

ФОРМАЛНИ СИСТЕМИ ЗА ИЗВЕЖДАНЕ НА ТЪЖДЕСТВЕНО ВЕРНИ СЕКВЕНЦИИ

Един широко използван метод за изграждане на математически дисциплини е тъй нареченият *аксиоматичен метод*. При този метод се фиксират предварително някакъв набор от понятия на изгражданата дисциплина (нейни *първични понятия*) и някакъв набор от твърдения на тази дисциплина (нейни *аксиоми*), а след това се разрешава в нея да се работи само с такива понятия, които в крайна сметка са дефинирани чрез първичните понятия, и само с такива твърдения, които не съдържат други понятия освен първични и дефинирани чрез тях и за които твърдения е показано по логически безупречен начин, че следват от аксиомите на дисциплината. Една от важните задачи на математическата логика е по-задълбоченото изясняване на същността и на възможностите на аксиоматичния метод. Съществена стъпка в тази насока е построяването и изследването на тъй наречени *формални системи за извеждане* в определени класове обекти на математическата логика (като важни примери за такива класове обекти можем да посочим класа на тълкувателно верните формули и класа на тълкувателно верните секвенции на даден език на предикатното смятане). Построяването на една такава система става като се посочва определен обозрим подклас на интересувания ни клас от обекти (елементите на този подклас се наричат *аксиоми на формалната система*) и се дава обозрима съвкупност от правила (*извеждащи правила на системата* или, по-кратко - нейни *правила*), чрез които от едни елементи на разглеждания клас могат да се получават други. Когато е построена някоя система от този вид, естествено е да се изследва кои елементи на разглеждания клас могат да бъдат получени от аксиомите чрез прилагане на извеждащите правила.¹ Такива елементи се наричат *изводими* в дадената формална система. Особен интерес представляват онези формални системи, в които са изводими всички елементи на разглеждания клас - формалните системи с това свойство се наричат *пълни*.

Някои от често използваните формални системи за извеждане в класа на тълкувателно верните формули на предикатното смятане са били по същество известни още през първите десетилетия на този век. Пълнотата на тези системи е доказана от [Курт Гьодел](#) (Kurt Gödel) през 1930 г.² Формални системи за извеждане в класа на тълкувателно верните секвенции на предикатното смятане са предложени през 1934 г. от Генцен и ние сега ще се запознаем съвсем накратко с една такава система.

Предполагайки, че е даден някой език на предикатното смятане, ще разгледаме формална система **G**, чиито извеждащи правила отговарят на законите за различните логически операции в предпоставката и в заключението. Аксиоми на **G** ще бъдат секвенциите, на които предпоставката и заключението имат обща формула (знаем, че всички такива секвенции са тълкувателно верни). Извеждащите правила на **G** ще представим чрез схеми, като всяка схема ще съдържа хоризонтална черта, под чертата и над чертата ще бъдат посочени съответно секвенция, която може да се получи по това правило, и секвенция или секвенции, от които може да се получи тя, а вляво от чертата ще бъде дадено условно означение на правилото (словесните наименования на правилата ще бъдат същите както на съответните закони с тази разлика, че вместо думата "закон" сега ще имаме думата "правило" - например правилото ($\neg \text{--}$) ще наричаме правило за отрицание в предпоставката). Буквите Γ и Δ в схемите ще означават крайни множества от формули, буквите ϕ и ψ - формули, буквите ξ и η - променливи, буквата τ - терм (за последните четири правила накрая ще бъдат написани и допълнителни условия, които се изискват, за да са приложими тези правила). Системата **G** ще има следните 10 извеждащи правила:

