вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
1					
Име:					

Първо контролно по Изчислимост и сложност (упр.)
30.11.2015 г.

Зад. 1 (4 т.). Докажете, че:

а) функцията $s(x) = x^2$ е примитивно рекурсивна.

б) функцията $r(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ е примитивно рекурсивна.

Зад. 2 (6 т.). На всяко крайно множество от вида $D = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_k\}$ съпоставяме естественото число $v = 2^{x_0} + 2^{x_1} + \cdots 2^{x_k}$. С D_v ще означаваме крайното множество с код v. Докажете, че следните функции са *примитивно рекурсивни*:

а) $mem(x, v) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \in D_v \\ 1, & \text{ако } x \notin D_v \end{cases}$

б) $cap(u, v) = w \iff D_u \cap D_v = D_w$

в) $power(u) = v$, където $D_v = \{x \mid D_x \subseteq D_u\}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
2					
Име:					

Първо контролно по Изчислимост и сложност (упр.)
30.11.2015 г.

Зад. 1 (4 т.). Докажете, че:

а) функцията $p(x) = 2^x$ е примитивно рекурсивна.

б) функцията $l(x) = \lfloor \log_2 x \rfloor$ е примитивно рекурсивна, като дефинираме $l(0) = 0$.

Зад. 2 (6 т.). На всяко крайно множество от вида $D = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_k\}$ съпоставяме естественото число $v = 2^{x_0} + 2^{x_1} + \cdots 2^{x_k}$. С D_v ще означаваме крайното множество с код v. Докажете, че следните функции са *примитивно рекурсивни*:

а) $mem(x, v) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \in D_v \\ 1, & \text{ако } x \notin D_v \end{cases}$

б) $minus(u, v) = w \iff D_u \setminus D_v = D_w$.

в) $power(u) = v$, където $D_v = \{x \mid D_x \subseteq D_u\}$.

Решения

Задача 1, вариант 1

а) Понеже имаме следната примитивно рекурсивна функция:

$$mult(0, y) = 0$$
$$mult(x + 1, y) = mult(x, y) + y,$$

то е ясно, че $x^2 = mult(x, x)$ е примитивно рекурсивна.

б) Използвайте, че $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = (\mu z < x)[(z + 1)^2 > x]$. Друг вариант за решение на задачата е да използваме, че:

$$\lfloor \sqrt{x+1} \rfloor = \begin{cases} \lfloor \sqrt{x} \rfloor, & \text{ако } (\lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1)^2 \neq x + 1 \\ \lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1, & \text{ако } (\lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1)^2 = x + 1. \end{cases}$$

Задача 1, вариант 2

а) За видим, че функцията $p(x) = 2^x$ е примитивно рекурсивна е достатъчно да представим $p(x)$ по следния начин:

$$p(0) = 1$$
$$p(x + 1) = mult(2, p(x)).$$

б) Използвайте, че $\lfloor \log_2(x) \rfloor = (\mu z < x)[2^{z+1} > x]$. Друг вариант е да използваме, че:

$$\lfloor \log_2(x+1) \rfloor = \begin{cases} \lfloor \log_2(x) \rfloor, & \text{ако } 2^{\lfloor \log_2(x) \rfloor + 1} \neq x + 1 \\ \lfloor \log_2(x) \rfloor + 1, & \text{ако } 2^{\lfloor \log_2(x) \rfloor + 1} = x + 1. \end{cases}$$

Тогава дефинираме функцията $l(x)$ с примитивна рекурсия по следния начин: $l(0) = 0$ и

$$l(x+1) = \begin{cases} l(x), & \text{ако } 2^{l(x)+1} \neq x + 1 \\ l(x) + 1, & \text{ако } 2^{l(x)+1} = x + 1. \end{cases}$$

Задача 2

а) Дефинираме функцията *mem* по следния начин:

$$mem(x, v) = \overline{sg}(rem(2, qt(2^x, v))).$$

б) За вариант 1, дефинираме

$$cap(u, v) = \sum_{x < \min(u,v)} 2^x \cdot \overline{sg}(mem(x, u) + mem(x, v)) = w.$$

За функцията *minus* от Вариант 2, възможни са следните дефиниции:

$$\begin{aligned} minus(u, v) &= \sum_{x<u} 2^x \cdot \overline{sg}(mem(x, u) + \overline{sg}(mem(x, v))) \\ &= \sum_{x<u} 2^x \cdot mem(x, v) \cdot \overline{sg}(mem(x, u))) \\ &= u \mathbin{\dot{-}} cap(u, v). \end{aligned}$$

в) Като имаме свойството, че $A \subseteq B \iff A \cap B = A \iff A \setminus B = \emptyset$, то можем да дефинираме примитивно рекурсивна функция

$$subset(u, v) = \overline{sg}(u \mathbin{\dot{-}} cap(u, v)) = \overline{sg}(minus(u, v)).$$

Тогава можем да дефинираме функцията *power* по следния начин:

$$power(u) = \sum_{x \le u} subset(x, u) \cdot 2^x = v.$$