Контролно по Дискретни Структури

17/01/2018 г.

$\mathbb{N}$ е множеството на естествените числа, включително 0.
Наредени двойки бележим с ъглови скоби, напр. $\langle a, b\rangle$.

Зад. 1. Нека A, B, C и D са произволни множества. Докажете, че:
1а) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
1б) $(A \setminus C) \times (B \setminus D) \subseteq (A \times B) \setminus (C \times D)$
2а) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
2б) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

Д-во

1а)

1. Ще докажем, че $(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Нека $x \in (A \cap B) \cup C$.

1.1. $x \in (A \cap B)$. Следователно, $x \in A$ и $x \in B$. Значи $x \in (A \cup C)$ и $x \in (B \cup C)$. Оттук $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

1.2. $x \in C$. Следователно, $x \in (A \cup C)$ и $x \in (B \cup C)$. Оттук $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

2. Ще покажем, че $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$. Нека $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Следователно $x \in (A \cup C)$ и $x \in (B \cup C)$.

2.1. $x \in C$. Тогава $x \in (A \cap B) \cup C$.

2.2. $x \notin C$. Значи от $x \in (A \cup C)$ следва, че $x \in A$. От $x \in (B \cup C)$ следва, че $x \in B$. Оттук $x \in (A \cap B)$ и значи $x \in (A \cap B) \cup C$. $\square$

1б)

Нека $x \in (A \setminus C) \times (B \setminus D)$. Ще докажем, че $x \in (A \times B) \setminus (C \times D)$. От условието за x, че $x \in (A \setminus C) \times (B \setminus D)$, следва че x е наредена двойка, $x = \langle y, z\rangle$, където $y \in (A \setminus C)$ и $z \in (B \setminus D)$. Следователно, $y \in A$, $y \notin C$, $z \in B$, $z \notin D$. Значи $x = \langle y, z\rangle \in (A \times B)$ и също така $x = \langle y, z\rangle \notin (C \times D)$. Следователно $x \in (A \times B) \setminus (C \times D)$. $\square$

2а)

1. Ще покажем, че $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Нека $x \in (A \cup B) \cap C$. Следователно, $x \in (A \cup B)$ и $x \in C$.

1.1. $x \in A$. Следователно $x \in (A \cap C)$ и оттук $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

1.2. $x \in B$. Следователно $x \in (B \cap C)$ и оттук $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

2. Ще покажем, че $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$. Нека $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

2.1. $x \in (A \cap C)$. Следователно, $x \in C$ и $x \in A$. Оттук, $x \in (A \cup B)$. Следва, че $x \in (A \cup B) \cap C$.

2.2. $x \in (B \cap C)$. Следователно, $x \in C$ и $x \in B$. Оттук, $x \in (A \cup B)$. Следва, че $x \in (A \cup B) \cap C$. $\square$

2б)

1. Ще докажем, че $(A \times B) \cap (C \times D) \subseteq (A \cap C) \times (B \cap D)$. Нека $x \in (A \times B) \cap (C \times D)$. Това значи, че $x \in (A \times B)$ и $x \in (C \times D)$. Следователно, x е наредена двойка, $x = \langle y, z\rangle$, така че $y \in A$, $z \in B$, $y \in C$ и $z \in D$. Оттук следва, че $y \in (A \cap C)$ и $z \in (B \cap D)$. Стигаме до извода, че $x = \langle y, z\rangle \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.

2. Ще докажем, че $(A \cap C) \times (B \cap D) \subseteq (A \times B) \cap (C \times D)$. Нека $x \in (A \cap C) \times (B \cap D)$. Следователно, x е наредена двойка, $x = \langle y, z\rangle$, така че $y \in (A \cap C)$ и $z \in (B \cap D)$. От предните следва, че $y \in A$, $y \in C$, $z \in B$ и $z \in D$. Значи $x = \langle y, z\rangle \in (A \times B)$ и $x = \langle y, z\rangle \in (C \times D)$. Оттук $x \in (A \times B) \cap (C \times D)$. $\square$

