Семантика на езиците за програмиране - записки

Стефан Вътев[1], Стела Николова[2]

17 януари 2019 г.

[1] stefanv@fmi.uni-sofia.bg
[2] stenik@fmi.uni-sofia.bg

Съдържание

Глава 1

Области на Скот

В тази глава ще разгледаме понятията, които са ни нужни за дефинирането на понятието денотационна семантика на една програма.

1.1 Частични наредби

Бинарната релация $\sqsubseteq$ върху множеството A се нарича **частична наредба**, ако тя е:

На англ. *partial order*

- рефлексивна, т.е. $(\forall a \in A)[a \sqsubseteq a]$;
- транзитивна, т.е. $(\forall a, b, c \in A)[a \sqsubseteq b \;\&\; b \sqsubseteq c \implies a \sqsubseteq c]$;
- антисиметрична, т.е. $(\forall a, b \in A)[a \sqsubseteq b \;\&\; b \sqsubseteq a \implies a = b]$.

Една такава двойка $(A, \sqsubseteq)$ се нарича частично наредено множество.

Пример 1.1. Да означим

$$[\mathbb{N} \stackrel{\text{ч}}{\to} \mathbb{N}] \stackrel{\text{деф}}{=} \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ е частична функция}\}.$$

Дефинираме и релацията **включване** между две частични функции по следния начин:

$$\begin{aligned} f \subseteq g \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall x \in \mathbb{N})[&f(x) \text{ не е деф.} \vee \\ &(f(x) \text{ е деф.} \;\&\; g(x) \text{ е деф.} \;\&\; f(x) = g(x))]. \end{aligned}$$

Да дефинираме също **графиката** на частичната функция f като

$$\texttt{Graph}(f) \stackrel{\text{деф}}{=} \{\langle x, y\rangle \mid f(x) = y\}.$$

Тогава лесно се съобразява, че

$$f \subseteq g \iff \texttt{Graph}(f) \subseteq \texttt{Graph}(g).$$

Съобразете, че двойката $([\mathbb{N} \stackrel{\text{ч}}{\to} \mathbb{N}], \subseteq)$ е частично наредено множество.

Казваме, че a_0 е **най-малък елемент** на частично нареденото множество $(A, \sqsubseteq)$, ако $(\forall a \in A)[a_0 \sqsubseteq a]$. Ако такъв елемент съществува, то той е единствен, защото релацията $\sqsubseteq$ е антисиметрична.

Неподвижна точка на $f : A \to A$ е елемент $a \in A$, такъв че $f(a) = a$.

За по-кратко, монотонно-растящите редици от елементи на A,

$$a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq a_n \sqsubseteq \cdots,$$

ще наричаме (растящи) **вериги**.

Един елемент b е **горна граница** на веригата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, ако $(\forall n)[a_n \sqsubseteq b]$. Един елемент b е **точна горна граница** на веригата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, ако са изпълнени свойствата:

- $(\forall n)[a_n \sqsubseteq b]$, т.е. b е горна граница;
- за всяка друга горна граница c е изпълнено, че $b \sqsubseteq c$, т.е. b е най-малкият елемент измежду всички горни граници на веригата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

Не всяка верига притежава точна горна граница. Обикновено точната горна граница на вергата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ще бележим като $\bigsqcup_n a_n$.

Наредена тройка от вида $\mathcal{A} = (A, \sqsubseteq, \bot)$ се нарича **област на Скот**, ако:

На англ. *Scott domain*

- $\sqsubseteq$ е бинарна релация върху A, която задава частична наредба.
- Всяка растяща верига $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ в A притежава точна горна граница $\bigsqcup_n a_n$.
- $\bot \in A$ е най-малкият елемент на A;

В Хаскел $\bot$ се означава като `undefined`. Повече за денотационна семантика в Хаскел може да прочетете тук

Пример 1.2. Тройката

$$\mathcal{F}_n \stackrel{\text{деф}}{=} (\ [\mathbb{N}^n \stackrel{\text{ч}}{\to} \mathbb{N}], \subseteq, \emptyset^{(n)}\ )$$

е област на Скот, където:

- С $[\mathbb{N}^n \stackrel{\text{ч}}{\to} \mathbb{N}]$ означаваме всички частични функции от $\mathbb{N}^n$ в $\mathbb{N}$.
- релацията „включване” между функции е дефинирана по следния начин:

$$f \subseteq g \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall \bar{x})(\forall y)[f(\bar{x}) \simeq y \implies g(\bar{x}) \simeq y].$$

- $\emptyset^{(n)}$ е функцията с празна дефиниционна област, т.е.

$$(\forall \bar{x} \in \mathbb{N}^n)[\neg ! \emptyset^{(n)}(\bar{x})].$$

Пример 1.3. Да разгледаме няколко примера, които вече сме срещали.

- $(\mathscr{P}(\mathbb{N}), \subseteq, \emptyset)$ е област на Скот.
- $(\mathbb{N}, \leq, 0)$ не е е област на Скот.
- $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq, 0)$ е също област на Скот, където $0 \leq 1 \leq \cdots \leq \infty$.
- $(\{0,1\}^{\star}, \preceq, \varepsilon)$ не е област на Скот, където $\preceq$ е релацията префикс на две думи.

