\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = f(T_1\sigma, T_2\sigma, \ldots, T_n\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = f^{\mathbf{S}}((T_1\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, (T_2\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, \ldots, (T_n\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}})$;
от индукционното предположение за термовете $T_1, T_2, \ldots, T_n$ и получаваме, че $(T_1\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = T_1^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$, $(T_2\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = T_2^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$, …, $(T_n\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = T_n^{\mathbf{S},\mathbf{u}} \Rightarrow$
$(E\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = f^{\mathbf{S}}(T_1^{\mathbf{S},\mathbf{u}}, T_2^{\mathbf{S},\mathbf{u}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S},\mathbf{u}}) = E^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$;
сега да разгледаме случая когато E е безкванторна формула; провеждаме индукция по построението на E;
База: нека $E = p(T_1, T_2, \ldots, T_n)$; тогава $E\sigma = p(T_1\sigma, T_2\sigma, \ldots, T_n\sigma) \Rightarrow$
$(E\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = p(T_1\sigma, T_2\sigma, \ldots, T_n\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = p^{\mathbf{S}}((T_1\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, (T_2\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, \ldots, (T_n\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}})$;
тъй като $T_1, T_2, \ldots, T_n$ са термове, от по-горе получаваме:
$(T_1\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = T_1^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$, $(T_2\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = T_2^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$, …, $(T_n\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = T_n^{\mathbf{S},\mathbf{u}} \Rightarrow$
$(E\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = p^{\mathbf{S}}(T_1^{\mathbf{S},\mathbf{u}}, T_2^{\mathbf{S},\mathbf{u}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S},\mathbf{u}}) = E^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$;
ако $E \in \mathbf{\Pi_0}$, то $E\sigma = E \Rightarrow (E\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = E^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = E^{\mathbf{S}} = E^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$;
ако E = true, то $E\sigma = E \Rightarrow (E\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = E^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1 = E^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$;
ако E = fail, то $E\sigma = E \Rightarrow (E\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = E^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 0 = E^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$;
Предположение: нека твърдението е изпълнено за безкванторните формули $G, F_1, F_2, \ldots, F_n$ $(n > 2)$;
Стъпка:
ако $E = \neg G$, то $E\sigma = \neg(G\sigma) \Rightarrow (E\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = (\neg(G\sigma))^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1 - (G\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}}$;
от индукционното предположение $(G\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = G^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$;
така $(E\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1 - G^{\mathbf{S},\mathbf{u}} = (\neg G)^{\mathbf{S},\mathbf{u}} = E^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$;
ако $E = F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n$, то $E\sigma = F_1\sigma \,\&\, F_2\sigma \,\&\, \ldots \,\&\, F_n\sigma \Rightarrow$
$(E\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = (F_1\sigma \,\&\, F_2\sigma \,\&\, \ldots \,\&\, F_n\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \min\{(F_1\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, (F_2\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, \ldots, (F_n\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}}\}$;
от индукционното предположение $(F_1\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = F_1^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$,

$(F_2\sigma)^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = F_2^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}, \ldots, (F_n\sigma)^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = F_n^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}$; така $(E\sigma)^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} =$
$= \min \{ F_1^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}, F_2^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}} \} = (F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n)^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}} = E^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}$;
ако $E = F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$, то $E\sigma = F_1\sigma \vee F_2\sigma \vee \ldots \vee F_n\sigma$ ➔
$(E\sigma)^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = (F_1\sigma \vee F_2\sigma \vee \ldots \vee F_n\sigma)^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = \max \{ (F_1\sigma)^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}}, (F_2\sigma)^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}}, \ldots, (F_n\sigma)^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} \}$;
от индукционното предположение $(F_1\sigma)^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = F_1^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}$,
$(F_2\sigma)^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = F_2^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}, \ldots, (F_n\sigma)^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} = F_n^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}$; така $(E\sigma)^{\mathbf{S},\,\mathbf{v}} =$
$= \max \{ F_1^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}, F_2^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}} \} = (F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n)^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}} = E^{\mathbf{S},\,\mathbf{u}}$;

Умножение на субституции

нека σ_1 и σ_2 са субституции; дефинираме функция $\sigma(x)$ от множеството Ξ на променливите в множеството от всички термове по следния начин: $\sigma(x) = (x\sigma_1)\sigma_2$ за всяко $x \in \Xi$;
ще покажем, че $\sigma(x)$ е субституция, т.е. $\sigma(x) \neq x$ най-много за краен брой променливи x; за целта ще покажем, че за всяко $x \in \Xi$ ако $\sigma(x) \neq x$, то $\sigma_1(x) \neq x$ или $\sigma_2(x) \neq x$; да допуснем противното – $\sigma(x) \neq x$ и $\sigma_1(x) = x$, $\sigma_2(x) = x$ за някоя променлива $x \in \Xi$; тогава $\sigma(x) = (x\sigma_1)\sigma_2 = x\sigma_2 = x$, което е противоречие; ясно е, че $\sigma_1(x) \neq x$ или $\sigma_2(x) \neq x$ е изпълнено само за краен брой променливи x, тъй като σ_1 и σ_2 са субституции; така $\sigma(x) \neq x$ само за краен брой променливи x, т.е. $\sigma(x)$ е субституция; тази субституция наричаме **произведение** на субституциите σ_1 и σ_2, означаваме $\sigma = \sigma_1\sigma_2$; така $x(\sigma_1\sigma_2) = (x\sigma_1)\sigma_2$;

пример: да разгледаме субституциите [X/Y], [Y/a]; от горните разглеждания субституцията [X/Y][Y/a] не променя променливите, които не са X или Y; имаме X([X/Y][Y/a]) = (X[X/Y])[Y/a] = Y[Y/a] = a;
Y([X/Y][Y/a]) = (Y[X/Y])[Y/a] = Y[Y/a] = a;
така [X/Y][Y/a] = [X/a, Y/a];

ще покажем, че $\sigma\iota = \iota\sigma = \sigma$ за всяка субституция σ;
действително за всяко $x \in \Xi$ имаме $x(\sigma\iota) = (x\sigma)\iota = x\sigma$ (от съответното твърдение за термове) ➔ $\sigma\iota = \sigma$; също, за всяко $x \in \Xi$ имаме $x(\iota\sigma) = (x\iota)\sigma = x\sigma$ ➔ $\iota\sigma = \sigma$;

нека σ = [X/Y, Y/X]; ще покажем, че $\sigma\sigma = \iota$;
действително, $x(\sigma\sigma) = x = x\iota$ за всяка променлива x, различна от X и Y; също $X(\sigma\sigma) = (X\sigma)\sigma = Y\sigma = X$,
$Y(\sigma\sigma) = (Y\sigma)\sigma = X\sigma = Y$; така $\sigma\sigma = \iota$;

умножението на субституции не е комутативно;
например [X/Y][Y/X] = [Y/X], [Y/X][X/Y] = [X/Y] и така
[X/Y][Y/X] ≠ [Y/X][X/Y];

Твърдение: ако E е терм или безкванторна формула и σ_1, σ_2 са субституции, то $E(\sigma_1\sigma_2) = (E\sigma_1)\sigma_2$;
Доказателство: първо да разгледаме случая когато E е терм;

провеждаме индукция по постронието на E;
База: ако E е константа, то $E(\sigma_1\sigma_2) = E$, $(E\sigma_1)\sigma_2 = E\sigma_2 = E$ ➔ $E(\sigma_1\sigma_2) = (E\sigma_1)\sigma_2$; ако $E \in \Xi$, то $E(\sigma_1\sigma_2) = (E\sigma_1)\sigma_2$ от дефиницията за произведение на субституции;
Предположение: нека $E = f(T_1, T_2, \dots, T_n)$ и твърдението е изпълнено за термовете $T_1, T_2, \dots, T_n$;
Стъпка: имаме $E(\sigma_1\sigma_2) = f(T_1(\sigma_1\sigma_2), T_2(\sigma_1\sigma_2), \dots, T_n(\sigma_1\sigma_2))$; от индукционното предположение $T_1(\sigma_1\sigma_2) = (T_1\sigma_1)\sigma_2$, $T_2(\sigma_1\sigma_2) = (T_2\sigma_1)\sigma_2, \dots, T_n(\sigma_1\sigma_2) = (T_n\sigma_1)\sigma_2$; тогава
$E(\sigma_1\sigma_2) = f((T_1\sigma_1)\sigma_2, (T_2\sigma_1)\sigma_2, \dots, (T_n\sigma_1)\sigma_2) =$
$= (f(T_1\sigma_1, T_2\sigma_1, \dots, T_n\sigma_1))\sigma_2 = (E\sigma_1)\sigma_2$;
сега да разгледаме случая когато E е безкванторна формула;
провеждаме индукция по построението на E;
База: нека $E = p(T_1, T_2, \dots, T_n)$;
тогава $E(\sigma_1\sigma_2) = p(T_1(\sigma_1\sigma_2), T_2(\sigma_1\sigma_2), \dots, T_n(\sigma_1\sigma_2))$; тъй като $T_1, T_2, \dots, T_n$ са термове от по-горе $T_1(\sigma_1\sigma_2) = (T_1\sigma_1)\sigma_2$, $T_2(\sigma_1\sigma_2) = (T_2\sigma_1)\sigma_2, \dots, T_n(\sigma_1\sigma_2) = (T_n\sigma_1)\sigma_2$;
така $E(\sigma_1\sigma_2) = p((T_1\sigma_1)\sigma_2, (T_2\sigma_1)\sigma_2, \dots, (T_n\sigma_1)\sigma_2) =$
$= (p(T_1\sigma_1, T_2\sigma_1, \dots, T_n\sigma_1))\sigma_2 = (E\sigma_1)\sigma_2$;
ако $E \in \mathbf{\Pi_0}$, E = true или E = fail, то $E(\sigma_1\sigma_2) = E$ и $(E\sigma_1)\sigma_2 = E\sigma_2 = E$ ➔ $E(\sigma_1\sigma_2) = (E\sigma_1)\sigma_2$;
Предположение: нека твърдението е изпълнено за безкванторните формули $G, F_1, F_2, \dots, F_n$ $(n > 2)$;
Стъпка:
ако $E = \neg G$, то $E(\sigma_1\sigma_2) = \neg(G(\sigma_1\sigma_2))$; от индукционното предположение $G(\sigma_1\sigma_2) = (G\sigma_1)\sigma_2$ ➔ $E(\sigma_1\sigma_2) = \neg((G\sigma_1)\sigma_2) = (\neg(G\sigma_1))\sigma_2 =$
$= ((\neg G)\sigma_1)\sigma_2 = (E\sigma_1)\sigma_2$;
ако $E = F_1 \& F_2 \& \dots \& F_n$, то
$E(\sigma_1\sigma_2) = F_1(\sigma_1\sigma_2) \& F_2(\sigma_1\sigma_2) \& \dots \& F_n(\sigma_1\sigma_2)$; от индукционното предположение $F_1(\sigma_1\sigma_2) = (F_1\sigma_1)\sigma_2$, $F_2(\sigma_1\sigma_2) = (F_2\sigma_1)\sigma_2, \dots$, $F_n(\sigma_1\sigma_2) = (F_n\sigma_1)\sigma_2$; така $E(\sigma_1\sigma_2) = (F_1\sigma_1)\sigma_2 \& (F_2\sigma_1)\sigma_2 \& \dots \& (F_n\sigma_1)\sigma_2 =$
$= (F_n\sigma_1 \& F_n\sigma_1 \& \dots \& F_n\sigma_1)\sigma_2 = ((F_1 \& F_2 \& \dots \& F_n)\sigma_1)\sigma_2 = (E\sigma_1)\sigma_2$;
ако $E = F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n$, то
$E(\sigma_1\sigma_2) = F_1(\sigma_1\sigma_2) \vee F_2(\sigma_1\sigma_2) \vee \dots \vee F_n(\sigma_1\sigma_2)$; от индукционното предположение $F_1(\sigma_1\sigma_2) = (F_1\sigma_1)\sigma_2$, $F_2(\sigma_1\sigma_2) = (F_2\sigma_1)\sigma_2, \dots$, $F_n(\sigma_1\sigma_2) = (F_n\sigma_1)\sigma_2$; така $E(\sigma_1\sigma_2) = (F_1\sigma_1)\sigma_2 \vee (F_2\sigma_1)\sigma_2 \vee \dots \vee (F_n\sigma_1)\sigma_2 =$
$= (F_n\sigma_1 \vee F_n\sigma_1 \vee \dots \vee F_n\sigma_1)\sigma_2 = ((F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n)\sigma_1)\sigma_2 = (E\sigma_1)\sigma_2$;

Твърдение (асоциативност на умножението на субституции):
за всеки три субституции $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ е изпълнено: $(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$;
Доказателство: нека $x \in \Xi$;
тогава $x((\sigma_1\sigma_2)\sigma_3) = (x(\sigma_1\sigma_2))\sigma_3 = ((x\sigma_1)\sigma_2)\sigma_3$;
също $x(\sigma_1(\sigma_2\sigma_3)) = (x\sigma_1)(\sigma_2\sigma_3) = ((x\sigma_1)\sigma_2)\sigma_3$ – тук използваме, горното твърдение за терма $(x\sigma_1)$;
така $x((\sigma_1\sigma_2)\sigma_3) = x(\sigma_1(\sigma_2\sigma_3))$ за всяко $x \in \Xi$ ➔ $(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$;

нека $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ $(k \geq 0)$ е редица от субституции; дефинираме **произведение** $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k$ на $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ с индукция по k;
База: при $k = 0$ под произведение на празната редица разбираме субституцията ι;
Предположение: нека е дефинирано произведението $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{k-1}$, $k \geq 1$;
Стъпка: дефинираме $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{k-1}\sigma_k = (\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{k-1})\sigma_k$;
според тази дефиниция, произведение на една субституция е самата субституция, произведение на две субституции е произведението на субституции от по-горе;

нека $k \geq 0$, $l \geq 0$; с индукция по l ще покажем, че
$\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k\sigma_{k+1}\sigma_{k+2}\ldots\sigma_{k+l} = (\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k)(\sigma_{k+2}\ldots\sigma_{k+l})$;
База: при $l = 0$ $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k = (\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k)\iota$ и твърдението е изпълнено;
Предположение:
нека $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k\sigma_{k+1}\sigma_{k+2}\ldots\sigma_{k+l-1} = (\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k)(\sigma_{k+2}\ldots\sigma_{k+l-1})$, $l \geq 1$;
Стъпка: тогава $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k\sigma_{k+1}\sigma_{k+2}\ldots\sigma_{k+l} = (\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k\sigma_{k+1}\sigma_{k+2}\ldots\sigma_{k+l-1})\sigma_{k+l}$;
от индукционното предположение $(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k\sigma_{k+1}\sigma_{k+2}\ldots\sigma_{k+l-1})\sigma_{k+l} =$
$= ((\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k)(\sigma_{k+2}\ldots\sigma_{k+l-1}))\sigma_{k+l}$; от асоциативността на умножението на субституции $((\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k)(\sigma_{k+2}\ldots\sigma_{k+l-1}))\sigma_{k+l} = (\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k)((\sigma_{k+2}\ldots\sigma_{k+l-1})\sigma_{k+l}) =$
$= (\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k)(\sigma_{k+2}\ldots\sigma_{k+l})$;

Частни случаи и варианти на безкванторна формула

нека F е произволна безкванторна формула; **частни случаи** на формулата F наричаме всички формули от вида $F\sigma$, където σ е произволна субституция;

например, всяка безкванторна формула F е частен случай на себе си, тъй като $F = F\iota$; ако F е затворена безкванторна формула, то F е единственият частен случай на F, тъй като $F\sigma = F$ за всяка субституция σ; напротив, ако F не е затворена, то е ясно, че F има и други частни случаи, дори безброй много;

релацията "е частен случай на" е транзитивна: ако G е частен случай на F и H е частен случай на G, то H е частен случай на F; действително по условие $G = F\sigma_1$, $H = G\sigma_2 \Rightarrow H = (F\sigma_1)\sigma_2 = F(\sigma_1\sigma_2)$, т.е. H е частен случай на F;

Твърдение: нека **S** е структура и F е безкванторна формула;
в сила е:
1. ако F е тъждествено вярна в **S**, то всички частни случаи на F са тъждествено верни в **S**;
2. ако някой частен случай на F е изпълним в **S**, то F е изпълнима в **S**;

Доказателство:
нека F е тъждествено вярна в **S**; нека σ е произволна субституция;
тогава за произволна оценка **v** в **S** имаме: $(F\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = F^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$, където

$\mathbf{u} = \sigma^{\mathbf{S}}(\mathbf{v})$; имаме $F^{\mathbf{S}, \mathbf{u}} = 1 \Rightarrow (F\sigma)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 1$; така $F\sigma$ е тъждествено вярна в **S**, т.е. всеки частен случай на F е тъждествено верен в **S**;
нека $F\sigma$ е частен случай на F, който е изпълним в **S** (σ е някаква субституция); нека **v** е оценка, такава че $(F\sigma)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 1$; имаме
$1 = (F\sigma)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = F^{\mathbf{S}, \mathbf{u}}$, където $\mathbf{u} = \sigma^{\mathbf{S}}(\mathbf{v})$; така F е изпълнима в **S**;

обратното твърдение също е вярно, тъй като всяка формула F е частен случай на себе си;
ясно е, че $F\sigma$ е затворен частен случай на F $\Leftrightarrow$
$\sigma(x)$ е затворен терм за всяко $x \in VAR(F)$;

Следствие: нека **S** е структура, F е безкванторна формула;
в сила е:
1. ако F е тъждествено вярна в **S**, то всички затворени частни случаи на F са верни в **S**;
2. ако някой затворен частен случай на F е изпълним в **S**, то F е изпълнима в **S**;

Доказателство: следствието е непосредствено, тъй като
един затворен частен случай $F\sigma$ е верен в **S** $\Leftrightarrow$ $F\sigma$ е изпълним в **S** $\Leftrightarrow$ $F\sigma$ е тъждествено верен в **S**;

обратното твърдение на следствието не е вярно;
например ако **S** е структурата на семейство Вазови без функционалните символи next и prev, то всички затворени частни случаи на формулата parent (X, Y) → male (Y) са верни, тъй като от всички деца функционален символ има само Иван Вазов; тази формула, обаче, не е тъждествено вярна, тъй като Иван Вазов е имал и сестри;
формулата parent (X, Y) & female (Y) няма изпълними затворени частни случаи по същата причина като по-горе, въпреки че тя е изпълнима – например, ако **v** е оценка, такава че
v (X) = Минчо Вазов, **v** (Y) е някоя от сестрите на Вазов, то
$(\text{parent}(X, Y) \,\&\, \text{female}(Y))^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 1$;

нека **S** е структура; казваме, че **S** **има термално породен носител**, ако всеки елемент на носителя на **S** е стойност в **S** на някой затворен терм;
например структурата **S** на семейство Вазови с функционалните символи next и prev има термално породен носител;

Твърдение: нека **S** е структура с термално породен носител;
нека F е безкванторна формула; в сила е:
1. ако всички затворени частни случаи на F са верни в **S**, то F е тъждествено вярна в **S**;
2. ако F е изпълнима в **S**, то съществува затворен частен случай на F, който е верен в **S**;

Доказателство:
нека всеки затворен частен случай на F е верен в **S**;
нека **v** е произволна оценка; ще покажем, че $F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 1$;

ако F е затворена формула, то тя е затворен частен случай на себе си ➔ F е вярна в **S**, т.е. F е тъждествено вярна в **S**;
нека VAR (F) = { x_1, x_2, …, x_n}, n ≥ 1; за i = 1, 2, …, n
v (x_i) е елемент на носителя на **S**, така че съществува затворен терм T_i, такъв че $T_i^{\mathbf{S}} = \mathbf{v}(x_i)$; разглеждаме следната субституция
$\sigma = [x_1/T_1, x_2/T_2, \ldots, x_n/T_n]$; ясно е, че Fσ е затворен частен случай на F, тъй като σ (x) е затворен терм за всяко $x \in$ VAR (F);
така $(F\sigma)^{\mathbf{S}} = 1$ ➔ $(F\sigma)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 1$ ➔ $F^{\mathbf{S}, \mathbf{u}} = 1$, където
$\mathbf{u} = \sigma^{\mathbf{S}}(\mathbf{v})$; ще покажем, че **u** = **v**; за i = 1, 2, …, n имаме
$\mathbf{u}(x_i) = (x_i\sigma)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = T_i^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = T_i^{\mathbf{S}} = \mathbf{v}(x_i)$; за $x \neq x_i$, $\mathbf{u}(x) = \mathbf{v}(x)$,
тъй като σ (x) = x; така $F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = F^{\mathbf{S}, \mathbf{u}} = 1$;
нека F е изпълнима в **S**; нека **v** е оценка в **S**, такава че
$F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 1$;
ако F е затворена формула, то тя е затворен частен случай на себе си и тя е търсения верен затворен частен случай;
нека VAR (F) = { x_1, x_2, …, x_n}, n ≥ 1; **v** (x_i) е елемент на носителя на **S**, така че съществува затворен терм T_i, така че $\mathbf{v}(x_i) = T_i^{\mathbf{S}}$,
i = 1, 2, …, n; нека $\sigma = [x_1/T_1, x_2/T_2, \ldots, x_n/T_n]$; тъй като $T_1, T_2, \ldots, T_n$ са затворени термове, то Fσ е затворен частен случай на F;
ще покажем, че $(F\sigma)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 1$; имаме $(F\sigma)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = F^{\mathbf{S}, \mathbf{u}}$, където $\mathbf{u} = \sigma^{\mathbf{S}}(\mathbf{v})$;
ще покажем, че **u** = **v**; за i = 1, 2, …, n имаме
$\mathbf{u}(x_i) = (x_i\sigma)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = T_i^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = T_i^{\mathbf{S}} = \mathbf{v}(x_i)$; за $x \neq x_i$, $\mathbf{u}(x) = \mathbf{v}(x)$,
тъй като σ (x) = x; така $(F\sigma)^{\mathbf{S}} = (F\sigma)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = F^{\mathbf{S}, \mathbf{u}} = F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 1$ и Fσ е търсеният изпълним затворен частен случай на F;

нека F е безкванторна формула; **вариант** на F наричаме такъв частен случай G на F, такъв че F е частен случай на G;
пример: F = p (X, Y), G = p (U, V); ясно е, че G = F[X/U, Y/V],
F = G[U/X, V/Y];

релацията "е вариант на" в множеството от всички безкванторни формули е релация на еквивалентност:
рефлексивност: всяка формула F е вариант на себе си: F = Fι
симетричност: ако G е вариант на F, то F е вариант на G;
транзитивност: ако G е вариант на F и H е вариант на G, то H е вариант на F - това следва от транзитивността на релацията "е частен случай на";

ако F е затворена формула, то F е единственият вариант на F, тъй като F е единственият частен случай на F;
напротив, ако F е безкванторна формула, която не е затворена, то тя има безброй много варианти, както се вижда от следното

