вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
1					
Име:					

Второ контролно по ЕАИ
20/01/2017 г.

Зад. 1. За произволни две думи с еднаква дължина над азбука Σ, дефинираме операцията `merge` по следния начин:

$$\texttt{merge}(\varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon$$
$$\texttt{merge}(a \cdot \beta, \gamma \cdot b) = a \cdot b \cdot \texttt{merge}(\beta, \gamma),$$

където $a, b \in \Sigma$ са произволни букви, а $\beta, \gamma \in \Sigma^\star$ са произволни думи.

а) Да се докаже, че за всеки две думи $\gamma, \beta \in \Sigma^\star$ и букви $a, b \in \Sigma$ е в сила:

$$\texttt{merge}(\beta \cdot a, b \cdot \gamma) = \texttt{merge}(\beta, \gamma) \cdot a \cdot b.$$

б) Докажете, че следният език над азбуката $\{a, b\}$ е безконтекстен:

$$L = \{\gamma a^n \beta \mid \beta = \texttt{merge}(b^{|\gamma|}, \gamma) \ \& \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Зад. 2. Нека L е безкраен език със свойството, че

$$(\forall \alpha, \beta \in L)[|\alpha| < |\beta| \implies 2|\alpha| + 1 \leq |\beta|].$$

Докажете, че L не е безконтекстен език.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
2					
Име:					

Второ контролно по ЕАИ
20/01/2017 г.

Зад. 1. За произволни две думи с еднаква дължина над азбука Σ, дефинираме операцията `merge` по следния начин:

$$\texttt{merge}(\varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon$$
$$\texttt{merge}(\beta \cdot a, b \cdot \gamma) = a \cdot b \cdot \texttt{merge}(\beta, \gamma),$$

където $a, b \in \Sigma$ са произволни букви, а $\beta, \gamma \in \Sigma^\star$ са произволни думи.

а) Да се докаже, че за всеки две думи $\gamma, \beta \in \Sigma^\star$ и букви $a, b \in \Sigma$ е в сила:

$$\texttt{merge}(a \cdot \beta, \gamma \cdot b) = \texttt{merge}(\beta, \gamma) \cdot a \cdot b.$$

б) Докажете, че следният език над азбуката $\{a, b\}$ е безконтекстен:

$$L = \{\beta b^n \gamma \mid \gamma = \texttt{merge}(\beta, a^{|\beta|}) \ \& \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Зад. 2. Нека L е безкраен език със свойството, че

$$(\forall \alpha, \beta \in L)[|\alpha| < |\beta| \implies |\alpha|^2 \leq |\beta|].$$

Докажете, че L не е безконтекстен език.

Упътване към втората задача

Нека L е безкраен език и да допуснем, че L е безконтекстен. Тогава за константата p от лемата за покачването, да вземем произволна дума $\alpha \in L$, за която $|\alpha| \geq p$. Знаем, че тя може да се разбие като $\alpha = xyuvw$, където $|yuv| \leq p$ и $|yv| \geq 1$. Тогава за всяко $i \in \mathbb{N}$, $xy^iuv^iw \in L$.

Нека $\beta = xy^2uv^2w \in L$. Ясно е, че $|\beta| = |\alpha| + |yv| > |\alpha|$, защото $|yv| \geq 1$. От друга страна, $|yv| \leq p \leq |\alpha|$, защото $|yuv| \leq p$. Това означава, че ако L е безконтекстен, то съществуват думи $\alpha, \beta \in L$, за които

$$|\alpha| < |\beta| < 2|\alpha|.$$

Според условието на задачата от вариант 1, за тези две думи би трябвало $2|\alpha| + 1 \leq |\beta|$, което е противоречие с нашето допускане, че L е безконтекстен.

За вариант 2, при избора на α, можем спокойно да изискваме допълнителното условие $|\alpha| > 2$. Тогава повтаряме същите разсъждения и достигаме до извода, че ако L е безконтекстен, то съществуват думи $\alpha, \beta \in L$, за които

$$|\alpha| < |\beta| < 2|\alpha| < |\alpha|^2.$$

Според условието на задачата от вариант 2, за тези две думи би трябвало $|\alpha|^2 \leq |\beta|$, което е противоречие с нашето допускане, че L е безконтекстен.