Зад. 2. Нека $A = \mathbb{N}$, а $R \subseteq A \times A$ е бинарна релация над A. Нека за всяко $x \in A$ и за всяко $y \in A$:
Вариант 1:

$$(x\ R\ y) \Leftrightarrow (x.y) + x \text{ е четно}$$

Вариант 2:

$$(x\ R\ y) \Leftrightarrow (x.y) + y \text{ е четно}$$

Докажете, че:
а) R е рефлексивна.
б) R е транзитивна.
в) R **не** е релация на еквивалентност.
Упътване: $(x\ R\ y)$ означава $\langle x, y\rangle \in R$. За вариант 1, използвайте, че $(x.y) + x = x.(y + 1)$. За вариант 2, използвайте, че $(x.y) + y = (x + 1).y$. За в) е достатъчно да покажете контрапример.

Д-во

а) Условието R да е рефлексивна (спрямо A) е следното: $(\forall x \in A)(x\ R\ x)$.

За да докажем това условие, нека x да е произволен елемент на A (нямаме право да го избираме, трябва да предвидим всички възможности за x).

И така нека $x \in A = \mathbb{N}$. Тогава x е четно число или $x + 1$ е четно число (0 дава остатък 0 при деление на 2 и е четно число). И в двата случая $x.(x+1)$ е четно и следователно $(x\ R\ x)$. $\square$

б) Условието R да е транзитивна е следното:

$\forall x \forall y \forall z((x\ R\ y)\ \&\ (y\ R\ z) \rightarrow (x\ R\ z))$.

И така, нека x, y, z са три произволни елемента (това означава, че нямаме право да ги избираме, а трябва да разгледаме за тях всички възможни случаи). Трябва да докажем, че $(x\ R\ y)\ \&\ (y\ R\ z) \rightarrow (x\ R\ z)$. За да докажем импликация, трябва да приемем за вярна лявата ѝ страна и да докажем дясната.

Нека $(x\ R\ y)\ \&\ (y\ R\ z)$. Защото $R \subseteq A \times A$, можем да считаме, че $x, y, z \in A = \mathbb{N}$. Ще докажем, че $(x\ R\ z)$.

Вариант 1:

$(y+1).x$ е четно и $(z+1).y$ е четно. Трябва да докажем, че $(z+1).x$ е четно.

1 сл. x е четно $\Rightarrow (z+1).x$ е четно.

2 сл. $y+1$ е четно $\Rightarrow y$ е нечетно $\Rightarrow (z+1)$ е четно $\Rightarrow (z+1).x$ е четно.

Вариант 2:

$(x+1).y$ е четно и $(y+1).z$ е четно. Трябва да докажем, че $(x+1).z$ е четно.

1 сл. $(x+1)$ е четно $\Rightarrow (x+1).z$ е четно.

2 сл. y е четно $\Rightarrow y+1$ е нечетно $\Rightarrow z$ е четно $\Rightarrow (x+1).z$ е четно. $\square$

в) За да бъде R релация на еквивалентност, трябва тя да е рефлексивна, транзитивна и симетрична. Ще докажем, че R не е симетрична:

Нека $a = 1$, $b = 2$.

$(a+1).b = 2.2 = 4$, но $(b+1).a = 3.1 = 3$.

За Вариант 1: R не е симетрична, защото $(b\ R\ a)$, но $\neg(a\ R\ b)$.

За Вариант 2: R не е симетрична, защото $(a\ R\ b)$, но $\neg(b\ R\ a)$ $\square$

Обяснения към по-горните разсъждения:

Условието R да е симетрична е следното:

$\forall x \forall y((x\ R\ y) \to (y\ R\ x))$.

За да го опровергаем, трябва да докажем, че:

$\neg\forall x \forall y((x\ R\ y) \to (y\ R\ x)) \equiv$

$\exists x \neg\forall y((x\ R\ y) \to (y\ R\ x)) \equiv$

$\exists x \exists y \neg((x\ R\ y) \to (y\ R\ x)) \equiv$

$\exists x \exists y \neg(\neg(x\ R\ y) \vee (y\ R\ x)) \equiv$

$\exists x \exists y(\neg\neg(x\ R\ y) \wedge \neg(y\ R\ x)) \equiv$

$\exists x \exists y((x\ R\ y) \wedge \neg(y\ R\ x))$

Това значи, че е достатъчно да намерим елементи c и d, такива че $\langle c, d\rangle \in R$ и $\langle d, c\rangle \notin R$.

