Московакисово разширение на ефективно метрично пространство

Димитър Скордев

Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика

Пролетна научна конференция на ФМИ
31 март 2018 г.

Понятието Московакисово разширение

Из статията: Yiannis N. Moschovakis. Abstract first order computability. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **138**, 427–464, 1969.

Let B be an arbitrary set, let 0 be some object not in B, let

$$B^0 = B \cup \{0\}.$$

We define the set B^* by the inductive clauses

$$\textit{if } x \in B^0, \ \textit{then } x \in B^*,$$

$$\textit{if } x, y \in B^*, \ \textit{then } (x, y) \in B^*.$$

Here (x, y) is the ordered pair of x and y and we assume that we have chosen a particular set-theoretic operation to represent the ordered pair so that no object in B^0 is an ordered pair. Thus if $z \in B^*$, then either $z \in B^0$ or $z = (x, y)$ with uniquely determined $x, y \in B^*$.

Означения, които ще използваме

Ще пишем o и B^o вместо 0 и B^0. Ако X е множество, ще означаваме с $X^\triangle$ най-малкото множество Z със свойствата $X \subseteq Z$ и $Z \times Z \subseteq Z$ (при тези означения $B^* = (B^o)^\triangle$).

Ефективни метрични пространства

Дефиниция

Ефективно метрично пространство (ЕМП) ще наричаме всяка наредена тройка (M, d, α), където (M, d) е метрично пространство, α е частично изображение на $\mathbb{N}$ в M и множеството $\mathrm{rng}(\alpha)$ е навсякъде гъсто в (M, d).

Пример. $M = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$, $\mathrm{dom}(\alpha) = \mathbb{N}$, $\mathrm{rng}(\alpha) = \mathbb{Q}$.

Дефиниция

Нека (M, d, α) е ЕМП, $x \in M$, $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Ще казваме, че p *(d, α)-представя x, ако $p(n) \in \mathrm{dom}(\alpha)$ и $d(\alpha(p(n)), x) < 2^{-n}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.*

Дефиниция

Казваме, че ЕМП (M, d, α) е *изчислимо, ако съществува такава изчислима функция $\delta : \mathrm{dom}(\alpha) \times \mathrm{dom}(\alpha) \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, че $|\delta(i, j, n) - d(\alpha(i), \alpha(j))| < 2^{-n}$ при $(i, j, n) \in \mathrm{dom}(\delta)$.*

Едноточково разширение на ЕМП

Твърдение 1

Нека (M, d, α) *е ЕМП,* $a \in M$ *и* $o \notin M$. *Нека* $d_a^o : M^o \times M^o \to \mathbb{R}$ *и* $\alpha^o :\subseteq \mathbb{N} \to M_o$ *са дефинирани така:*

1. $d_a^o(x, y) = d(x, y)$ *при* $x, y \in M$; $d_{o,a}(o, o) = 0$.
2. $d_a^o(x, o) = d_a^o(o, x) = \max(d(x, a), 1)$ *при* $x \in M$.
3. $\alpha^o(0) = o$; $\alpha^o(i + 1) = \alpha(i)$ *при* $i \in \mathrm{dom}(\alpha)$.

Тогава (M^o, d_a^o, α^o) *е ЕМП и е в сила следното:*

- *Ако* $x \in M$, *то една функция* $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (d_a^o, α^o)*-представя* x *точно тогава, когато* $p = \lambda n.q(n) + 1$ *за някоя функция* q, *която* (d, α)*-представя* x.
- *Една функция* $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (d_a^o, α^o)*-представя* o *точно тогава, когато* $p = \lambda n.0$.
- *Ако ЕМП* (M^o, d_a^o, α^o) *е изчислимо, то и ЕМП* (M, d, α) *е изчислимо. При* $a \in \mathrm{rng}(\alpha)$ *е вярно и обратното.*

Модифицирано едноточково разширение на ЕМП

Твърдение 2

Нека (M, d, α) *е ЕМП и* $o \notin M$. *Нека* $d^o : M^o \times M^o \to \mathbb{R}$ *и* $\alpha^o :\subseteq \mathbb{N} \to M_o$ *са дефинирани така:*

1. $d^o(x, y) = \min(d(x, y), 1)$ *при* $x, y \in M$; $d_o(o, o) = 0$.
2. $d^o(x, o) = d^o(o, x) = 1$ *при* $x \in M$.
3. $\alpha^o(0) = o$; $\alpha^o(i + 1) = \alpha(i)$ *при* $i \in \mathrm{dom}(\alpha)$.