Пример 1.4. Да разгледаме множеството

$$Bin^{\infty} = \{\sigma \mid \sigma : \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \to \{0, 1\} \ \& \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{f \mid f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\}$$

съставено от всички крайни и безкрайни двоични низове.

- Да разгледаме релацията

$$\sigma \preceq \tau \iff |\sigma| \leq |\tau| \ \& \ (\forall i < |\sigma|)[\sigma(i) = \tau(i)],$$

  σ е префикс на τ.

- Да означим с ε единствения двоичен низ с дължина 0.

Тогава $Bin^{\infty} = (Bin^{\infty}, \preceq, \varepsilon)$ е област на Скот.

1.2 Конструкции

Ще разгледаме няколко конструкции, с които ще видим как можем да строим по-сложни области на Скот.

1.2.1 Плоска област на Скот

Да фиксираме едно произволно непразно множество A и един елемент $\perp \notin A$. Да означим $A_\perp = A \cup \{\perp\}$ и да разгледаме следната бинарна релация $\sqsubseteq$ върху $A_\perp$:

$$a \sqsubseteq b \iff a = \perp \ \vee \ a = b.$$

Лесно се съобразява, че $\sqsubseteq$ задава *частична наредба* върху $A_\perp$:

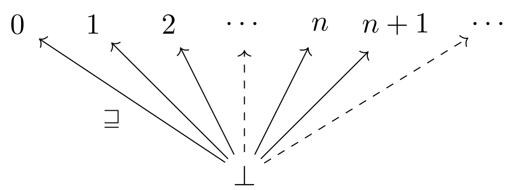
От деф. на $\sqsubseteq$ следва, че $\perp$ е най-малкият елемент

- *рефлексивност*: $a \sqsubseteq a$ за всяка $a \in A_\perp$;
- *транзитивност*: $a \sqsubseteq b \ \& \ b \sqsubseteq c \implies a \sqsubseteq c$ за всеки $a, b, c \in A_\perp$;
- *антисиметричност*: $a \sqsubseteq b \ \& \ b \sqsubseteq a \implies a = b$ за всеки $a, b \in A_\perp$.

Наредбата $(A_\perp, \sqsubseteq)$ ще наричаме **плоска наредба**. Тя ще играе важна роля в нашите разглеждания. Например, често ще разглеждаме плоската наредба $(\mathbb{N}_\perp, \sqsubseteq)$.

$\perp$ се нарича *bottom* елемент

Пример 1.5. Плоската наредба $(\mathbb{N}_\perp, \sqsubseteq)$ може да се изобрази по следния начин.



Фигура 1.1: Графично представяне на $\sqsubseteq$ върху $\mathbb{N}_\perp$

Твърдение 1.1. Нека A е произволно множество и нека елементът $\perp \notin A$. Определяме наредената тройка $\mathcal{A}_\perp = (A_\perp, \sqsubseteq, \perp)$ като:

На англ. *flat domain*

- $A_\perp = A \cup \{\perp\}$;
- $\sqsubseteq$ задава *плоската наредба* върху $A_\perp$.

Тогава $\mathcal{A}_\perp$ е област на Скот, която ще наричаме **плоска област на Скот** за множеството A.

1.2.2 Крайно произведение

[?, стр. 125]

Да разгледаме тройките $\mathcal{A}_i = (A_i, \sqsubseteq_i, \perp_i)$, където $i = 1, \dots, n$. Дефинираме тройката $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i = (A, \sqsubseteq, \perp)$ като:

- $A \stackrel{\text{деф}}{=} A_1 \times \cdots \times A_n$, декартовото произведение на множествата $A_1, \dots, A_n$;

- $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \sqsubseteq \langle b_1, \dots, b_n \rangle \stackrel{\text{деф}}{\equiv} a_1 \sqsubseteq_1 b_1 \;\&\; \dots \;\&\; a_n \sqsubseteq_n b_n$, която ще наричаме *поточкова наредба*;

- $\bot \stackrel{\text{деф}}{=} \langle \bot_1, \dots, \bot_n \rangle$.

Твърдение 1.2. Ако $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ са области на Скот, то $\prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ е област на Скот.

Упътване. Лесно се съобразява, че $\sqsubseteq$ е частична наредба и че $\bot$ е най-малкият елемент. Да разгледаме една верига $(\bar{a}_i)_{i=0}^\infty$ в $\prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i$, където $\bar{a}_i = \langle a_1^i, \dots, a_n^i \rangle$. Да положим

$$\bar{a} \stackrel{\text{деф}}{=} \langle \bigsqcup_i a_1^i, \bigsqcup_i a_2^i, \dots, \bigsqcup_i a_n^i, \rangle.$$

Ще докажем, че $\bar{a}$ е точната горна граница на верига $(\bar{a}_i)_{i=0}^\infty$, т.е.

$$\bigsqcup_i \bar{a}_i = \langle \bigsqcup_i a_1^i, \bigsqcup_i a_2^i, \dots, \bigsqcup_i a_n^i, \rangle.$$

