

Бързо сходяща редица към константата на Ойлер-Маскерони

Иван Георгиев¹

Университет "Проф. д-р Асен Златаров", гр. Бургас

**Юбилейна научна конференция "100 години от
рождението на проф. Ярослав Тагамлицки"**

ФМИ, СУ, 15-17 Септември, 2017

¹Тази работа е спонсорирана от Фонд Научни Изследвания, договор ДН-02-16/19.12.2016

Мотивация

В изчислимия анализ се разглеждат принципни въпроси относно изчислимост на различни обекти от анализа.

Мотивация

В изчислимия анализ се разглеждат принципни въпроси относно изчислимост на различни обекти от анализа. Посредством подходящи системи от имена, сложни обекти от неизброими пространства придобиват по-конкретен вид, който е подходящ за оценка на изчислителната сложност на тези обекти.

Мотивация

В изчислимия анализ се разглеждат принципни въпроси относно изчислимост на различни обекти от анализа. Посредством подходящи системи от имена, сложни обекти от неизброими пространства придобиват по-конкретен вид, който е подходящ за оценка на изчислителната сложност на тези обекти. Например, **име** на едно реално число ξ ще наричаме тройка (f, g, h) от унарни функции в \mathbb{N} , такива че

$$\left| \frac{f(n) - g(n)}{h(n) + 1} - \xi \right| < \frac{1}{n + 1}$$

за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Мотивация

В изчислимия анализ се разглеждат принципни въпроси относно изчислимост на различни обекти от анализа. Посредством подходящи системи от имена, сложни обекти от неизброими пространства придобиват по-конкретен вид, който е подходящ за оценка на изчислителната сложност на тези обекти. Например, **име** на едно реално число ξ ще наричаме тройка (f, g, h) от унарни функции в \mathbb{N} , такива че

$$\left| \frac{f(n) - g(n)}{h(n) + 1} - \xi \right| < \frac{1}{n + 1}$$

за всяко $n \in \mathbb{N}$. За клас \mathcal{F} от тотални функции в \mathbb{N} ще казваме, че реалното число ξ е **\mathcal{F} -изчислимо**, ако съществува име (f, g, h) на ξ , такова че $f, g, h \in \mathcal{F}$.

Субрекурсивни класове от функции

Едно реално число е **изчислимо**, ако то е изчислимо относно класа на всички тотални изчислими функции.

Субрекурсивни класове от функции

Едно реално число е **изчислимо**, ако то е изчислимо относно класа на всички тотални изчислими функции. За да измерваме сложността на различни изчислими реални числа, ние разглеждаме по-тесни класове от изчислими функции, които наричаме **субрекурсивни класове**.

Субрекурсивни класове от функции

Едно реално число е **изчислимо**, ако то е изчислимо относно класа на всички тотални изчислими функции. За да измерваме сложността на различни изчислими реални числа, ние разглеждаме по-тесни класове от изчислими функции, които наричаме **субрекурсивни класове**. По-конкретно, ние работим с йерархията на Гжегорчик, която представлява растяща редица

$$\mathcal{E}^0 \subset \mathcal{E}^1 \subset \mathcal{E}^2 \subset \mathcal{E}^3 \subset \dots$$

от изчислими функции.

Субрекурсивни класове от функции

Едно реално число е **изчислимо**, ако то е изчислимо относно класа на всички тотални изчислими функции. За да измерваме сложността на различни изчислими реални числа, ние разглеждаме по-тесни класове от изчислими функции, които наричаме **субрекурсивни класове**. По-конкретно, ние работим с йерархията на Гжегорчик, която представлява растяща редица

$$\mathcal{E}^0 \subset \mathcal{E}^1 \subset \mathcal{E}^2 \subset \mathcal{E}^3 \subset \dots$$

от изчислими функции. Също така разглеждаме още два класа \mathcal{M}^2 и \mathcal{L}^2 , такива че

$$\mathcal{M}^2 \subseteq \mathcal{L}^2 \subseteq \mathcal{E}^2.$$

Константа на Ойлер-Маскерони

Константата на Ойлер-Маскерони γ се дефинира като границата $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n$, където

$$D_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right).$$

Константа на Ойлер-Маскерони

Константата на Ойлер-Маскерони γ се дефинира като границата $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n$, където

$$D_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right).$$

Но тази редица е прекалено бавно сходяща, по-точно може да се докаже, че

$$\frac{1}{2n+2} < D_n - \gamma < \frac{1}{2n}$$

за всяко естествено число $n \geq 1$.