Твърдение: нека F е безкванторна формула, която не е затворена;
нека VAR (F) = { x_1, x_2, …, x_n}, n ≥ 1, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j \in$ { 1, 2, …, n};
нека y_1, y_2, …, y_n са две по две различни променливи;
ако $\sigma = [x_1/y_1, x_2/y_2, \ldots, x_n/y_n]$, то G = Fσ е вариант на F;
Доказателство:

очевидно F е частен случай на G; ще покажем, че G е частен случай на F; да разгледаме субституцията
$\sigma' = [y_1/x_1, y_2/x_2, \ldots, y_n/x_n]$ – тя е коректно зададена, тъй като $y_i \neq y_j$ при $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$; ще покажем, че $F = G\sigma'$;
имаме $G\sigma' = (F\sigma)\sigma' = F(\sigma\sigma')$;
за $i = 1, 2, \ldots, n$ имаме: $x_i(\sigma\sigma') = (x_i\sigma)\sigma' = y_i\sigma' = x_i$;
така $\sigma\sigma'$ и ι съвпадат върху VAR (F) ➔ $F(\sigma\sigma') = F\iota = F$;
така $G\sigma' = F$ и G е вариант на F;

тъй като множеството Ξ е безкрайно, по посочения начин можем да построим безброй много варианти на F; дори можем да построим вариант на F, който не съдържа променливи от дадено крайно подмножество на Ξ;

Твърдение: нека F е безкванторна формула, която не е затворена; нека $\text{VAR}(F) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $n \geq 1$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$; нека G е произволен вариант на F; тогава
$G = F[x_1/y_1, x_2/y_2, \ldots, x_n/y_n]$, за някои променливи $y_1, y_2, \ldots, y_n$, които са две по две различни помежду си;
Доказателство: тъй като G е вариант на F, то $G = F\sigma$, $F = G\sigma'$ за някои субституции σ и σ'; тогава $F = G\sigma' = (F\sigma)\sigma' = F(\sigma\sigma')$ ➔
ι и $\sigma\sigma'$ съвпадат върху VAR (F), т.е. $x_i(\sigma\sigma') = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$;
да допуснем, че $x_i\sigma$ е съставен терм; тогава $x_i(\sigma\sigma') = (x_i\sigma)\sigma'$ също е съставен терм, тъй като след прилагането на субституцията σ', $(x_i\sigma)\sigma'$ отново ще съдържа функционални символи; така $x_i = (x_i\sigma)\sigma'$ е съставен терм, което е противоречие – например с факта, че x_i не съдържа леви и десни ограничители;
да допуснем, че $x_i\sigma$ е константа; тогава $x_i = (x_i\sigma)\sigma' = x_i\sigma$, което е противоречие, тъй като множествата $\mathbf{\Phi_0}$ и Ξ не се пресичат;
така $x_i\sigma$ е променлива, нека $x_i\sigma = y_i \in \Xi$; тогава
σ и $[x_1/y_1, x_2/y_2, \ldots, x_n/y_n]$ съвпадат върху VAR (F) ➔
$G = F\sigma = F[x_1/y_1, x_2/y_2, \ldots, x_n/y_n]$; ако допуснем, че за някои $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имаме $y_i = y_j$ ➔ $x_i\sigma = x_j\sigma$ ➔
$(x_i\sigma)\sigma' = (x_j\sigma)\sigma'$ ➔ $x_i = x_j$, което е противоречие; така $y_1, y_2, \ldots, y_n$ са две по две различни помежду си;

Ербранови структури

множеството от всички затворени термове наричаме **ербранов универсум** – бележим го с **H**;
казваме, че една структура **S** е **ербранова**, ако е изпълнено:

1. носителят на **S** е **H**;
2. ако $c \in \mathbf{\Phi_0}$, то $c^{\mathbf{S}} = c$;
3. ако $f \in \mathbf{\Phi_n}$, $n > 0$, то $f^{\mathbf{S}}(T_1, T_2, \ldots, T_n) = f(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ са всяка наредена n-торка $T_1, T_2, \ldots, T_n$ от елементи на **H**;

например за сигнатурата на семейство Вазови без функционалните символи next и prev ербрановият универсум е
H = { ivan, mincho, syba };
ако включим функционалните символи next и prev, ербрановият универсум **H** вече съдържа безброй много елементи;

Твърдение: ако **S** е ербранова структура, то за всеки затворен терм T имаме $T^{\mathbf{S}} = T$;
Доказателство: индукция по построението на T;
База: ако T е константа, по дефиницията за ербранова структура имаме $T^{\mathbf{S}} = T$;
Предположение: нека $T = f (T_1, T_2, \ldots, T_n)$, $n > 0$ и твърдението е изпълнено за термовете $T_1, T_2, \ldots, T_n$;
Стъпка: тогава $T^{\mathbf{S}} = f^{\mathbf{S}} (T_1^{\mathbf{S}}, T_2^{\mathbf{S}}, \ldots T_n^{\mathbf{S}}) = f^{\mathbf{S}} (T_1, T_2, \ldots T_n) =$
$= f (T_1, T_2, \ldots, T_n) = T$; използвали сме индукционното предположение и дефиницията за ербранова структура;

Следствие: всяка ербранова структура **S** има термално породен носител;
Доказателство: действително всеки затворен терм от **H** е стойност на същия затворен терм в **S**;

друго следствие от твърдението е, че всеки елемент на носителя на ербранова структура е стойност на точно един затворен терм;

Твърдение: нека M е множество от затворени атомарни формули; тогава съществува единствена ербранова структура **S**, такава че измежду всички затворени атомарни формули в **S** са вярни точно онези, които принадлежат на M;
Доказателство: ще построим ербрановата структура **S**; тя има носител **H** и функционалните символи са интерпретирани по дефиницията за ербранова структура; нека p е n-местен предикатен символ;
ако $n > 0$ определяме $p^{\mathbf{S}} (T_1, T_2, \ldots, T_n) = 1 \Leftrightarrow p (T_1, T_2, \ldots, T_n) \in M$ за всяка наредена n-торка $T_1, T_2, \ldots, T_n$ от елементи на **H**;
при $n = 0$ определяме $p^{\mathbf{S}} = 1 \Leftrightarrow p \in M$;
ще покажем, че описаното свойство е в сила;
нека A е затворена атомарна формула;
ако $A = p (T_1, T_2, \ldots, T_n)$, то
$A^{\mathbf{S}} = p^{\mathbf{S}} (T_1^{\mathbf{S}}, T_2^{\mathbf{S}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S}}) = p^{\mathbf{S}} (T_1, T_2, \ldots, T_n) = 1 \Leftrightarrow$
$p (T_1, T_2, \ldots, T_n) \in M$, т.е. $A^{\mathbf{S}} = 1 \Leftrightarrow A \in M$;
ако $A = p \in \mathbf{\Pi_0}$, то $A^{\mathbf{S}} = p^{\mathbf{S}} = 1 \Leftrightarrow p \in M$, т.е. $A^{\mathbf{S}} = 1 \Leftrightarrow A \in M$;
нека **S** е произволна ербранова структура с описаното свойство;
нека p е n-местен предикатен символ;
при $n > 0$ имаме $p^{\mathbf{S}} (T_1, T_2, \ldots, T_n) = 1 \Leftrightarrow p^{\mathbf{S}} (T_1^{\mathbf{S}}, T_2^{\mathbf{S}}, \ldots, T_n^{\mathbf{S}}) = 1 \Leftrightarrow$
$p (T_1, T_2, \ldots, T_n)^{\mathbf{S}} = 1 \Leftrightarrow p (T_1, T_2, \ldots, T_n) \in M$;
при $n = 0$ имаме $p^{\mathbf{S}} = 1 \Leftrightarrow p \in M$;
така ербрановата структура с описаното свойство е единствена;

по този начин всяка ербранова структура се определя еднозначно, ако се зададе кои атомарни формули са вярни в нея;

Еквивалентност на формули

нека F и G са формули; казваме, че F и G са **еквивалентни**, ако $F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = G^{\mathbf{S}, \mathbf{v}}$ за произволна структура **S** и произволна оценка **v** в **S**; бележим $F \equiv G$;

еквивалентността е релация на еквивалентност:
рефлексивност: $F \equiv F$;
симетричност: $F \equiv G \Rightarrow G \equiv F$ (от симетричността на равенството);
транзитивност: $F \equiv G$, $G \equiv H \Rightarrow F \equiv H$ (от транзитивността на равенството);

примери:
$\neg\mathrm{true} \equiv \mathrm{fail}$;
$\neg\mathrm{fail} \equiv \mathrm{true}$;
$\neg\neg F \equiv F$;
$\neg(F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n) \equiv \neg F_1 \vee \neg F_2 \vee \ldots \vee \neg F_n$;
$\neg(F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n) \equiv \neg F_1 \,\&\, \neg F_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \neg F_n$;
$\neg\forall x\, F \equiv \exists x\, \neg F$;
$\neg\exists x\, F \equiv \forall x\, \neg F$;

например ще покажем, че $\neg\forall x\, F \equiv \exists x\, \neg F$;
нека **S** е произволна структура с носител D; нека **v** е произволна оценка в **S**; тогава $(\neg\forall x\, F)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 1 - (\forall x\, F)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} =$
$= 1 - \min \{ F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}[x : d]} \mid d \in D \} = 0 \Leftrightarrow \min \{ F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}[x : d]} \mid d \in D \} = 1 \Leftrightarrow$
$F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}[x : d]} = 1$ за всяко $d \in D \Leftrightarrow (\neg F)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}[x : d]} = 0$ за всяко $d \in D \Leftrightarrow$
$\max \{ (\neg F)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}[x : d]} \mid d \in D \} = 0$, т.е. $(\exists x\, \neg F)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 0$;
така $(\neg\forall x\, F)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 0 \Leftrightarrow (\exists x\, \neg F)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 0 \Rightarrow \neg\forall x\, F \equiv \exists x\, \neg F$;
съвсем аналогично се показва, че $\neg\exists x\, F \equiv \forall x\, \neg F$;

ако $x \notin \mathrm{FVAR}(F)$, то $\forall x\, F \equiv F$, $\exists x\, F \equiv F$;
нека **S** е произволна структура с носител D; нека **v** е произволна оценка в **S**; тогава $(\forall x\, F)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = \max \{ F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}[x : d]} \mid d \in D \}$;
за всяко $d \in D$, **v** и $\mathbf{v}[x : d]$ съвпадат върху FVAR (F),
тъй като $x \notin \mathrm{FVAR}(F) \Rightarrow$ за всяко $d \in D$, $F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}[x : d]} = F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}}$;
така $(\forall x\, F)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = \max \{ F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}[x : d]} \mid d \in D \} = F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} \Rightarrow \forall x\, F \equiv F$;
съвсем аналогично се показва, че $\exists x\, F \equiv F$;

Твърдение: ако $F \equiv G$, то $\neg F \equiv \neg G$;
Доказателство: нека **S** е произволна структура, **v** е оценка на променливите в **S**;
имаме $(\neg F)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 1 - F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 1 - G^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = (\neg G)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} \Rightarrow \neg F \equiv \neg G$;

Твърдение: ако $F_1 \equiv G_1$, $F_2 \equiv G_2$, …, $F_n \equiv G_n$, то $F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \dots \,\&\, F_n \equiv$
$\equiv G_1 \,\&\, G_2 \,\&\, \dots \,\&\, G_n$ и $F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n \equiv G_1 \vee G_2 \vee \dots \vee G_n$;
Доказателство: нека **S** е произволна структура, **v** е оценка на променливите в **S**; $(F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \dots \,\&\, F_n)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \min \{ F_1^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, F_2^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, \dots, F_n^{\mathbf{S},\mathbf{v}} \}$
$= \min \{ G_1^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, G_2^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, \dots, G_n^{\mathbf{S},\mathbf{v}} \} = (G_1 \,\&\, G_2 \,\&\, \dots \,\&\, G_n)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} \Rightarrow$
$F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \dots \,\&\, F_n \equiv G_1 \,\&\, G_2 \,\&\, \dots \,\&\, G_n$; съвсем аналогично,
$F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n \equiv G_1 \vee G_2 \vee \dots \vee G_n$;

Твърдение: ако $F \equiv G$, то $\forall x\, F \equiv \forall x\, G$, $\exists x\, F \equiv \exists x\, G$;
Доказателство: нека **S** е произволна структура с носител D, **v** е оценка на променливите в **S**; $(\forall x\, F)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \min \{ F^{\mathbf{S},\mathbf{v}[x:d]} \mid d \in D \}$
$= \min \{ G^{\mathbf{S},\mathbf{v}[x:d]} \mid d \in D \} = (\forall x\, G)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} \Rightarrow \forall x\, F \equiv \forall x\, G$; съвсем аналогично, $\exists x\, F \equiv \exists x\, G$;

по дефиниция $F \to G = \neg F \vee G$; като използваме горните твърдения, ще покажем че $F \to G \equiv \neg(F \wedge \neg G)$;
действително $\neg(F \wedge \neg G) \equiv \neg F \vee \neg\neg G \equiv \neg F \vee G = F \to G$, тъй като $\neg F \equiv \neg F$, $\neg\neg G \equiv G$;

Модел на множество от формули

нека M е множество от формули; **модел** на M наричаме всяка структура **S**, в която всички формули от M са тъждествено вярни;

не всяко множество от формули има модел; например множеството $\{ F, \neg F \}$ няма модели;

казваме, че едно множество от затворени формули е **изпълнимо**, ако това множество има модел;

една формула наричаме **литерал**, ако тя има вида A или ¬A, където A е атомарна формула; литералите A и ¬A наричаме **противоположни**;

Твърдение: Едно множество M от затворени литерали е изпълнимо ⇔ в M няма противоположни литерали;
Доказателство: ако в M има противоположни литерали, то очевидно M няма модел, т.е. M не е изпълнимо;
нека в M няма противоположни литерали; ще покажем, че съществува ербранова структура, която е модел на M;
нека $M_0 \subseteq M$ е множеството от всички атомарни формули в M;
както знаем, съществува ербранова структура **S**, такава че за всяка атомарна формула A, $A^{\mathbf{S}} = 1 \Leftrightarrow A \in M_0$;
ще покажем, че тази структура **S** е модел на M; нека $F \in M$;
ако $F \in M_0$, то $F^{\mathbf{S}} = 1$ по дефиницията на **S**;
ако $F \in M \backslash M_0$, то $F = \neg A$, където A е атомарна формула и $A \notin M_0$, тъй като M не съдържа противоположни литерали $\Rightarrow A^{\mathbf{S}} = 0$;
така $F^{\mathbf{S}} = (\neg A)^{\mathbf{S}} = 1 - A^{\mathbf{S}} = 1$;

Твърдение: ако М е множество от литерали, то М има модел ⇔ множеството от всички затворени частни случаи на литералите от М е изпълнимо;
Доказателство: нека М е множество от литерали, М′ е множеството от всички затворени частни случаи на литералите от М;
нека **S** е модел на М; тъй като всеки литерал от М е тъждествено верен в **S**, то всички затворени частни случаи на този литерал са верни в **S** ➔ **S** е модел на М′ ➔ М′ е изпълнимо;
нека М′ е изпълнимо; от горното твърдение съществува ербранова структура **S**, която е модел на М′; всички затворени частни случаи на всеки литерал от М са вярни в **S** и тъй като **S** е с термално породен носител, то всеки литерал от М е верен в **S** ➔
S е модел на М;

ще отбележим, че е вярно по-общо твърдение за множество от безкванторни формули;

пример: нека М = { p (X, b), ¬p (a, Y) };
тогава М′ = { p (a, b), p (b, b), ¬p (a, b), ¬p (a, a) } и М′ очевидно не е изпълнимо, тъй като съдържа два противоположни литерала ➔
М = { p (X, b), ¬p (a, Y) } няма модел;
нека М = { p (a), ¬p (f (X))};
тогава М′ = { p (a), ¬p (f (a)), ¬p (f (f (a)), …}; очевидно М′ не съдържа противоположни литерали ➔ М има модел; ербрановият модел **S** на М има носител { a, f (a), f (f (a)), …} и $p^{\mathbf{S}}$ (A) = 1 ⇔ A = a;
ще построим краен модел **S** на М; нека носителят е D = { α, β};
определяме $f^{\mathbf{S}}(\alpha) = \beta$, $f^{\mathbf{S}}(\beta) = \beta$, $p^{\mathbf{S}}(\alpha) = 1$, $p^{\mathbf{S}}(\beta) = 0$, $a^{\mathbf{S}} = \alpha$;
имаме $p(a)^{\mathbf{S}} = p^{\mathbf{S}}(a^{\mathbf{S}}) = p^{\mathbf{S}}(\alpha) = 1$ ➔ p (a) е вярна в **S**;
нека **v** е произволна оценка в **S**; тогава
$\neg p(f(X))^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1 - p(f(X))^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1 - p^{\mathbf{S}}(f(X)^{\mathbf{S},\mathbf{v}}) = 1 - p^{\mathbf{S}}(f^{\mathbf{S}}(\mathbf{v}(X)) =$
$= 1 - p^{\mathbf{S}}(\beta) = 1$; така ¬p (f (X)) е тъждествено вярна в **S**;

Хорнови клаузи

положителни хорнови клаузи наричаме формули от вида
$A \vee \neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \ldots \vee \neg B_n$, $n \geq 0$, $A, B_1, B_2, \ldots, B_n$ са атомарни формули;
отрицателни хорнови клаузи наричаме формули от вида
$\neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \ldots \vee \neg B_n$, $n \geq 0$, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ са атомарни формули;
при n = 0 отрицателната хорнова клауза е fail;

положителните хорнови клаузи записваме
по следния начин: A **:–** $B_1, B_2, \ldots, B_n$;
отрицателните хорнови записваме
по следния начин: **:–** $B_1, B_2, \ldots, B_n$;

конюнкцията B_1 & B_2 & … & B_n се нарича **тяло** на положителната хорнова клауза A **:–** $B_1, B_2, \ldots, B_n$, формулата A наричаме **глава** или

заключение на клаузата; отделните формули $B_1, B_2, \ldots, B_n$ се наричат **предпоставки** на клаузата;
ще покажем, че A **:–** $B_1, B_2, \ldots, B_n \equiv B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n \rightarrow A$;
действително, нека **S** е структура, **v** е оценка в **S**;
имаме $(A$ **:–** $B_1, B_2, \ldots, B_n)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 0 \Leftrightarrow A^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 0, B_1^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 1, \ldots, B_n^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 1 \Leftrightarrow A^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 0, (B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 1 \Leftrightarrow (B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n \rightarrow A)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 0$;
разсъждението е валидно и при $n = 0$, тъй като
$B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n = \mathrm{true}$;

конюнкцията $B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ се нарича **тяло** и за отрицателната хорнова клауза **:–** $B_1, B_2, \ldots, B_n$; при това
:– $B_1, B_2, \ldots, B_n \equiv \neg(B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n)$ (доказано е при еквивалентност на формули); при $n = 0$ тази еквивалентност изразява, че $\mathrm{fail} \equiv \neg\mathrm{true}$;

пример: нека r е двуместен предикатен символ;
положителната хорнова клауза $r (X, Y)$ **:–** $r (X, Z), r (Z, Y)$ е тъждествено вярна в някаква структура **S**, ако $r^{\mathbf{S}}$ е транзитивна релация;
отрицателната хорнова клауза **:–** $r (X, Y), \neg r (X, Y)$ е тъждествено вярна в някаква структура **S**, ако $r^{\mathbf{S}}$ е антисиметрична релация;
в структурата на семейство Вазови, положителната хорнова клауза distinct (X, Y) **:–** male (X), female (Y) е тъждествено вярна;

нека A **:–** $B_1, B_2, \ldots, B_n$ е положителна хорнова клауза;
ако σ е субституция, то $(A$ **:–** $B_1, B_2, \ldots, B_n)\sigma = A\sigma$ **:–** $B_1\sigma, B_2\sigma, \ldots, B_n\sigma$;
това следва директно от дефиницията за прилагане на субституции върху безкванторни формули;
ясно е, че $\mathrm{VAR}\ (A$ **:–** $B_1, B_2, \ldots, B_n) =$
$\mathrm{VAR}\ (A) \cup \mathrm{VAR}\ (B_1) \cup \ldots \cup \mathrm{VAR}\ (B_n)$; в частност A **:–** $B_1, B_2, \ldots, B_n$ е затворена формула $\Leftrightarrow A, B_1, B_2, \ldots, B_n$ са затворени формули;
аналогично, ако **:–** $B_1, B_2, \ldots, B_n$ е отрицателна хорнова клауза,
(**:–** $B_1, B_2, \ldots, B_n)\sigma$ = **:–** $B_1\sigma, B_2\sigma, \ldots, B_n\sigma$ за всяка субституция σ,
VAR (**:–** $B_1, B_2, \ldots, B_n) = \mathrm{VAR}\ (B_1) \cup \ldots \cup \mathrm{VAR}\ (B_n)$; в частност
:– $B_1, B_2, \ldots, B_n$ е затворена формула $\Leftrightarrow B_1, B_2, \ldots, B_n$ са затворени формули;

основният проблем с който ще се занимаваме по-нататък е следния: дадено е множество M от положителни и отрицателни хорнови клаузи (възможно е M да е безкрайно); питаме се дали M притежава модели;

ако M се състои само от положителни хорнови клаузи, то M има модел – това е структура, в която всички предикати приемат стойност 1 за произволни стойности на променливите;

ако M се състои само от непразни отрицателни хорнови клаузи, то M има модел – това е структура, в която всички предикати приемат стойност 0 за произволни стойности на променливите;

под **логическа програма** разбираме крайно множество от положителни хорнови клаузи;
под **наредена логическа програма** (**хорнова програма**) разбираме крайна редица от положителни хорнови клаузи;

хорнова цел ще наричаме формула от вида A_1 & A_2 & … & A_n, $n \geq 0$, където A_i са атомарни формули; ясно е, че тялото на всяка положителна или отрицателна хорнова клауза е хорнова цел;

нека P е множество от положителни хорнови клаузи и G е хорнова цел; казваме, че G е **изпълнима при** P, ако G е изпълнима във всеки модел на P;

Твърдение: нека M е множество от положителни и отрицателни хорнови клаузи, в което има точно една отрицателна хорнова клауза, т.е. $M = P \cup \{$ **:–** $B_1, B_2, \ldots, B_n\}$, където P се състои само от положителни хорнови клаузи; нека $G = B_1$ & B_2 & …& B_n;
тогава M няма модел ⇔ G е изпълнима при P;
Доказателство: нека M няма модел; тъй като P се състои само от положителни хорнови клаузи, то P има модел; нека **S** е произволен модел на P; **S** не е модел на M ➔ **:–** $B_1, B_2, \ldots, B_n$ не е тъждествено вярна в **S** ➔ G е изпълнима в **S**; така G е изпълнима във всеки модел на P, т.е. G е изпълнима при P;
нека G е изпълнима при P; да допуснем, че M има модел **S**; тогава **S** е модел на P, тъй като $P \subseteq M$; **S** е модел на M ➔ **:–** $B_1, B_2, \ldots, B_n$ е тъждествено вярна в **S** ➔ G не е изпълнима в **S**, което е противоречие;