$$\begin{array}{l}
 (\neg \text{--}) \quad \frac{\Gamma \text{--} \Delta \cup \{\phi\}}{\Gamma \cup \{\neg \phi\} \text{--} \Delta} \\
 (\& \text{--}) \quad \frac{\Gamma \cup \{\phi, \psi\} \text{--} \Delta}{\Gamma \cup \{\phi \& \psi\} \text{--} \Delta} \\
 (\vee \text{--}) \quad \frac{\Gamma \cup \{\phi\} \text{--} \Delta \quad \Gamma \cup \{\psi\} \text{--} \Delta}{\Gamma \cup \{\phi \vee \psi\} \text{--} \Delta} \\
 (\forall \text{--}) \quad \frac{\Gamma \cup \{\forall \xi \phi, (\xi = \tau)(\phi)\} \text{--} \Delta}{\Gamma \cup \{\forall \xi \phi\} \text{--} \Delta} \\
 (\exists \text{--}) \quad \frac{\Gamma \cup \{(\xi = \eta)(\phi)\} \text{--} \Delta}{\Gamma \cup \{\exists \xi \phi\} \text{--} \Delta} \\
 (:\neg) \quad \frac{\Gamma \cup \{\phi\} \text{--} \Delta}{\Gamma \text{--} \Delta \cup \{\neg \phi\}} \\
 (:\&) \quad \frac{\Gamma \text{--} \Delta \cup \{\phi\} \quad \Gamma \text{--} \Delta \cup \{\psi\}}{\Gamma \text{--} \Delta \cup \{\phi \& \psi\}} \\
 (:\vee) \quad \frac{\Gamma \text{--} \Delta \cup \{\phi, \psi\}}{\Gamma \text{--} \Delta \cup \{\phi \vee \psi\}} \\
 (:\forall) \quad \frac{\Gamma \text{--} \Delta \cup \{(\xi = \eta)(\phi)\}}{\Gamma \text{--} \Delta \cup \{\forall \xi \phi\}} \\
 (:\exists) \quad \frac{\Gamma \text{--} \Delta \cup \{\exists \xi \phi, (\xi = \tau)(\phi)\}}{\Gamma \text{--} \Delta \cup \{\exists \xi \phi\}}
 \end{array}$$

(при правилата ($\forall \text{--}$) и ($:\exists$) се изисква субституцията ($\xi = \tau$) да бъде приложима към ϕ , а при правилата ($\exists \text{--}$) и ($:\forall$) - η да не е свободна променлива на секвенцията под чертата и субституцията ($\xi = \eta$) да е приложима към ϕ).

Както може да се види от някои примери, фактичкото получаване на една секвенция от аксиоми на \mathbf{G} с помощта на правила на \mathbf{G} може да изглежда доста различно от обичайните математически доказателства. С цел да се постигне по-голяма близост с обичайните доказателства предложени са някои по-подходящи в това отношение формални системи, които за разлика от \mathbf{G} са системи за извеждане в по-тесен клас от тъждествено верни секвенции - в класа на онези от тях, на които заключението съдържа най-много формула. Ще опишем една такава система, която ще означим с \mathbf{G}' .

Системата \mathbf{G}' ще има за аксиоми всички секвенции от следните видове, където ϕ и ψ са формули, ξ е променлива и τ е такъв терм, че субституцията ($\xi:=\tau$) е приложима към ϕ :

$$\phi:-\phi \quad \neg\neg\phi:-\phi \quad \phi\&\psi:-\phi \quad \phi\&\psi:-\psi \quad \phi:-\phi\vee\psi \quad \psi:-\phi\vee\psi \quad \forall\xi\phi:-:(\xi:=\tau)(\phi) \quad (\xi:=\tau)(\phi):-\exists\xi\phi$$

Правила за извеждане на \mathbf{G}' ще бъдат някои частни случаи на правила на \mathbf{G} (изброени по-надолу) и следните три правила, където χ е формула, Γ и Γ' са крайни множества от формули, Δ е празното множество или множество от една формула:

$$\begin{array}{c} \text{(правила за разширяване)} \\ \frac{\Gamma:-\Delta}{\Gamma\cup\{\chi\}:-\Delta} \qquad \frac{\Gamma:-}{\Gamma:-\chi} \end{array}$$

$$\text{(правило за сечение)} \quad \frac{\Gamma\cup\{\chi\}:-\Delta \quad \Gamma':-\chi}{\Gamma\cup\Gamma':-\Delta}$$

Споменатите преди малко частни случаи на правила на \mathbf{G} са случаите с празно Δ на правилата ($\neg -:$), ($-: \neg$), ($-: \&$), ($-: \forall$) и случаите с празно или едноелементно Δ на правилата ($\vee -:$), ($\exists -:$). Ще означаваме тези частни случаи с ($-: \neg$)', ($-: \&$)' и т.н.