Константа на Ойлер-Маскерони

Константата на Ойлер-Маскерони γ се дефинира като границата $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n$, където

$$D_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right).$$

Но тази редица е прекалено бавно сходяща, по-точно може да се докаже, че

$$\frac{1}{2n+2} < D_n - \gamma < \frac{1}{2n}$$

за всяко естествено число $n \geq 1$. Тази скорост на сходимост е подходяща за класа \mathcal{L}^2 , но не и за \mathcal{M}^2 .

Други представяния на γ

Константата γ има много други представяния, но на пръв поглед никое от тях не е подходящо за класа \mathcal{M}^2 .

Други представления на γ

Константата γ има много други представления, но на пръв поглед никое от тях не е подходящо за класа \mathcal{M}^2 .

Например, имаме следното представяне на Вака от [4]

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lfloor \log_2(k) \rfloor}{k},$$

в което общият член е \mathcal{M}^2 -изчислим, но скоростта на сходимост не е подходяща.

Други представяния на γ

Константата γ има много други представяния, но на пръв поглед никое от тях не е подходящо за класа \mathcal{M}^2 .

Например, имаме следното представяне на Вака от [4]

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lfloor \log_2(k) \rfloor}{k},$$

в което общият член е \mathcal{M}^2 -изчислим, но скоростта на сходимост не е подходяща.

Също разполагаме с представяне на Каратсуба от [2]

$$\gamma = 1 - \ln k \sum_{r=1}^{12k+1} \frac{(-1)^{r-1} k^{r+1}}{(r-1)!(r+1)} + \sum_{r=1}^{12k+1} \frac{(-1)^{r-1} k^{r+1}}{(r-1)!(r+1)^2} + O(2^{-k}),$$

в което скоростта на сходимост е подходяща, но общият член не е \mathcal{M}^2 -изчислим.

Интегрално представяне на γ

Добре известно е следното равенство

$$\gamma = - \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx.$$

Интегрално представяне на γ

Добре известно е следното равенство

$$\gamma = - \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx.$$

Оказва се, че има подходящ метод за числено интегриране, който отговаря на изискванията за класа \mathcal{M}^2 .

Интегрално представяне на γ

Добре известно е следното равенство

$$\gamma = - \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx.$$

Оказва се, че има подходящ метод за числено интегриране, който отговаря на изискванията за класа M^2 .

Да означим

$$I_1 = \int_0^1 e^{-x} \ln x \, dx = - \int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{t}} \ln t \frac{1}{t^2} \, dt,$$

Интегрално представяне на γ

Добре известно е следното равенство

$$\gamma = - \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx.$$

Оказва се, че има подходящ метод за числено интегриране, който отговаря на изискванията за класа M^2 .

Да означим

$$I_1 = \int_0^1 e^{-x} \ln x \, dx = - \int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{t}} \ln t \frac{1}{t^2} \, dt,$$

$$I_2 = \int_1^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx,$$

Интегрално представяне на γ

Добре известно е следното равенство

$$\gamma = - \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx.$$

Оказва се, че има подходящ метод за числено интегриране, който отговаря на изискванията за класа M^2 .

Да означим

$$I_1 = \int_0^1 e^{-x} \ln x \, dx = - \int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{t}} \ln t \frac{1}{t^2} \, dt,$$

$$I_2 = \int_1^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx,$$

така че $\gamma = -I_1 - I_2$.

Експоненциален метод на трапците

Целта на метода е да се апроксимира $I = \int_{\alpha}^{\beta} \theta(x) dx$, където θ е аналитична в $[\alpha, \beta]$.