да разгледаме следния пример със сигнатурата на семейство Вазови; нека P = { parent (mincho, ivan), male (mincho), male (ivan) };
нека G = parent (X, Y) & male (X) & male (Y);
тогава G[X/mincho, Y/ivan] = parent (mincho, ivan) & male (mincho) & male (ivan); очевидно, ако **S** е модел на P, този частен случай на G е верен в **S** ➔ G е изпълнима в **S**; това означава, че G е изпълнима във всеки модел на P, т.е. G е изпълнима при P;
нека G_1 = parent (X, Y) & male (X) & female (Y);
тази хорнова цел е изпълнима в структурата на семейство Вазови, но тя не е изпълнима при P – например, P има модел **S** в който $\text{female}^{\mathbf{S}}$ приема стойност 0 за всяка стойност на променливите;

Минимален ербранов модел на множество от положителни хорнови клаузи

нека P е множество от положителни хорнови клаузи;

затворените частни случаи на атомарните формули в P наричаме **аксиоми, съответни на P**;

нека $C = A$ **:–** $B_1, B_2, \ldots, B_n$, $n > 0$, $C \in P$;
нека $C\sigma = A\sigma$ **:–** $B_1\sigma, B_2\sigma \ldots, B_n\sigma$ е затворен частен случай на C (σ е някаква субституция); казваме, че затворената формула $A\sigma$ е **непосредствено изводима** чрез C от $B_1\sigma, B_2\sigma \ldots, B_n\sigma$;

дефинираме индуктивно понятието **изводимост** на формули от P;
База: всички аксиоми, съответни на P са изводими от P;
Предположение: нека $C = A$ **:–** $B_1, B_2, \ldots, B_n$, $n > 0$, $C \in P$;
нека $C\sigma$ е затворен частен случай на C и
$B_1\sigma, B_2\sigma, \ldots, B_n\sigma$ са изводими от P;
Стъпка: тогава $A\sigma$ е изводима от P;
Заключение: няма други изводими формули от P;

съвсем лесно се проверява, че всички изводими формули от P са затворени;

примери:
нека P = { parent (mincho, ivan), male (mincho), male (ivan), distinct (X, Y) **:–** parent (X, Y) };
ясно е, че ако T и U са затворени термове, то distinct (T, U) е непосредствено изводима от parent (T, U);
например distinct (mincho, ivan) е изводима от P, тъй като е непосредствено изводима от parent (mincho, ivan), която пък е аксиома, съответна на P;
нека имаме следната сигнатура – константа zero, едноместен функционален символ s и едноместен предикатен символ even;
нека P = { even (zero), even (s (s (X)) **:–** even (X) };
тогава изводимите от P формули са:
even (zero), even (s (s (zero))), even (s (s (s (s (zero))))), …;

нека $\mathbf{S_P}$ е ербрановата структура, в която са вярни всички изводими от P формули и само те;

Теорема: $\mathbf{S_P}$ е модел на P;
Доказателство: нека $F \in P$; ако F е атомарна формула, то всички затворени частни случаи на F са аксиоми, съответни на P ➔ всички затворени частни случаи на F са изводими от P ➔ всички затворени частни случаи на F са вярни в $\mathbf{S_P}$, но $\mathbf{S_P}$ е с термално породен носител ➔ F е тъждествено вярна в $\mathbf{S_P}$;
нека F има вида A **:–** $B_1, B_2, \ldots, B_n$, $n > 0$; нека $F\sigma$ е произволен частен случай на F (σ е някаква субституция); имаме $F\sigma = A\sigma$ **:–** $B_1\sigma, B_2\sigma, \ldots, B_n\sigma$; ще покажем, че $F\sigma$ е верен в $\mathbf{S_P}$; достатъчно е да покажем, че ако $B_1\sigma, B_2\sigma, \ldots, B_n\sigma$ са вярни в $\mathbf{S_P}$, то $A\sigma$ е вярна в $\mathbf{S_P}$; действително, ако $B_1\sigma, B_2\sigma, \ldots, B_n\sigma$ са вярни в $\mathbf{S_P}$, то $B_1\sigma, B_2\sigma, \ldots, B_n\sigma$ са изводими от P ➔ $A\sigma$ също е изводима от P ➔ $A\sigma$ е вярна в $\mathbf{S_P}$; така всеки затворен частен случай на F е верен в $\mathbf{S_P}$ и $\mathbf{S_P}$ е с термално породен носител ➔ F е тъждествено вярна в $\mathbf{S_P}$;

Твърдение: ако A е затворена атомарна формула, която е вярна в $\mathbf{S_P}$, то A е вярна във всеки модел на P;
Доказателство: нека A е затворена атомарна формула, която е вярна в $\mathbf{S_P}$; тогава A е изводима от P;
нека **S** е произволен модел на P; с индукция по дефиницията за изводимост ще покажем, че A е вярна в **S**;
База: ако A е аксиома, съответна на P, т.е. A = Bσ, където B е атомарна формула от P, то A е вярна в **S**, тъй като B е тъждествено вярна в **S** ➔ всеки затворен частен случай на B е верен в **S**;
Предположение: нека $C \in P$, $C = B$ **:–** $B_1, B_2, \ldots, B_n$, $n > 1$, $A = B\sigma$, $B_1\sigma, B_2\sigma, \ldots, B_n\sigma$ са изводими от P и за тях е изпълнено твърдението, т.е. те са верни в **S**;
Стъпка: C е тъждествено вярна в **S** ➔ всеки затворен частен случай на C е верен в **S** ➔ $B\sigma$ **:–** $B_1\sigma, B_2\sigma, \ldots, B_n\sigma$ =
= A **:–** $B_1\sigma, B_2\sigma, \ldots, B_n\sigma$ е вярна в **S** ➔ импликацията
$B_1\sigma \;\&\; B_2\sigma \;\&\; \ldots \;\&\; B_n\sigma \to A$ е вярна в **S**, но $B_1\sigma, B_2\sigma \ldots, B_n\sigma$ са верни в **S** ➔ $B_1\sigma \;\&\; B_2\sigma \;\&\; \ldots \;\&\; B_n\sigma$ е вярна в **S** ➔ A е вярна в **S**;

Следствие: нека G е хорнова цел; ако G е изпълнима в $\mathbf{S_P}$, то G е изпълнима при P;
Доказателство: G е изпълнима в $\mathbf{S_P}$, $\mathbf{S_P}$ е с термално породен носител ➔ съществува затворен частен случай Gσ на G, който е верен в $\mathbf{S_P}$; от теоремата този Gσ е верен във всеки модел на P ➔ G е изпълнима във всеки модел на P, т.е. G е изпълнима при P;

ербрановата структура $\mathbf{S_P}$ наричаме **минимален ербранов модел** на P – името идва от това, че $\mathbf{S_P}$ е модел на P и $\mathbf{S_P}$ има най-малко множество от верни атомарни формули от всички модели на P; ясно е, че една затворена атомарна формула е вярна във всеки модел на P ⇔ тази формула е вярна в $\mathbf{S_P}$; така $\mathbf{S_P}$ е ербрановата структура, в която са верни всички затворени атомарни формули, които са верни във всеки модел на P и само те;

Твърдение: нека P е множество от положителни хорнови клаузи; ако една хорнова цел G е изпълнима при P, то някой затворен частен случай на G е верен във всеки модел на P;
Доказателство: G е изпълнима при P ➔ G е изпълнима във всеки модел на P; в частност G е изпълнима в $\mathbf{S_P}$ и тъй като $\mathbf{S_P}$ е с термално породен носител, то съществува частен случай Gσ на G, който е верен в $\mathbf{S_P}$; нека $G = B_1 \;\&\; B_2 \;\&\; \ldots \;\&\; B_n$, $n \geq 0$;
тогава $G\sigma = B_1\sigma \;\&\; B_2\sigma \;\&\; \ldots \;\&\; B_n\sigma$; тъй като Gσ е вярна в $\mathbf{S_P}$, то $B_1\sigma, B_2\sigma, \ldots, B_n\sigma$ са верни в $\mathbf{S_P}$; от горното твърдение
$B_1\sigma, B_2\sigma, \ldots, B_n\sigma$ са верни във всеки модел на P ➔
$G\sigma = B_1\sigma \;\&\; B_2\sigma \;\&\; \ldots \;\&\; B_n\sigma$ е вярна във всеки модел на P, т.е. Gσ е частен случай на G, който е верен във всеки модел на P;

Теорема: нека M е множество от хорнови клаузи и P е множеството на положителните клаузи в M;

тогава M има модел ⇔ тялото на никоя клауза от M\P не е изпълнимо при P;
Доказателство: нека M има модел **S**; нека C е произволна отрицателна хорнова клауза, C ∈ M\P,
C = **:–** B_1, B_2, …, B_n, $n \ge 0$, C ≡ ¬(B_1 & B_2 & … & B_n);
тъй като C е тъждествено вярна в **S** ➔ ¬(B_1 & B_2 & … & B_n) е тъждествено вярна в **S** ➔ B_1 & B_2 & … & B_n не е изпълнима в **S**;
така **S** е модел на P, в който тялото на C не е изпълнимо ➔ тялото на C не е изпълнимо при P;
нека тялото на никоя отрицателна хорнова клауза от M\P не е изпълнимо при P; ще покажем, че M има модел;
разглеждаме структурата $\mathbf{S_P}$; нека C ∈ M;
ако C ∈ P, то C е тъждествено вярна в $\mathbf{S_P}$, тъй като $\mathbf{S_P}$ е модел на P;
нека C ∈ M\P, C = **:–** B_1, B_2, …, B_n, $n \ge 0$, C ≡ ¬(B_1 & B_2 & … & B_n);
ще покажем, че B_1 & B_2 & … & B_n не е изпълнима в $\mathbf{S_P}$;
да допуснем, че B_1 & B_2 & … & B_n е изпълнима в $\mathbf{S_P}$; тъй като $\mathbf{S_P}$ има термално породен носител, то съществува частен случай $B_1\sigma$ & $B_2\sigma$ & … & $B_n\sigma$, който е верен в $\mathbf{S_P}$ ➔ $B_1\sigma$ & $B_2\sigma$ & … & $B_n\sigma$ е верен във всеки модел на P ➔ B_1 & B_2 & … & B_n е изпълнима във всеки модел на P, т.е. B_1 & B_2 & … & B_n е изпълнима при P, което е противоречие; така B_1 & B_2 & … & B_n не е изпълнима в $\mathbf{S_P}$ ➔ ¬(B_1 & B_2 & … & B_n) е тъждествено вярна в $\mathbf{S_P}$ ➔ C е тъждествено вярна в $\mathbf{S_P}$; така $\mathbf{S_P}$ е модел на M;

примери: нека сигнатурата, която използваме се състои от една константа a, един едноместен функционален символ f и един едноместен предикатен символ p;
нека P = { p (a), p (f (f (X))) **:–** p (X) };
да разгледаме хорновата цел G = p (f (a));
една структура, в която G не е изпълнима е структурата с носител множеството от естествените числа, константата a е интерпретирана с 0, предикатният символ p е интерпретиран с предиката за четност, функционалният символ f – с добавяне на 1;
при тази структура G = p (f (a)) означава, че 1 е четно число, което очевидно не е вярно; ще подходим към въпроса за изпълнимост на G при P по друг начин; ще покажем, че G не е изпълнима в $\mathbf{S_P}$ ➔ G не е изпълнима при P; трябва да покажем, че никой частен случай на G не е верен в $\mathbf{S_P}$, т.е. изводим от P;
G има единствен частен случай – себе си, тъй като G е затворена формула; ясно е, че затворените термове в дадената сигнатура са f^n (a) за n = 0, 1, … (с f^n (a) означаваме $\underbrace{f\,(f\,(\ldots(f}_{n}(a))\ldots))$;

има единствена аксиома, съответна на P – p (a);
затворените частни случаи на другата клауза са p (f (f (T))) **:–** p (T), където T е затворен терм; така изводимите формули в P са
p (a), p (f (f (a))), …, т.е. p (f^n (a)), където n е четно число;
при това положение G не е вярна в $\mathbf{S_P}$, тъй като G = p (f^1 (a));
така G не е изпълнима при P;

да разгледаме друга хорнова цел $G = p(X) \& p(f(X))$;
затворените частни случаи на G имат вида
$G[X/f^n(a)] = p(f^n(a)) \& p(f^{n+1}(a))$; при това положение, никой затворен частен случай на G не е верен в $\mathbf{S_P}$, тъй като n и n+1 са с различна четност ➔ G не е изпълнима в $\mathbf{S_P}$ ➔
G не е изпълнима при P;

Резолюция между хорнова цел и хорнова клауза

непосредствена резолюция между хорнова цел и положителна хорнова клауза е възможна точно когато целта е непразна и първият член на целта съвпада със заключението на клаузата;

нека $G = A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_m$ е непразна хорнова цел ($m \geq 1$) и
$C = A_1 \mathbin{:\!-} B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ ($n \geq 0$) е положителна хорнова клауза;
образуваме $G' = B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n \& A_2 \& A_3 \& \ldots \& A_m$; целта G' наричаме **непосредствена резолвента** на хорновата цел G и положителната хорнова клауза C;
ще покажем, че ако G' и C са вярни в дадена структура **S** при оценка **v**, то G също е вярна в **S** при оценката **v**;
$G'^{\,\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1$ ➔ $B_1^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = B_2^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \ldots = B_n^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1$, $C^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1$ ➔ $A_1^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1$,
$A_2^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = A_3^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \ldots = A_m^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1$ (тъй като $G'^{\,\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1$) ➔
$G^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = (A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_m)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1$;
като следствие, ако C е тъждествено вярна в **S**, то импликацията $G' \rightarrow G$ е тъждествено вярна в **S**;

нека G и C имат непосредствена резолвента G'; тогава за всяка субституция σ, Gσ и Cσ имат непосредствена резолвента $G'\sigma$:
действително $G\sigma = A_1\sigma \& A_2\sigma \& \ldots \& A_m\sigma$ и
$C\sigma = A_1\sigma \mathbin{:\!-} B_1\sigma \& B_2\sigma \& \ldots \& B_n\sigma$ имат непосредствена резолвента
$B_1\sigma \& B_2\sigma \& \ldots \& B_n\sigma \& A_2\sigma \& A_3\sigma \& \ldots \& A_m\sigma = G'\sigma$;

нека G е хорнова цел, C е положителна хорнова клауза;
всяка хорнова цел G', която е непосредствена резолвента на някой частен случай на G и някой частен случай на C наричаме **резолвента** на G и C; ще отбележим, че частните случаи на G и C може да се получават от различни субституции; ясно е, че ако G' е непосредствена резолвента на G и C, то G' е резолвента на G и C;

пример: нека $C = p(f(f(X))) \mathbin{:\!-} p(X)$, $G = p(X) \& p(f(X))$;
очевидно G и C нямат непосредствена резолвента;
имаме $G[X/f(f(X))] = p(f(f(X))) \& p(f(f(f(X))))$;
така частният случай $G[X/f(f(X))]$ на G и частният случай C на C имат непосредствена резолвента – $p(X) \& p(f(f(f(X))))$ ➔
G и C имат резолвента $p(X) \& p(f(f(f(X))))$;

Твърдение: нека G и C имат резолвента G′; нека C е тъждествено вярна в дадена структура **S**; тогава, ако G′ е изпълнима в **S**, то G също е изпълнима в **S**;
Доказателство: нека σ_1, σ_2 са субституции и G′ е непосредствена резолвента на $G\sigma_1$ и $C\sigma_2$; тъй като C е тъждествено вярна в **S**, то $C\sigma_2$ е тъждествено вярна в **S** ➔ $G' \to G\sigma_1$ е тъждествено вярна в **S**; тъй като G′ е изпълнима в **S** ➔ съществува оценка **v** в **S**, така че $G'^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1$; имаме $(G' \to G\sigma_1)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1$ ➔ $(G\sigma_1)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1$, т.е. $G\sigma_1$ е изпълнима в **S** ➔ G е изпълнима в **S**, тъй като един неин частен случай е изпълним в **S**;

Твърдение: нека P е множество от положителни хорнови клаузи; нека G е хорнова цел; нека G има резолвента G′ с някоя клауза от P; в такъв случай, ако G′ е изпълнима при P, то G е изпълнима при P;
Доказателство: нека **S** е произволен модел на P; тъй като G′ е изпълнима при P ➔ G′ е изпълнима в **S**; G′ е резолвента на G и някаква клауза C от P, която е тъждествено вярна в **S**, тъй като **S** е модел на P; от горното твърдение G е изпълнима в **S**; така G е изпълнима във всеки модел на P, т.е. G е изпълнима при P;

нека P е множество от положителни хорнови клаузи; **резолвентна редица** относно P наричаме всяка редица $G_1, G_2, \ldots$(крайна или безкрайна) от хорнови цели, в която за $i = 2, 3, \ldots G_i$ е резолвента на G_{i-1} и някоя клауза от P; считаме, че всяка редица от един член е резолвентна;

Твърдение: ако $G_1, G_2, \ldots$ е резолвентна редица относно P и за някое $n \in \mathbf{N}$ G_n е изпълнима при P, то $G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}$ са изпълними при P;
Доказателство: следва непосредствено от предното твърдение;

Следствие: ако една крайна резолвентна редица относно P завършва с празната цел (true), то всички нейни членове са изпълними при P;

пример: нека P = { p (a), p (f (f (X))) **:–** p (X) };
нека G = p (f (X)); строим резолвентна редица с начало G относно P; ясно е, че G няма резолвента с p (a), тъй като всеки частен случай на G съдържа функционален символ; една резолвента на G и втората клауза е p (X), която е непосредствена резолвента на G[X/f (X)] и клаузата; сега p (X)[X/a] = p (a) и тогава p (X) и p (a) имат резолвента true; получаваме следната резолвентна редица:
p (f (X)), p (X), true.
от горното следствие G = p (f (X)) е изпълнима при P;
нека G = p (X) & p (f (X)); отново строим резолвентна редица с начало G относно P; G[X/a] = p (a) & p (f (a)) ➔ G има резолвента

$p (f (a))$ с $p (a)$; ясно е, че $p (f (a))$ няма резолвента с никоя от клаузите от P; така получихме редицата
$p (X) \& p (f (X)), p (f (a))$.
$G[X/f (f (X))] = p (f (f (X))) \& p (f (f (f (X))))$ ➔ G има резолвента
$p (X) \& p (f (f (f (X))))$ с втората клауза; $p (X) \& p (f (f (f (X))))[X/a] =$
$= p (a) \& p (f (f (f (a))))$ има резолвента $p (f (f (f (a))))$ с първата клауза;
$p (f (f (f (a))))$ има резолвента само с втората клауза и тя е $p (f (a))$;
така получаваме редицата
$p (X) \& p (f (X)), p (X) \& p (f (f (f (X)))), p (f (f (f (a)))), p (f (a))$.
ако използваме само втората клауза ще получим една безкрайна резолвентна редица:
$p (X) \& p (f (X)), p (X) \& p (f^3 (X)), p (X) \& p (f^5 (X)), p (X) \& p (f^7 (X)), \ldots$;

нека P е множество от положителни хорнови клаузи;
нека G и G′ са хорнови цели; ще казваме, че G′ е **резолвентно достижима** от G относно P, ако съществува крайна резолвентна редица относно P с първи член G и последен член G′;

ясно е, че ако празната цел true е резолвентно достижима от някоя цел G относно P, то G е изпълнима при P;

свойства на релацията резолвентна достижимост относно P:
рефлексивност: за всяка хорнова цел G, G е резолвентно достижима от G относно P – действително редицата с един член G е резолвентна относно P с начало G и край G;
транзитивност: ако G′ е резолвентно достижима от G относно P и G″ е резолвентно достижима от G′ относно P, то G″ е резолвентно достижима от G относно P – достатъчно е да комбинираме двете резолвентни редици;

Намиране на частен случай на изпълнима хорнова цел, тъждествено верен във всички модели на дадено множество от положителни хорнови клаузи

нека P е множество от положителни хорнови клаузи;
нека G и G′ са хорнови цели и нека $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ е крайна редица от субституции;
ще казваме, че G′ е **резолвентно достижима** от G относно P **чрез редицата от субституции** $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, ако съществува такава редица $G_0, G_1, \ldots, G_n$ от хорнови цели, че:

1. $G_0 = G, G_n = G'$;
2. за $i = 1, 2, \ldots, n$ G_i е непосредствена резолвента на $G_{i-1}\sigma_i$ и някой частен случай на клауза от P;

ясно е, че редицата в дефиницията е резолвента редица относно P с начало G и край G′;

пример: нека P = { p (a), p (f (f (X)) **:–** p (X) }; нека G = p (f (X));
строим резолвентна редица относно P с начало G:
G_0 = p (f (X)), G_1 = p (X), G_2 = true.
при това частният случай на G_0, който има непосредствена резолвента G_1 с втората клауза от P е G_0[X/f (X)] = p (f (f (X)));
частният случай на G_1, който има непосредствена резолвента G_2 = true с първата клауза от P е G_1[X/a] = p (a);
така празната цел true е достижима от G относно P чрез редицата от субституции [X/f (X)], [X/a];

Теорема: ако празната цел true е резолвентно достижима от хорнова цел G относно P чрез редицата от субституции $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, то формулата $G\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$ е тъждествено вярна във всеки модел на P;
Доказателство: нека G = $G_0, G_1, \ldots, G_n$ = true е редица от хорнови цели, такава че за i = 1, 2, …, n G_i е непосредствена резолвента на $G_{i-1}\sigma_i$ и частен случай на клауза от P; с индукция по i = n, n-1, …0 ще покажем, че $G_i\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}\ldots\sigma_n$ е тъждествено вярна във всеки модел на P;
База: при i = n $G_n\sigma_{n+1}\ldots\sigma_n = G_n$ = true и формулата е вярна във всяка структура, в частност във всеки модел на P;
Предположение: нека $0 < i \leq n$ и $G_i\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}\ldots\sigma_n$ е тъждествено вярна във всеки модел на P;
Стъпка: ще покажем, че $G_{i-1}\sigma_i\sigma_{i+1}\ldots\sigma_n$ е тъждествено вярна във всеки модел на P; имаме, че G_i е непосредствена резолвента на $G_{i-1}\sigma_i$ и частен случай на клауза от P; тогава импликацията $G_i \rightarrow G_{i-1}\sigma_i$ е тъждествено вярна във всеки модел на P;
тогава всички частни случаи на $G_i \rightarrow G_{i-1}\sigma_i$ са тъждествено верни във всеки модел на P, в частност $(G_i \rightarrow G_{i-1})\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}\ldots\sigma_n =$
$= G_i\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}\ldots\sigma_n \rightarrow (G_{i-1}\sigma_i)(\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}\ldots\sigma_n) =$
$= G_i\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}\ldots\sigma_n \rightarrow G_{i-1}\sigma_i\sigma_{i+1}\ldots\sigma_n$ е тъждествено вярна във всеки модел на P (използвали сме асоциативност на умножението на субституции); по индукционното предположение $G_i\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}\ldots\sigma_n$ е тъждествено вярна във всеки модел на P $\Rightarrow$ $G_{i-1}\sigma_i\sigma_{i+1}\ldots\sigma_n$ е тъждествено вярна във всеки модел на P;
при i = 0 получаваме, че частният случай $G\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$ на G е тъждествено верен във всички модели на P;