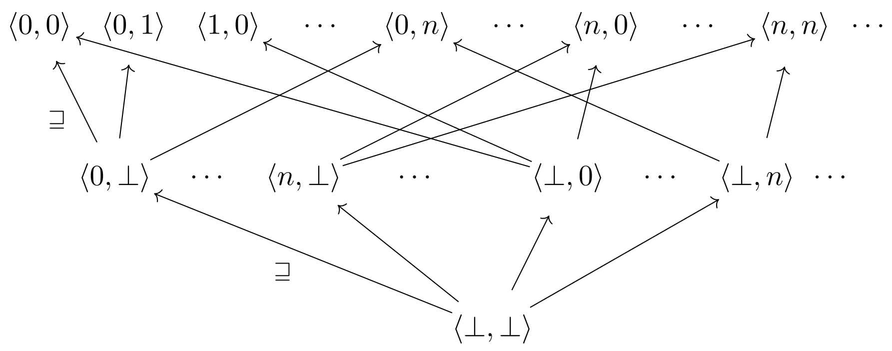
Това ще направим на две стъпки.

- Първо ще докажем, че $\bar{a}$ е горна граница на $(\bar{a}_i)_{i=0}^\infty$. За произволен индекс j, имаме, че $\bar{a}_j = (a_1^j, \dots, a_n^j)$. Да разгледаме $1 \leq k \leq n$. Ясно е, че $a_k^j \sqsubseteq_k \bigsqcup_i a_k^i$. Оттук веднага следва, че
$$\bar{a}_j = \langle a_1^j, \dots, a_n^j \rangle \sqsubseteq \langle \bigsqcup_i a_1^i, \dots, \bigsqcup_i a_n^i \rangle = \bar{a}.$$

- Нека $\bar{b} = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ е произволна горна граница на $(\bar{a}_i)_{i=0}^\infty$. Ще докажем, че $\bar{a} \sqsubseteq \bar{b}$. Знаем, че за произволен индекс j, $\bar{a}_j \sqsubseteq \bar{b}$. Да разгледаме произволен индекс k, за който $1 \leq k \leq n$. Знаем, че в областта на Скот $\mathcal{A}_k$ е изпълнено, че $a_k^j \sqsubseteq_k b_k$, за всеки индекс j. Оттук следва, че b_k е горна граница за веригата $(a_k^j)_{j=0}^\infty$ в $\mathcal{A}_k$. Следователно
$$\bigsqcup_j a_j^k \sqsubseteq_k b_k.$$
Заключаваме, че
$$\bar{a} = \langle \bigsqcup_i a_1^i, \dots, \bigsqcup_i a_n^i \rangle \sqsubseteq \langle b_1, \dots, b_n \rangle = \bar{b}.$$

$\square$

Пример 1.6. Нека да разгледаме по-подробно $\mathbb{N}_\bot^2$.



Фигура 1.2: Графично представяне на част от $\sqsubseteq$ върху $\mathbb{N}_\perp^2$

Вижда се от *Фигура* 1.2, че всяка верига в $\mathbb{N}_\perp^2$ има дължина най-много 3. Лесно се съобразява, че всяка верига в $\mathbb{N}_\perp^k$ има дължина най-много $k+1$. Свойството, че всяка верига в $\mathbb{N}_\perp^k$ има само краен брой различни члена ще се окаже важно по-нататък. Сега ще въведем понятие, което описва това свойство в произволна област на Скот.

$\mathbb{N}_\perp^k = \underbrace{\mathbb{N}_\perp \times \cdots \times \mathbb{N}_\perp}_{k}$

Нека $\mathcal{A}$ е област на Скот и да разгледаме една верига $(a_n)_{n=0}^\infty$ в $\mathcal{A}$. Ще казваме, че $(a_n)_{n=0}^\infty$ се **стабилизира**, ако съществува индекс n_0, за който

$$(\forall n \geq n_0)[a_{n_0} = a_n],$$

т.е.

$$a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq a_2 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq a_{n_0} = a_{n_0+1} = a_{n_0+2} = \cdots$$

От казаното по-горе следва, че всяка растяща верига в $\mathbb{N}_\perp^k$ се стабилизира.

Забележка 1.1. Едни от основните области на Скот, които ще разглеждаме при дефинирането на денотационната семантика ще бъдат $\mathbb{N}_\perp$ и $\mathbb{N}_\perp^k$.

1.3 Изображения в области на Скот

Нека $\mathcal{A}_i = (A_i, \sqsubseteq_i, \perp_i)$, за $i = 1, 2$, са области на Скот. Ще въведем няколко основни вида изображения между $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, които ще използваме често. След това ще разгледаме някои свойства на тези изображения и ще видим каква е връзката между тях.