Експоненциален метод на трапците

Целта на метода е да се апроксимира $I = \int_{\alpha}^{\beta} \theta(x) dx$, където θ е аналитична в $[\alpha, \beta]$.

След прилагане на линейна смяна на променливите можем да считаме, че $[\alpha, \beta] = [-1, 1]$.

Експоненциален метод на трапците

Целта на метода е да се апроксимира $I = \int_{\alpha}^{\beta} \theta(x) dx$, където θ е аналитична в $[\alpha, \beta]$.

След прилагане на линейна смяна на променливите можем да считаме, че $[\alpha, \beta] = [-1, 1]$.

По-нататък използваме така нареченото **tanh-правило** и получаваме

$$\int_{-1}^1 \theta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tanh(t)) \cdot \frac{1}{\cosh^2(t)} dt$$

Експоненциален метод на трапците

Целта на метода е да се апроксимира $I = \int_{\alpha}^{\beta} \theta(x) dx$, където θ е аналитична в $[\alpha, \beta]$.

След прилагане на линейна смяна на променливите можем да считаме, че $[\alpha, \beta] = [-1, 1]$.

По-нататък използваме така нареченото **tanh-правило** и получаваме

$$\int_{-1}^1 \theta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tanh(t)) \cdot \frac{1}{\cosh^2(t)} dt$$
$$\approx h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta(\tanh(kh)) \cdot \frac{1}{\cosh^2(kh)}$$

Експоненциален метод на трапците

Целта на метода е да се апроксимира $I = \int_{\alpha}^{\beta} \theta(x) dx$, където θ е аналитична в $[\alpha, \beta]$.

След прилагане на линейна смяна на променливите можем да считаме, че $[\alpha, \beta] = [-1, 1]$.

По-нататък използваме така нареченото **tanh-правило** и получаваме

$$\int_{-1}^1 \theta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tanh(t)) \cdot \frac{1}{\cosh^2(t)} dt$$

$$\approx h \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \theta(\tanh(kh)) \cdot \frac{1}{\cosh^2(kh)}$$

$$\approx h \sum_{k=-n}^n \theta(\tanh(kh)) \cdot \frac{1}{\cosh^2(kh)} = I_{h,n}.$$

Експоненциален метод на трапците (втора част)

За да се балансират грешките от двете стъпки се избира

$$h = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Експоненциален метод на трапците (втора част)

За да се балансират грешките от двете стъпки се избира

$$h = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

С използване на факта, че θ е аналитична, се получава неравенството

$$\left| I_n - \int_{-1}^1 \theta(x) dx \right| \leq \frac{M}{e^{A\sqrt{n}} - 1}$$

за положителни реални константи A, M , зависещи само от θ, α, β .

Апроксимация на I_1

Апроксимираме несобственият интеграл

$$-I_1 = \int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{t}} \ln t \frac{1}{t^2} dt = \int_1^{\infty} \phi(t) dt$$

Апроксимация на I_1

Апроксимираме несобственият интеграл

$$-I_1 = \int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{t}} \ln t \frac{1}{t^2} dt = \int_1^{\infty} \phi(t) dt$$

с определения интеграл

$$J_{\xi}^1 = \int_1^{\xi+1} \phi(t) dt = \frac{\xi}{2} \int_{-1}^1 \phi_1(u, \xi) du,$$

където $\phi_1(u, \xi) = \phi\left(\frac{\xi}{2} \cdot u + \frac{\xi+2}{2}\right)$.

Апроксимация на I_1

Апроксимираме несобственият интеграл

$$-I_1 = \int_1^{\infty} e^{-\frac{1}{t}} \ln t \frac{1}{t^2} dt = \int_1^{\infty} \phi(t) dt$$

с определения интеграл

$$J_{\xi}^1 = \int_1^{\xi+1} \phi(t) dt = \frac{\xi}{2} \int_{-1}^1 \phi_1(u, \xi) du,$$

където $\phi_1(u, \xi) = \phi\left(\frac{\xi}{2} \cdot u + \frac{\xi+2}{2}\right)$.