пример: в горния пример, празната цел true е достижима от G = p (f (X)) относно P чрез редицата от субституции [X/f (X)], [X/a];
тогава G([X/f (X)][X/a]) = p (f (f (X)))[X/a] = p (f (f (a))) е тъждествено вярна във всички модели на P;

Пълнота на резолюцията между хорнови цели и хорнови клаузи

нека P е множество от положителни хорнови клаузи;

казваме, че една атомарна формула A е **резолвентно отстранима** относно P, ако при всеки избор на атомарните формули $B_1, B_2, \ldots, B_n$ $(n \geq 0)$ целта $B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ е резолвентно достижима от $A \& B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ относно P;

Лема: нека A е затворена формула, която е изводима от P; тогава A е резолвентно отстранима относно P;
Доказателство: нека $B_1, B_2, \ldots, B_n$ $(n \geq 0)$ са произволни атомарни формули; с индукция по дефиницията за изводимост ще покажем, че $B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ е резолвентно достижима от $A \& B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ относно P;
База: нека A е затворен частен случай на атомарна формула C от P; тогава $A \& B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ има резолвента $B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ с C ➔ $B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ е резолвентно достижима от $A \& B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ относно P, т.е. A е резолвентно отстранима относно P;
Предположение: нека A **:–** $C_1, C_2, \ldots, C_m$, $m > 0$ е затворен частен случай на клауза C от P и $C_1, C_2, \ldots, C_m$ са резолвентно отстраними относно P;
Стъпка: тогава $A \& B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ има непосредствена резолвента $C_1 \& C_2 \& \ldots \& C_m \& B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ с A **:–** $C_1, C_2, \ldots, C_m$ ➔ $A \& B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ има резолвента $C_1 \& C_2 \& \ldots \& C_m \& B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ с C, т.е. $C_1 \& C_2 \& \ldots \& C_m \& B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ е резолвентно достижима от $A \& B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ относно P; по индукционното предположение C_1 е резолвентно отстранима относно P ➔ $C_2 \& \ldots \& C_m \& B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ е резолвентно достижима от $C_1 \& C_2 \& \ldots \& C_m \& B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ относно P; по индукционното предположение C_2 е резолвентно отстранима относно P ➔ $C_3 \& \ldots \& C_m \& B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ е резолвентно достижима от $C_2 \& C_3 \& \ldots \& C_m \& B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ относно P; след m стъпки получаваме, че $B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ е резолвентно достижима от $C_m \& B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ относно P; по транзитивността на резолвентната достижимост получаваме, че $B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ е резолвентно достижима от $A \& B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n$ относно P;
така A е резолвентно отстранима относно P;

Теорема: нека P е множество от положителни хорнови клаузи; ако G е хорнова цел, която е изпълнима при P, то празната цел true е резолвентно достижима от G относно P, т.е. съществува крайна резолвентна редица относно P с начало G и край празната цел true;
Доказателство: първо ще проведем доказателството в частния случай когато G е затворена цел;
нека $G = A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n$, където $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са затворени атомарни формули; тъй като G е изпълнима при P, то G е изпълнима в минималния ербранов модел $\mathbf{S_P}$ ➔ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са верни в $\mathbf{S_P}$ ➔ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са изводими от P ➔ (горната лема) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са резолвентно отстраними относно P;

последователно получаваме: A_2 & A_3 & …& A_n е резолвентно достижима от A_1 & A_2 & …& A_n относно P; A_3 & A_4 & …& A_n е резолвентно достижима от A_2 & A_3 & …& A_n относно P;
след n стъпки получаваме, че празната цел true е резолвентно достижима от A_n относно P; по транзитивността на резолвентната достижимост получаваме, че празната цел true е достижима от G относно P;
нека G е произволна хорнова цел, която е изпълнима при P; тогава съществува затворен частен случай Gσ (σ - субституция) на G, който е верен във всички модели на P, т.е. Gσ е изпълним при P и от горните разсъждения празната цел true е резолвентно достижима от Gσ относно P, т.е. съществува резолвентна редица $G\sigma = G_0, G_1, \ldots, G_k$ = true относно P;
при k = 0 имаме Gσ = true ➔ G = true и очевидно true е резолвентно достижима от G относно P;
при k > 0 разглеждаме редицата $G, G_1, \ldots, G_k$ = true; твърдим, че това е резолвентна редица относно P – трябва да проверим, че G_1 е резолвента на G и някоя клауза от P; действително Gσ има непосредствена резолвента G_1 със затворен частен случай на клауза C от P ➔ G има резолвента G_1 с C; така празната цел true е резолвентно достижима от G относно P;

Търсене на атомарна формула, която е частен случай на всяка от две дадени атомарни формули

нека A и B са произволни атомарни формули; въпросът, който ще разглеждаме е съществува ли атомарна формула, която е частен случай както на A, така и на B, т.е. съществуват ли субституции α, β, такива че Aα = Bβ;

унификатор на атомарните формули A и B наричаме субституция σ, такава че Aσ = Bσ; ако A и B притежават унификатор, казваме че A и B са **унифицируеми**;

ако A и B са унифициеруеми, очевидно съществува атомарна формула, която е частен случай на A и на B; обратното в общия случай не е вярно; например:
нека A = p (a, Z), B = p (Z, b), където Z е променлива a, b са различни константи; имаме C = p (a, b) = A[Z/b] = B[Z/a], т.е. съществува атомарна формула, която е частен случай на A и на B; ще покажем, че A и B не са унифицируеми;
нека σ е произволна субституция и да допуснем, че Aσ = Bσ ➔ p (a, Zσ) = p (Zσ, b) и от еднозначния синтактичен анализ на атомарните формули ➔ a = Zσ = b, което е противоречие;

Твърдение: нека A и B са атомарни формули, такива че VAR (A) ∩ VAR (B) = ∅; ако съществува атомарна формула, която е частен случай на A и на B, то A и B са унифицируеми;

Доказателство: по условие съществуват субституции α, β такива че $A\alpha = B\beta$; разглеждаме изображението σ от Ξ в множеството на всички термове, $\sigma(x) = \alpha(x)$, ако $x \in VAR(A)$, $\sigma(x) = \beta(x)$, ако $x \in \Xi \setminus VAR(A)$; ясно е, че σ е субституция, тъй като $\sigma(x) \neq x$ най-много за променливите от $VAR(A) \cup VAR(B)$, които са краен брой; тъй като σ и α съвпадат върху $VAR(A)$, то $A\alpha = A\sigma$;
също, тъй като $VAR(A) \cap VAR(B) = \emptyset \Rightarrow VAR(B) \subset \Xi \setminus VAR(A) \Rightarrow$ σ и β съвпадат върху $VAR(B) \Rightarrow B\beta = B\sigma$;
така σ е унификатор на A и B;

нека A и B са произволни атомарни формули; както знаем, съществува вариант B′ на B, такъв че $VAR(A) \cap VAR(B') = \emptyset$; ясно е, че B′ и B имат едни и същи частни случаи; тогава една атомарна формула е частен случай на A и на B $\Leftrightarrow$ тя е частен случай на A и на B′; от горното твърдение, тъй като $VAR(A) \cap VAR(B') = \emptyset$, то съществува атомарна формула, която е частен случай на A и на B $\Leftrightarrow$ A и B′ са унифицируеми;
от доказателството на горната теорема заключаваме, че общият вид на атомарните формули, които са частни случаи на A и на B е $A\sigma$, където σ е унификатор на A и на B′;

пример: нека $A = p(a, Z)$, $B = p(Z, b)$; образуваме вариант $B' = p(X, b)$ на B, очевидно $VAR(A) \cap VAR(B') = \emptyset$;
търсим унификатор на A и на B′, т.е. субституция σ, такава че $A\sigma = B'\sigma$, т.е. $p(a, Z\sigma) = p(X\sigma, b)$; от еднозначния синтактичен анализ на атомарните формули получаваме, че $a = X\sigma$, $b = Z\sigma$;
една такава субституция σ е $[X/a, Z/b]$; имаме $A[X/a, Z/b] = p(a, b) = B'[X/a, Z/b]$; така A и B′ са унифицируеми и формулата $p(a, b)$ е частен случай на A и на B;

нека A и B са атомарни формули;
ако A и B имат различни предикатни символи или предикатни символи с различен брой аргументи, то очевидно A и B не са унифицируеми;

Решаване на системи от уравнения между термове

уравнение между термове наричаме формално равенство от вида $T = U$, където T и U са термове; **решение** на това уравнение наричаме субституция σ, такава че $T\sigma = U\sigma$;

под **система** от уравнения между термове разбираме крайно множество от уравнения: $T_1 = U_1$, $T_2 = U_2$, …, $T_n = U_n$, T_i, U_i са термове; една субституция σ наричаме **решение** на системата, ако тя е решение на всяко едно от уравненията, т.е. $T_1\sigma = U_1\sigma$, $T_2\sigma = U_2\sigma$, …, $T_n\sigma = U_n\sigma$;

Твърдение: нека $A = p(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ и $B = p(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ са атомарни формули с един и същ предикатен символ с един и същ брой аргументи; една субституция σ е унификатор на A и B $\Leftrightarrow$ σ е решение на системата $T_1 = U_1, T_2 = U_2, \ldots, T_n = U_n$;
Доказателство: нека σ е произволна субституция;
имаме $A\sigma = p(T_1\sigma, T_2\sigma, \ldots, T_n\sigma)$, $B\sigma = p(U_1\sigma, U_2\sigma, \ldots, U_n\sigma)$;
от еднозначния синтактичен анализ имаме:
$A\sigma = B\sigma \Leftrightarrow T_1\sigma = U_1\sigma, T_2\sigma = U_2\sigma, \ldots, T_n\sigma = U_n\sigma$, т.е. σ е унификатор на A и B $\Leftrightarrow$ σ е решение на системата $T_1 = U_1, T_2 = U_2, \ldots, T_n = U_n$;

пример: нека $A = p(X, f(X), Y)$, $B = p(f(Y), Z, c)$; тогава σ е унификатор на A и B $\Leftrightarrow$ σ е решение на системата:
$X = f(Y), f(X) = Z, Y = c$;

нека σ_1 и σ_2 са субституции; казваме, че σ_2 е **частен случай** на σ_1, ако съществува субституция δ, такава че $\sigma_2 = \sigma_1\delta$;

ще казваме, че една система в **решен вид**, ако тя има вида $x_1 = U_1, x_2 = U_2, \ldots, x_n = U_n$, където $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са две по две различни помежду си променливи, $U_1, U_2, \ldots, U_n$ са термове и $x_i \notin VAR(U_j)$ за всеки $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$;
тъй като $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са две по две различни помежду си можем да построим субституцията $\sigma_0 = [x_1/U_1, x_2/U_2, \ldots, x_n/U_n]$;

Твърдение: субституцията σ_0 е решение на горната система и ако σ е произволно решение на тази система, то $\sigma = \sigma_0\sigma$;
Доказателство: за $i = 1, 2, \ldots, n$ имаме $x_i\sigma_0 = U_i$, $U_i\sigma_0 = U_i\iota = U_i$, тъй като σ_0 и ι съвпадат върху $VAR(U_i)$; така $x_i\sigma_0 = U_i = U_i\sigma_0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ➔ σ_0 е решение на системата;
нека σ е произволно решение на системата, т.е. $x_i\sigma = U_i\sigma$, $i = 1, 2, \ldots, n$; тогава $x_i(\sigma_0\sigma) = (x_i\sigma_0)\sigma = U_i\sigma = x_i\sigma$, $i = 1, 2, \ldots, n$;
също за всяко $x \in \Xi \backslash \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $x(\sigma_0\sigma) = (x\sigma_0)\sigma = x\sigma$; така $\sigma = \sigma_0\sigma$;

нека $T_1 = U_1, T_2 = U_2, \ldots, T_n = U_n$ е система от уравнения между термове; нека σ е решение на системата; тогава всички частни случаи на σ също са решения : действително, нека δ е произволна субституция; за $i = 1, 2, \ldots, n$ имаме $T_i(\sigma\delta) = (T_i\sigma)\delta = (U_i\sigma)\delta = U_i(\sigma\delta)$ ➔ $\sigma\delta$ е решение на системата;

под **общо решение** на системата $T_1 = U_1, T_2 = U_2, \ldots, T_n = U_n$ разбираме решение σ, такова че всяко друго решение на системата е частен случай на σ; по-долу ще покажем, че ако една произволна система има решение, то тя има общо решение σ и тогава всички решения на системата се изчерпват с частните случаи на σ; в случая, когато системата е в решен вид, т.е. има вида $x_1 = U_1, x_2 = U_2, \ldots, x_n = U_n$, където $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са две по две различни помежду си променливи, от горното твърдение субституцията $\sigma_0 = [x_1/U_1, x_2/U_2, \ldots, x_n/U_n]$ е общо решение, така че решенията на системата се изчерпват със $\sigma_0\delta$, където δ е произволна субституция;

да разгледаме уравнение от вида $T = U$, където $T \notin \Xi$, $U \notin \Xi$, T и U имат различни функционални символи или функционални символи с различен брой аргументи; ясно е, че за всяка субституция σ имаме $T\sigma \neq U\sigma$, т.е. това уравнение няма решение;

да разгледаме уравнение от вида $x = U$, където $x \in \Xi$, U е терм, $U \neq x$ и $x \in VAR(U)$;

Твърдение: при горните предположения за всяка субституция σ имаме $x\sigma \neq U\sigma$, т.е. уравнението $x = U$ няма решение;
Доказателство: с индукция по построението ще покажем, че за всеки терм W, ако $x \in VAR(W)$ и $x \neq W$, то $|W\sigma| > |x\sigma|$ за всяка субституция σ;
База: ако W е константа, то $VAR(W) = \varnothing$ - противоречие ($x \in VAR(W)$); ако W е променлива, то от $x \in VAR(W)$ получаваме $W = x$ – противоречие ($W \neq x$);
Предположение: нека $W = f(W_1, W_2, \ldots, W_k)$ и твърдението е изпълнено за термовете $W_1, W_2, \ldots, W_k$;
Стъпка: нека σ е произволна субституция; имаме $W\sigma = f(W_1\sigma, W_2\sigma, \ldots, W_k\sigma)$; ясно е, че $|W\sigma| > |W_i\sigma|$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$; тъй като $x \in VAR(W)$, то $x \in VAR(W_i)$ за някое $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$; ако $W_i \neq x$, то по индукционното предположение $|W_i\sigma| > |x\sigma| \Rightarrow |W\sigma| > |W_i\sigma| > |x\sigma|$;
ако $W_i = x$, то $|W\sigma| > |W_i\sigma| = |x\sigma|$; така и в двата случая $|W\sigma| > |x\sigma|$;
сега, ако допуснем, че σ е решение на системата $x = U$ ще получим, че $|x\sigma| = |U\sigma|$, което е противоречие;

уравнения от горните два вида наричаме **явно нерешими**; казваме, че една система е **явно нерешима**, ако тя съдържа явно нерешимо уравнение; ясно е, че такава система няма решение;

две системи от уравнения между термове наричаме **еквивалентни**, ако множествата от решенията им съвпадат;

ще посочим четири еквивалентни преобразувания на системи, т.е. преобразувания чрез които една система преминава в еквивалентна на нея система;
нека $T_1 = U_1, T_2 = U_2, \ldots, T_n = U_n$ е система от уравнения между термове;

1. **премахване на тъждество** – ако за някое $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имаме $T_i = U_i$ премахваме това уравнение от системата;

системата очевидно преминава в еквивалентна на нея, тъй като премахнатото уравнение се удоволетворява от всяка субституция;

2. **разпадане** – ако за някое $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имаме $T_i = f(V_1, V_2, \ldots, V_m)$, $U_i = f(W_1, W_2, \ldots, W_m)$, $m > 0$ и $T_i \neq U_i$, заменяме уравнението $T_i = U_i$ с уравненията $V_1 = W_1, V_2 = W_2, \ldots, V_m = W_m$; системата преминава в еквивалентна на нея, тъй като σ е решение на $T_i = U_i$, т.е. $T_i\sigma = U_i\sigma \Leftrightarrow f(V_1\sigma, V_2\sigma, \ldots, V_m\sigma) = f(W_1\sigma, W_2\sigma, \ldots, W_m\sigma) \Leftrightarrow$ (от еднозначния синтактичен анализ) $V_1\sigma = W_1\sigma, V_2\sigma = W_2\sigma, \ldots, V_m\sigma = U_m\sigma$; изисква се $T_i \neq U_i$, тъй като при $T_i = U_i$ е удачно да се извърши премахване на тъждество;
3. **обръщане** – ако за някое $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имаме $T_i \notin \Xi$, $U_i \in \Xi$, то заменяме уравнението $T_i = U_i$ с $U_i = T_i$; очевидно системата преминава в еквивалентна на нея;
4. **заместване** – ако за някое $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имаме $T_i \in \Xi$, $T_i \notin VAR(U_i)$ и $T_i \in VAR(U_j) \cup VAR(T_j)$ за някое $j = 1, 2, \ldots, n$, то заменяме системата със следната:
$T_1[T_i/U_i] = U_1[T_i/U_i], \ldots, T_{i-1}[T_i/U_i] = U_{i-1}[T_i/U_i]$,
$T_i = U_i, T_{i+1}[T_i/U_i] = U_{i+1}[T_i/U_i], \ldots, T_n[T_i/U_i] = U_n[T_i/U_i]$;
ще покажем, че двете системи са еквивалентни;
да означим $\sigma_0 = [T_i/U_i]$; нека σ е произволно решение на изходната система; тъй като σ е решение на уравнението $T_i = U_i$, то $\sigma = \sigma_0\sigma$; за $j \neq i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $T_j\sigma = T_j(\sigma_0\sigma) = (T_j\sigma_0)\sigma$ и $U_j\sigma = U_j(\sigma_0\sigma) = (U_j\sigma_0)\sigma \Rightarrow (T_j\sigma_0)\sigma = (U_j\sigma_0)\sigma$; така σ е решение и на преобразуваната система;
нека σ е произволно решение на преобразуваната система; тъй като σ е решение на уравнението $T_i = U_i$, то $\sigma = \sigma_0\sigma$; за $j \neq i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $T_j\sigma = T_j(\sigma_0\sigma) = (T_j\sigma_0)\sigma$ и $U_j\sigma = U_j(\sigma_0\sigma) = (U_j\sigma_0)\sigma \Rightarrow T_j\sigma = U_j\sigma$, т.е. σ е решение на изходната система;

пример: да разгледаме горната система от уравнения между термове: $X = f(Y)$, $f(X) = Z$, $Y = c$; последователно извършваме еквивалентни преобразувания на системата:
(обръщане) $X = f(Y)$, $Z = f(X)$, $Y = c$;
(заместване) $X = f(Y)$, $Z = f(f(Y))$, $Y = c$;
(заместване) $X = f(c)$, $Z = f(f(c))$, $Y = c$;
получената система е в решен вид и нейното общо решение се дава със субституцията $\sigma_0 = [X/f(c), Z/f(f(c)), Y/c]$;
така унификаторите на формулите $A = p(X, f(X), Y)$ и $B = p(f(Y), Z, c)$ се изчерпват със $\sigma_0\delta$, където δ е произволна субституция;

Теорема: всяка система от уравнения между термове може да се приведе чрез четирите еквивалентни преобразувания до система в решен вид или до явно нерешима система;

Доказателство:
ще посочим алгоритъм за преобразуване на произволна система чрез еквивалентните преобразувания до система в решен вид или до явно нерешима система:

1. ако системата не е в решен вид или не е явно нерешима към 2.; иначе край;
2. към системата прилагаме някое от четирите еквивалентни преобразувания (което е възможно); към 1.;

ще докажем, че алгоритъмът е коректен; трябва да покажем, че:

- ако една система не е в решен вид и не е явно нерешима, то е възможно да се извърши някое от четирите преобразувания;
- алгоритъмът приключва след краен брой стъпки;

нека $T_1 = U_1$, $T_2 = U_2$, …, $T_n = U_n$ е система от уравнения между термове, която не е в решен вид и не е явно нерешима; да допуснем, че не е възможно да извършим никое от четирите преобразувания; ще покажем, че T_1, T_2, …, T_n са променливи;
да допуснем, че за някое $i \in \{ 1, 2, \ldots, n\}$ T_i не е променлива;
ако U_i е променлива, тогава можем да извършим обръщане – противоречие; ако U_i не е променлива и $T_i = U_i$, то можем да извършим премахване на тъждество – противоречие;
ако U_i е константа и $T_i \neq U_i$, то уравнението $T_i = U_i$ е явно нерешимо ➔ системата е явно нерешима – противоречие;
ако U_i е съставен терм, $T_i \neq U_i$ и T_i, U_i имат еднакви функционални символи с един и същ брой аргументи, то можем да извършим разпадане – противоречие; ако U_i е съставен терм, $T_i \neq U_i$ и T_i, U_i имат различни функционални символи или функционални символи с различен брой аргументи, то уравнението $T_i = U_i$ е явно нерешимо ➔ системата е явно нерешима – противоречие; във всички случаи получихме противоречие с допускането, че T_i не е променлива ➔ T_1, T_2, …, T_n са променливи;
за $i = 1, 2, \ldots, n$ имаме $T_i \neq U_i$, тъй като в противен случай можем да извършим премахване на тъждество;
по предположение системата е явно нерешима и тъй като $T_i \neq U_i$, то $T_i \notin VAR\ (U_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$;
ако допуснем, че за някои $i \neq j \in \{ 1, 2, \ldots, n\}$ $T_i \in VAR\ (U_j) \cup \{ T_j\}$ ще получим противоречие, тъй като в такъв случай можем да извършим заместване; така променливите T_1, T_2, …, T_n са две по две различни и $T_i \notin VAR\ (U_j)$ за всеки $i, j \in \{ 1, 2, \ldots, n \}$, т.е. системата е в решен вид – противоречие с допускането, че системата не в в решен вид; така към всяка система от уравнения между термове, която не е в решен вид и не е явно нерешима може да се приложи някое от четирите еквивалентни преобразувания;
ще покажем, че алгоритъмът завършва след краен брой стъпки;
нека T е терм; дефинираме височина на терма h (T) с индукция по построението:

База: ако T е променлива, дефинираме $h(T) = 1$; ако T е константа, дефинираме $h(T) = 2$;
Предположение: нека $T = f(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ и $h(T_1), h(T_2), \ldots, h(T_n)$ са дефинирани;
Стъпка: дефинираме $h(T) = h(T_1) + h(T_2) + \ldots + h(T_n) + 1$;
съвсем лесно с индукция по построението се проверява, че височината на всеки терм е строго положително число; при това термовете, които не са променливи имат височина строго по-голяма от 1;
под височина на системата от уравнения между термове $T_1 = U_1, T_2 = U_2, \ldots, T_n = U_n$ ще разбираме числото $h(T_1) + h(T_2) + \ldots + h(T_n)$; ще изследваме как се променя височината на системата при извършване на еквивалентните преобразувания:

