

Име: Ф№: Гр.:

Задача	1	2	3	4	5	6	ОБЩО
получени точки							
от максимално	10	10	20	15	12	20	100

Зад. 1 Нека $f(n)$, $g(n)$, $\phi(n)$ и $\psi(n)$ са произволни положителни функции, дефинирани върху \mathbb{N}^+ . Докажете или опровергайте всяко от тези твърдения:

3 m а) $f(n) = \Theta(g(n)) \wedge \phi(n) = \Theta(\psi(n)) \rightarrow f(n) \cdot \phi(n) = \Theta(g(n) \cdot \psi(n))$

7 m б) $f(n) = \Theta(g(n)) \wedge \phi(n) = \Theta(\psi(n)) \rightarrow f(n)^{\phi(n)} = \Theta(g(n)^{\psi(n)})$

Зад. 2 За всяка от следните пет функции f_i , $1 \leq i \leq 5$, намерете съответна проста функция $g(i)$, такава че $f(n) \asymp g(n)$. Функцията да е проста означава да има къс, прост запис. Дайте кратка обосновка, като можете да ползвате наготово резултати, изведени на лекция.

$$f_1(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}, \quad f_2(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad f_3(n) = \sum_{k=1}^n \left\lceil \frac{1}{k} \right\rceil, \quad f_4(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lg k}, \quad f_5(n) = \lg n!$$

Зад. 3 Подредете по асимптотично нарастване следните шест функции, зададени чрез рекурентни уравнения. Обосновете колкото е възможно по-добре отговорите си. Напишете окончателната наредба в явен вид.

$$\begin{aligned} f_1(n) &= 4T\left(\frac{n}{5}\right) + \lg n, & f_2(n) &= f_2\left(\frac{n}{5}\right) + f_2\left(\frac{4n}{5}\right) + 1, & f_3(n) &= f_3\left(\frac{n}{3}\right) + 3, \\ f_4(n) &= f_4(n-1) + f_4(n-2), & f_5(n) &= f_5(n-1) + \frac{1}{n}, & f_6(n) &= f_6(\sqrt{n}) \end{aligned}$$

Зад. 4 Докажете чрез инварианта на цикъла, че АЛГОРИТЪМ1 връща точно $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.

АЛГОРИТЪМ1($n \in \mathbb{N}^+$)

```

1  i ← 0
2  s ← 1
3  while s ≤ n do
4      s ← 2 × s
5      i ← i + 1
6  return i
```

Зад. 5 *Мода* на масив от числа се нарича всеки най-често срещан елемент на масива. Докажете, че не съществува алгоритъм, базиран на директни сравнения, който изчислява мода във време $o(n \lg n)$. Упътване: ако можехме да намираме мода във време $o(n \lg n)$, коя задача бихме могли да решаваме във време $o(n \lg n)$?