Методът на трапците (обобщен за интеграл с параметър), приложен към J_{ξ}^1 дава приближението

$$J_{\xi, n}^1 = \frac{\xi}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=-n}^n \phi_1\left(\tanh\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right), \xi\right) \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)}.$$

Грешка при апроксимацията на I_1

За грешката $e_1(\xi)$ при замяната на I_1 с J_ξ^1 може да се докаже оценката

$$e_1(\xi) \leq \frac{\ln(\xi + 1) + 1}{\xi + 1}.$$

Грешка при апроксимацията на I_1

За грешката $e_1(\xi)$ при замяната на I_1 с J_ξ^1 може да се докаже оценката

$$e_1(\xi) \leq \frac{\ln(\xi + 1) + 1}{\xi + 1}.$$

Грешката от метода на трапците е

$$|J_\xi^1 - J_{\xi,n}^1| \leq \frac{\xi (\ln(\xi + 1) + \frac{7}{2})(2\pi + 4)}{2 e^{\sqrt{n}} - 1}$$

за произволно реално число $\xi \geq 0$ и естествено число $n > 0$.

Апроксимация на I_2

Апроксимираме несобственият интеграл

$$I_2 = \int_1^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx = \int_1^{\infty} \psi(x) \, dx$$

Апроксимация на I_2

Апроксимираме несобствения интеграл

$$I_2 = \int_1^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx = \int_1^{\infty} \psi(x) \, dx$$

с определения интеграл

$$J_{\xi}^2 = \int_1^{\xi+1} \psi(x) \, dx = \frac{\xi}{2} \int_{-1}^1 \psi_1(u, \xi) \, du,$$

където $\psi_1(u, \xi) = \psi\left(\frac{\xi}{2} \cdot u + \frac{\xi+2}{2}\right)$.

Апроксимация на I_2

Апроксимираме несобственият интеграл

$$I_2 = \int_1^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx = \int_1^{\infty} \psi(x) \, dx$$

с определения интеграл

$$J_{\xi}^2 = \int_1^{\xi+1} \psi(x) \, dx = \frac{\xi}{2} \int_{-1}^1 \psi_1(u, \xi) \, du,$$

където $\psi_1(u, \xi) = \psi\left(\frac{\xi}{2} \cdot u + \frac{\xi+2}{2}\right)$.

Методът на трапците (обобщен за интегрални с параметър), приложен към J_{ξ}^2 дава приближението

$$J_{\xi, n}^2 = \frac{\xi}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=-n}^n \psi_1\left(\tanh\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right), \xi\right) \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)}.$$

Грешка при апроксимацията на I_2

За грешката $e_2(\xi)$ при замяната на I_2 с J_ξ^2 може да се докаже оценката

$$e_2(\xi) \leq \frac{\xi + 2}{e^{\xi+1}}.$$

Грешка при апроксимацията на I_2

За грешката $e_2(\xi)$ при замяната на I_2 с J_ξ^2 може да се докаже оценката

$$e_2(\xi) \leq \frac{\xi + 2}{e^{\xi+1}}.$$

Грешката от метода на трапците е

$$\left| J_\xi^2 - J_{\xi,n}^2 \right| \leq \frac{\xi \left(\ln(\xi + 1) + \frac{7}{2} \right) (2\pi + 4)}{2 \left(e^{\sqrt{n}} - 1 \right)}$$

за произволно реално число $\xi \geq 0$ и естествено число $n > 0$.

Основен резултат за апроксимация на γ

В равенството $\gamma = -I_1 - I_2$ заместваме двата интеграла с техните приближения и получаваме $\gamma \approx J_{\xi,n}^1 - J_{\xi,n}^2$.