- при премахване на тъждество височината строго намалява, тъй като от лявата страна премахваме терм и височината на всеки терм е строго положителна;
- при разпадане от лявата страна премахваме съставен терм $f(V_1, V_2, \ldots, V_m)$ и прибавяме термовете $V_1, V_2, \ldots, V_m$; от дефиницията за височина на терм височината на системата намалява с 1;
- при обръщане от лявата страна премахваме терм който не е променлива и го заменяме с променлива; тъй като всеки терм, който не е променлива има височина по-голяма от 1, а променливите имат височина 1, то височината на системата строго намалява;
- при заместване лявата страна или не се променя или променливи се заместват с термове, така че височината на системата или не се променя или нараства;

така при първите три преобразувания височината на системата строго намалява, така че алгоритъмът може да извърши само краен брой пъти тези преобразувания едно след друго, т.е. без извършване на заместване;
ще казваме, че системата от уравнения между термове $T_1 = U_1, T_2 = U_2, \ldots, T_n = U_n$ е решена относно променливата x, ако $x = T_i$ за някое $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $x \notin VAR(T_j) \cup VAR(U_j)$, $j \neq i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $x \notin VAR(U_i)$, т.е. x не се среща никъде другаде в системата освен като лява част на точно едно уравнение;
например, ако системата е в решен вид, то тя е решена относно променливите $T_1, T_2, \ldots, T_n$;
нека системата е решена относно променливата x, $x = T_i$;
ще покажем, че при всяко от еквивалентните преобразувания системата остава решена относно x:

- при премахване на тъждество не можем да премахнем $T_i = U_i$, тъй като $x \notin VAR(U_i) \Rightarrow T_i \neq U_i$; така системата остава решена относно x;
- при разпадане уравнението $T_i = U_i$ не се променя, тъй като T_i не е съставен терм; ясно е, че в новодобавените уравнения x

не присъства, тъй като *x* не присъства в уравнението, което се разпада; така системата остава решена относно *x*;
- при обръщане уравнението $T_i = U_i$ не се променя, тъй като T_i е променлива; системата очевидно остава решена относно *x*;
- при заместване не можем да използваме уравнението $T_i = U_i$, тъй като променливата *x* не се среща никъде другаде в системата; така заместваме променлива, различна от *x* и тогава получената системата ще остане решена относно *x*;

нека Ξ_0 е множеството от всички променливи, които се срещат в първоначалната система; очевидно Ξ_0 е крайно множество; разглеждаме броят на променливите от Ξ_0, относно които системата не е решена; съгласно горните разсъждения при извършване на кое да е от четирите еквивалентни преобразувания този брой не може да нарастне; освен това при заместване този брой намалява строго с 1: ако заместваме променливата T_i, то тази система не е решена относно T_i, тъй като T_i се среща поне на още едно място в системата; също $T_i \notin VAR\ (U_i)$ и след заместване на T_i с U_i в другите уравнения ще получим система, която е решена относно T_i;
от направените разсъждения получаваме, че алгоритъмът може да извърши само краен брой пъти заместване – в противен случай ще получим, че Ξ_0 е безкрайно множество;
така алгоритъмът извършва само краен брой пъти заместване и само краен брой пъти последователно първите три преобразувания, така че той приключва след краен брой стъпки;

след приключване на алгоритъма получената система очевидно е еквивалентна на изходната система; ако получената система е явно нерешима, то изходната система няма решение; ако получената система е в решен вид, общото решение на изходната система се дава с общото решение на получената система в решен вид; в частност всяка система, която има поне едно решение има общо решение и решенията на системата са частните случаи на общото решение;

Най-общ унификатор на две атомарни формули

Твърдение: ако A и B са две унифицируеми атомарни формули, то измежду техните унификатори има най-общ, т.е. съществува унификатор σ на A и B, така че всички унификатори на A и B са σδ, където δ е произволна субституция;
Доказателство: тъй като A и B са унифицируеми,
то $A = p\ (T_1, T_2, \ldots, T_n)$, $B = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$, $n \geq 0$;
при $n = 0$ очевидно тъждествената субституция ι е най-общ унификатор на A и B;
нека $n \geq 1$; тогава унификаторите на A и B са решенията на системата $T_1 = U_1, \ldots, T_n = U_n$; тази система има решение, тъй като A и B са унифицируеми, така че тя притежава общо решение σ и

всички други решения на системата са $\sigma\delta$, където δ е произволна субституция; така σ е най-общ унификатор на A и на B;

Най-обща резолвента на хорнова цел и хорнова клауза

нека G е хорнова цел, C е положителна хорнова клауза;
под **най-обща резолвента** на G и C разбираме такава резолвента R на G и C, че всички други резолвенти на G и C
са частни случаи на R; ясно е, че ако R е най-обща резолвента на G и C, то частните случаи на R и само те са резолвентите на G и C; действително, ако R е резолвента на G и C, т.е. R е непосредствена резолвента на $G\sigma'$ и $C\sigma''$, то $R\sigma$ е непосредствена резолвента на $G\sigma'\sigma$ и $C\sigma''\sigma$, т.е. $R\sigma$ е резолвента на G и C;

Твърдение: ако една хорнова цел G и положителна хорнова клауза C имат резолвента, то те имат и най-обща резолвента;
Доказателство: нека G и C имат резолвента; разглеждаме вариант C' на C, такъв че $VAR(G) \cap VAR(C') = \varnothing$; тъй като частните случаи на C и C' са едни и същи, то резолвентите на G и C и резолвентите на G и C' са едни и същи; така от това че G и C имат резолвента ➔ G и C' също имат резолвента; имаме, че частен случай на G съвпада с частен случай на C' ➔ частен случай на първия член на G съвпада с частен случай на заключението на C', но $VAR(G) \cap VAR(C') = \varnothing$ ➔ първия член на G и заключението на C' са унифицируеми атомарни формули; нека σ е най-общ унификатор на първия член на G и заключението на C';
разглеждаме формулите $G\sigma$ и $C'\sigma$; те имат непосредствена резолвента, тъй като първия член на $G\sigma$ съвпада със заключението на $C'\sigma$; нека R е непосредствена резолвента на $G\sigma$ и $C'\sigma$;
ясно е, че R е резолвента на G и C; ще покажем, че R е най-обща резолвента на G и C; нека R' е произволна резолвента на G и C, т.е. R' е непосредствена резолвента на $G\sigma_1$ и $C'\sigma_2$ за някои субституции σ_1, σ_2 (отновно използваме, че частните случаи на C и C' са едни и същи); дефинираме $\sigma'(x) = \sigma_1(x)$, ако $x \in VAR(G)$ и $\sigma'(x) = \sigma_2(x)$, ако $x \in \Xi \setminus VAR(G)$; σ' е субституция, тъй като от $\sigma'(x) \neq x$ следва $\sigma_1(x) \neq x$ или $\sigma_2(x) \neq x$, но $\sigma_1(x) \neq x$ или $\sigma_2(x) \neq x$ за краен брой променливи, така че $\sigma'(x) \neq x$ за краен брой променливи;
тъй като σ' и σ_1 съвпадат върху $VAR(G)$, то $G\sigma' = G\sigma_1$;
σ' и σ_2 съвпадат върху $VAR(C')$, тъй като $VAR(C') \cap VAR(G) = \varnothing$ ➔ $VAR(C') \subset \Xi \setminus VAR(G)$; така $C'\sigma' = C'\sigma_2$; така R' е непосредствена резолвента на $G\sigma'$ и $C'\sigma'$ ➔ първият член на $G\sigma'$ и заключението на $C'\sigma'$ съвпадат ➔ σ' е унификатор на първия член на G и заключението на C'; от друга страна σ е най-общ унификатор на първия член на G и заключението на C' ➔ $\sigma' = \sigma\delta$ за някоя субституция δ; така $G\sigma' = G\sigma\delta$, $C'\sigma' = C'\sigma\delta$; имаме, че R е

непосредствена резолвента на $G\sigma$ и $C'\sigma$ ➔ $R\delta$ е непосредствена резолвента на $G\sigma\delta = G\sigma'$ и $C'\sigma\delta = C'\sigma'$, т.е. $R\delta = R'$;
така R е най-обща резолвента на G и C;

ясно е, че най-общата резолвента на хорнова цел и положителна хорнова клауза е определена с точност до вариант;

Пълнота на резолюцията между хорнови цели и хорнови клаузи при използване на канонични резолвентни редици

нека P е множество от положителни хорнови клаузи;
редицата от хорнови цели $G_0, G_1, \ldots, G_n, \ldots$наричаме **канонична резолвентна редица** относно P, ако за всяко $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ имаме G_i е най-обща резолвента на G_{i-1} с някоя клауза от P;

нека $C_1, C_2, \ldots, C_n$ е редица от положителни хорнови клаузи;
резолвентна редица, съответна на редицата $C_1, C_2, \ldots, C_n$ наричаме редица $G_0, G_1, \ldots, G_n$ от хорнови цели, така че за $i = 1, 2, \ldots, n$ имаме G_i е резолвента на G_{i-1} и C_i;
казваме още, че G_n е **резолвентно достижима** от G_0 **чрез редицата** $C_1, C_2, \ldots, C_n$ или, че G_n **е резолвента** на G_0 с редицата $C_1, C_2, \ldots, C_n$;

нека $C_1, C_2, \ldots, C_n$ е редица от положителни хорнови клаузи;
канонична резолвентна редица, съответна на редицата $C_1, C_2, \ldots, C_n$ наричаме редица $G_0, G_1, \ldots, G_n$ от хорнови цели, така че за $i = 1, 2, \ldots, n$ имаме G_i е най-обща резолвента на G_{i-1} и C_i;
казваме още, че G_n е **канонично резолвентно достижима** от G_0 **чрез редицата** $C_1, C_2, \ldots, C_n$ или, че G_n **е канонична резолвента** на G_0 с редицата $C_1, C_2, \ldots, C_n$;

Твърдение: нека G има канонична резолвента G' с редицата от положителни хорнови клаузи $C_1, C_2, \ldots, C_n$; тогава G' е най-обща измежду резолвентите на G с редицата $C_1, C_2, \ldots, C_n$;
Доказателство: нека $G = G_0, G_1, \ldots, G_n = G'$ е канонична резолвента редица, съответна на редицата $C_1, C_2, \ldots, C_n$, т.е. за $i = 1, 2, \ldots, n$ G_i е най-обща резолвента на G_{i-1} и C_i; нека R е произволна резолвента на G с редицата $C_1, C_2, \ldots, C_n$;
нека $G = R_0, R_1, \ldots, R_n = R$ е резолвентна редица, съответна на редицата $C_1, C_2, \ldots, C_n$, т.е. за $i = 1, 2, \ldots, n$ R_i е резолвента на R_{i-1} и C_i; с индукция по $i = 1, 2, \ldots, n$ ще покажем, че R_i е частен случай на G_i; в частност при $i = m$ получаваме, че R е частен случай на G', което доказва твърдението;
База: при $i = 0$ имаме $R_0 = G_0 = G$ и очевидно R_0 е частен случай на G_0;
Предположение: нека $1 \le i \le n$ и R_{i-1} е частен случай на G_{i-1};

Стъпка: от индукционното предположение R_{i-1} е частен случай на G_{i-1} и R_i е резолвента на R_{i-1} и C_i, то R_i е резолвента на G_{i-1} и C_i; от друга страна G_i е най-обща резолвента на G_{i-1} и C_i ➔ R_i е частен случай на G_i;

Теорема: нека G има резолвента с редицата от положителни хорнови клаузи $C_1, C_2, \ldots, C_n$; тогава G има канонична резолвента с редицата $C_1, C_2, \ldots, C_n$;
Доказателство: провеждаме индукция по n;
База: при $n = 1$ G има резолвента с C_1 ➔ G има най-обща резолвента G_1 с C_1 и G, G_1 е канонична резолвентна редица относно едночленната редица C_1;
Предположение: нека $1 \leq m < n$ и е изпълнено, че ако G има резолвента с редицата $C_1, C_2, \ldots, C_m$, то G има канонична резолвента с редицата $C_1, C_2, \ldots, C_m$;
Стъпка: нека G има резолвента с редицата $C_1, C_2, \ldots, C_m, C_{m+1}$; ясно е, че в такъв случай G има резолвента G' с редицата $C_1, C_2, \ldots, C_m$ и G' има резолвента G'' с C_{m+1}; от индукционното предположение G има канонична резолвента R с $C_1, C_2, \ldots, C_m$ и от предното твърдение G' е частен случай на R; при това положение R има резолвента G'' с C_{m+1}, тъй като всеки частен случай на G' е частен случай на R ➔ R има най-обща резолвента R' с C_{m+1}; тъй като R е канонична резолвента на G с редицата $C_1, C_2, \ldots, C_m$ и R' е най-обща резолвента на R и C_{m+1}, то R' е канонична резолвента на G с редицата $C_1, C_2, \ldots, C_m, C_{m+1}$;

да разгледаме един пример;
нека е дадено следното множество от положителни хорнови клаузи: P = { p (f (f (X)), f (X)) ; p (X, f (Y)) **:–** p (X, f (Z)), p (Y, Z) };
нека G е хорновата цел p (U, U);
питаме се дали G е изпълнима при P; за тази цел true трябва да е резолвентно достижима от G относно P и тогава true трябва да е канонично резолвентно достижима относно P;
търсим най-обща резолвента на G с първата клауза;
тъй като G и първата клауза нямат общи променливи, не е нужно да образуваме вариант на клаузата; решаваме следната система от термове: U = f (f (X)), U = f (X) → (заместване) f (X) = f (f (X)), U = f (X) → (разпадане) X = f (X), U = f (X); получихме явно нерешима система; така G няма резолвента с първата клауза;
търсим най-обща резолвента на G с втората клауза;
отново няма нужда от вариант на клаузата; решаваме следната система от термове: U = X, U = f (Y) → (заместване) U = X, X = f (Y) → (заместване) U = f (Y), X = f (Y); получихме система в решен вид и нейното общо решение е субституцията [U/f (Y), X/f (Y)], която е най-общ унификатор на атомарните формули p (X, f (Y)) и p (U, U); частните случаи p (f (Y), f (Y)) **:–** p (f (Y), f (Z)), p (Y, Z) и p (f (Y), f (Y)) на втората клауза и G имат непосредствена резолвента p (f (Y), f (Z)), p (Y, Z), която е най-обща резолвента на G и втората клауза; да означим с G_1 новата цел p (f (Y), f (Z)), p (Y, Z);

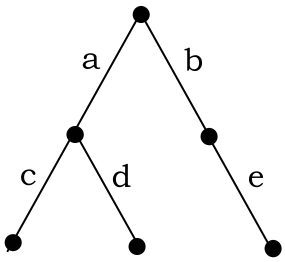
търсим най-обща резолвента на G_1 с първата клауза;
тъй като G_1 няма общи променливи с първата клауза, няма нужда да образуваме вариант на клаузата; решаваме следната система от термове: $f(Y) = f(f(X)), f(Z) = f(X) \rightarrow$ (разпадане) $Y = f(X), f(Z) = f(X)$ $\rightarrow$ (разпадане) $Y = f(X), Z = X$; получихме система в решен вид и нейното общо решение е субституцията $[Y/f(X), Z/X]$, която е най-общ унификатор на атомарните формули $p(f(Y), f(Z))$ и $p(f(f(X)), f(X))$; така частните случаи $p(f(f(X)), f(X))$ и $p(f(f(X)), f(X)), p(f(X), X)$ на първата клауза и целта G_1 имат непосредствена резолвента $p(f(X), X)$, която е най-обща резолвента на първата клауза и G_1; да означим с G_2 новата цел $p(f(X), X)$;
търсим най-обща резолвента на G_2 с първата клауза;
тъй като G_2 и първата клауза имат общи променливи, трябва да вземем вариант на клаузата, който няма общи променливи с G_2, например $p(f(f(T)), f(T))$; решаваме следната система от термове: $f(X) = f(f(T)), X = f(T) \rightarrow$ (разпадане) $X = f(T), X = f(T) \rightarrow$ (заместване) $f(T) = f(T), X = f(T) \rightarrow$ (премахване на тъждество) $X = f(T)$; получихме система в решен вид с най-общо решение субституцията $[X/f(T)]$, която е най-общ унификатор на атомарните формули $p(f(f(T)), f(T))$ и $p(f(X), X)$; така частните случаи $p(f(f(T)), f(T))$ и $p(f(f(T)), f(T))$ на първата клауза и целта G_2 имат непосредствена резолвента празната цел true, така че първата клауза има резолвента true с целта G_2;
получихме канонична резолвентна редица G, G_1, G_2, true относно двете клаузи $\Rightarrow$ G е изпълнима при P, т.е. G е изпълнима във всички модели на P;
за да намерим частен случай на G, който е тъждествено верен във всички модели на P образуваме композиция на субституциите $[U/f(Y), X/f(Y)][Y/f(X), Z/f(X)][X/f(T)] =$
$= [U/f(f(f(T))), X/f(f(f(T))), Y/f(f(T)), Z/f(f(T))] = \sigma$;
така частният случай $G\sigma = p(U\sigma, U\sigma) = p(f(f(f(T))), f(f(f(T))))$ е тъждествено верен във всички модели на P;
ще отбележим, че ако на втората или третата стъпка изберем да търсим най-обща резолвента с втората клауза от P, то в общия случай можем да получим и други канонични резолвентни редици с начало G и край true;

Дърво на търсене за хорнова цел при хорнова програма

нека P е множество; нека T е непразно множество от крайни редици с елементи от P (допускаме празната редица);
казваме, че T е **дървовидно**, ако от $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in T \Rightarrow (p_1, \ldots, p_k) \in T$ за всяко $k = 0, 1, \ldots, n-1$, т.е. T съдържа началата на всички свои редици; естествено $() \in T$, тъй като $()$ е начало на всяка редица;

образуваме следния граф: G_T (T, E), E = { ((p_1, …, p_n), (p_1, …, p_{n+1})), (p_1, …, p_{n+1}) ∈ T } ; ясно е, че G_T е свързан граф, тъй като съществува път от () до всеки елемент на T; при това този път е единствен: ако (p_1, …, p_n) ∈ T, то (), (p_1), …, (p_1, …, p_n) е единственият път от () до (p_1, …, p_n); така G_T е дърво;

например при P = { a, b, c, d, e } и T = { (), (a), (b), (a, c), (a, d), (b, e) } дървото G_T можем да изобразим по следния начин:



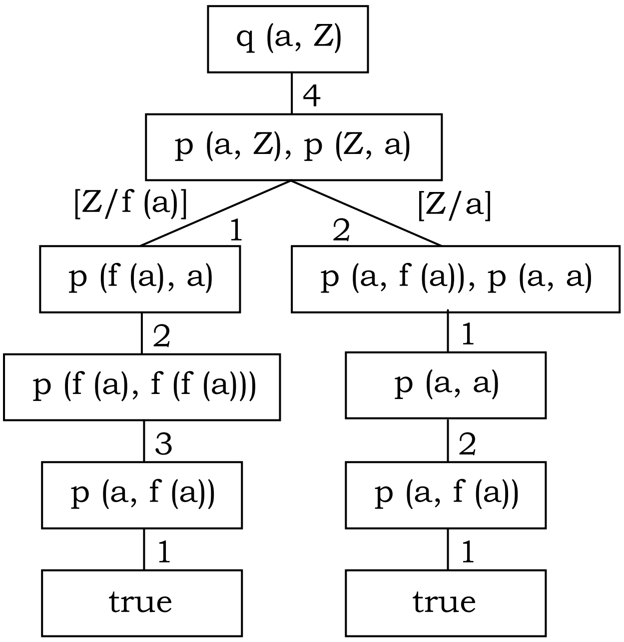
върховете съответстват на елементите на T – коренът на дървото съответства на празната редица (); редицата, съответна на даден връх се получава по следния начин : образуваме единствения път от () до тази редица, но вместо самите ребра записваме етикетите им, които са елементи на P;

нека P е хорнова програма; нека G е хорнова цел;
нека T е множеството от онези крайни редици от клаузи от P, такива че G има резолвента с тези редици;
T е дървовидно : нека (C_1, C_2, …, C_n) ∈ T, т.е. съществува редица от хорнови цели G = G_0, G_1, …, G_n, такива че G_i е непосредствена резолвента на G_{i-1} и C_i, i = 1, …, n; тогава за k = 0, …, n-1 имаме, че (C_1, C_2, …, C_k) ∈ T, тъй като G_0, G_1, …, G_k е редица от хорнови цели, такава че G_i е непосредствена резолвента на G_{i-1} и C_i, i = 1, 2, …, k; дървото G_T наричаме **дърво на търсенето** за G при програмата P; ясно е, че разклонеността на G_T е по-малка или равна на броя на клаузите в P;

една цел G наричаме **успяваща** в програмата P, ако дървото G_T съдържа лист, който е надписан с празната цел true; в противен случай, казваме че G е **пропадаща** в програмата P; ясно е, че ако G е успяваща в програмата P, то G е изпълнима при P; при това, ако при построяването на G_T се използват само най-общи резолвенти, то от пълнотата на резолюцията при използване на канонични резолвентни редици получаваме, че ако G е изпълнима при P, то G е успяваща в P;