Тогава (M^o, d^o, α^o) *е ЕМП и е в сила следното:*

- *Ако* $x \in M$, *то една функция* $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (d^o, α^o)*-представя* x *точно тогава, когато* $p = \lambda n.q(n) + 1$ *за някоя функция* q, *която* (d, α)*-представя* x.
- *Една функция* $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (d^o, α^o)*-представя* o *точно тогава, когато* $p = \lambda n.0$.
- (M^o, d^o, α^o) *е изчислимо* $\Leftrightarrow$ (M, d, α) *е изчислимо.*

Забележка. При ситуацията от твърдения 1 и 2

$$d^o(x, y) = \min(d^o_a(x, y), 1).$$

Обвивка на ЕМП относно образуване на наредени двойки

Твърдение 3

Нека (M, d, α) е ЕМП, като никой елемент на M не е наредена двойка. Нека J е такова обратимо изображение на $\mathbb{N}^2$ в $\mathbb{N}$, че $2J(i,j) \geq \max(i,j)$ за всички $i, j \in \mathbb{N}$. Нека $d^\triangle : M^\triangle \times M^\triangle \to \mathbb{R}$ и $\alpha^\triangle :\subseteq \mathbb{N} \to M^\triangle$ са дефинирани така:

1. $d^\triangle(x, y) = d(x, y)$ *при* $x, y \in M$.
2. $d^\triangle(x, (y_1, y_2)) = d^\triangle((y_1, y_2), x) = \max(d^\triangle(x, y_1), d^\triangle(x, y_2), 1)$ *при* $x \in M$ *и* $y_1, y_2 \in M^\triangle$.
3. $d^\triangle((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d^\triangle(x_1, x_2), d^\triangle(y_1, y_2))$ *при* $x_1, y_1, x_2, y_2 \in M^\triangle$.
4. $\alpha^\triangle(2i) = \alpha(i)$ *при* $i \in \mathrm{dom}(\alpha)$.
5. $\alpha^\triangle(2J(i,j) + 1) = (\alpha^\triangle(i), \alpha^\triangle(j))$ *при* $i, j \in \mathrm{dom}(\alpha^\triangle)$.

Тогава $(M^\triangle, d^\triangle, \alpha^\triangle)$ е ЕМП и е в сила следното:

(продължава на следващия слайд)

(продължение)

- Ако $x \in M$, то една функция $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $(d^{\triangle}, \alpha^{\triangle})$-представя x точно тогава, когато $p = \lambda n.2q(n)$ за някоя функция q, която (d, α)-представя x.
- Ако $x, y \in M^{\triangle}$, то една функция $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $(d^{\triangle}, \alpha^{\triangle})$-представя (x, y) точно тогава, когато $p = \lambda n.2J(q(n), r(n)) + 1$ за някои функции q и r, които $(d^{\triangle}, \alpha^{\triangle})$-представят съответно x и y.
- Ако ЕМП $(M^{\triangle}, d^{\triangle}, \alpha^{\triangle})$ е изчислимо, то ЕМП (M, d, α) е изчислимо. Ако изображението J е изчислимо, то е вярно и обратното.

Московакисово разширение на ЕМП

Теорема 1

Нека (M, d, α) *е ЕМП,* $a \in M$ *и* $o \notin M$*, като никой елемент на множеството* M^o *не е наредена двойка. Нека* J *е такова обратимо изображение на* $\mathbb{N}^2$ *в* $\mathbb{N}$*, че* $2J(i,j) \geq \max(i,j)$ *за всички* $i, j \in \mathbb{N}$*. Нека* $d_a^* : M^* \times M^* \to \mathbb{R}$ *и* $\alpha^* :\subseteq \mathbb{N} \to M^{\triangle}$ *са дефинирани така:*

1. $d_a^*(x,y) = d(x,y)$ *при* $x, y \in M$; $d_a^*(o,o) = 0$.
2. $d_a^*(x,o) = d_a^*(o,x) = \max(d(x,a),1)$ *при* $x \in M$.
3. $d_a^*(x,(y_1,y_2)) = d_a^*((y_1,y_2),x) = \max(d_a^*(x,y_1), d_a^*(x,y_2),1)$ *при* $x \in M$ *и* $y_1, y_2 \in M^*$.
4. $d_o^*((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max(d_o^*(x_1,x_2), d_o^*(y_1,y_2))$ *при* $x_1, y_1, x_2, y_2 \in M^*$.
5. $\alpha^*(0) = o$; $\alpha^*(2i+2) = \alpha(i)$ *при* $i \in \mathrm{dom}(\alpha)$.
6. $\alpha^*(2J(i,j)+1) = (\alpha^*(i), \alpha^*(j))$ *при* $i, j \in \mathrm{dom}(\alpha^*)$.