- Всяка тотална функция от вида $f : A_1 \to A_2$ ще наричаме изображение между областите на Скот $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ и ще записваме $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$. Да въведем означението

$$[\mathcal{A}_1 \ \to \ \mathcal{A}_2] \stackrel{\text{деф}}{=} \{f \mid f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2\}.$$

- Да въведем следната релация между изображенията $f, g : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$:

$$f \sqsubseteq g \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall a \in \mathcal{A}_1)[f(a) \sqsubseteq_2 g(a)].$$

- Да дефинираме изображението $\perp : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ като

$$(\forall a \in \mathcal{A}_1)[\perp(a) = \perp_2].$$

На хаскел можем да дефинираме изображението $\perp$ по следния начин:

```
ghci> let bottom _ = undefined
```

Теорема 1.1. Наредената тройка $([\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2], \sqsubseteq, \perp)$ е област на Скот.

Доказателство. Нетривиалната част в доказателството е да проверим, че всяка верига $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ в $[\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2]$ притежава точна горна граница. Да разгледаме изображението $h : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$, където:

За по-кратко пишем $\bar{a}$ вместо $a_1, \dots, a_n$

$$h(a) \stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup \{f_i(a) \mid i \in \mathbb{N}\}. \tag{1.1}$$

Ще докажем, че h е тази точна горна граница.

Това задължително трябва да се провери, защото например множеството $\{\perp, 0, 3\}$ няма точна горна граница относно плоската наредба в $\mathbb{N}_\perp$

- Първо, трябва да се убедим, че дефиницията на h е „смислена", т.е. h е тотална функция. Трябва да докажем, че за всяко $a \in \mathcal{A}_1$,
$$\bigsqcup \{f_i(a) \mid i \in \mathbb{N}\}$$
съществува. Да фиксираме произволен елемент $a \in \mathcal{A}_1$. Получаваме следната верига в $\mathcal{A}_2$:
$$f_0(a) \sqsubseteq f_1(a) \sqsubseteq f_2(a) \sqsubseteq \cdots$$
Понеже $\mathcal{A}_2$ е област на Скот, то тази верига притежава точна горна граница в $\mathcal{A}_2$, която означачаваме като $\bigsqcup \{f_i(a) \mid i \in \mathbb{N}\}$. Това означава, че $h(a)$ е тотална функция.

- Дотук имаме, че $h \in [\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2]$. Лесно се съобразява, че h е горна граница на веригата $(f_i)_{i=0}^{\infty}$, защото за всяки елемент $a \in \mathcal{A}_1$ и произволен индекс i,
$$f_i(a) \sqsubseteq \bigsqcup \{f_i(a) | i \in \mathbb{N}\} \stackrel{\text{деф}}{=} h(a).$$

- Сега остава да проверим, че h е точна горна граница, т.е. h е най-малката измежду всички горни граници на веригата $(f_i)_{i=0}^{\infty}$. Нека g е друга горна граница на $(f_i)_{i=0}^{\infty}$. Това означава, че за всеки индекс i, $f_i \sqsubseteq g$. Следователно, за фиксирано $a \in \mathcal{A}_1$, $g(a)$ е горна граница за веригата $(f_i(a))_{i=0}^{\infty}$. Тогава е ясно, че за разглеждания елемент a,
$$h(a) \stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup \{f_i(a) \mid i \in \mathbb{N}\} \sqsubseteq g(a).$$
Понеже елементът a е прозиволен, получаваме, че $h \sqsubseteq g$.

- Доказахме, че h е горна граница и че h е най-малката измежду всички горни граници. Заключваме, че h е *точна горна граница* на веригата $(f_i)_{i=0}^{\infty}$. С други думи,
$$h = \bigsqcup_i f_i.$$

Получаваме, че
$$(\bigsqcup_i f_i)(a) = \bigsqcup_i \{f_i(a)\}.$$

$\square$

Следствие 1.1. Наредената тройка $([\mathbb{N}_\perp^n \to \mathbb{N}_\perp], \sqsubseteq, \perp^{(n)})$ образува област на Скот, където $\perp^{(n)}(\bar{a}) = \perp$, за всяко $\bar{a} \in \mathbb{N}_\perp^n$.

1.3.1 Монотонни изображения

Да разгледаме областите на Скот $\mathcal{A}_1 = (A_1, \sqsubseteq_1, \bot_1)$ и $\mathcal{A}_2 = (A_2, \sqsubseteq_2, \bot_2)$. Едно изображение $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ се нарича **монотонно**, ако

$$(\forall a, a' \in \mathcal{A}_1)[a \sqsubseteq_1 a' \implies f(a) \sqsubseteq_2 f(a')].$$

Да въведем означението

$$[\mathcal{A}_1 \overset{\text{м}}{\to} \mathcal{A}_2] \overset{\text{деф}}{=} \{f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2 \mid f \text{ е монотонно изобр.}\}.$$

Теорема 1.2. $([\mathcal{A}_1 \overset{\text{м}}{\to} \mathcal{A}_2], \sqsubseteq, \bot)$ е област на Скот.