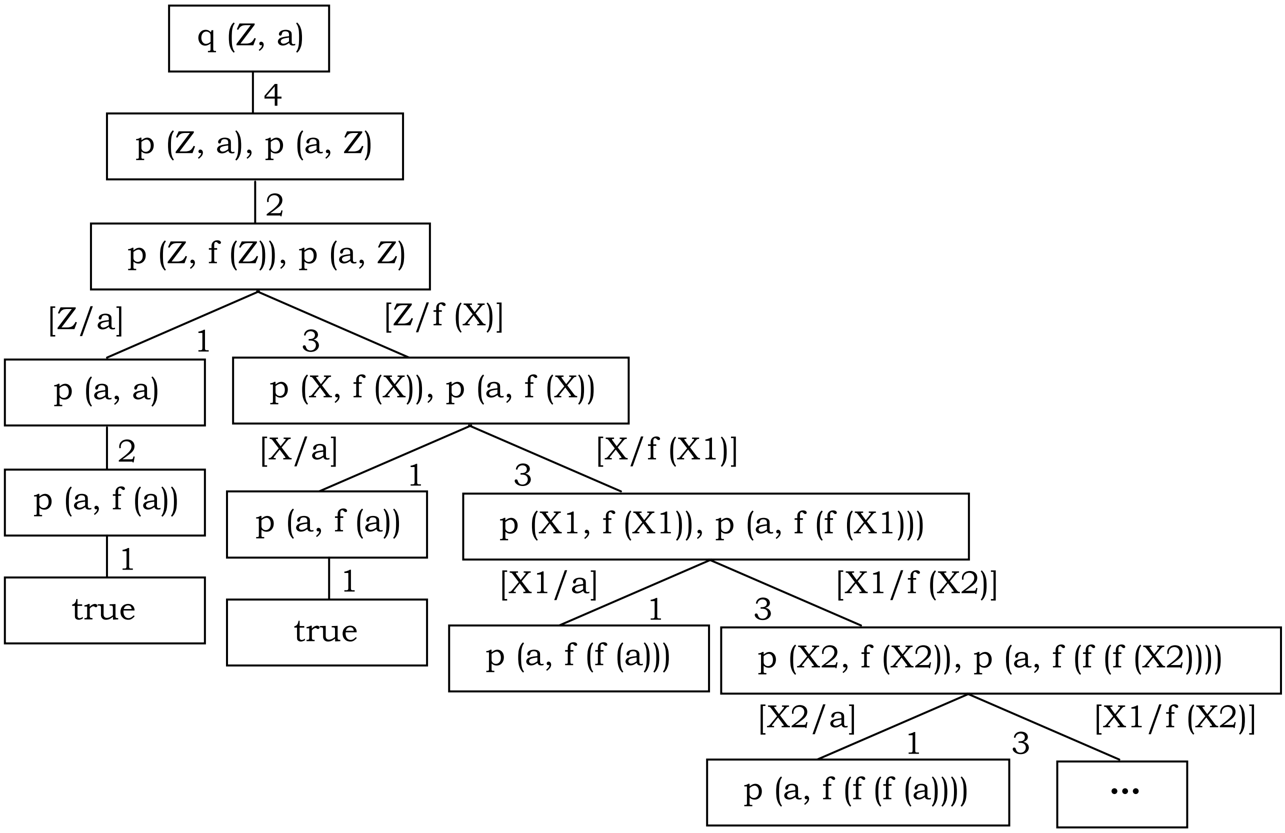
при построяване на дървото G_T ще използваме само най-общи резолвенти; изобразяваме го по следния начин: във върховете на дървото записваме целта, която е канонична резолвента на G с редицата, получена от единствения път от корена на дървото до съответния връх като проследим етикетите на ребрата; при това, ако при образуване на съответната резолвента използваме частен случай на целта в етикета на реброто отбелязваме субституцията, която е използвана;

пример: да разгледаме следната хорнова програма
P = { p (a, f (a)), p (X, a) **:–** p (X, f (X)), p (f (X), f (Y)) **:–** p (X, Y), q (X, Y) **:–** p (X, Y), p (Y, X) }; за удобство номерираме клаузите в реда в който са дадени с 1, 2, 3, 4;
нека G = q (a, Z); строим дървото на търсене на хорновата цел G при програмата P, при това използваме само най-общи резолвенти;



така целта G = q (a, Z) е успяваща в програмата P ➔ G е изпълнима при P; при това частните случаи q (a, Z)[Z/f (a)] = q (a, f (a)) и q (a, Z)[Z/a] = q (a, a) на q (a, Z) са вярни във всеки модел на P;

нека G = q (Z, a); строим дървото на търсене на хорновата цел G при програмата P, при това използваме само най-общи резолвенти;



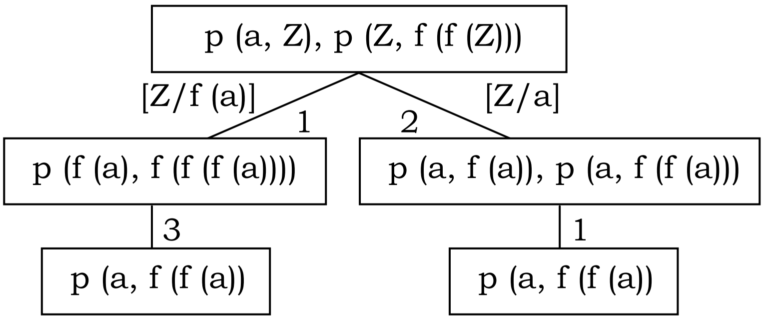
получаваме, че дървото на търсенето на целта G при програмата P е безкрайно; целта G = q (Z, a) е успяваща в P ➔ G е изпълнима при P; при това частните случаи q (Z, a)[Z/a] = q (a, a) и q (Z, a)/[Z/f (x)][X/a] = q (f (a), a) на q (Z, a) са вярни във всеки модел на програмата P; ясно е, че изобразените две листа на G_T са единствените, надписани с true в G_T;

в езика PROLOG дървото на търсенето се генерира в дълбочина, а не в широчина, както по-горе го построихме; при това положение е възможно една цел да е успяваща, но PROLOG да не може да разбере това;

една цел G наричаме **напълно успяваща** в програмата P, ако в дървото G_T има лист, надписан с true и наляво от този лист има само краен брой върхове; една цел G наричаме **напълно пропадаща** в програмата P, ако G е пропадаща и дървото G_T има краен брой върхове;

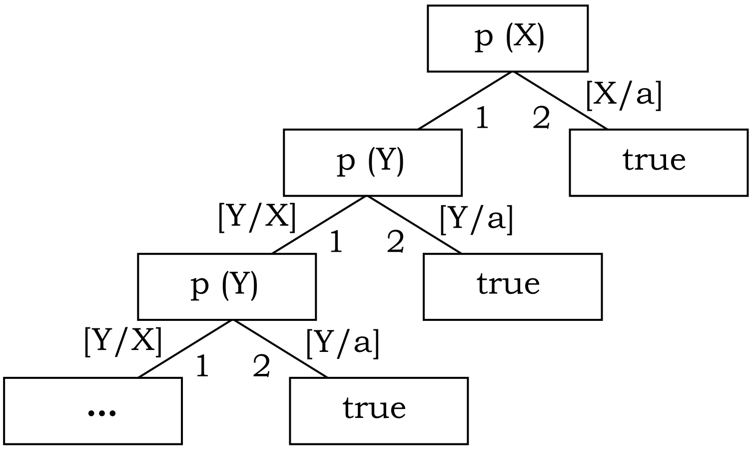
така, ако една цел G е успяваща в P, то PROLOG може да разбере това само ако G е напълно успяваща; ако една цел G е пропадаща в P, PROLOG може да разбере това само ако G е напълно пропадаща; например в горните два примера и двете цели са напълно успяващи;

да разгледаме друг пример; нека G = p (a, Z), p (Z, f (f (Z))); строим дървото на търсене на хорновата цел G при програмата P, при това използваме само най-общи резолвенти;



така целта G е пропадаща в P; при това, тя е напълно пропадаща, тъй като дървото на търсенето е крайно;

ще разгледаме още един пример; нека P = { p (X) **:–** p (Y), p (a) };
за удобство номерираме клаузите в реда, в който са
посочени с 1, 2; нека G = p (X); строим дървото на търсене на хорновата цел G при програмата P, при това използваме само най-общи резолвенти;



така целта G = p (X) е успяваща в P, но тя не е напълно успяваща; при това положение PROLOG не може да разбере дали G е успяваща;

Представяне на безкванторни формули в конюнктивна нормална форма

казваме, че една формула е **елементарна дизюнкция**, ако тя се представя във вида $L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$, $n \geq 0$, където $L_1, L_2, \ldots, L_n$ са литерали;
казваме, че една формула е в **конюнктивна нормална форма**, ако тя има вида D_1 & D_2 & … & D_n, $n \geq 0$, където $D_1, D_2, \ldots, D_n$ са елементарни дизюнкции;

за всяка безкванторна формула F, която не е атомарна дефинираме **преработено отрицание** -F:
ако F = true, -F = fail;
ако F = fail, -F = true;
ако $F = \neg G$, $-F = G$;
ако $F = G_1 \vee G_2 \vee \ldots \vee G_n$, $n > 1$, $-F = \neg G_1 \,\&\, \neg G_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \neg G_n$;
ако $F = G_1 \,\&\, G_2 \,\&\, \ldots \,\&\, G_n$, $n > 1$, $-F = \neg G_1 \vee \neg G_2 \vee \ldots \vee \neg G_n$;

ясно е, че за всяка формула F, която не е атомарна е изпълнено:
$\neg F \equiv -F$;

за всяка безкванторна формула F дефинираме **заменящо множество** на F:
ако F е елементарна дизюнкция, заменящото множество на F е $\{ F\}$;
нека F не е елементарна дизюнкция; тогава F може да се представи във вида $F = F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$, където $n > 0$, тъй като fail е елементарна дизюнкция; при това, ако $n = 1$ можем да считаме, че F_1 не е дизюнкция с повече от един член;
тъй като F не е елементарна дизюнкция,
то F_i не е литерал за някое $i \in \{ 1, 2, \ldots, n \}$;
ако F_i = true, заменящото множество на F е $\varnothing$;
ако F_i = fail, заменящото множество на F е
$\{ F_1 \vee \ldots \vee F_{i-1} \vee F_{i+1} \vee \ldots \vee F_n\}$; при това $n > 1$, тъй като F не е елементарна дизюнкция;
ако $F_i = \neg G$, заменящото множество на F е
$\{ F_1 \vee \ldots \vee F_{i-1} \vee -G \vee F_{i+1} \vee \ldots \vee F_n\}$; при това G не е атомарна формула, тъй като F_i не е литерал, така че -G е дефинирано;
ако $F_i = G_1 \,\&\, G_2 \,\&\, \ldots \,\&\, G_k$, $k > 1$, заменящото множество на F е
$\{ F_1 \vee \ldots \vee F_{i-1} \vee G_j \vee F_{i+1} \vee \ldots \vee F_n \mid j = 1, 2, \ldots, k \}$;
ако $F_i = G_1 \vee G_2 \vee \ldots \vee G_k$, $k > 1$, заменящото множество на F е
$\{ F_1 \vee \ldots \vee F_{i-1} \vee G_1 \vee G_2 \vee \ldots \vee G_k \vee F_{i+1} \vee \ldots \vee F_n\}$; при това $n > 1$, тъй като при $n = 1$ имаме, че F_1 не е дизюнкция с повече от един член;

съвсем лесно се вижда, че ако F е безкванторна формула, конюнкцията на елементите на кое да е заменящо множество на F е еквивалентна на F; например, в горните означения, ще покажем това в случая $F_i = G_1 \,\&\, G_2 \,\&\, \ldots \,\&\, G_k$, $k > 1$; заменящото множество на F е $\{ F_1 \vee \ldots \vee F_{i-1} \vee G_j \vee F_{i+1} \vee \ldots \vee F_n \mid j = 1, 2, \ldots, k \}$;
нека **S** е структура, **v** е оценка на променливите в **S**;
да предположим, че $F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 1$; тогава $F_j^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 1$ за някое $j \in \{ 1, 2, \ldots, n \}$; нека $j \neq i$; тогава формулите в заменящото множество са дизюнкции, които имат член F_j, така че тези формули са вярни в **S** при оценката **v** ➔ конюнкцията им е вярна в **S** при оценката **v**; ако $j = i$, то $(G_1 \,\&\, G_2 \,\&\, \ldots \,\&\, G_k)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = 1$ ➔ $G_1, G_2, \ldots, G_k$ са верни в **S** при оценката **v**; тогава формулите в заменящото множество са дизюнкции, които имат член G_m за някое $m \in \{ 1, 2, \ldots, k \}$, така че тези формули са вярни в **S** при оценката **v** ➔ конюнкцията им е вярна в **S** при оценката **v**;

обратно, нека конюнкцията на формулите в заменящото множество е вярна в **S** при оценката **v**; тогава тези формули са верни в **S** при оценката **v** и тъй като тези формули са дизюнкции, то във всяка от тях поне един член е верен в **S** при оценката **v**; ако за някоя формула този член е F_j за някое $j \in \{ 1, \dots, i\text{-}1, i\text{+}1, \dots, n \}$ ➔ F е вярна в **S** при оценката **v**, тъй като F е дизюнкция, която има член F_j; ако за всички формули този член е G_m, $m = 1, 2, \dots, k$, то $F_i = G_1$ & G_2 & … & G_k е вярна в **S** при оценката **v** ➔ F е вярна в **S** при оценката **v**, тъй като F е дизюнкция, която има член F_i;

Теорема: За всяка безкванторна формула съществува еквивалентна формула в конюнктивна нормална форма;
Доказателство: нека F е безкванторна формула;
ще посочим алгоритъм, по който се построява еквивалентна на F формула в конюнктивна нормална форма;

1. M = { F };
2. за всяка формула от множеството M образуваме заменящо множество; нека M′ е обединението на получените заменящи множества;
3. ако M′ се състои само от елементарни дизюнкции, към 4.; иначе M = M′, към 2.;
4. нека G е конюнкцията на всички формули от M′; търсената формула е G; край;

ясно е, че G е в конюнктивна нормална форма, тъй като на последната стъпка M′ се състои само от елементарни дизюнкции; на всяка стъпка, конюнкцията на формулите от M′ е еквивалентна на формулата F съгласно горните съображения, така че на последната стъпка получаваме, че F ≡ G;
не е трудно да се покаже, че алгоритъмът завършва след краен брой стъпки – достатъчно е да се дефинира по подходящ начин сложност на формула и да се покаже, че на всяка стъпка от алгоритъма сложността на формулите в M′ строго намалява, докато те не се преобразуват в елементарни дизюнкции;

Метод на резолюцията за множество от дизюнкти

под **дизюнкт** разбираме крайно множество от литерали; празното множество наричаме **празен дизюнкт**;

на всяка елементарна дизюнкция можем еднозначно да съпоставим дизюнкт – множеството от членовете на дизюнкцията; това съпоставяне не е взаимноеднозначно – на различни елементарни дизюнкции може да отговаря един и същи дизюнкт;

нека **S** е структура, **v** е оценка на променливите, D е дизюнкт; казваме, че D е **верен** в **S** при оценката **v**, ако съществува $L \in D$, така че $L^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1$; така празният дизюнкт не е верен в никоя структура при никоя оценка;
ако **S** е структура, D е дизюнкт, казваме че D е **тъждествено верен** в **S**, ако D е верен в **S** при всяка оценка на променливите;

ясно е, че ако **S** е структура, **v** е оценка на променливите в **S**, то една елементарна дизюнкция е вярна в **S** при оценката **v** ⇔ нейният съответен дизюнкт е верен в **S** при оценката **v**;
също една елементарна дизюнкция е тъждествено вярна в **S** ⇔ нейният съответен дизюнкт е тъждествено верен в **S**;

нека D_1 и D_2 са дизюнкти; нека $L_1 \in D_1$, $L_2 \in D_2$ и L_1, L_2 са противоположни литерали; множеството $D = (D_1 \setminus \{L_1\}) \cup (D_2 \setminus \{L_2\})$ наричаме **непосредствена резолвента** на дизюнктите D_1 и D_2; ясно е, че D е дизюнкт, тъй като D също е крайно множество от литерали;

Твърдение: нека D_1 и D_2 са дизюнкти; нека D е непосредствена резолвента на D_1 и D_2; нека **S** е структура, **v** е оценка на променливите в **S**; ако D_1 и D_2 са вярни в **S** при оценката **v**, то D е верен в **S** при оценката **v**;
Доказателство: имаме $D = (D_1 \setminus \{L_1\}) \cup (D_2 \setminus \{L_2\})$, където $L_1 \in D_1$ и $L_2 \in D_2$ са противоположни литерали; нека D_1 и D_2 са вярни в **S** при оценката **v**; тогава някой литерал $L \in D_1$ е верен в **S** при оценката **v** и някой литерал $L' \in D_1$ е верен в **S** при оценката **v**; ако допуснем, че $L = L_1$ и $L' = L_2$ ще получим, че противоположните литерали L_1 и L_2 са вярни в **S** при оценката **v** – противоречие; така $L \neq L_1$ или $L' \neq L_2$ ➔ $L \in D$ или $L' \in D$; така в D има литерал, който е верен в **S** при оценката **v** ➔ D е верен в **S** при оценката **v**;

като следствие получаваме, че ако D_1 и D_2 са тъждествено вярни в **S**, то непосредствената резолвента D също е тъждествено вярна в **S**;

нека D е дизюнкт, σ е субституция; дефинираме $D\sigma$ - **резултат от прилагането** на σ върху D по следния начин: $D\sigma = \{ L\sigma \mid L \in D \}$; ясно е, че $D\sigma$ също е дизюнкт, тъй като ако L е литерал, то $L\sigma$ също е литерал; при това, ако F е елементарна дизюнкция и D е нейният съответен дизюнкт, то е ясно, че съответният дизюнкт на $F\sigma$ е $D\sigma$; дизюнктът $D\sigma$ наричаме **частен случай** на дизюнкта D; ще отбележим, че е възможно $D\sigma$ да има по-малко членове от D – например, ако σ е унификатор на някои два литерала от D;

Твърдение: нека D е дизюнкт, **S** е структура; ако D е тъждествено верен в **S**, то всеки частен случай на D е тъждествено верен в **S**;
Доказателство: нека D е тъждествено верен в **S**; тогава $D \neq \varnothing$,

$D = \{ L_1, L_2, \ldots, L_n\}$, $n \geq 1$; образуваме елементарната дизюнкция $F = L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$; от по-горе F е тъждествено вярна в **S**; нека σ е субституция; имаме $D\sigma = \{ L_1\sigma, L_2\sigma, \ldots, L_n\sigma \}$; от друга страна $F\sigma = L_1\sigma \vee L_2\sigma \vee \ldots \vee L_n\sigma$; тъй като F е тъждествено вярна в **S**, то Fσ е тъждествено вярна в **S** и от по-горе Dσ също е тъждествено верен в **S**;

нека D_1 и D_2 са дизюнкти; дизюнктът D наричаме **резолвента** на D_1 и D_2, ако D е непосредствена резолвента на някой частен случай на D_1 и някой частен случай на D_2;

Твърдение: ако D_1 и D_2 са тъждествено вярни в някаква структура **S** и D е резолвента на D_1 и D_2, то D е тъждествено верен в **S**;
Доказателство: непосредствено от предните две твърдения;

нека M е множество от дизюнкти; **модел** на M наричаме структура, в която всички дизюнкти от M са тъждествено вярни; разглеждаме въпроса дали съществува модел на M;

дефинираме **резолвентна изводимост** на дизюнкт от множеството M с индукция по следния начин:
База: всички дизюнкти от M са резолвентно изводими от M;
Предположение: нека D_1 и D_2 са дизюнкти, които са резолвентно изводими от M;
Стъпка: ако D_1 и D_2 притежават резолвента D, то дизюнктът D е резолвентно изводим от M;
Заключение: няма други дизюнкти, които са резолвентно изводими от M;

нека **S** е модел на M;
с индукция по дефиницията се вижда, че ако един дизюнкт D е резолвентно изводим от M, то D е тъждествено верен в **S**;
при това положение, ако празният дизюнкт е резолвентно изводим от M, то M няма модел : ако допуснем, че M има модел **S**, ще получим, че празният дизюнкт е тъждествено верен в **S**, което е противоречие;

вярно е обратното твърдение – ако M няма модел, то празният дизюнкт е резолвентно изводим от M; това твърдение съвсем не е тривиално и е известно като **теорема за пълнота на метода на резолюцията**;

така методът на резолюцията се основава на следния критерий за неизпълнимост : едно множество от дизюнкти M е неизпълнимо ⇔ празният дизюнкт е резолвентно изводим от M;

нека M е множество от безкванторни формули; въпросът дали M има модел свеждаме до горните разглеждания по следния начин: всяка формула от M привеждаме в конюнктивна нормална форма; всички елементарни дизюнкции от получените формули заменяме със съответните им дизюнкти;
нека M′ е полученото множество от дизюнкти;
ясно е, че ако **S** е структура, то **S** е модел на M ⇔ **S** е модел на M′;

пример: нека M = { s (b, X) → ¬s (X, X), ¬s (X, X) → s (b, X) };
питаме се дали M има модел; привеждаме формулите от M в конюнктивна нормална форма по алгоритъма;
{ s (b, X) → ¬s (X, X) } -> { ¬s (b, X) ∨ ¬s (X, X) }
{ ¬s (X, X) → s (b, X) } -> { ¬¬s (X, X) ∨ s (b, X) } -> { s (X, X) ∨ s (b, X) }
дизюнктите на множеството M′ са:
{ ¬s (b, X), ¬s (X, X) } и { s (X, X), s (b, X) };
частният случай на първия дизюнкт
{ ¬s (b, X), ¬s (X, X) }[X/b] = { ¬s (b, b) } и частният случай на втория дизюнкт { s (X, X), s (b, X) }[X/b] = { s (b, b) } имат непосредствена резолвента празният дизюнкт; така празният дизюнкт е резолвентно изводим от множеството от M′ ➔ M′ няма модел ➔ M няма модел;

Заместване на променлива с терм в произволна формула

нека σ е субституция от вида [x/T], където $x \in \Xi$, T е терм;
с индукция по построението дефинираме **приложимост** на σ към произволна формула F и резултат от прилагането на σ към F, в случай че σ е приложима към F, който ще бележим с Fσ;
База: ако F е атомарна формула, F = p (T_1, T_2, …, T_n), $n \geq 0$, T_1, T_2, …, T_n са термове, то σ е приложима към F и резултатът от прилагането на σ към F е Fσ = p ($T_1\sigma$, $T_2\sigma$, …, $T_n\sigma$);
ако F = fail или F = true, то σ е приложима към F и резултатът от прилагането на σ към F е Fσ = F;
Предположение: нека G, F_1, F_2, …, F_n, $n > 1$, са формули и за тях са дефинирани приложимост на σ и резултат от прилагането на σ, в случай че σ е приложима;
Стъпка: ако F = ¬G, то σ е приложима към F, ако σ е приложима към G и в такъв случай Fσ = (¬G)σ = ¬(Gσ);
ако F = F_1 & F_2 & … & F_n, то σ е приложима към F, ако σ е приложима към F_1, F_2, …, F_n и в такъв случай
Fσ = (F_1 & F_2 & … & F_n)σ = $F_1\sigma$ & $F_2\sigma$ & … & $F_n\sigma$;
ако F = $F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$, то σ е приложима към F, ако σ е приложима към F_1, F_2, …, F_n и в такъв случай
Fσ = $(F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n)\sigma = F_1\sigma \vee F_2\sigma \vee \ldots \vee F_n\sigma$;
нека F = ∀y G; ако $x \notin$ FVAR (F) = FVAR (∀y G),
то σ е приложима към F и Fσ = F;

ако $x \in$ FVAR (F) = FVAR ($\forall y$ G), то σ е приложима към F, ако σ е приложима към G и $y \notin$ VAR (T); в такъв случай резултатът от прилагането на σ към F е Fσ = ($\forall y$ G)σ = $\forall y$ (Gσ);
нека F = $\exists y$ G ; ако $x \notin$ FVAR (F) = FVAR ($\exists y$ G),
то σ е приложима към F и Fσ = F;
ако $x \in$ FVAR (F) = FVAR ($\exists y$ G), то σ е приложима към F, ако σ е приложима към G и $y \notin$ VAR (T); в такъв случай резултатът от прилагането на σ към F е Fσ = ($\exists y$ G)σ = $\exists y$ (Gσ);

от дефиницията е ясно е, че σ е приложима към всяка безкванторна формула F и резултатът от прилагането на σ на към F съвпада с по-горе дефинираното понятие;