Може да се докаже, че системата \mathbf{G}' е пълна, а системата \mathbf{G} е, тъй да се каже, почти пълна - в нея са изводими поне онези тъждествено верни секвенции, за които никоя променлива не е едновременно тяхна свободна и тяхна свързана променлива.

Две от правилата на системата \mathbf{G} - правилата ($-: \vee$) и ($-: \exists$) очевидно не са подходящи за системата \mathbf{G}' , защото дори и при празно Δ първото от тях използва секвенция с повече от една формула в заключението винаги освен само в специалния случай, когато $\phi=\psi$, а второто използва такава секвенция винаги без изключение. Останалите правила на \mathbf{G} , частни случаи на които не бяха включени в \mathbf{G}' , са правилата ($\& -:$) и ($\forall -:$). Ще покажем, че съответните им частни случаи могат все пак да се използват в \mathbf{G}' (това, както и други по-нататъшни твърдения, следва и от споменатата пълнота на \mathbf{G}' , но тя трудно би могла да се докаже, без да се докажат предварително подобни свойства на изводимостта в \mathbf{G}').

Лема за допустимост на правило ($\& -:$)' в системата \mathbf{G}' . Нека ϕ и ψ са формули, Γ е крайно множество от формули, Δ е празното множество или е множество от една формула. Тогава ако секвенцията $\Gamma\cup\{\phi,\psi\}:-\Delta$ е изводима в системата \mathbf{G}' , то и секвенцията $\Gamma\cup\{\phi\&\psi\}:-\Delta$ е изводима в \mathbf{G}' .

Доказателство. От секвенцията $\Gamma\cup\{\phi,\psi\}:-\Delta$ и аксиомата $\phi\&\psi:-\phi$ на \mathbf{G}' по правилото за сечение се получава секвенцията $\Gamma\cup\{\psi,\phi\&\psi\}:-\Delta$, а от нея и аксиомата $\phi\&\psi:-\psi$ на \mathbf{G}' пак по правилото за сечение - секвенцията $\Gamma\cup\{\phi\&\psi\}:-\Delta$.

Лема за допустимост на правило ($\forall -:$)' в системата \mathbf{G}' . Нека ϕ е формула, ξ е променлива, τ е такъв терм, че субституцията ($\xi:=\tau$) е приложима към ϕ , Γ е крайно множество от формули, Δ е празното множество или е множество от една формула. Тогава ако секвенцията $\Gamma\cup\{\forall\xi\phi,(\xi:=\tau)(\phi)\}:-\Delta$ е изводима в системата \mathbf{G}' , то и секвенцията $\Gamma\cup\{\forall\xi\phi\}:-\Delta$ е изводима в \mathbf{G}' .

Доказателство. Втората секвенция може да бъде получена от първата и от аксиомата $\forall\xi\phi:-:(\xi:=\tau)(\phi)$ на \mathbf{G}' по правилото за сечение.

В сила е още следното твърдение:

Лема за изводимост в \mathbf{G}' на някои аксиоми на \mathbf{G} . Онези от аксиомите на \mathbf{G} , на които заключенията са от по една формула, са изводими в системата \mathbf{G}' .

Доказателство. Всяка от тези аксиоми може да се получи от секвенция от вида $\phi:-\phi$ чрез известен брой прилагания на първото правило за разширяване.

Горните три лема понякога са достатъчни дадено конкретно установяване на изводимост в системата \mathbf{G} да може да се използва за установяване на изводимост и в системата \mathbf{G}' . В други случаи е полезна и следната лема.