Упътване. Да фиксираме една верига $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ в $[\mathcal{A}_1 \overset{\text{м}}{\to} \mathcal{A}_2]$. Трябва да докажем, че тази верига притежава точна горна граница, която е монотонно изображение. Да разгледаме същото изображение $h : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ както в доказателството на *Теорема* 1.1, като

$$h(a) \overset{\text{деф}}{=} \bigsqcup\{f_i(a) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Оттам знаем, че h е точна горна граница на веригата. Остава да докажем, че $h \in [\mathcal{A}_1 \overset{\text{м}}{\to} \mathcal{A}_2]$. Нека $a \sqsubseteq b$. Тогава, за всеки индекс k, понеже f_k са монотонни изображения, получаваме следното:

$$\begin{aligned} f_k(a) &\sqsubseteq f_k(b) \\ &\sqsubseteq \bigsqcup\{f_i(b) \mid i \in \mathbb{N}\} \overset{\text{деф}}{=} h(b). \end{aligned}$$

Това означава, че $h(b)$ е горна граница за веригата $(f_i(a))_{i=0}^{\infty}$. Заключаваме, че

$$\begin{aligned} h(a) &\overset{\text{деф}}{=} \bigsqcup\{f_i(a) \mid i \in \mathbb{N}\} \\ &\sqsubseteq \bigsqcup\{f_i(b) \mid i \in \mathbb{N}\} \overset{\text{деф}}{=} h(b). \end{aligned}$$

□

Следствие 1.2. $([\mathbb{N}_\bot^n \overset{\text{м}}{\to} \mathbb{N}_\bot], \sqsubseteq, \bot^{(n)})$ е област на Скот.

1.3.2 Непрекъснати изображения

На англ. *continuous*

Едно изображение $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ се нарича **непрекъснато**, ако при всеки избор на верига $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ в $\mathcal{A}_1$, то имаме равенството

Понеже $\mathcal{A}_1$ е област на Скот знаем, че $\bigsqcup_i a_i \in \mathcal{A}_1$

$$f(\bigsqcup_i a_i) = \bigsqcup_i f(a_i).$$

$\bigsqcup_i f(a_i) \overset{\text{деф}}{=} \bigsqcup\{f(a_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$

С други думи, $f(\bigsqcup_i a_i)$ е точната горна граница в $\mathcal{A}_2$ на множеството

$$\{f(a_i) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Да означим

$$[\mathcal{A}_1 \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}_2] \overset{\text{деф}}{=} \{f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2 \mid f \text{ е непр. изобр.}\}.$$

Твърдение 1.3. За произволни области на Скот $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, всяко непрекъснато изображение $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ е монотонно, т.е.

$$[\mathcal{A}_1 \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}_2] \subseteq [\mathcal{A}_1 \overset{\text{м}}{\to} \mathcal{A}_2].$$

Доказателство. Нека $f \in [\mathcal{A}_1 \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}_2]$. Да вземем два произволни елемента в $\mathcal{A}_1$, за които $a \sqsubseteq_1 b$. Ще докажем, че $f(a) \sqsubseteq_2 f(b)$. Да разгледаме веригата $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ в $\mathcal{A}_1$, където:

$$\underbrace{a_0}_{a} \sqsubseteq \underbrace{a_1}_{b} = \underbrace{a_2}_{b} = \underbrace{a_3}_{b} = \cdots$$

Ясно е, че

$$\bigsqcup\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \bigsqcup\{a, b\} = b.$$

Тогава от непрекъснатостта на f имаме, че

$$\begin{aligned}
f(a) &= f(a_0) && \text{// защото } a_0 \overset{\text{деф}}{=} a \\
&\sqsubseteq_2 \bigsqcup\{f(a_i) \mid i \in \mathbb{N}\} && \text{// защото } f(a_0) \in \{f(a_i) \mid i \in \mathbb{N}\} \\
&= f(\bigsqcup_i a_i) && \text{// защото } f \text{ е непр.} \\
&= f(\bigsqcup\{a, b, b, b, \dots\}) && \text{// от избора на веригата } (a_i)_{i=0}^{\infty} \\
&= f(b) && \text{// защото } a \sqsubseteq_1 b.
\end{aligned}$$

Така получихме, че за произволни $a, b \in \mathcal{A}_1$,

$$a \sqsubseteq_1 b \implies f(a) \sqsubseteq_2 f(b).$$

□

Ествено да си зададем въпроса дали имаме и обратното включване. Оказва се, че в общия случай не е вярно, че всяко монотонно изображение е непрекъснато.

Твърдение 1.4. Съществува област на Скот $\mathcal{A}$, за която

$$[\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}] \subsetneq [\mathcal{A} \overset{\text{м}}{\to} \mathcal{A}].$$

Упътване. Нека $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_\omega, b_0\}$. Да разгледаме областта на Скот $\mathcal{A} = (A, \sqsubseteq, a_0)$, където наредбата между елементите е следната:

$$a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq a_n \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq a_\omega \sqsubseteq b_0.$$

Нека $f(a_n) = a_{n+1}$ и $f(a_\omega) = b_0$. Очевидно е, че f е монотонно изображение. Лесно се вижда, че f не е непрекъснато изображение, защото

$$f(\bigsqcup_n a_n) = f(a_\omega) = b_0,$$

но

$$\bigsqcup_n f(a_n) = \bigsqcup_n a_{n+1} = a_\omega.$$

□

Сега да видим един важен за нас случай, при който имаме и обратното включване.