наложените ограничения за приложимост на субституция към произволна формула са свързани с явлението, наречено **колизия** между свободни и свързани променливи; например, субституцията [Y/X] не е приложима към формулата ∀X p (X, Y), тъй като при заместване на Y с X получаваме ∀X p (X, X) – свободната променлива Y става свързана в новата формула; това е недопустимо – например, възможно е първата формула да е тъждествено вярна в някаква структура, а втората да не е тъждествено вярна в същата структура;

Твърдение: ако T = x, то σ = [x/T] е приложима към всяка формула F и Fσ = F;
Доказателство: индукция по дефиницията за приложимост;
База: ако F е атомарна формула, то σ е приложима към F и Fσ = F, тъй като σ = ι; ако F = fail или F = true, то σ е приложима към F и Fσ = F (дори за произволна субституция σ);
Предположение: нека σ е приложима към G, $F_1, F_2, \ldots, F_n$, n > 1 и Gσ = G, $F_1\sigma = F_1$, $F_2\sigma = F_2$, …, $F_n\sigma = F_n$;
Стъпка: ако F = ¬G, то σ е приложима към F, тъй като σ е приложима към G и Fσ = (¬G)σ = ¬(Gσ) = ¬G = F;
ако $F = F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n$, то σ е приложима към F, тъй като σ е приложима към $F_1, F_2, \ldots, F_n$ и
$F\sigma = (F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n)\sigma = F_1\sigma \,\&\, F_2\sigma \,\&\, \ldots \,\&\, F_n\sigma =$
$= F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n = F$;
съвсем аналогично разсъждаваме в случая $F = F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$;
нека F = $\forall y$ G; ако $x \notin$ FVAR (F), то σ е приложима към F и Fσ = F (дори за произволна субституция σ);
ако $x \in$ FVAR (F), то $x \neq y$, тъй като $y \notin$ FVAR (F); така σ е приложима към F, тъй като σ е приложима към G и
$y \notin$ VAR (T) = { x }; така Fσ = ($\forall y$ G)σ = $\forall y$ (Gσ) = $\forall y$ G = F;
съвсем аналогично разсъждаваме в случая F = $\exists y$ G;

нека F е произволна формула; с индукция по построението на F дефинираме **множество на свързаните променливи** на F, което ще отбелязваме с **BVAR** (F);
База: ако F е атомарна формула, то BVAR (F) = $\varnothing$;
ако F = true или F = fail, дефинираме BVAR (F) = $\varnothing$;
Предположение: нека F, F_1, …, F_n (n > 1) са формули и BVAR (F), BVAR (F_1), …, BVAR (F_n) са вече дефинирани;
Стъпка: дефинираме BVAR ($\neg$F) = BVAR (F),
BVAR (F_1 & F_2 & … F_n) = BVAR (F_1) $\cup$ BVAR (F_2) $\cup$ …$\cup$ BVAR (F_n);
BVAR ($F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$) = BVAR ($F_1$) $\cup$ BVAR (F_2) $\cup$ …$\cup$ BVAR (F_n);
BVAR ($\forall x$ F) = BVAR (F) $\cup \{ x\}$, BVAR ($\exists x$ F) = BVAR (F) $\cup \{ x\}$;

ясно е, че ако F е безкванторна формула, то BVAR (F) = $\varnothing$;

Твърдение: нека $\sigma = [x/T]$, F е формула;
ако VAR (T) $\cap$ BVAR (F) = $\varnothing$, то σ е приложима към F;
Доказателство: индукция по дефиницията за приложимост;
База: ако F е атомарна формула, то всяка субституция е приложима към F и в частност σ е приложима към F;
ако F = fail или F = true, то очевидно σ е приложима към F;
Предположение: нека твърдението е изпълнено за формулите G, F_1, F_2, …, F_n, n > 1;
Стъпка:
нека F = $\neg$G; имаме VAR (T) $\cap$ BVAR (F) = $\varnothing$ $\Rightarrow$
VAR (T) $\cap$ BVAR (G) = $\varnothing$ $\Rightarrow$ σ е приложима към G $\Rightarrow$
σ е приложима към F;
нека F = F_1 & F_2 & … & F_n; имаме VAR (T) $\cap$ BVAR (F) = $\varnothing$ $\Rightarrow$
VAR (T) $\cap$ BVAR (F_1) = $\varnothing$, VAR (T) $\cap$ BVAR (F_2) = $\varnothing$, …,
VAR (T) $\cap$ BVAR (F_n) = $\varnothing$ $\Rightarrow$ σ е приложима към F_1, F_2, …, F_n $\Rightarrow$ σ е приложима към F;
аналогично разсъждаваме в случая F = $F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$;
нека F = $\forall y$ G; ако $x \notin$ FVAR (F), то σ е приложима към F по дефиниция; нека $x \in$ FVAR (F); имаме VAR (T) $\cap$ BVAR (F) = $\varnothing$, т.е.
VAR (T) $\cap$ BVAR ($\forall y$ G) = $\varnothing$ $\Rightarrow$ $y \notin$ VAR (T), VAR (T) $\cap$ BVAR (G) = $\varnothing$ $\Rightarrow$
σ е приложима към G, $y \notin$ VAR (T) $\Rightarrow$ σ е приложима към F;
аналогично разсъждаваме в случая F = $\exists y$ G;

Твърдение: нека F е формула, T е терм; ако $x \notin$ FVAR (F), то $\sigma = [x/T]$ е приложима към F и Fσ = F;
Доказателство:
индукция по дефиницията за приложимост;
База: ако F е атомарна формула, то σ е приложима към F и Fσ = F, тъй като σ и ι съвпадат върху FVAR (F) = VAR (F);
ако F = fail или F = true, то σ е приложима към F и Fσ = F (дори за произволна субституция σ);
Предположение: нека твърдението е изпълнено за формулите G, F_1, F_2, …, F_n, n > 1;

Стъпка:
нека F = ¬G; тъй като $x \notin$ FVAR (F), то $x \notin$ FVAR (G) ➔
σ е приложима към G и Gσ = G ➔ σ е приложима към F и
Fσ = (¬G)σ = ¬(Gσ) = ¬G = F;
нека F = F_1 & F_2 & … & F_n; тъй като $x \notin$ FVAR (F), то $x \notin$ FVAR (F_1),
$x \notin$ FVAR (F_2), …, $x \notin$ FVAR (F_n) ➔ σ е приложима към F_1, F_2, …, F_n и
$F_1σ = F_1$, $F_2σ = F_2$, …, $F_nσ = F_n$ ➔ σ е приложима към F_1, F_2, …, F_n и
Fσ = (F_1 & F_2 & … & F_n)σ = F_1σ & F_2σ & … & F_nσ =
= F_1 & F_2 & … & F_n = F;
съвсем аналогично разсъждаваме в случая $F = F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$;
нека F = $\forall y$ G; тъй като $x \notin$ FVAR (F), то σ е приложима към F и
Fσ = F (дори за произволна субституция σ);
съвсем аналогично разсъждаваме в случая F = $\exists y$ G;

Твърдение: нека σ = [x/T], F е формула; ако σ е приложима към F,
то FVAR (Fσ) = $\bigcup_{z \in \mathrm{FVAR(F)}} \mathrm{VAR}(\sigma(z))$;

Доказателство: индукция по построението;
База: ако F е атомарна формула, то
FVAR (Fσ) = VAR (Fσ) = $\bigcup_{z \in \mathrm{VAR(F)}} \mathrm{VAR}(\sigma(z)) = \bigcup_{z \in \mathrm{FVAR(F)}} \mathrm{VAR}(\sigma(z))$ от
съответното твърдение за безкванторни формули;
ако F = true или F = fail, то FVAR (Fσ) = FVAR (F) = ∅ и твърдението
очевидно е изпълнено;
Предположение: нека твърдението е изпълнено за формулите
G, F_1, F_2, …, F_n, n > 1;
Стъпка:
ако F = ¬G, то FVAR (Fσ) = FVAR ((¬G)σ) = FVAR (¬(Gσ)) =
= FVAR (Gσ) = $\bigcup_{z \in \mathrm{FVAR(G)}} \mathrm{VAR}(\sigma(z)) = \bigcup_{z \in \mathrm{FVAR(F)}} \mathrm{VAR}(\sigma(z))$, тъй като
FVAR (F) = FVAR (¬G) = FVAR (G);
ако F = F_1 & F_2 & … & F_n, то FVAR (Fσ) =
= FVAR (F_1σ & F_2σ & … & F_nσ) = FVAR (F_1σ) ∪ FVAR (F_2σ) ∪ … ∪
∪ FVAR (F_nσ) = $\bigcup_{z \in \mathrm{FVAR}(F_1)} \mathrm{VAR}(\sigma(z)) \cup \bigcup_{z \in \mathrm{FVAR}(F_2)} \mathrm{VAR}(\sigma(z)) \cup \ldots \cup$
$\cup \bigcup_{z \in \mathrm{FVAR}(F_n)} \mathrm{VAR}(\sigma(z)) = \bigcup_{z \in \mathrm{FVAR}(F_1) \cup \mathrm{FVAR}(F_2) \cup \ldots \cup \mathrm{FVAR}(F_n)} \mathrm{VAR}(\sigma(z)) =$
$= \bigcup_{z \in \mathrm{FVAR(F)}} \mathrm{VAR}(\sigma(z))$;
съвсем аналогично се разсъждава, ако $F = F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$;
нека F = $\forall y$ G; ако $x \notin$ FVAR (F), то Fσ = F ➔ FVAR (Fσ) = FVAR (F);
от друга страна $\bigcup_{z \in \mathrm{FVAR(F)}} \mathrm{VAR}(\sigma(z)) = \bigcup_{z \in \mathrm{FVAR(F)}} \{z\}$, тъй като σ ($z$) = z
за всяко $z \neq x$ ➔ $\bigcup_{z \in \mathrm{FVAR(F)}} \mathrm{VAR}(\sigma(z))$ = FVAR (F) = FVAR (Fσ);
нека $x \in$ FVAR (F); тъй като σ е приложима към F, то $y \notin$ VAR (T) и
σ е приложима към G; също, тъй като $y \notin$ FVAR (F), то $x \neq y$;

имаме FVAR (Fσ) = FVAR (($\forall y$ G)σ) = FVAR ($\forall y$ (Gσ)) =
= FVAR (Gσ) $\setminus \{ y \}$ = $\bigcup_{z \in \mathrm{FVAR(G)}} \mathrm{VAR}(\sigma(z)) \setminus \{ y \}$;
от друга страна $\bigcup_{z \in \mathrm{FVAR(F)}} \mathrm{VAR}(\sigma(z)) = \bigcup_{z \in \mathrm{FVAR(G)} \setminus \{ y \}} \mathrm{VAR}(\sigma(z))$ =
= $\bigcup_{z \in \mathrm{FVAR(G)}} \mathrm{VAR}(\sigma(z)) \setminus \mathrm{VAR}(\sigma(y)) = \bigcup_{z \in \mathrm{FVAR(G)}} \mathrm{VAR}(\sigma(z)) \setminus \{ y \}$, тъй като
$y \neq x \Rightarrow \sigma(y) = y$; така FVAR (F$\sigma$) = $\bigcup_{z \in \mathrm{FVAR(F)}} \mathrm{VAR}(\sigma(z))$;
съвсем аналогично разсъждаваме в случая F = $\exists y$ G;

Твърдение: нека **S** е структура с носител D, **v** е оценка на променливите в **S**; нека x е променлива, T е терм, $\sigma = [x/\mathrm{T}]$,
$\mathbf{u} = \sigma^{\mathbf{S}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}[x : \mathrm{T}^{\mathbf{S},\mathbf{v}}]$; ако F е формула и σ е приложима към F, то $(\mathrm{F}\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \mathrm{F}^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$;
Доказателство: индукция по построението на F за произволна субституция от вида $\sigma = [x/\mathrm{T}]$;
База: ако F е атомарна формула, то $(\mathrm{F}\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \mathrm{F}^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$ от съответното твърдение за безкванторни формули; ако F = true или F = fail,
то Fσ = F и $\mathrm{F}^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \mathrm{F}^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$, тъй като верността на F не зависи от оценките;
Предположение: нека твърдението е изпълнено за формулите
$\mathrm{G}, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \dots, \mathrm{F}_n$, $n > 1$;
Стъпка: ако F = $\neg$G, то $(\mathrm{F}\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = ((\neg \mathrm{G})\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = (\neg(\mathrm{G}\sigma))^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1 - (\mathrm{G}\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} =$
$= 1 - \mathrm{G}^{\mathbf{S},\mathbf{u}} = (\neg \mathrm{G})^{\mathbf{S},\mathbf{u}} = \mathrm{F}^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$;
ако $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 \,\&\, \mathrm{F}_2 \,\&\, \dots \,\&\, \mathrm{F}_n$, то $(\mathrm{F}\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = ((\mathrm{F}_1 \,\&\, \mathrm{F}_2 \,\&\, \dots \,\&\, \mathrm{F}_n)\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} =$
$= (\mathrm{F}_1\sigma \,\&\, \mathrm{F}_2\sigma \,\&\, \dots \,\&\, \mathrm{F}_n\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \min \{ (\mathrm{F}_1\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, (\mathrm{F}_2\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}}, \dots, (\mathrm{F}_n\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} \} =$
$= \min \{ \mathrm{F}_1^{\mathbf{S},\mathbf{u}}, \mathrm{F}_2^{\mathbf{S},\mathbf{u}}, \dots, \mathrm{F}_n^{\mathbf{S},\mathbf{u}} \} = (\mathrm{F}_1 \,\&\, \mathrm{F}_2 \,\&\, \dots \,\&\, \mathrm{F}_n)^{\mathbf{S},\mathbf{u}} = \mathrm{F}^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$;
съвсем аналогично се разсъждава, ако $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 \vee \mathrm{F}_2 \vee \dots \vee \mathrm{F}_n$;
нека F = $\forall y$ G; ако $x \notin$ FVAR (F), то Fσ = F $\Rightarrow (\mathrm{F}\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \mathrm{F}^{\mathbf{S},\mathbf{v}}$; от друга страна **v** и **u** съвпадат върху FVAR (F), тъй като $x \notin$ FVAR (F) $\Rightarrow$
$\mathrm{F}^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \mathrm{F}^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$; така $(\mathrm{F}\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \mathrm{F}^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$; нека $x \in$ FVAR (F); тъй като σ е приложима към F, то $y \notin$ VAR (T) и σ е приложима към G;
имаме $(\mathrm{F}\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = ((\forall y\, \mathrm{G})\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = (\forall y\, (\mathrm{G}\sigma))^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \min \{ (\mathrm{G}\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}[y:\mathrm{d}]} \mid \mathrm{d} \in \mathrm{D} \}$
$= \min \{ \mathrm{G}^{\mathbf{S},\mathbf{v}[y:\mathrm{d}][x:\mathrm{T}^{\mathbf{S},\mathbf{v}[y:\mathrm{d}]}]} \mid \mathrm{d} \in \mathrm{D} \} = \min \{ \mathrm{G}^{\mathbf{S},\mathbf{v}[y:\mathrm{d}][x:\mathrm{T}^{\mathbf{S},\mathbf{v}}]} \mid \mathrm{d} \in \mathrm{D} \}$, тъй като
$y \notin$ VAR (T) $\Rightarrow$ $\mathbf{v}[y : \mathrm{d}]$ и **v** съвпадат върху VAR (T) $\Rightarrow \mathrm{T}^{\mathbf{S},\mathbf{v}[y:\mathrm{d}]} = \mathrm{T}^{\mathbf{S},\mathbf{v}}$;
от друга страна $\mathrm{F}^{\mathbf{S},\mathbf{u}} = (\forall y\, \mathrm{G})^{\mathbf{S},\mathbf{u}} = \min \{ \mathrm{G}^{\mathbf{S},\mathbf{u}[y:\mathrm{d}]} \mid \mathrm{d} \in \mathrm{D} \} =$
$= \min \{ \mathrm{G}^{\mathbf{S},\mathbf{v}[x:\mathrm{T}^{\mathbf{S},\mathbf{v}}][y:\mathrm{d}]} \mid \mathrm{d} \in \mathrm{D} \}$; имаме $x \in$ FVAR (F) $\Rightarrow x \neq y \Rightarrow$
$\mathbf{v}[y : \mathrm{d}][x : \mathrm{T}^{\mathbf{S},\mathbf{v}}] = \mathbf{v}[x : \mathrm{T}^{\mathbf{S},\mathbf{v}}][y : \mathrm{d}]$; така $(\mathrm{F}\sigma)^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = \mathrm{F}^{\mathbf{S},\mathbf{u}}$;

като следствие получаваме, че ако F е формула, която е тъждествено вярна в структура **S** и σ е субституция, приложима към F, то Fσ също е тъждествено вярна в **S**;

нека F и G са формули; казваме, че от F **следва** G,
ако от $\mathrm{F}^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1$ (**S** – структура, **v** – оценка на променливите в **S**) следва $\mathrm{G}^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1$; бележим F ‘ G;

ясно е, че F ‘ G ⇔ F → G е тъждествено вярна ⇔ $F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} \leq G^{\mathbf{S}, \mathbf{v}}$ за всяка структура **S** и оценка **v** на променливите в **S**; в частност ‘ е рефлексивна и транзитивна релация в множеството от всички формули; при това F ‘ G и G ‘ F ⇔ F ≡ G;

Твърдение: нека σ = [*x*/T], σ е приложима към F;
тогава ∀*x* F ‘ Fσ ‘ ∃*x* F;
Доказателство: нека **S** е структура с носител D, **v** е оценка на променливите в **S**; имаме $(\forall x\ F)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = \min \{ F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}[x : d]} \mid d \in D \}$,
$(F\sigma)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}[x : T^{\mathbf{S}, \mathbf{v}}]}$, $(\exists x\ F)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = \max \{ F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}[x : d]} \mid d \in D \}$; така
$(\forall x\ F)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} \leq (F\sigma)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} \leq (\exists x\ F)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}}$ ➔ ∀*x* F ‘ Fσ ‘ ∃*x* F;

Преименуване на свързани променливи

Твърдение: нека F е формула, *x*, *y* ∈ Ξ, <u>*y* ∉ FVAR (F)</u>, σ = [*x*/*y*] е приложима към F; тогава ∀*x* F ≡ ∀*y* (F[*x*/*y*]) и ∃*x* F ≡ ∃*y* (F[*x*/*y*]);
Доказателство: нека **S** е структура с носител D, **v** е оценка на променливите в **S**; имаме $(\forall x\ F)^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = \min \{ F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}[x : d]} \mid d \in D \}$;
от друга страна $(\forall y\ (F[x/y]))^{\mathbf{S}, \mathbf{v}} = \min \{ F[x/y]^{\mathbf{S}, \mathbf{v}[y : d]} \mid d \in D \} =$
$= \min \{ F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}[y : d][x : \mathbf{v}[y : d](y)]} \mid d \in D \} = \min \{ F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}[y : d][x : d]} \mid d \in D \}$;
ако *x* = *y*, твърдението е изпълнено, тъй като **v**[*y* : d][*x* : d] = **v**[*x* : d];
ако *x* ≠ *y*, то **v**[*y* : d][*x* : d] и **v**[*x* : d] съвпадат върху FVAR (F), тъй като *y* ∉ FVAR (F) ➔ $F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}[y : d][x : d]} = F^{\mathbf{S}, \mathbf{v}[x : d]}$ и твърдението отново е изпълнено; съвсем аналогично се показва, че ∃*x* F ≡ ∃*y* (F[*x*/*y*]);

като следствие от твърдението получаваме, че ако F е произволна формула и *x* е свързана променлива на F, то F е еквивалентна на формула, в която *x* не е свързана променлива;

Привеждане на формули в пренексен вид

казваме, че една формула е в **пренексен вид**, ако тя е получена от безкванторна формула с добавяне на няколко (възможно 0) квантори по различни помежду си свободни променливи;
ще покажем, че всяка формула е еквивалентна на някоя формула в пренексен вид, която има същите свободни променливи;
в частност, всяка затворена формула е еквивалентна на затворена формула в пренексен вид;

по-горе показахме следните две еквивалентности:
¬∀*x* F ≡ ∃*x* ¬F;
¬∃*x* F ≡ ∀*x* ¬F;

Твърдение: нека F_1, F_2, …, F_n са произволни формули;
нека i ∈ { 1, 2, …, n }, *x* ∉ FVAR (F_j) за всяко j ≠ i ∈ { 1, 2, …, n };
тогава F_1 & … & F_{i-1} & ∀*x* F_i & F_{i+1} & … & F_n ≡ ∀*x* (F_1 & F_2 & … & F_n);
Доказателство: нека **S** е структура с носител D, **v** е оценка на

променливите в **S**; имаме $(F_1 \,\&\, \ldots \,\&\, F_{i-1} \,\&\, \forall x\, F_i \,\&\, F_{i+1} \,\&\, \ldots \,\&\, F_n)^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} =$
$= \min \{ F_1^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}}, \ldots, F_{i-1}^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}}, (\forall x\, F_i)^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}}, F_{i+1}^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}}, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} \} =$
$= \min \{ F_1^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}}, \ldots, F_{i-1}^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}}, \min \{ F_i^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} \mid d \in D \}, F_{i+1}^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}}, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} \}$;
имаме $(F_1 \,\&\, \ldots \,\&\, F_{i-1} \,\&\, \forall x\, F_i \,\&\, F_{i+1} \,\&\, \ldots \,\&\, F_n)^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1 \Leftrightarrow$
$F_1^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1, \ldots, F_{i-1}^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1, \min \{ F_i^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} \mid d \in D \} = 1, F_{i+1}^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1, \ldots,$
$F_n^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1 \Leftrightarrow F_1^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1, \ldots, F_{i-1}^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1, F_{i+1}^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1$
и за всяко $d \in D$, $F_i^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} = 1$;
от друга страна $\forall x\, (F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n)^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} =$
$= \min \{ (F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n)^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} \mid d \in D \} =$
$= \min \{ \min \{ F_1^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]}, F_2^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]}, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} \} \mid d \in D \}$;
имаме $\forall x\, (F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n)^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1 \Leftrightarrow$ за всяко $d \in D$,
$\min \{ F_1^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]}, F_2^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]}, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} \} = 1 \Leftrightarrow$ за всяко $d \in D$,
$F_1^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} = 1, F_2^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} = 1, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} = 1 \Leftrightarrow$ за всяко $d \in D$,
$F_1^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1, \ldots, F_{i-1}^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1, F_i^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} = 1, F_{i+1}^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1$;
използвали сме, че тъй като **v** и $\mathbf{v}[x : d]$ съвпадат върху FVAR (F_j), то
$F_j^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = F_j^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]}$ за всяко $j \neq i \in \{ 1, 2, \ldots, n \}$, $d \in D$;
така $(F_1 \,\&\, \ldots \,\&\, F_{i-1} \,\&\, \forall x\, F_i \,\&\, F_{i+1} \,\&\, \ldots \,\&\, F_n)^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1 \Leftrightarrow$
$\forall x\, (F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n)^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1$;