Лема за допустимост на контрапозиция в системата \mathbf{G}' . Нека Γ е крайно множество от формули, ϕ и ψ са формули и

секвенцията $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ е изводима в \mathbf{G}' . Тогава секвенцията $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg\varphi$ също е изводима в \mathbf{G}' .

Доказателство. Втората секвенция може да се получи от първата чрез последователно прилагане на правилата $(\neg \vdash)'$ и $(\vdash \neg)'$.

С помощта на доказаните лемми ще докажем следната обща теорема.

Теорема за запазване на изводимост при преминаване от \mathbf{G} към \mathbf{G}' . Ако една секвенция $\Gamma \vdash \Delta$ е изводима в системата \mathbf{G} и множеството Δ има не повече от един елемент, тази секвенция е изводима и в системата \mathbf{G}' .

Доказателство. За кое да е крайно множество от формули Δ да означим с $\neg\Delta$ множеството на формулите от вида $\neg\varphi$, където $\varphi \in \Delta$. Да наречем *превод* на произволна секвенция $\Gamma \vdash \Delta$ съответната секвенция $\Gamma \cup \neg\Delta \vdash \cdot$. Очевидно преводът на секвенция с празно заключение съвпада със самата нея, а за произволна секвенция $\Gamma \vdash \varphi$, имаща едноелементно заключение, нейният превод е $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \cdot$. Поради това, за да докажем теоремата, достатъчно е да докажем следните две помощни твърдения: а) преводът на всяка секвенция, изводима в \mathbf{G} , е изводим в \mathbf{G}' ; б) ако за дадено крайно множество от формули Γ и дадена формула φ секвенцията $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \cdot$ е изводима в \mathbf{G}' , то секвенцията $\Gamma \vdash \varphi$ също е изводима в \mathbf{G}' . Помощното твърдение б) се доказва, като се забележи, че от секвенцията $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \cdot$ по правилото $(\vdash \neg)'$ се получава секвенцията $\Gamma \vdash \neg\neg\varphi$, а от аксиомата $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$ на \mathbf{G}' и последната секвенция по правилото за сечение се получава секвенцията $\Gamma \vdash \varphi$. За да докажем помощното твърдение а), да наречем *легитимни* онези секвенции, изводими в \mathbf{G} , на които преводите са изводими в \mathbf{G}' . Тогава твърдението а) може да бъде изказано като твърдение, че всички секвенции, изводими в \mathbf{G} , са легитимни. Ще го докажем, като покажем, че всички аксиоми на \mathbf{G} са легитимни и че при прилагане на правилата на \mathbf{G} към легитимни секвенции получените секвенции винаги са пак легитимни. Очевидно преводът на коя да е аксиома на \mathbf{G} е секвенция от вида $\mathbf{B} \cup \{\neg\varphi\} \vdash \cdot$, където \mathbf{B} е крайно множество от формули, а φ е формула. Такава секвенция е изводима в \mathbf{G}' , защото може да се получи по правилото $(\neg \vdash)'$ от секвенцията $\mathbf{B} \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$, която от своя страна е изводима в \mathbf{G}' според лемата за изводимост в \mathbf{G}' на някои аксиоми на \mathbf{G} . Остава за всички правила на системата \mathbf{G} да покажем, че прилагането им към легитимни секвенции дава пак легитимни секвенции. За целта ще разгледаме поотделно всяко от правилата.

$(\neg \vdash)$ Нека $\Gamma \vdash \Delta \cup \{\varphi\}$ е легитимна секвенция. Нейн превод е секвенцията $\Gamma \cup \neg\Delta \cup \{\neg\varphi\} \vdash \cdot$ и значи последната е изводима в \mathbf{G}' . Очевидно обаче секвенцията $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \Delta$ има същия превод. Следователно и тя е легитимна.

