

ПРИЛАГАНЕ НА СУБСТИТУЦИИ КЪМ ПРОИЗВОЛНИ ФОРМУЛИ (синтактични въпроси)

Във въпроса за преименуване на променливи отбелязахме някои трудности, които трябва да се имат пред вид при опит да се дефинира резултат от прилагане на субституция към формула, съдържаща квантори. Това, което направихме там, преодолява споменатите трудности само за преименуващи субституции и не е приложимо в общия случай. За неговото разглеждане ще използваме друг подход, като първо ще дадем две спомагателни дефиниции.

Ако σ е субституция, ϕ е формула и ξ е променлива, ще казваме, че σ *привнася* ξ във ϕ , ако ϕ има такава свободна променлива η , различна от ξ , че ξ е свободна променлива на терма $\sigma(\eta)$ (например, ако p е двуместен предикатен символ, а x и y са различни променливи, то субституцията $(y:=x)$ привнася x в атомарната формула $p(x,y)$, а субституцията $(x:=f(x,x))$, където f е двуместен функционален символ, не привнася x в споменатата атомарна формула). Явлението колизия на променливите, за което стана дума в предходния въпрос, в определен смисъл се дължи на неподходящо привнасяне на променлива.

Ако σ е субституция, а ξ е променлива, то ще означаваме с σ_ξ онази субституция, която преобразува ξ в ξ , а на всяка друга променлива съпоставя същия терм, който σ съпоставя субституцията σ (например, ако x и y са две различни променливи, то $(x,y:=y,x)_x$ е субституцията $(y:=x)$). Преминването от σ към σ_ξ ще ни послужи в случаи, когато искаме да избегнем заместване на променливата ξ с някой друг терм.

Сега ще дадем индуктивната дефиниция кога една формула ще считаме *резултат от прилагане на дадена субституция към дадена формула*, като, както и в предходния въпрос, ще използваме вече дефинирания смисъл на означението $\sigma(\alpha)$ в случай, че σ е субституция, а α е атомарна формула. Дефиницията се състои от следните точки:

РПФ1. Ако α е атомарна формула, то $\sigma(\alpha)$ е резултат от прилагане на σ към α .

РПФ2. Ако ϕ' е резултат от прилагане на σ към ϕ , то $\neg\phi'$ е резултат от прилагане на σ към $\neg\phi$.

РПФ3,4. Ако ϕ' и ψ' са резултати от прилагане на σ съответно към ϕ и ψ , то $\phi' \& \psi'$ и $\phi' \vee \psi'$ са резултати от прилагане на σ съответно към $\phi \& \psi$ и $\phi \vee \psi$.

РПФ5,6. Ако ξ е променлива, субституцията σ не привнася ξ във ϕ и ϕ' е резултат от прилагане на субституцията σ_ξ към ϕ , то $\forall \xi \phi'$ и $\exists \xi \phi'$ са резултати от прилагане на σ съответно към $\forall \xi \phi$ и $\exists \xi \phi$.

С помощта на индукция, съобразена с дефиницията за формула, лесно се вижда, че за всяка дадена формула ϕ и субституция σ съществува най-много една формула, която е резултат от прилагане на σ към ϕ . Чрез индукция, съобразена с дефиницията за безкванторна формула се вижда, че когато ϕ е безкванторна формула, за всяка субституция σ дефинираният по-рано резултат $\sigma(\phi)$ от прилагане на σ към ϕ е резултат от прилагане на σ към ϕ и в смисъл на горната нова дефиниция. Това ни дава основание и при наличие на квантори във ϕ да означаваме със $\sigma(\phi)$ резултата от прилагане на σ към ϕ винаги, когато той съществува в смисъл на новата дефиниция. Уславяме се също в случаите, когато въпросният резултат съществува, да казваме, че σ е *приложима* към ϕ .