Твърдение: нека $F_1, F_2, \ldots, F_n$ са произволни формули;
нека $i \in \{ 1, 2, \ldots, n \}$, $x \notin$ FVAR (F_j) за всяко $j \neq i \in \{ 1, 2, \ldots, n \}$;
тогава $F_1 \vee \ldots \vee F_{i-1} \vee \forall x\, F_i \vee F_{i+1} \vee \ldots \vee F_n \equiv \forall x\, (F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n)$;
Доказателство: нека **S** е структура с носител D, **v** е оценка на
променливите в **S**; имаме $(F_1 \vee \ldots \vee F_{i-1} \vee \forall x\, F_i \vee F_{i+1} \vee \ldots \vee F_n)^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} =$
$= \max \{ F_1^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}}, \ldots, F_{i-1}^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}}, (\forall x\, F_i)^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}}, F_{i+1}^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}}, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} \} =$
$= \max \{ F_1^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}}, \ldots, F_{i-1}^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}}, \min \{ F_i^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} \mid d \in D \}, F_{i+1}^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}}, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} \}$;
имаме $(F_1 \vee \ldots \vee F_{i-1} \vee \forall x\, F_i \vee F_{i+1} \vee \ldots \vee F_n)^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 0 \Leftrightarrow$
$F_1^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 0, \ldots, F_{i-1}^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 0, \min \{ F_i^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} \mid d \in D \} = 0, F_{i+1}^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 0, \ldots,$
$F_n^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 0 \Leftrightarrow F_1^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 0, \ldots, F_{i-1}^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 0, F_{i+1}^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 0, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 0$
и съществува $d \in D$, такова че $F_i^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} = 0$;
от друга страна $\forall x\, (F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n)^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} =$
$= \min \{ (F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n)^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} \mid d \in D \} =$
$= \min \{ \max \{ F_1^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]}, F_2^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]}, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} \} \mid d \in D \}$;
имаме $\forall x\, (F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n)^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 0 \Leftrightarrow$ съществува $d \in D$, такова че
$\max \{ F_1^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]}, F_2^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]}, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} \} = 0 \Leftrightarrow$ съществува $d \in D$,
такова че $F_1^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} = 0, F_2^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} = 0, \ldots, F_n^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} = 0 \Leftrightarrow$ съществува
$d \in D$, такова че $F_1^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 0, \ldots, F_{i-1}^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 0, F_i^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]} = 0, F_{i+1}^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 0, \ldots,$
$F_n^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 0$; използвали сме, че тъй като **v** и $\mathbf{v}[x : d]$ съвпадат върху
FVAR (F_j), то $F_j^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = F_j^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}[x\,:\,d]}$ за всяко $j \neq i \in \{ 1, 2, \ldots, n \}$, $d \in D$;
така $(F_1 \vee \ldots \vee F_{i-1} \vee \forall x\, F_i \vee F_{i+1} \vee \ldots \vee F_n)^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1 \Leftrightarrow$
$\forall x\, (F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n)^{\mathbf{S},\, \mathbf{v}} = 1$;

съвсем аналогично на горните две твърдения се показват следните
две еквивалентности:
$F_1 \,\&\, \ldots \,\&\, F_{i-1} \,\&\, \exists x\, F_i \,\&\, F_{i+1} \,\&\, \ldots \,\&\, F_n \equiv \exists x\, (F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \ldots \,\&\, F_n)$
$F_1 \vee \ldots \vee F_{i-1} \vee \exists x\, F_i \vee F_{i+1} \vee \ldots \vee F_n \equiv \exists x\, (F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n)$
при условие, че $x \notin$ FVAR (F_j) за всяко $j \neq i \in \{ 1, 2, \ldots, n \}$;

за всяка формула F дефинираме **брой на кванторите** на F с индукция по построението на F;
База: ако F е атомарна формула, F = true или F = fail, броят на кванторите на F е 0;
Предположение: нека броят на кванторите е дефиниран за формулите G, F_1, F_2, …, F_n, n > 1;
Стъпка: ако F = ¬G, броят на кванторите на F е броят на кванторите на G;
ако F = F_1 & F_2 & … & F_n или F = $F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$, броят на кванторите на F е сума от броя на кванторите на F_1, броя на кванторите на F_2, …, броя на кванторите на F_n;
ако F = $\forall y$ G или F = $\exists y$ G, броят на кванторите на F е с едно по-голям от броя на кванторите на G;

съвсем лесно се показва, че F е безкванторна формула ⇔ броят на кванторите на F е 0;

Лема: нека F е формула с n+1 квантора, n ≥ 0; тогава съществува формула F′ с n квантора, такава че F е еквивалентна на някоя от формулите $\forall x$ F′ или $\exists x$ F′, $x \in \Xi$;
при това FVAR (F) = FVAR ($\forall x$ F′) (= FVAR ($\exists x$ F′));
Доказателство: индукция по построението на F за всяко n ≥ 0;
База: тъй като F има поне един квантор, то F не е атомарна формула, F ≠ true, F ≠ fail; така твърдението в този случай е изпълнено по тривиални причини;
Предположение: нека твърдението е изпълнено за формулите G, F_1, F_2, …, F_m, m > 1;
Стъпка: нека F = ¬G; тъй като F има n+1 квантора, то G има n+1 квантора; по индукционното предположение
G ≡ $\forall x$ G′ или G ≡ $\exists x$ G′, където G′ е формула с n квантора;
при това FVAR (G) = FVAR ($\forall x$ G′); при това положение,
ако G ≡ $\forall x$ G′, то ¬G ≡ ¬$\forall x$ G′ ≡ $\exists x$ ¬G′; така F = ¬G ≡ $\exists x$ ¬G′ и
FVAR (F) = FVAR (G) = FVAR ($\forall x$ G′) = FVAR (G′)\{ x } =
= FVAR (¬G′)\{ x } = FVAR ($\exists x$ ¬G′);
ако G ≡ $\exists x$ G′, разсъжденията са аналогични с използване на еквивалентността ¬$\exists x$ F ≡ $\forall x$ ¬F;
нека F = F_1 & F_2 & … & F_m; тъй като F съдържа n+1 квантора, то съществува j ∈ { 1, 2, …, m }, такова че F_j съдържа k+1 квантора, k ≥ 0; по индукционното предположение
F_j ≡ $\forall x$ F_j' или F_j ≡ $\exists x$ F_j', където F_j' е формула с k квантора;
при това FVAR (F_j) = FVAR ($\forall x$ F_j');
нека F_j ≡ $\forall x$ F_j'; при това положение F = F_1 & F_2 & … & F_m ≡ F_1 & … & F_{j-1} & $\forall x$ F_j' & F_{j+1} & … & F_m; нека $y \in \Xi$,
$y \notin$ FVAR (F_1) ∪ … ∪ FVAR (F_{j-1}) ∪ VAR (F_j') ∪ FVAR (F_{j+1}) ∪ … ∪
∪ FVAR (F_m); такова y съществува, тъй като ограничението е свързано с крайно обединение на крайни множества, което е

крайно множество, а Ξ е безкрайно множество; при това положение субституцията $[x/y]$ е приложима към F_j', тъй като $VAR(y) = \{ y\} \cap BVAR(F_j') = \varnothing$; тъй като $y \notin FVAR(F_j')$ от едно твърдение по-горе получаваме, че $\forall x\, F_j' \equiv \forall y\, (F_j'\,[x/y])$;
при това $y \notin FVAR(F_i)$ за $i \neq j \in \{ 1, 2, \dots, m \}$ ➔
$F \equiv F_1 \,\&\, \dots \,\&\, F_{j-1} \,\&\, \forall x\, F_j' \,\&\, F_{j+1} \,\&\, \dots \&\, F_m \equiv$
$\equiv F_1 \,\&\, \dots \,\&\, F_{j-1} \,\&\, \forall y\, (F_j'\,[x/y]) \,\&\, F_{j+1} \,\&\, \dots \,\&\, F_m \equiv$
$\equiv \forall y\, (F_1 \,\&\, \dots \,\&\, F_{j-1} \,\&\, F_j'\,[x/y] \,\&\, F_{j+1} \,\&\, \dots \,\&\, F_m)$;
нека $F' = F_1 \,\&\, \dots \,\&\, F_{j-1} \,\&\, F_j'\,[x/y] \,\&\, F_{j+1} \,\&\, \dots \,\&\, F_m$;
имаме $F \equiv \forall y\, F'$; съвсем лесно с индукция по построението се показва, че формулата $F_j'\,[x/y]$ има същия брой квантори като формулата F_j', т.е. k; при това положение е ясно, че формулата F' има n квантора; ще покажем, че $FVAR(\forall x\, F_j') = FVAR(\forall y\, (F_j'\,[x/y]))$;
имаме $FVAR(\forall y\, (F_j'\,[x/y])) = FVAR(F_j'\,[x/y]) \setminus \{ y \} =$
$= \bigcup_{z \in FVAR(F_j')} VAR(z\,[x/y]) \setminus \{ y \}$; ако $x \in FVAR(F_j')$, то
$\bigcup_{z \in FVAR(F_j')} VAR(z\,[x/y]) \setminus \{ y \} = \bigcup_{z \in FVAR(F_j') \setminus \{ x \}} VAR(z\,[x/y]) \cup$
$\cup\, VAR(x\,[x/y]) \setminus \{ y \} = FVAR(F_j') \setminus \{ x \} = FVAR(\forall x\, F_j')$;
ако $x \notin FVAR(F_j')$, то $\bigcup_{z \in FVAR(F_j')} VAR(z\,[x/y]) \setminus \{ y \} = FVAR(F_j') \setminus \{ y \} =$
$= FVAR(F_j') = FVAR(F_j') \setminus \{ x \} = FVAR(\forall x\, F_j')$, тъй като
$x \notin FVAR(F_j')$, $y \notin FVAR(F_j')$; така получаваме
$FVAR(F) = FVAR(F_1) \cup FVAR(F_2) \cup \dots \cup FVAR(F_m) =$
$= FVAR(F_1) \cup \dots \cup FVAR(F_{j-1}) \cup FVAR(\forall x\, F_j') \cup$
$\cup\, FVAR(F_{j+1}) \cup \dots \cup FVAR(F_m) = FVAR(F_1) \cup \dots \cup FVAR(F_{j-1}) \cup$
$\cup\, FVAR(\forall y\, (F_j'\,[x/y])) \cup FVAR(F_{j+1}) \cup \dots \cup FVAR(F_m) =$
$= FVAR(F_1) \cup \dots \cup FVAR(F_{j-1}) \cup FVAR(F_j'\,[x/y]) \cup FVAR(F_{j+1}) \cup \dots \cup$
$\cup\, FVAR(F_m) \setminus \{ y \} = FVAR(F') \setminus \{ y \} = FVAR(\forall y\, F')$;
случаят $F_j \equiv \exists x\, F_j'$ се разглежда по аналогичен начин с използване на съответните еквивалентности от по-горе;
разсъжденията в случая $F = F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_m$, $m > 1$, са аналогични на случая $F = F_1 \,\&\, F_2 \,\&\, \dots \,\&\, F_m$;
нека $F = \forall y\, G$; тогава очевидно $F \equiv \forall y\, G$, G има n квантора и $FVAR(F) = FVAR(\forall y\, G)$;
случаят $F = \exists y\, G$ се разглежда аналогично;

Теорема: за всяка формула F съществува формула F', така че F' е в пренексен вид, $F \equiv F'$ и $FVAR(F) = FVAR(F')$;
Доказателство: индукция по броя на кванторите на F;
База: нека F има брой на кванторите 0; тогава F е безкванторна формула и очевидно $F' = F$ е такава, че $F \equiv F'$ и $FVAR(F) = FVAR(F')$;
Предположение: нека твърдението е изпълнено за формули с брой на кванторите n;
Стъпка: нека F има n+1 квантора; от горната лема $F \equiv \forall x\, G$ или

$F \equiv \exists x\, G$, където G има n квантора и FVAR (F) = FVAR ($\forall x\, G$);
нека например $F \equiv \forall x\, G$; по индукционното предположение съществува формула G' в пренексен вид, такава че $G \equiv G'$ и FVAR (G) = FVAR (G′); имаме $F \equiv \forall x\, G \equiv \forall x\, G'$;
ако $x \in$ FVAR (G′), то $\forall x\, G'$ е в пренексен вид, $F \equiv \forall x\, G'$ и
FVAR (F) = FVAR ($\forall x\, G$) = FVAR (G)$\setminus \{ x \}$ = FVAR (G′)$\setminus \{ x \}$ =
= FVAR ($\forall x\, G'$);
ако $x \notin$ FVAR (G′), то G' е в пренексен вид, $F \equiv \forall x\, G' \equiv G'$ и
FVAR (F) = FVAR ($\forall x\, G$) = FVAR (G)$\setminus \{ x \}$ = FVAR (G′)$\setminus \{ x \}$ =
= FVAR (G′), тъй като $x \notin$ FVAR (G′);

пример: нека $F = \forall X(\exists Y \forall Z\, p\,(Y, Z) \vee \forall Y \exists Z\, \neg p\,(Y, Z))$, F е затворена формула; с помощта на горната теорема търсим затворена формула в пренексен вид, която е еквивалентна на F;
изнасяме кванторите $\exists Y \forall Z$ отпред – това е позволено, тъй като
Y, Z $\notin$ FVAR ($\forall Y \exists Z\, \neg p\,(Y, Z)$);
така $F \equiv \forall X \exists Y \forall Z(p\,(Y, Z) \vee \forall Y \exists Z\, \neg\, p\,(Y, Z))$; за да изнесем кванторите $\forall Y \exists Z$ е необходимо да преименуваме свързаните променливи Y и Z, тъй като Y, Z $\in$ FVAR (p (Y, Z)); така получаваме:
$F \equiv \forall X \exists Y \forall Z(p\,(Y, Z) \vee \forall Y \exists Z\, \neg p\,(Y, Z)) \equiv$
$\equiv \forall X \exists Y \forall Z(p\,(Y, Z) \vee \forall T \exists V\, \neg p\,(T, V)) \equiv$
$\equiv \forall X \exists Y \forall Z \forall T \exists V(p\,(Y, Z) \vee \neg p\,(T, V)) \equiv \exists Y \forall Z \forall T \exists V(p\,(Y, Z) \vee \neg p\,(T, V))$,
тъй като X $\notin$ FVAR ($\exists Y \forall Z \forall T \exists V(p\,(Y, Z) \vee \neg p\,(T, V))$);
така $\exists Y \forall Z \forall T \exists V(p\,(Y, Z) \vee \neg p\,(T, V))$ е формула в пренексен вид, която е еквивалентна на F и е затворена;

Скулемизация

процесът на **скулемизация** се състои в премахване на кванторите за съществуване в една формула и заместване на свързаните с тях променливи с подходящи термове, така че получената формула да е в някакъв смисъл еквивалентна на първоначалната;

нека F е формула от вида $F = \exists x\, G$;
ако FVAR (F) = $\varnothing$, образуваме формулата $F' = G[x/a]$,
където $a \in \mathbf{\Phi_0}$ и a не участва в F;
ако FVAR (F) = $\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$, n > 0, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j \in \{ 1, 2, \ldots, n \}$,
образуваме формулата $F' = G[x/f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$,
където $f \in \mathbf{\Phi_n}$ и f не участва в F;
ако съответните функционални символи не могат да се изберат от изходната сигнатура, ще си мислим че сме добавили нови функционални символи към тази сигнатура;
в случая FVAR (F) = $\varnothing$ субституцията $[x/a]$ е приложима към G, тъй като VAR (a) = $\varnothing$;
в случая FVAR (F) = $\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ субституцията $[x/f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ не винаги е приложима към G; едно достатъчно условие за приложимост е $x_1, x_2, \ldots, x_n \notin$ BVAR (G);

например, ако G е в пренексен вид това е изпълнено, тъй като в такъв случай BVAR (G) $\cap$ FVAR (G) = $\varnothing$; така оттук нататък ще си мислим, че G е в пренексен вид;

основната цел е да покажем, че съществува структура, в която F е тъждествено вярна $\Leftrightarrow$ съществува структура, в която F′ е тъждествено вярна;

обратната посока е същността на следното

Твърдение: F′ ‘ F;
Доказателство: имаме F′ = Gσ, където σ е някаква субституция, приложима към G; от едно твърдение по-горе получаваме, че
F′ = Gσ ‘ $\exists x$ G = F;

правата посока е същността на следната

Теорема: ако F е тъждествено вярна в структура **S**, то F′ е тъждествено вярна в някоя структура **S′**; по-точно **S′** се различава от **S** по интерпретацията на функционалните символи a,
ако F′ = G[x/a] или f, ако F′ = G[x/f (x_1, x_2, …, x_n)];
Доказателство:
първо ще разгледаме случаят FVAR (F) = $\varnothing$; нека D е носителят на структурата **S**; нека **v** е произволна оценка на променливите в **S**; имаме $F^{\mathbf{S}} = 1 \Rightarrow F^{\mathbf{S},\mathbf{v}} = 1$,
т.е. $\max \{ G^{\mathbf{S},\mathbf{v}[x:d]} \mid d \in D \} = 1 \Rightarrow$ съществува d $\in$ D, такова че $G^{\mathbf{S},\mathbf{v}[x:d]} = 1$; определяме структурата **S′** по следния начин: носителят на **S′** е носителя на **S**; сигнатурата на **S′** е сигнатурата на **S**, интерпретацията на **S′** се различава от интерпретацията на **S** само за функционалния символ a: $a^{\mathbf{S}'} = d$; ще покажем, че формулата F′ = G[x/a] е тъждествено вярна в **S′**; нека **v** е произволна оценка на променливите в **S′** (или в **S**);
имаме $G[x/a]^{\mathbf{S}',\mathbf{v}} = G^{\mathbf{S}',\mathbf{v}[x:a^{\mathbf{S}'}]} = G^{\mathbf{S}',\mathbf{v}[x:d]} = G^{\mathbf{S},\mathbf{v}[x:d]} = 1$, тъй като интерпретацията на **S** се отличава от интерпретацията на **S′** само по функционалния символ a, който не участва в G;
сега ще разгледаме случаят FVAR (F) = $\{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$, n > 1, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j \in \{ 1, 2, \dots, n \}$; за всяка n-торка $(d_1, d_2, \dots, d_n) \in D^n$, дефинираме оценка $\mathbf{v}_{d_1, d_2, \dots, d_n}$ на променливите в **S** по следния начин: $\mathbf{v}_{d_1, d_2, \dots, d_n}(y) = d_i$, ако $y = x_i$, $i \in \{ 1, 2, \dots, n-1\}$,
$\mathbf{v}_{d_1, d_2, \dots, d_n}(y) = d_n$ в противен случай; тъй като F е тъждествено вярна в **S**, то $F^{\mathbf{S},\mathbf{v}_{d_1, d_2, \dots, d_n}} = 1$, т.е. $\max \{ G^{\mathbf{S},\mathbf{v}_{d_1, d_2, \dots, d_n}[x:d]} \mid d \in D \} = 1 \Rightarrow$ съществува d $\in$ D, такова че $G^{\mathbf{S},\mathbf{v}_{d_1, d_2, \dots, d_n}[x:d]} = 1$; определяме структурата **S′** по следния начин: носителят на **S′** е носителя на **S**, сигнатурата на **S′** е сигнатурата на **S**, а интерпретацията на **S′** се различава от интерпретацията на **S** само за функционалния

символ f: $f^{\mathbf{S}'} : D^n \to D$, за всяко $(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in D^n$, $f^{\mathbf{S}'}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ е такова, че $G^{\mathbf{S}, \mathbf{v}_{d_1, d_2, \ldots, d_n}[x : f^{\mathbf{S}'}(d_1, d_2, \ldots, d_n)]} = 1$;
ще покажем, че $F' = G[x/f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ е тъждествено вярна в $\mathbf{S}'$;
нека $\mathbf{v}$ е произволна оценка на променливите в $\mathbf{S}'$ (или в $\mathbf{S}$);
имаме $G[x/f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^{\mathbf{S}', \mathbf{v}} = G^{\mathbf{S}', \mathbf{v}[x : f(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathbf{S}', \mathbf{v}}]} =$
$= G^{\mathbf{S}', \mathbf{v}[x : f^{\mathbf{S}'}(\mathbf{v}(x_1), \mathbf{v}(x_2), \ldots, \mathbf{v}(x_n))]}$; нека $d_i = \mathbf{v}(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$;
ще покажем, че $\mathbf{v}[x : f^{\mathbf{S}'}(d_1, d_2, \ldots, d_n)]$ и $\mathbf{v}_{d_1, d_2, \ldots, d_n}[x : f^{\mathbf{S}'}(d_1, d_2, \ldots, d_n)]$ съвпадат върху FVAR (G);
имаме FVAR (F) = $\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ = FVAR (G)$\setminus \{ x \}$ ➔
FVAR (G) = $\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ или FVAR (G) = $\{ x_1, x_2, \ldots, x_n, x \}$;
$\mathbf{v}[x : f^{\mathbf{S}'}(d_1, d_2, \ldots, d_n)]$ и $\mathbf{v}_{d_1, d_2, \ldots, d_n}[x : f^{\mathbf{S}'}(d_1, d_2, \ldots, d_n)]$ съвпадат върху $x_1, x_2, \ldots, x_n$, тъй като $\mathbf{v}(x_i) = d_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и върху x, тъй като стойността им за променливата x е $f^{\mathbf{S}'}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$;
така $G^{\mathbf{S}', \mathbf{v}[x : f^{\mathbf{S}'}(\mathbf{v}(x_1), \mathbf{v}(x_2), \ldots, \mathbf{v}(x_n))]} = G^{\mathbf{S}', \mathbf{v}[x : f^{\mathbf{S}'}(d_1, d_2, \ldots, d_n)]} =$
$= G^{\mathbf{S}', \mathbf{v}_{d_1, d_2, \ldots, d_n}[x : f^{\mathbf{S}'}(d_1, d_2, \ldots, d_n)]} = G^{\mathbf{S}, \mathbf{v}_{d_1, d_2, \ldots, d_n}[x : f^{\mathbf{S}'}(d_1, d_2, \ldots, d_n)]} = 1$, тъй като интерпретацията на $\mathbf{S}$ се отличава от интерпретацията на $\mathbf{S}'$ само по функционалния символ f, който не участва в G;

нека F е произволна формула; питаме се дали съществува структура, в която F е тъждествено вярна;
за целта на първа стъпка привеждаме F в пренексен вид;
след това последователно премахваме кванторите на F отляво надясно по следния алгоритъм: ако най-отпред има квантор за общност го премахваме и получената формула ще е еквивалентна на изходната; ако най-отпред има квантор за съществуване извършваме скулемизация и за получената формула ще съществува структура, в която тя е тъждествено вярна, точно когато за изходната формула съществува структура, в която тя е тъждествено вярна;
при тези преобразувания в крайна сметка получаваме безкванторна формула, която е тъждествено вярна в някаква структура ⇔ изходната формула е тъждествено вярна в някаква структура; за тази безкванторна формула прилагаме по-горе описания метод на резолюцията;

Край

18.06.2003