Тогава (M^*, d_a^*, α^*) *е ЕМП и в сила следното:*

(продължава на следващия слайд)

(продължение)

- Ако $x \in M$, то една функция $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (d_a^*, α^*)-представя x точно тогава, когато $p = \lambda n.2q(n) + 2$ за някоя функция q, която (d, α)-представя x.
- Една функция $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (d_a^*, α^*)-представя o точно тогава, когато $p = \lambda n.0$.
- Ако $x, y \in M^*$, то една функция $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (d_a^*, α^*)-представя (x, y) точно тогава, когато $p = \lambda n.2J(q(n), r(n)) + 1$ за някои функции q и r, които (d_a^*, α^*)-представят съответно x и y.
- Ако ЕМП (M^*, d_a^*, α^*) е изчислимо, то ЕМП (M, d, α) е изчислимо. Ако $a \in \mathrm{rng}(\alpha)$ и изображението J е изчислимо, то е вярно и обратното.

Модифицирано Московакисово разширение на ЕМП

Теорема 2

Нека (M, d, α) *е ЕМП и* $o \notin M$, *като никой елемент на множеството* M^o *не е наредена двойка. Нека* J *е такова обратимо изображение на* $\mathbb{N}^2$ *в* $\mathbb{N}$, *че* $2J(i,j) \geq \max(i,j)$ *за всички* $i, j \in \mathbb{N}$. *Нека* $d^* : M^* \times M^* \to \mathbb{R}$ *и* $\alpha^* :\subseteq \mathbb{N} \to M^\triangle$ *са дефинирани така:*

1. $d^*(x,y) = \min(d(x,y), 1)$ *при* $x, y \in M$; $d^*(o,o) = 0$.
2. $d^*(x,o) = d^*(o,x) = 1$ *при* $x \in M$.
3. $d^*(x,(y_1,y_2)) = d^*((y_1,y_2),x) = \max(d^*(x,y_1), d^*_a(x,y_2), 1)$ *при* $x \in M$ *и* $y_1, y_2 \in M^*$.
4. $d^*((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max(d^*(x_1,x_2), d^*(y_1,y_2))$ *при* $x_1, y_1, x_2, y_2 \in M^*$.
5. $\alpha^*(0) = o$; $\alpha^*(2i+2) = \alpha(i)$ *при* $i \in \mathrm{dom}(\alpha)$.
6. $\alpha^*(2J(i,j)+1) = (\alpha^*(i), \alpha^*(j))$ *при* $i, j \in \mathrm{dom}(\alpha^*)$.

Тогава (M^*, d^*, α^*) *е ЕМП и е в сила следното:*

(продължава на следващия слайд)

(продължение)

- Ако $x \in M$, то една функция $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (d^*, α^*)-представя x точно тогава, когато $p = \lambda n.2q(n) + 2$ за някоя функция q, която (d, α)-представя x.
- Една функция $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (d^*, α^*)-представя o точно тогава, когато $p = \lambda n.0$.
- Ако $x, y \in M^*$, то една функция $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (d^*, α^*)-представя (x, y) точно тогава, когато $p = \lambda n.2J(q(n), r(n)) + 1$ за някои функции q и r, които (d^*, α^*)-представят съответно x и y.
- Ако ЕМП (M^*, d^*, α^*) е изчислимо, то ЕМП (M, d, α) е изчислимо. Ако изображението J е изчислимо, то е вярно и обратното.

Забележка. При ситуацията от теореми 1 и 2

$$d^*(x, y) = \min(d_a^*(x, y), 1).$$

Представени пространства

Дефиниция

Представено пространство (ПП) наричаме наредена двойка (X, ρ), където X е множество, а ρ е частично изображение на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ върху X.

