вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
1					
Име:					

Писмен изпит по Изчислимост и сложност, 31/01/20

Зад. 1. Да фиксираме $n \geq 2$ и да дефинираме изображението $\pi : \mathbb{N}^n \ \to \ \mathbb{N}$ по следния начин:

$$\pi(x_1, \dots, x_n) \ = \ p_1^{x_1} \dots p_n^{x_n}, \text{където } p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \dots$$

Числото $z \ = \ \pi(x_1, \dots, x_n)$ ще наричаме *код на n-торката* $(x_1, \dots, x_n)$.
а) Докажете, че π е инективно.
б) Докажете, че е разрешимо множеството от всички кодове

$$K = \{\pi(x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n\}.$$

в) Докажете, че са примитивно рекурсивни функциите:

$$mem(i, z) \simeq \begin{cases} i\text{-тия член на редицата с код } z, & \text{ако } z{\in}K \ \& \ 1{\leq}i{\leq}\, n \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$s(z) \simeq \begin{cases} \text{сумата от елементите на редицата с код } z, & \text{ако } z \in K \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

г) Докажете, че са примитивно рекурсивни предикатите:

$in(x, z) \iff z$ е код на редица и x е неин елемент;

$p(z) \ \Leftrightarrow \ z$ е код на строго растяща редица от числа.

Зад. 2. За произволни $A \subseteq \mathbb{N}$ и $B \subseteq \mathbb{N}$ да дефинираме

$$A * B = \{x.y \mid x \in A \ \& \ y \in B\}.$$

а) Докажете, че ако A и B са разрешими, то и $A{*}B$ е разрешимо. Дали е вярно обратното? Обосновете се.
б) Докажете, че ако A и B са полуразрешими, то и $A * B$ е полуразрешимо.
в) Докажете, че съществува рекурсивна функция $prod$, такава че за всяко $a, b \in \mathbb{N} : W_{prod(a,b)} = W_a * W_b$.

Зад. 3. Нека $\mathcal{PR} = \{f | f$е едноместна пр. рекурсивна функция$\}$.
Докажете, че:
а) проблемът "$\varphi_a \notin \mathcal{PR}$?" не е разрешим;
б) проблемът "$\varphi_a \in \mathcal{PR}$?" не е полуразрешим;
в) класът $\mathcal{PR}$ е ефективен, т.е. съществува рекурсивна функция h, такава че $\mathcal{PR} = \{\varphi_{h(0)}, \varphi_{h(1)}, \dots\}$.

Успех! $\ddot\smile$