За упражнение, проверете, че ако искахме да докажем, че R не е транзитивна, то трябваше да докажем следното:

$\exists x \exists y \exists z((x\ R\ y) \wedge (y\ R\ z) \wedge \neg(x\ R\ z))$.

Тоест, да намерим поне три елемента (не непременно различни) p, q, r, такива че $\langle p, q\rangle \in R$, $\langle q, r\rangle \in R$ и $\langle p, r\rangle \notin R$.

Обърнете внимание, че когато доказваме съществуването на нещо, директното намиране на някакъв пример не винаги е възможно. Тогава могат да се използват други похвати, напр. принципа на Дирихле (който доказва, че съществува някакъв елемент с някакво свойство, но не казва кой е той), допускане на противното и стигане до противоречие и др.

Зад. 3. Намерете броя на решенията на уравнението:
Вариант 1) $x_1 + x_2 + x_3 = 1234$, където $x_2 \geq 7$,
$x_1 \in \mathbb{N}$, $x_2 \in \mathbb{N}$ и $x_3 \in \mathbb{N}$.
Упътване:
$A = \{\langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in \mathbb{N}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1234 \ \& \ x_2 \geq 7\}$, $|A| = ?$

Вариант 2) $x_1 + x_2 + x_3 = 1000$, където $x_1 \geq 8$,
$x_1 \in \mathbb{N}$, $x_2 \in \mathbb{N}$ и $x_3 \in \mathbb{N}$.
Упътване:
$A = \{\langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in \mathbb{N}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1000 \ \& \ x_1 \geq 8\}$, $|A| = ?$

Решение

За Вариант 1:

Полагаме $x_2 = x_2' + 7$, сега вече търсим бр. на реш. на у-то $x_1 + x_2' + x_3 = 1234 - 7 = 1227$

Това е като да намерим броя на мултимножествата с 1227 елемента, състоящи се от елементите на множеството $\{x_1, x_2, x_3\}$, което е точно

$\binom{1227+(3-1)}{(3-1)} = \binom{1229}{2} = \frac{1229.1228}{2} = 614.1229 = 754\ 606$

За верен отговор се счита всяко едно от по-горните 5 преставяния.

За Вариант 2:

Полагаме $x_1 = x_1' + 8$, сега вече търсим бр. на реш. на у-то $x_1' + x_2 + x_3 = 1000 - 8 = 992$

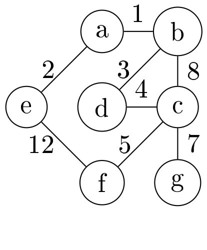
Това е като да намерим броя на мултимножествата с 992 елемента, състоящи се от елементите на множеството $\{x_1, x_2, x_3\}$, което е точно

$\binom{992+(3-1)}{(3-1)} = \binom{994}{2} = \frac{994.993}{2} = 497.993 = 493\ 521$

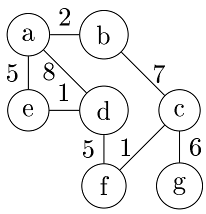
За верен отговор се счита всяко едно от по-горните 5 преставяния. $\square$

Зад. 4. Даден е следният претеглен неориентиран граф:

Вариант 1:



Вариант 2:



а) Намерете минимално покриващо дърво за този граф. Използвайте алгоритъма на Прим или алгоритъма на Крускал.

б) Намерете дължините на минималните пътища от връх а до всички останали върхове в графа, използвайки алгоритъма на Дейкстра.