Твърдение 1.5. Ако всяка верига в $\mathcal{A}_1$ се *стабилизира*, то

$$[\mathcal{A}_1 \overset{\text{м}}{\to} \mathcal{A}_2] \subseteq [\mathcal{A}_1 \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}_2].$$

Упътване. Да разгледаме една верига $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ в $\mathcal{A}_1$ и $f \in [\mathcal{A}_1 \overset{\text{м}}{\to} \mathcal{A}_2]$. Ще докажем, че

$$f(\bigsqcup_i a_i) = \bigsqcup_i f(a_i).$$

(1) Ясно е, че за всяко монотонно изображение f, понеже $a_i \sqsubseteq \bigsqcup_i a_i$, то $f(a_i) \sqsubseteq f(\bigsqcup_i a_i)$. Това означава, че $f(\bigsqcup_i a_i)$ е горна граница на веригата $(f(a_i))_{i=0}^{\infty}$ в $\mathcal{A}_2$ и следователно

$$\bigsqcup_i f(a_i) \sqsubseteq f(\bigsqcup_i a_i).$$

Това включване е вярно за произволна област на Скот $\mathcal{A}_1$.

(2) За другата посока ще използваме свойството, че веригата $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ се стабилизира. Нека n_0 е индекс, такъв че $(\forall k \geq n_0)[a_k = a_{n_0}]$. Това означава, че $\bigsqcup_i a_i = a_{n_0}$. Тогава

$$f(\bigsqcup_i a_i) = f(a_{n_0}) \sqsubseteq \bigsqcup_i f(a_i).$$

От (1) и (2) следва, че $f(\bigsqcup_i a_i) = \bigsqcup_i f(a_i)$. □

Понеже всяка верига в $\mathbb{N}_\perp^n$ се *стабилизира*, то получаваме следното важно следствие.

Следствие 1.3. $[\mathbb{N}_\perp^n \overset{\text{м}}{\to} \mathbb{N}_\perp] = [\mathbb{N}_\perp^n \overset{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$.

От доказателството на (1) за *Твърдение* 1.5 можем да извлечем следното свойство, което ще ни бъде полезно по-нататък.

Твърдение 1.6. За всяко изображение $f \in [\mathcal{A} \overset{\text{м}}{\to} \mathcal{B}]$ и всяка верига $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, е изпълнено, че

$$\bigsqcup_i f(a_i) \sqsubseteq f(\bigsqcup_i a_i).$$

Понеже от *Следствие* 1.2 имаме, че монотонните изображения образуват област на Скот, то директно получаваме следната важна теорема.

Теорема 1.3. $([\mathbb{N}_\perp^n \overset{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp], \sqsubseteq, \perp^{(n)})$ е област на Скот.

1.3.3 Точни изображения

На англ. се нарича *strict*. „Стандартната” семантика на хаскел е *non-strict*

Едно изображение $f : \mathcal{A}_1^n \to \mathcal{A}_2$ се нарича **точно**, ако

$$(\forall \bar{a} \in \mathcal{A}_1^n)[\perp_1 \in \{a_1, \dots, a_n\} \implies f(a_1, \dots, a_n) = \perp_2].$$

За произволни области на Скот $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, ще означаваме съвкупността от точните изображения като $[\mathcal{A}_1 \overset{\text{т}}{\to} \mathcal{A}_2]$.

Пример 1.7. Да разгледаме свойствата на няколко прости изображения.

- Изображението $f : \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$, дефинирано като

$$f(x) = 42,$$

  за всяко $x \in \mathbb{N}_\perp$, **не е точно**, защото $f(\perp) = 42$. Лесно се вижда, че f е монотонно и непрекъснато изображение.

- От друга страна, изображението $g : \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$, дефинирано като

$$g(x) = \perp,$$

  за всяко $x \in \mathbb{N}_\perp$, **е точно**, защото $g(\perp) = \perp$. Освен това, g е монотонно и непрекъснато изображение.

Видяхме, че лесно се намират монотонни изображения, които не са точни. Сега ще разгледаме обратната посока.

Твърдение 1.7. Всяко точно изображение $f : \mathbb{N}_\perp^n \to \mathbb{N}_\perp$ е също така и монотонно. С други думи,

$$[\mathbb{N}_\perp^n \overset{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp] \subseteq [\mathbb{N}_\perp^n \overset{\text{м}}{\to} \mathbb{N}_\perp].$$

Доказателство. Нека f е точно и $\bar{a} \sqsubseteq \bar{b}$. Ще проверим, че

$$f(\bar{a}) = c \sqsubseteq d = f(\bar{b}).$$

- Ако $c = \perp$, то е очевидно, че $c \sqsubseteq d$.
- Интересният случай е когато $c \neq \perp$. Тогава трябва да видим, че $c = d$. Понеже f е точна и $c \neq \perp$, това означава, че $\perp \notin \{a_1, \dots, a_n\}$. Но понеже $\sqsubseteq$ е плоска наредба, и $\bar{a} \sqsubseteq \bar{b}$, това означава, че $\bar{a} = \bar{b}$. Следователно, наистина $c = d$.

