СВЕЖДАНЕ НА ВЪПРОСИ ЗА ТЪЖДЕСТВЕНА ВЯРНОСТ, ИЗПЪЛНИМОСТ И СЛЕДВАНЕ В ПРЕДИКАТНОТО СМЯТАНЕ С РАВЕНСТВО КЪМ ВЪПРОСИ В ОБЩОТО ПРЕДИКАТНО СМЯТАНЕ

Ще предполагаме, че е налице двуместен предикатен символ eq. Ще наричаме *представително множество от аксиоми на равенството* такова множество от аксиоми на равенството, което съдържа поне по една формула от всеки от първите три вида, изброени в дефиницията за аксиома на равенството, и за всяко положително цяло число n съдържа поне една формула от четвъртия от изброените видове при всеки избор на функционалния символ ω и поне една формула от петия от изброените видове при всеки избор на предикатния символ π. Ще предполагаме, че е фиксирано някое представително множество от аксиоми на равенството, и ще го означаваме с E (в частност би могло E да се състои от всички аксиоми на равенството). Ясно е, че за да бъдат верни в дадена структура аксиомите на равенството, необходимо и достатъчно е в тази структура да бъдат верни формулите от множеството E.

Теорема 1. Нека φ е произволна формула. За да бъде φ тъждествено вярна в предикатното смятане с равенство, необходимо и достатъчно е φ да следва от множеството E в общото предикатно смятане.

Доказателство. Знаем, че ако пред една формула поставим квантори за общност относно нейните свободни променливи, получената формула е затворена и е вярна точно в онези структури, в които дадената формула е тъждествено вярна. Поради това можем без ограничение на общността да считаме, че формулата φ е затворена. При такова положение задачата ни се свежда към това да докажем, че φ е вярна във всяка нормална структура точно тогава, когато φ следва от множеството E в общото предикатно смятане. В едната посока доказателството е очевидно - ако φ следва от множеството E в общото предикатно смятане, то φ е вярна във всяка нормална структура, защото формулите от E са верни във всяка такава структура. За да извършим доказателството в обратната посока, да предположим сега, че φ е вярна във всяка нормална структура, и да разгледаме произволна структура S, с която са верни формулите от E. В структурата S ще бъдат верни аксиомите на равенството и поради това теорема 3 от въпроса за конгруентности и факторизация позволява да се построи нормална структура, в която са верни същите затворени формули както в S. Формулата φ ще бъде вярна в така построената структура, следователно φ ще бъде вярна и в S. С това е показано, че φ следва от множеството E в общото предикатно смятане.

Теорема 2. Нека M е произволно множество от формули. За да бъде M изпълнимо в предикатното смятане с равенство, необходимо и достатъчно е обединението $M \cup E$ да бъде изпълнимо в общото предикатно смятане.

Доказателство. Ако множеството M е изпълнимо в предикатното смятане с равенство, то съществува нормална конфигурация, в която са верни формулите от M, а във всяка такава конфигурация очевидно са верни и всички формули от множеството $M \cup E$. С това необходимостта е доказана. За да докажем достатъчността, нека предположим, че обединението $M \cup E$ е изпълнимо в общото предикатно смятане. Нека σ е такава субституция, за каквато става дума в допълнителната лема за равноизпълнимост, и нека M' е множеството от формулите, получени от формулите от M чрез прилагането на σ (разбира се M' съвпада с M в случая, когато формулите от M са затворени, като в този случай разглеждането на σ е всъщност излишно и доказателството се опростява). Споменатата лема, приложена към множеството $M \cup E$ в качеството на M, позволява да се твърди, че множеството от затворени формули $M' \cup E$ също е изпълнимо в общото предикатно смятане. Нека S е структура, която е модел на $M' \cup E$. Понеже в S са верни аксиомите на равенството, теорема 3 от въпроса за конгруентности и факторизация позволява да се построи нормална структура $S^{\cdot}$, която е модел на M'. Като използваме забележката към допълнителната лема за равноизпълнимост, можем да твърдим, че при подходящ избор на оценката v в $S^{\cdot}$ на променливите нормалната конфигурация $(S^{\cdot}, v)$ ще удовлетворява множеството M. Следователно множеството M е изпълнимо в предикатното смятаме с равенство.

Следствие. Нека M е дадено множество от формули. Една формула следва от M в предикатното смятане с равенство точно тогава, когато тя следва от обединението $M \cup E$ в общото предикатно смятане.

Доказателство. Ако дадената формула е φ, използваме, че φ следва от M в предикатното смятане с равенство точно тогава, когато множеството $M \cup \{\neg\varphi\}$ е неизпълнимо в предикатното смятане с равенство.

Последно изменение: 26.07.1999 г.