Решение

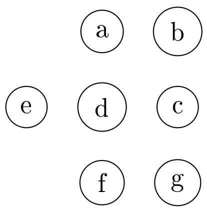
а). Ще ползваме алгоритъма на Kruskal. Първо, подреждаме по тежест ребрата, започвайки от най-лекото:

За Вариант 1:

$\langle \{a, b\}, \{a, e\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{c, g\}, \{b, c\}, \{e, f\} \rangle$

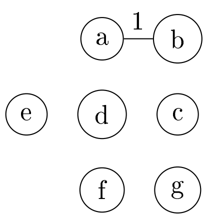
Няма значение в какъв ред ще подредим ребрата с еднаква тежест (дължина).

Построяваме 7 дървета без ребра:

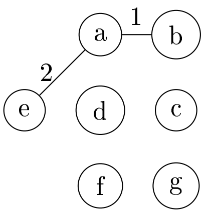


Последователно добавяме ребрата, които свързват различни дървета (гледано в момента преди тяхното добавяне).

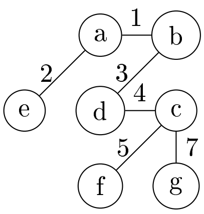
$\{a, b\}$ свързва различни дървета:



$\{a, e\}$ свързва различни дървета:



И т.н. добавяме ребрата: $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{c, f\}$, $\{c, g\}$.



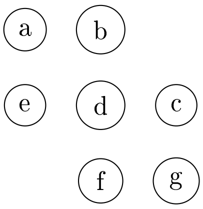
Изпускаме реброто $\{b, c\}$, защото свързва върхове в едно и също дърво, а също така и реброто $\{e, f\}$.

Остава дървото на картинката по-горе.

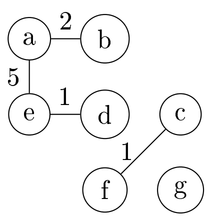
За Вариант 2: $\langle \{e, d\}, \{c, f\}, \{a, b\}, \{a, e\}, \{d, f\}, \{c, g\}, \{b, c\}, \{a, d\} \rangle$

Няма значение в какъв ред ще подредим ребрата с еднаква тежест (дължина).

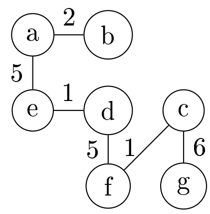
Построяваме 7 дървета без ребра:



Последователно добавяме ребрата $\{e, d\}, \{c, f\}, \{a, b\}, \{a, e\}$.



След това добавяме последователно $\{d, f\}$ и $\{c, g\}$



Накрая изпускаме ребрата $\{b, c\}$ и $\{a, d\}$, защото свързват ребра в едно и също дърво.

Остава картинката по-горе. $\square$

б) Dijkstra

Понеже не искаме пътищата, а само дължината им, се интересуваме само от масива $dist$. Приемаме, че $a = 0, b = 1, c = 2, d = 3, e = 4, f = 5, g = 6$.

Построяваме масив $dist$ с големина 7:

$dist = [\infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty]$

И после на позиция a слагаме 0.

$dist = [0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty]$

Взимаме множество на необходените върхове, $Q = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

За Вариант 1:

1. Итерация 1:

Избираме връх от Q с минимално $dist$, $u = a$.

$Q = Q \setminus \{a\}$.

$Q = \{b, c, d, e, f, g\}$

Итерираме съседите на u, които са още в Q.

1.1. $v = b, alt = dist[a] + w(\{a, b\}) = 1, 1 < dist[b]$

Подобряваме $dist[b]$:

$dist = [0, 1, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty]$

1.2. $v = e, alt = 0 + 2, 2 < \infty$

$dist = [0, 1, \infty, \infty, 2, \infty, \infty]$

2. Итерация 2:

Избираме връх от Q с минимално $dist$, $u = b$.

$Q = \{c, d, e, f, g\}$

Итерираме съседите на b, които са в Q:

2.1. $v = d, alt = 1 + 3 = 4, 4 < \infty$.

$dist = [0, 1, \infty, 4, 2, \infty, \infty]$.

2.2. $v = c, alt = 1 + 8 = 9, 9 < \infty$.

$dist = [0, 1, 9, 4, 2, \infty, \infty]$.