□

Теорема 1.4. $([\mathbb{N}_\perp^n \overset{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp],\ \sqsubseteq,\ \perp^{(n)})$ е област на Скот.

Упътване. Да разгледаме веригата $(f_i)_{i=0}^\infty$ от елементи на $[\mathbb{N}_\perp^n \overset{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$. Трябва да докажем, че тази верига притежава точна горна граница, която също е точно изображение. От доказателството на *Теорема* 1.1 знаем, че изображението h дефинирано за всяко $\bar{a} \in \mathbb{N}_\perp^n$ като

$$h(\bar{a}) \overset{\text{деф}}{=} \bigsqcup \{f_i(\bar{a}) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

е точна горна граница на веригата $(f_i)_{i=0}^{\infty}$. Остава да проверим, че h е точно изображение. Нека $\bar{a} \in \mathbb{N}_\perp^n$ и да приемем, че $\perp \in \{a_1, \dots, a_n\}$. Тогава:

$$\begin{aligned}
h(\bar{a}) &= \bigsqcup\{f_i(\bar{a}) \mid i \in \mathbb{N}\} && \text{// от деф. на } h\\
&= \bigsqcup\{\perp, \perp, \dots, \perp, \dots\} && \text{// } f_i \text{ са точни}\\
&= \perp.
\end{aligned}$$

$\square$

Пример 1.8. Нека сега да разгледаме $h : \mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp$, където

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x = \perp,\\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Да видим колко „лошо” изображение е h:

- h не е точно, защото $h(\perp) \neq \perp$;
- h не е монотонно, защото $\perp \sqsubseteq 5$, но $h(\perp) = 0 \not\sqsubseteq 1 = h(5)$;
- h не е непрекъснато, защото $[\mathbb{N}_\perp \overset{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp] = [\mathbb{N}_\perp \overset{\text{м}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$.

Нека да видим, че хаскел не позволява такива „лоши” функции:

```
ghci> let h(x) = if x == undefined then 0 else 1
ghci> h(5)
*** Exception: Prelude.undefined
ghci> h(undefined)
*** Exception: Prelude.undefined
```

Пример 1.9. Да разгледаме $f : \mathbb{N}_\perp^2 \to \mathbb{N}_\perp$ дефинирано като

$$f(x, y) = x.$$

- f не е точно, защото $f(0, \perp) = 0$.
- f е монотонно, защото ако $\langle x, y\rangle \sqsubseteq \langle x', y'\rangle$, то $x \sqsubseteq x'$ и
$$f(x, y) = x \sqsubseteq x' = f(x', y').$$
- f е непрекъснато, защото от *Следствие* 1.3 знаем, че $[\mathbb{N}_\perp^2 \overset{\text{м}}{\to} \mathbb{N}_\perp] = [\mathbb{N}_\perp^2 \overset{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$.

Можем да обобщим всичко, което направихме дотук, със следната илюстрация на основните области на Скот, с които ще работим в *Глава* 3.

$$\begin{aligned}
[\mathbb{N}_\perp^n \overset{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp] &\subsetneq [\mathbb{N}_\perp^n \overset{\text{м}}{\to} \mathbb{N}_\perp] && \text{// от } \textit{Пример } 1.9 \text{ и } \textit{Твърдение } 1.7\\
&= [\mathbb{N}_\perp^n \overset{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp] && \text{// от } \textit{Твърдение } 1.3 \text{ и } \textit{Следствие } 1.3\\
&\subsetneq [\mathbb{N}_\perp^n \to \mathbb{N}_\perp] && \text{// от } \textit{Пример } 1.8.
\end{aligned}$$

Пример 1.10. Да разгледаме $f : \mathbb{N}_\perp^2 \to \mathbb{N}_\perp$ дефинирана по следния начин:

$$f(x,y) = \begin{cases} \perp, & x = \perp \ \& \ y = \perp \\ x, & x \neq \perp \ \& \ y = \perp \\ y, & x = \perp \ \& \ y \neq \perp \\ x+y, & x \neq \perp \ \& \ y \neq \perp. \end{cases}$$

Изображението f не е точно, защото например $f(\perp, 0) \neq \perp$. f не е монотонно изображение, защото $\langle 2, \perp\rangle \sqsubseteq \langle 2, 3\rangle$, но $2 = f(2,\perp) \not\sqsubseteq f(2,3) = 5$. Също така, f не е непрекъснато изображение, защото $[\mathbb{N}_\perp^2 \xrightarrow{\text{м}} \mathbb{N}_\perp] = [\mathbb{N}_\perp^2 \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp]$.

1.3.4 Точни ограничения

Нека фиксираме две области на Скот $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. За едно изображение $f \in [\mathcal{A}^n \to \mathcal{B}]$, дефинираме точното изображение $f_\star \in [\mathcal{A}^n \xrightarrow{\text{т}} \mathcal{B}]$ по следния начин:

$$f_\star(\bar{a}) = \begin{cases} f(\bar{a}), & \text{ако } \perp \notin \{a_1, \dots, a_n\} \\ \perp, & \text{ако } \perp \in \{a_1, \dots, a_n\}. \end{cases}$$

Ще казваме, че $f_\star$ е **точно ограничение** на f.