Да отбележим, че случаи на неприложимост на субституция към формула има - например, ако p е двуместен предикатен символ, а x и y са различни променливи, то субституцията $(y:=x)$ не е приложима към формулата $\forall x p(x,y)$. По този повод отбелязваме изрично, че към безкванторна формула е приложима всяка субституция и че от дадените дефиниции произтичат следните необходими и достатъчни условия за приложимост на една субституция σ : а) тя е приложима към отрицанието на дадена формула точно тогава, когато е приложима към самата формула; б) σ е приложима към конюнкцията на две формули точно тогава, когато е приложима към всяка от двете формули; в) аналогично на предното, но за дизюнкция; г) σ е приложима към $\forall \xi \phi$, където ξ е променлива и ϕ е формула, точно тогава, когато σ не привнася ξ във ϕ , а субституцията σ_ξ е приложима към ϕ ; д) аналогично на предното, но за формулата $\exists \xi \phi$. Ще отбележим още, че следните равенства ще бъдат верни за произволна субституция σ и произволни формули ϕ и ψ в смисъл, че когато едната от двете страни на равенството има смисъл, другата също има и двете страни означават една и съща формула:

$$\sigma(\neg\phi) = \neg\sigma(\phi), \quad \sigma(\phi \& \psi) = \sigma(\phi) \& \sigma(\psi), \quad \sigma(\phi \vee \psi) = \sigma(\phi) \vee \sigma(\psi), \\ \sigma(\phi \rightarrow \psi) = \sigma(\phi) \rightarrow \sigma(\psi), \quad \sigma(\phi \leftrightarrow \psi) = \sigma(\phi) \leftrightarrow \sigma(\psi)$$

(при доказателството на последните две се използват предходните и дефинициите за импликация и еквиваленция). Следните две равенства също ще бъдат верни в този смисъл за произволна субституция σ , произволна променлива ξ и произволна формула ϕ , но при допълнителното предположение, че σ не привнася ξ във ϕ :

$$\sigma(\forall \xi \phi) = \forall \xi \sigma_\xi(\phi), \quad \sigma(\exists \xi \phi) = \exists \xi \sigma_\xi(\phi).$$

Сега ще докажем едно твърдение, което посочва широк кръг от случаи на приложимост.

Твърдение 1. Ако ϕ е произволна формула, то всяка субституция, непривнасяща във ϕ нейни свързани променливи, е

приложима към φ .

Доказателство. Ще използваме индукция, съобразена с дефиницията за формула. Да наречем временно една формула φ *нормална*, ако тя има изказаното свойство, т.е. всяка субституция, непривнасяща във φ нейни свързани променливи, е приложима към φ . Атомарните формули разбира се са нормални, тъй че остава да покажем, че нормалността се запазва при образуване на отрицание, конюнкция и дизюнкция и при поставяне на квантор. Да предположим, че φ е нормална формула. Ще покажем, че и формулата $\neg\varphi$ е нормална. За целта да разгледаме произволна субституция σ , която не привнася в $\neg\varphi$ нейни свързани променливи. Благодарение на равенствата $\text{СВО}(\neg\varphi)=\text{СВО}(\varphi)$ и $\text{СВЪ}(\neg\varphi)=\text{СВЪ}(\varphi)$ може да се твърди, че σ не привнася и във φ нейни свързани променливи. Оттук получаваме, че σ е приложима към φ , а следователно и към $\neg\varphi$. По подобен, макар и леко по-сложен начин се вижда, че конюнкцията и дизюнкцията на две нормални формули също са нормални. Преминаваме към въпроса за запазване на нормалността при поставяне на квантор. Нека φ пак е нормална формула. Трябва да покажем, че формулите $\forall\xi\varphi$ и $\exists\xi\varphi$, където ξ е произволна променлива, също са нормални. Ще се занимаем с първата от тези две формули, а за втората нещата са съвсем аналогични. Нека σ е субституция, която не привнася в $\forall\xi\varphi$ нейни свързани променливи. Ще покажем, че σ е приложима към $\forall\xi\varphi$. Първо ще покажем, че σ не привнася ξ във формулата φ . Да допуснем противното. Тогава φ ще има такава свободна променлива η , различна от ξ , че ξ е свободна променлива на терма $\sigma(\eta)$. При това положение обаче η ще бъде свободна променлива и на формулата $\forall\xi\varphi$, поради което се получава, че, противно на направеното предположение за σ , тя привнася в последната формула нейната свързана променлива ξ . Остава да покажем, че субституцията σ_ξ е приложима към φ . За тази цел е достатъчно да покажем, че σ_ξ не привнася във φ никоя нейна свързана променлива. Да допуснем противното. Тогава φ ще има такава свободна променлива η , че съответният ѝ терм $\sigma_\xi(\eta)$ да има свободна променлива, различна от η , която същевременно е свързана променлива на φ . Тъй като $\sigma_\xi(\xi)=\xi$, оттук е ясно, че $\eta\neq\xi$, следователно η е свободна променлива и на формулата $\forall\xi\varphi$ и е в сила равенството $\sigma_\xi(\eta)=\sigma(\eta)$. Тъй като свързаните променливи на φ са свързани променливи и на формулата $\forall\xi\varphi$, отново получаваме, че σ привнася в последната формула нейна свързана променлива, противно на направеното предположение за σ .