Дефиниция

ПП, съответно на дадено ЕМП (M, d, α), наричаме наредената двойка (M, ρ), където ρ е частичното изображение на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в M, дефинирано по следния начин:

$$\rho(p) = x \iff p \ (d, \alpha)\text{-представя } x.$$

ПП, съответно на Московакисовото разширение на дадено ЕМП

Следствие

Нека (M, d, α) е ЕМП, изображението α^* е както в теореми 1 и 2, d' е метриката в M^* от някоя от тях, а (M, ρ) и (M^*, ρ^*) са ПП, съответни на ЕМП (M, d, α) и (M^*, d', α^*). Тогава:

- *Ако $x \in M$, то $\rho^*(p) = x$ точно тогава, когато $p = \lambda n.2q(n) + 2$ за някоя функция q, такава че $\rho(q) = x$.*
- *$\rho^*(p) = o$ точно тогава, когато $p = \lambda n.0$.*
- *Ако $x, y \in M^*$, то $\rho^*(p) = (x, y)$ точно тогава, когато $p = \lambda n.2J(q(n), r(n)) + 1$ за някои функции q и r, такива че $\rho^*(q) = x$ и $\rho^*(r) = y$.*

Ефективни топологични пространства и съответните им ПП

Дефиниция

Ефективно топологично пространство (ЕТП) наричаме всяка наредена двойка $(X, \mathcal{U})$, където X е множество, а $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ е база на някоя T_0 топология в X.

Дефиниция

ПП, съответно на дадено ЕТП $(X, \mathcal{U})$, наричаме наредената двойка (X, ρ), където ρ е частичното изображение на $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в X, дефинирано по следния начин:

$$\rho(p) = x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rng}(p) = \{i \in \mathbb{N} \,|\, x \in \mathcal{U}_i\}.$$

Московакисово разширение на ЕТП

През 2015 г. в съобщението си на Пролетната конференция на ФМИ в качеството на Московакисово разширение на произволно ЕТП $(X, \mathcal{U})$ разгледах ЕТП $(X^*, \mathcal{U}^*)$, където $\mathcal{U}^* = \{\mathcal{U}_k^*\}_{k \in \mathbb{N}}$ е фамилия от подмножества на X^*, дефинирана по следния начин: избираме такова изчислимо биективно изображение J на $\mathbb{N}^2$ върху $\mathbb{N}$, че $J(i,j) \geq \max(i,j)$ за всички $i, j \in \mathbb{N}$ (всъщност достатъчно е да имаме $2J(i,j) \geq \max(i,j)$), и полагаме

$$\mathcal{U}_0^* = \{o\},\ \mathcal{U}_{2i+2}^* = \mathcal{U}_i,\ \mathcal{U}_{2J(i,j)+1}^* = \mathcal{U}_i^* \times \mathcal{U}_j^*.$$

В съчетание с първата теорема за рекурсия от теорията на итеративните комбинаторни пространства тази конструкция беше използвана за установяване на ТТЕ изчислимост на някои най-малки неподвижни точки.

ПП на Московакисовото разширение на ЕТП

Твърдение 4

Нека $(X,\mathcal{U})$ *е ЕТП, а* (X,ρ) *е съответното му ПП. Нека* (X^*,ρ^*) *е ПП на ЕТП* $(X^*,\mathcal{U}^*)$*. Тогава за произволна функция* $p\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *е в сила следното:*

- *Ако* $x\in X$*, то* $\rho^*(p)=x$ *точно тогава, когато* $p=\lambda n.2q(n)+2$ *за някоя функция* q*, такава че* $\rho(q)=x$*.*
- $\rho^*(p)=o$ *точно тогава, когато* $p=\lambda n.0$*.*
- *Ако* $x,y\in X^*$*, то* $\rho^*(p)=(x,y)$ *точно тогава, когато* $p=\lambda n.2J(q(n),r(n))+1$ *за някои функции* q *и* r*, такива че* $\rho^*(q)=x$ *и* $\rho^*(r)=y$*.*

Връзките са същите както в случая на ЕМП. Това навежда на идеята да се разгледа понятие Московакисово разширение за произволно ПП. В случая на изчислимо изображение J се вижда, че резултатът за ТТЕ изчислимост на някои най-малки неподвижни точки е в сила и при такава по-обща постановка.

Благодаря за вниманието!