$(\vdash \neg)$ Нека $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \Delta$ е легитимна секвенция. Тогава секвенцията $\Gamma \cup \{\varphi\} \cup \neg\Delta \vdash \cdot$ е изводима в \mathbf{G}' . Трябва да докажем, че е легитимна и секвенцията $\Gamma \vdash \Delta \cup \{\neg\varphi\}$, което ще означава в \mathbf{G}' да бъде изводима секвенцията $\Gamma \cup \neg\Delta \cup \{\neg\neg\varphi\} \vdash \cdot$. Това условие е изпълнено, защото последната секвенция може да се получи от $\Gamma \cup \{\varphi\} \cup \neg\Delta \vdash \cdot$ чрез последователно прилагане на правилото $(\vdash \neg)'$ и правилото $(\neg \vdash)'$.

$(\& \vdash)$ Нека $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \vdash \Delta$ е легитимна секвенция. Тогава $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \cup \neg\Delta \vdash \cdot$ е секвенция, изводима в \mathbf{G}' . Лемата за допустимост на правило $(\& \vdash)'$ в системата \mathbf{G}' позволява отгук да заключим, че е изводима в \mathbf{G}' и секвенцията $\Gamma \cup \{\varphi \& \psi\} \cup \neg\Delta \vdash \cdot$. Тя обаче е превод на секвенцията $\Gamma \cup \{\varphi \& \psi\} \vdash \Delta$, значи последната е също легитимна.

$(\vdash \&)$ Нека $\Gamma \vdash \Delta \cup \{\varphi\}$ и $\Gamma \vdash \Delta \cup \{\psi\}$ са легитимни секвенции. Тогава секвенциите $\Gamma \cup \neg\Delta \cup \{\neg\varphi\} \vdash \cdot$ и $\Gamma \cup \neg\Delta \cup \{\neg\psi\} \vdash \cdot$ са изводими в \mathbf{G}' . Помощното твърдение б), което вече доказахме, позволява отгук да заключим, че в \mathbf{G}' са изводими и секвенциите $\Gamma \cup \neg\Delta \vdash \varphi$ и $\Gamma \cup \neg\Delta \vdash \psi$. От тях обаче чрез последователно прилагане на правилата $(\vdash \&)'$ и $(\neg \vdash)'$ се получава секвенцията $\Gamma \cup \neg\Delta \cup \{\neg(\varphi \& \psi)\} \vdash \cdot$ и значи тя също е изводима в \mathbf{G}' . Следователно секвенцията $\Gamma \vdash \Delta \cup \{\varphi \& \psi\}$ е легитимна.

$(\vee \vdash)$ Нека $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \Delta$ и $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \Delta$ са легитимни секвенции. Тогава секвенциите $\Gamma \cup \{\varphi\} \cup \neg\Delta \vdash \cdot$ и $\Gamma \cup \{\psi\} \cup \neg\Delta \vdash \cdot$ са изводими в \mathbf{G}' . От тях по правилото $(\vee \vdash)$ се получава секвенцията $\Gamma \cup \{\varphi \vee \psi\} \cup \neg\Delta \vdash \cdot$, която значи също е изводима в \mathbf{G}' . Следователно секвенцията $\Gamma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \Delta$ е легитимна.

$(\vdash \vee)$ Нека $\Gamma \vdash \Delta \cup \{\varphi, \psi\}$ е легитимна секвенция. Тогава в \mathbf{G}' е изводима секвенцията $\Gamma \cup \neg\Delta \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\} \vdash \cdot$. Като вземем предвид лемата за допустимост на контрапозиция в \mathbf{G}' и обстоятелството, че $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ и $\psi \vdash \varphi \vee \psi$ са аксиоми на \mathbf{G}' , виждаме, че в \mathbf{G}' са изводими секвенциите $\neg(\varphi \vee \psi) \vdash \neg\varphi$ и $\neg(\varphi \vee \psi) \vdash \neg\psi$. От тях и секвенцията $\Gamma \cup \neg\Delta \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\} \vdash \cdot$ чрез двукратно прилагане на правилото за сечение се получава секвенцията $\Gamma \cup \neg\Delta \cup \{\neg(\varphi \vee \psi)\} \vdash \cdot$. Значи секвенцията $\Gamma \vdash \Delta \cup \{\varphi \vee \psi\}$ е легитимна.