Следствие 1. Нека φ е произволна формула. Ако σ е такава субституция, че за всяка свободна променлива η на φ съответният терм $\sigma(\eta)$ е затворен, то σ е приложима към φ .

Забележка 1. Лесно се проверява, че изискването една субституция σ да не привнася в дадена формула φ нейни свързани променливи е равносилно с това, щото за всяка свободна променлива η на φ да бъде изпълнено условието $\text{СВО}(\sigma(\eta))\cap\text{СВЪ}(\varphi)\subseteq\{\eta\}$.

Забележка 2. Условието от твърдение 1 за непривнасяне във φ на нейни свързани променливи е само достатъчно за приложимостта на една субституция към φ , но то не е необходимо. Например, ако r е едноместен предикатен символ, а x и y са различни променливи, то субституцията $(x:=y)$ е приложима към формулата $r(x)\&\exists y\neg r(y)$, въпреки че привнася в нея свързаната ѝ променлива y .

Ще докажем и няколко твърдения, в които става дума и за самите резултати от прилагане на субституции към произволни формули.

Твърдение 2. За всяка формула φ субституцията $(:=)$ е приложима към φ и е в сила равенството $(:=)(\varphi)=\varphi$.

Доказателство. Приложимостта на въпросната субституция към произволна формула е ясна от твърдение 1. Ние обаче ще докажем споменатата приложимост директно и едновременно с формулираното равенство, като за произволна формула φ установим индуктивно, че φ е резултат от прилагане на $(:=)$ към φ . За случая, когато φ е атомарна формула, този факт е вече известен, а индуктивните стъпки, отнасящи се до образуване на отрицание, на конюнкция и на дизюнкция, са съвсем прости. Затова да преминем веднага към случая на поставяне на квантор. Нека за дадена формула φ е известно, че φ е резултат от прилагане на $(:=)$ към φ , и нека ξ е някоя променлива. Трябва да покажем, че $\forall\xi\varphi$ е резултат от прилагане на $(:=)$ към $\forall\xi\varphi$ и $\exists\xi\varphi$ е резултат от прилагане на $(:=)$ към $\exists\xi\varphi$. Това обаче е ясно от обстоятелството, че $(:=)$ очевидно не привнася ξ във φ , а от друга страна субституцията $(:=)_\xi$ съвпада със субституцията $(:=)$, тъй че φ е резултат от прилагане и на $(:=)_\xi$ към φ .

Твърдение 3. Нека φ е произволна формула. Тогава за всяка субституция σ , приложима към φ , са изпълнени равенствата

$$\text{СВО}(\sigma(\varphi)) = \bigcup_{\eta \in \text{СВО}(\varphi)} \text{СВО}(\sigma(\eta)), \quad \text{СВЪ}(\sigma(\varphi)) = \text{СВЪ}(\varphi).$$

Доказателство. Ако φ е атомарна формула, първото от горните равенства ни е вече известно, а второто е тривиално. Не създава трудности и проверката, че верността на двете равенства за всички субституции, приложими към дадена формула, се запазва при образуване на отрицание, на конюнкция и на дизюнкция. Сега ще покажем, че тя се запазва и при поставяне на квантор. Ще се ограничим със случая на квантор за общност, а случаят на квантор за съществуване е съвсем аналогичен. И така, да предположим, че дадена формула φ има разглежданото свойство. Нека ξ е променлива, а σ е някоя субституция, приложима към формулата $\forall\xi\varphi$. Целта ни ще бъде да докажем равенствата

$$\text{CBO}(\sigma(\forall \xi \varphi)) = \bigcup_{\eta \in \text{CBO}(\forall \xi \varphi)} \text{CBO}(\sigma(\eta)), \quad \text{CB}\ddot{\text{B}}(\sigma(\forall \xi \varphi)) = \text{CB}\ddot{\text{B}}(\forall \xi \varphi).$$