3. Итерация 3:

Избираме връх от Q с минимално $dist$, $u = e$.

$Q = \{c, d, f, g\}$

Итерираме съседите на , които са в Q:

3.1. $v = f, alt = 2 + 12 = 14, 14 < \infty$.

$dist = [0, 1, 9, 4, 2, 14, \infty]$.

4. Итерация 4:

Избираме връх от Q с минимално $dist$, $u = d$.

$Q = \{c, f, g\}$

Итерираме съседите на d, които са в Q:

4.1. $v = c, alt = 4 + 4 = 8, 8 < 9$.

$dist = [0, 1, 8, 4, 2, 14, \infty]$.

5. Итерация 5:

Избираме връх от Q с минимално $dist$, $u = c$.

$Q = \{f, g\}$

Итерираме съседите на c, които са в Q:

5.1. $v = f, alt = 8 + 5 = 13, 13 < 14$.

$dist = [0, 1, 8, 4, 2, 13, \infty]$.

5.2. $v = g, alt = 8 + 7 = 15, 15 < \infty$.

$dist = [0, 1, 8, 4, 2, 13, 15]$.

6. Итерация 6:

Избираме връх от Q с минимално $dist$, $u = f$.

$Q = \{g\}$

Няма съседи на f, които да са в Q.

7. Итерация 7:

Избираме връх от Q с минимално $dist$, $u = g$.

$Q = \emptyset$

Няма съседи на g, които да са в Q.

Край, отговор:

$dist = [0, 1, 8, 4, 2, 13, 15]$. $\square$

За Вариант 2:

1. Итерация 1:

Избираме връх от Q с минимално $dist$, $u = $.

$Q = \{b, c, d, e, f, g\}$

Итерираме съседите на a, които са в Q (без значение в какъв ред):

1.1. $v = b, alt = 0 + 2 = 2, 2 < \infty$.

$dist = [0, 2, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty]$.

1.2. $v = e, alt = 0 + 5 = 5, 5 < \infty$.

$dist = [0, 2, \infty, \infty, 5, \infty, \infty]$.

1.3. $v = d, alt = 0 + 8 = 8, 8 < \infty$.

$dist = [0, 2, \infty, 8, 5, \infty, \infty]$.

2. Итерация 2:

Избираме връх от Q с минимално $dist$, $u = b$.

$Q = \{c, d, e, f, g\}$

Итерираме съседите на b, които са в Q:

2.1. $v = c, alt = 2 + 7 = 9, 9 < \infty$.

$dist = [0, 2, 9, 8, 5, \infty, \infty]$.

3. Итерация 3:

Избираме връх от Q с минимално $dist$, $u = e$.

$Q = \{c, d, f, g\}$

Итерираме съседите на e, които са в Q:

3.1. $v = d, alt = 5 + 1 = 6, 6 < 8$.

$dist = [0, 2, 9, 6, 5, \infty, \infty]$.

4. Итерация 4:

Избираме връх от Q с минимално $dist$, $u = d$.

$Q = \{c, f, g\}$

Итерираме съседите на d, които са в Q:

4.1. $v = f, alt = 6 + 5 = 11, 11 < \infty$.

$dist = [0, 2, 9, 6, 5, 11, \infty]$.

5. Итерация 5:

Избираме връх от Q с минимално $dist$, $u = c$.

$Q = \{f, g\}$

Итерираме съседите на c, които са в Q:

5.1. $v = f, alt = 9 + 1 = 10, 10 < 11$.

$dist = [0, 2, 9, 6, 5, 10, \infty]$.

5.2. $v = g, alt = 9 + 6 = 15, 15 < \infty$.

$dist = [0, 2, 9, 6, 5, 10, 15]$.

6. Итерация 6:

Избираме връх от Q с минимално $dist$, $u = f$.

$Q = \{g\}$

f няма съседи в Q.

7. Итерация 7:

Избираме връх от Q с минимално $dist$, $u = g$.

$Q = \emptyset$

g няма съседи в Q.

Край, резултат:

$dist = [0, 2, 9, 6, 5, 10, 15]$. $\square$