Основен резултат за апроксимация на γ

В равенството $\gamma = -I_1 - I_2$ заместваме двата интеграла с техните приближения и получаваме $\gamma \approx J_{\xi,n}^1 - J_{\xi,n}^2$. Комбинираната грешка е ограничена отгоре от

$$e_1(\xi) + e_2(\xi) + 2 \frac{\xi}{2} \frac{(\ln(\xi + 1) + \frac{7}{2})(2\pi + 4)}{e^{\sqrt{n}} - 1}.$$

Основен резултат за апроксимация на γ

В равенството $\gamma = -I_1 - I_2$ заместваме двата интеграла с техните приближения и получаваме $\gamma \approx J_{\xi,n}^1 - J_{\xi,n}^2$. Комбинираната грешка е ограничена отгоре от

$$e_1(\xi) + e_2(\xi) + 2 \frac{\xi (\ln(\xi + 1) + \frac{7}{2})(2\pi + 4)}{e^{\sqrt{n}} - 1}.$$

За да получим окончателната редица A заместваме $\xi = \sqrt{e^{\sqrt{n}}} - 1$ и получаваме

$$A(n) = J_{\xi,n}^1 - J_{\xi,n}^2 = \frac{\sqrt{e^{\sqrt{n}}} - 1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=-n}^n \theta \left(\tanh\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right), \sqrt{e^{\sqrt{n}}} - 1 \right) \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)},$$

където $\theta(u, \xi) = \phi_1(u, \xi) - \psi_1(u, \xi)$.

Основен резултат за апроксимация на γ

В равенството $\gamma = -I_1 - I_2$ заместваме двата интеграла с техните приближения и получаваме $\gamma \approx J_{\xi,n}^1 - J_{\xi,n}^2$. Комбинираната грешка е ограничена отгоре от

$$e_1(\xi) + e_2(\xi) + 2 \frac{\xi \left(\ln(\xi + 1) + \frac{7}{2} \right) (2\pi + 4)}{2 e^{\sqrt{n}} - 1}.$$

За да получим окончателната редица A заместваме $\xi = \sqrt{e^{\sqrt{n}}} - 1$ и получаваме

$$A(n) = J_{\xi,n}^1 - J_{\xi,n}^2 = \frac{\sqrt{e^{\sqrt{n}}} - 1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=-n}^n \theta \left(\tanh\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right), \sqrt{e^{\sqrt{n}}} - 1 \right) \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)},$$

където $\theta(u, \xi) = \phi_1(u, \xi) - \psi_1(u, \xi)$.

За всяко ненулево естествено n имаме

$$|A(n) - \gamma| \leq \frac{(\pi + 3)\sqrt{n} + 7\pi + 16}{\sqrt{e^{\sqrt{n}}}}.$$

Заклучение

Получената редица A е подходяща за доказателство на \mathcal{M}^2 -изчислимост на γ , както се вижда след заместване $n = \lfloor \log_2(m + 1) \rfloor^2$ в последното неравенство.

Заклучение

Получената редица A е подходяща за доказателство на \mathcal{M}^2 -изчислимот на γ , както се вижда след заместване $n = \lfloor \log_2(m + 1) \rfloor^2$ в последното неравенство.

Но общият член на редицата е прекалено сложен, за да се използва на практика за изчисляване на цифрите на γ .





Заклучение

Получената редица A е подходяща за доказателство на \mathcal{M}^2 -изчислимост на γ , както се вижда след заместване $n = \lfloor \log_2(m + 1) \rfloor^2$ в последното неравенство.

Но общият член на редицата е прекалено сложен, за да се използва на практика за изчисляване на цифрите на γ .

Прости символични пресмятания с *Matlab* дават 14 правилни десетични цифри при $n = 10000$.

Библиография

-  Georgiev, I. On subrecursive complexity of integration. (to appear)
-  Karatsuba, E. On the computation of the Euler constant γ , Numer. Alg., **24** (2000), 83–97.
-  Trefethen, L., Weideman, J. The exponentially convergent trapezoidal rule, Soc. Ind. Appl. Math. **56**, no. 3 (2014), 385–458.
-  Vacca, G. A New Series for the Eulerian Constant, Quart. J. Pure Appl. Math., **41** (1910), 363–368.

Благодаря за вниманието!