$(\forall \vdash)$ Нека при предположенията, при които може да се прилага това правило, секвенцията $\Gamma \cup \{\forall \xi \varphi, (\xi := \tau)(\varphi)\} \vdash \Delta$ е легитимна. Тогава съответната секвенция $\Gamma \cup \{\forall \xi \varphi, (\xi := \tau)(\varphi)\} \cup \neg\Delta \vdash \cdot$ е изводима в \mathbf{G}' . Отгук по лемата за допустимост на правило $(\forall \vdash)'$ в системата \mathbf{G}' получаваме, че в \mathbf{G}' е изводима и секвенцията $\Gamma \cup \{\forall \xi \varphi\} \cup \neg\Delta \vdash \cdot$. Следователно секвенцията $\Gamma \cup \{\forall \xi \varphi\} \vdash \Delta$ е легитимна.

$(\vdash \forall)$ Нека при предположенията, при които може да се прилага това правило, секвенцията $\Gamma \vdash \Delta \cup \{(\xi := \eta)(\varphi)\}$ е легитимна. Тогава в \mathbf{G}' е изводима секвенцията $\Gamma \cup \neg\Delta \cup \{\neg(\xi := \eta)(\varphi)\} \vdash \cdot$. Помощното твърдение б) позволява отгук да заключим, че и секвенцията $\Gamma \cup \neg\Delta \vdash (\xi := \eta)(\varphi)$ е изводима в \mathbf{G}' . От нея с последователно прилагане на правилата $(\vdash \forall)$ и $(\neg \vdash)$ можем да получим секвенцията $\Gamma \cup \neg\Delta \cup \{\neg \forall \xi \varphi\} \vdash \cdot$ и значи секвенцията $\Gamma \vdash \Delta \cup \{\forall \xi \varphi\}$ е легитимна.

(\exists -:) Нека при предположенията, при които може да се прилага това правило, секвенцията $\Gamma \cup \{(\xi := \eta)(\varphi)\} - : \Delta$ е легитимна. Тогава в \mathbf{G}' е изводима секвенцията $\Gamma \cup \{(\xi := \eta)(\varphi)\} \cup -\Delta - :$. От нея обаче по правилото (\exists -:)' се получава секвенцията $\Gamma \cup \{\exists \xi \varphi\} \cup -\Delta - :$ и значи секвенцията $\Gamma \cup \{\exists \xi \varphi\} - : \Delta$ е легитимна.

(-: \exists) Нека при предположенията, при които може да се прилага това правило, секвенцията $\Gamma - : \Delta \cup \{\exists \xi \varphi, (\xi := \tau)(\varphi)\}$ е легитимна. Тогава в \mathbf{G}' е изводима секвенцията $\Gamma \cup -\Delta \cup \{-\exists \xi \varphi, -(\xi := \tau)(\varphi)\} - :$. От лемата за допустимост на контрапозиция в \mathbf{G}' и обстоятелството, че $(\xi := \tau)(\varphi) - : \exists \xi \varphi$ е аксиома на \mathbf{G}' , се получава, че секвенцията $-\exists \xi \varphi - : -(\xi := \tau)(\varphi)$ е изводима в \mathbf{G}' . С прилагане на правилото за сечение към споменатите две секвенции, изводими в \mathbf{G}' , можем да получим секвенцията $\Gamma \cup -\Delta \cup \{-\exists \xi \varphi\} - :$. Значи секвенцията $\Gamma - : \Delta \cup \{\exists \xi \varphi\}$ е легитимна.

Бележки

¹ Без ограничения относно броя на прилаганията - той може да бъде произволно естествено число (включително и нула).

² Гьодел е особено известен с един друг свой резултат, който пак се отнася до въпрос за пълнота на формални системи, обаче е отрицателен. Това е прочутата Гьоделова теорема за непълнота, според която, при определени естествени уточнявания на понятията, не е възможна например пълна формална система за извеждане в класа на формулите на предикатното смятане, тъждествено верни в дадена достатъчно богата структура с носител множеството на естествените числа.

Последно изменение: 9.01.2001 г.

[Previous](#)

[Contents](#)