Първото от равенствата доказваме чрез следната верига от преобразования:

$$\begin{aligned} \text{CBO}(\sigma(\forall \xi \varphi)) &= \text{CBO}(\forall \xi \sigma_{\xi}(\varphi)) = \text{CBO}(\sigma_{\xi}(\varphi) \setminus \{\xi\}) = \\ &= \left(\bigcup_{\eta \in \text{CBO}(\varphi)} \text{CBO}(\sigma_{\xi}(\eta)) \right) \setminus \{\xi\} = \left(\bigcup_{\eta \in \text{CBO}(\varphi) \setminus \{\xi\}} \text{CBO}(\sigma(\eta)) \right) \setminus \{\xi\} = \\ &= \bigcup_{\eta \in \text{CBO}(\varphi) \setminus \{\xi\}} \text{CBO}(\sigma(\eta)) = \bigcup_{\eta \in \text{CBO}(\forall \xi \varphi)} \text{CBO}(\sigma(\eta)) \end{aligned}$$

(равенството между двата израза, които са на втория ред, е ясно от обстоятелството, че обединението в първия израз съвпада с обединението във втория или съдържа в повече само елемента ξ , а следващото равенство е вярно благодарение на това, че σ не привнася ξ във φ). Доказателството на второто равенство е по-просто:

$$\text{CB}\ddot{\text{B}}(\sigma(\forall \xi \varphi)) = \text{CB}\ddot{\text{B}}(\forall \xi \sigma_{\xi}(\varphi)) = \text{CB}\ddot{\text{B}}(\sigma_{\xi}(\varphi) \cup \{\xi\}) = \text{CB}\ddot{\text{B}}(\varphi) \cup \{\xi\} = \text{CB}\ddot{\text{B}}(\forall \xi \varphi).$$

Следствие 2. Ако φ е формула, а σ е такава субституция, че за всяка свободна променлива η на φ съответният терм $\sigma(\eta)$ е затворен, то формулата $\sigma(\varphi)$ е затворена.

Твърдение 4. Нека φ е произволна формула. Ако две субституции съвпадат върху множеството на свободните променливи на φ и едната от двете субституции е приложима към φ , то другата също е приложима и резултатите от прилагането на двете субституции към φ са едни и същи.

Доказателство. Отново използваме индукция, съобразена с дефиницията за формула. Единствената стъпка, чието извършване изисква известно усилие, е доказателството, че свойството се запазва при поставяне на квантор. Нека φ е формула, която има разглежданото свойство, и нека ξ е дадена променлива. Трябва да покажем, че формулите $\forall \xi \varphi$ и $\exists \xi \varphi$ също имат това свойство. Ще се ограничим с първата от тях. Да предположим, че две субституции σ и σ' съвпадат върху множеството на свободните променливи на формулата $\forall \xi \varphi$ и субституцията σ е приложима към тази формула. Целта ни ще бъде да се убедим, че тогава и субституцията σ' е приложима към въпросната формула и е в сила равенството $\sigma(\forall \xi \varphi) = \sigma'(\forall \xi \varphi)$. От направените предположения се получава, че субституцията σ_{ξ} е приложима към формулата φ и имаме равенството

$$\sigma(\forall \xi \varphi) = \forall \xi \sigma_{\xi}(\varphi)$$

От съвпадането на σ и σ' върху множеството $\text{CBO}(\forall \xi \varphi)$ заключаваме, че σ_{ξ} съвпада със σ'_{ξ} върху множеството $\text{CBO}(\varphi)$. Това гарантира, че субституцията σ'_{ξ} също е приложима към φ и имаме равенството $\sigma_{\xi}(\varphi) = \sigma'_{\xi}(\varphi)$. Поради това можем да твърдим, че

$$\sigma(\forall \xi \varphi) = \forall \xi \sigma'_{\xi}(\varphi).$$

Направените предположения дават още, че субституцията σ не привнася ξ във φ , и позволяват да заключим оттук, че и субституцията σ' не привнася ξ във φ . По такъв начин виждаме, че σ' е приложима към формулата $\forall \xi \varphi$, а тогава дясната страна на последното равенство може да се напише във вида $\sigma'(\forall \xi \varphi)$.

Следствие 3 (от горното твърдение и от твърдение 2). Ако една формула φ е затворена, а σ е произволна субституция, то σ е приложима към φ и е изпълнено равенството $\sigma(\varphi) = \varphi$.

Последно изменение: 26.07.1999 г.