

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
<b>A</b>					
Име:					

**Устен изпит по СЕП, 17.02.2018**

Термовете  $\tau_0, \tau_1, \dots$  в езика **REC'** имат следния синтаксис:

$$\tau ::= n \mid x_i \mid S(\tau_1) \mid \tau_1 == \tau_2 \mid \text{if } \tau_1 \text{ then } \tau_2 \text{ else } \tau_3 \mid f_i(\tau_1, \dots, \tau_{m_i}).$$

**Задача 1.** Дефинирайте понятието рекурсивна програма на езика **REC'**.

Нека сега да дефинираме следните изображения:

$\text{succ} : \mathbb{N}_\perp \rightarrow \mathbb{N}_\perp$ , където

$$\text{succ}(a) = \begin{cases} a + 1, & \text{ако } a \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако } a = \perp \end{cases}$$

$\text{eq} : \mathbb{N}_\perp^2 \rightarrow \mathbb{N}_\perp$ , където

$$\text{eq}(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{ако } a, b \in \mathbb{N} \ \& \ a = b \\ 0, & \text{ако } a, b \in \mathbb{N} \ \& \ a \neq b \\ \perp, & \text{ако } \perp \in \{a, b\} \end{cases}$$

$\text{if} : \mathbb{N}_\perp^3 \rightarrow \mathbb{N}_\perp$ , където

$$\text{if}(a, b, c) = \begin{cases} b, & \text{ако } a \in \mathbb{N} \ \& \ a > 0 \\ c, & \text{ако } a = 0 \\ \perp, & \text{ако } a = \perp. \end{cases}$$

За всеки терм  $\tau[x_1, \dots, x_n, f_1, \dots, f_k]$ , ще разгледаме изображението със сигнатура

$$[[\tau]] : [\mathbb{N}_\perp^{m_1} \rightarrow \mathbb{N}_\perp] \times \dots \times [\mathbb{N}_\perp^{m_k} \rightarrow \mathbb{N}_\perp] \rightarrow [\mathbb{N}_\perp^n \rightarrow \mathbb{N}_\perp],$$

което ще дефинираме с индукция по построението на термовете.

- ако  $\tau \equiv c$ , за някоя константа, то

$$[[c]](\bar{\varphi})(\bar{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} c.$$

- ако  $\tau \equiv x_i$ , за някоя обектова променлива, то

$$[[x_i]](\bar{\varphi})(\bar{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} a_i.$$

- ако  $\tau \equiv S(\tau_1)$ , то

$$[[S(\tau_1)]](\bar{\varphi})(\bar{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} \text{succ}([[ \tau_1 ]](\bar{\varphi})(\bar{a})).$$

- ако  $\tau \equiv \tau_1 == \tau_2$ , то

$$[[\tau_1 == \tau_2]](\bar{\varphi})(\bar{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} \text{eq}([[ \tau_1 ]](\bar{\varphi})(\bar{a}), [[ \tau_2 ]](\bar{\varphi})(\bar{a})).$$

- ако  $\tau \equiv \text{if } \tau_1 \text{ then } \tau_2 \text{ else } \tau_3$ , то

$$[[\text{if } \tau_1 \text{ then } \tau_2 \text{ else } \tau_3]](\bar{\varphi})(\bar{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} \text{if}([[ \tau_1 ]](\bar{\varphi})(\bar{a}), [[ \tau_2 ]](\bar{\varphi})(\bar{a}), [[ \tau_3 ]](\bar{\varphi})(\bar{a})).$$

- ако  $\tau \equiv f_i(\tau_1, \dots, \tau_{m_i})$ , то

$$[[f_i(\tau_1, \dots, \tau_{m_i})]](\bar{\varphi})(\bar{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} \varphi_i([[ \tau_1 ]](\bar{\varphi})(\bar{a}), \dots, [[ \tau_{m_i} ]](\bar{\varphi})(\bar{a})).$$

**Задача 2.** Докажете, че за всеки терм  $\tau$ , ако  $\bar{\varphi} \in [\mathbb{N}_\perp^{m_1} \xrightarrow{H} \mathbb{N}_\perp] \times \dots \times [\mathbb{N}_\perp^{m_k} \xrightarrow{H} \mathbb{N}_\perp]$ , то

$$[[\tau]](\bar{\varphi}) \in [\mathbb{N}_\perp^n \xrightarrow{H} \mathbb{N}_\perp].$$

Правилата за извод с предаване на параметрите по име, които означаваме като  $\mu \rightarrow_N^P c$ , където  $\mu$  е функционален терм и  $c \in \mathbb{N}_\perp$ , са следните:

$$\frac{}{\mathbf{a} \rightarrow_N^P a} \quad (1)$$

$$\frac{\mu \rightarrow_N^P a \quad b = a + 1}{\mathbf{S}(\mu) \rightarrow_N^P b} \quad (2_s)$$

$$\frac{\mu_1 \rightarrow_N^P a_1 \quad \mu_2 \rightarrow_N^P a_2 \quad a = \text{eq}(a_1, a_2)}{\mu_1 == \mu_2 \rightarrow_N^P a} \quad (2_{==})$$

$$\frac{\mu_0 \rightarrow_N^P a_0 \quad \mu_1 \rightarrow_N^P a_1 \quad a_0 \in \mathbb{N}^+}{\text{if } \mu_0 \text{ then } \mu_1 \text{ else } \mu_2 \rightarrow_N^P a_1} \quad (3_t)$$

$$\frac{\mu_0 \rightarrow_N^P 0 \quad \mu_2 \rightarrow_N^P a_2}{\text{if } \mu_0 \text{ then } \mu_1 \text{ else } \mu_2 \rightarrow_N^P a_2} \quad (3_f)$$

$$\frac{\mu_0 \rightarrow_N^P \perp}{\text{if } \mu_0 \text{ then } \mu_1 \text{ else } \mu_2 \rightarrow_N^P \perp} \quad (3_\perp)$$

$$\frac{\tau_i[\mathbf{x}_1/\mu_1, \dots, \mathbf{x}_{m_i}/\mu_{m_i}] \rightarrow_N^P a}{\mathbf{f}_i(\mu_1, \dots, \mu_{m_i}) \rightarrow_N^P a} \quad (4)$$

**Задача 3.** Дефинирайте рекурсивна програма  $P$  на езика **REC'**, такава че

$$\mathcal{O}_N[[P]](a, b) = \begin{cases} 1, & \text{ако } a \leq b \text{ \& } a, b \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{ако } a > b \text{ \& } a, b \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако } \perp \in \{a, b\}. \end{cases}$$

Опишете дървото на извод на изчислението за  $\mathcal{O}_N[[P]](1, 2)$ .

**Задача 4.** Докажете, че за произволна програма  $P$  на езика **REC'**,

$$\mathcal{O}_N[[P]] \sqsubseteq \mathcal{D}_N[[P]].$$