Твърдение 1.8. За всяко $f \in [\mathcal{A}^n \to \mathcal{B}]$, имаме

$$f_\star \sqsubseteq f.$$

Пример 1.11. Точното ограничение на функцията f от *Пример* 1.10 е

$$f_\star(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{ако } x \neq \perp \ \& \ y \neq \perp \\ \perp, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пример 1.12. Да видим какъв резултат връща хаскел при следните извиквания:

```
ghci> (\x -> 5) 4
5
ghci> (\x -> 5) undefined
5
```

От второто извикване се вижда, че в хаскел, анонимната функция $\lambda x.5$ е дефинирана и върху $\perp$ и връща отново 5. Това е естествено, понеже хаскел е *неточен* език, т.е. една функция може да има като аргумент $\perp$ и да връща „смислен" резултат.

$(\lambda x.5)(4) = 5$, $(\lambda x.5)(\perp) = 5$

При разглеждането на семантики на езици за програмиране, ще се нуждаем от това да направим една функция *точна*. Такава възможност има и в хаскел с командата `seq`.

Повече информация за `seq` може да се намери в [?, стр. 108]

```
ghci> :t seq
seq :: a -> b -> b
ghci> (\x -> x `seq` 5) 4
```

```
5
ghci> (\x -> x `seq` 5) undefined
*** Exception: Prelude.undefined
ghci> :set -XBangPatterns
ghci> (\(!x) -> 5) undefined
*** Exception: Prelude.undefined
```

Командата `seq` приема два аргумента. Тя работи като оценява първия аргумент, като очаква той да се оцени до „смислен" резултат, т.е. нещо различно от $\perp$. След това връща втория. Тук първия пример се превежда като $(\lambda x.5)_\star(4) = 5$, а втория като $(\lambda x.5)_\star(\perp) = \perp$.

За произволно естествено число n, да дефинираме изображение

$$\Sigma_\star : [\mathbb{N}^n_\perp \rightarrow \mathbb{N}_\perp] \rightarrow [\mathbb{N}^n_\perp \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp],$$

където

$$\Sigma_\star(f) = f_\star.$$

Ще наричаме $\Sigma_\star$ **ограничаващ** оператор, защото на всяка функция дава нейното точно ограничение.

Твърдение 1.9. За всяко n, $\Sigma_\star$ е непрекъснато изображение, т.е.

$$\Sigma_\star \in [[\mathbb{N}^n_\perp \rightarrow \mathbb{N}_\perp] \xrightarrow{\text{н}} [\mathbb{N}^n_\perp \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp]].$$

Упътване. Трябва да докажем, че за произволна верига $(f_i)_{i=0}^\infty$ от елементи на $[\mathbb{N}^n_\perp \rightarrow \mathbb{N}_\perp]$, имаме

$$\Sigma_\star(\bigsqcup_i f_i) = \bigsqcup_i \Sigma_\star(f_i).$$

(1) Лесно се съобразява, че $\Sigma_\star$ е монотонно изображение, т.е.

$$f \sqsubseteq g \implies \Sigma_\star(f) \sqsubseteq \Sigma_\star(g).$$

Сега използваме *Твърдение* 1.6, откъдето следва, че

$$\bigsqcup_i \Sigma_\star(f_i) \sqsubseteq \Sigma_\star(\bigsqcup_i f_i).$$

(2) За другата посока, нека да разгледаме $\overline{a}$, за които

Случаят $\Sigma_\star(\bigsqcup_i f_i)(\overline{a}) = \perp$ е тривиален.

$$\Sigma_\star(\bigsqcup_i f_i)(\overline{a}) = b \neq \perp.$$

Щом $b \neq \perp$, то ако $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, със сигурност $\perp \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$. Тогава директно имаме, че $(\bigsqcup_i f_i)(\overline{a}) = b \neq \perp$. Сега от *Задача* 1.3 получаваме, че съществува i_0, за което $f_{i_0}(\overline{a}) = b$. Ясно е, че също така $\Sigma_\star(f_{i_0})(\overline{a}) = b$ и оттук $(\bigsqcup_i \Sigma_\star(f_i))(\overline{a}) = b$, защото $\Sigma_\star(f_{i_0}) \sqsubseteq \bigsqcup_i \Sigma_\star(f_i)$. Заключаваме, че

$$\Sigma_\star(\bigsqcup_i f_i) \sqsubseteq \bigsqcup_i \Sigma_\star(f_i).$$

$\square$

1.4 Най-малки неподвижни точки

- Да фиксираме произволна област на Скот $\mathcal{A} = (A, \sqsubseteq, \perp)$ и да разгледаме едно изображение $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Казваме, че $a \in \mathcal{A}$ е **неподвижна точка** на f, ако $f(a) = a$.
- Казваме, че $a \in \mathcal{A}$ е **най-малката неподвижна точка** на f, ако:
  - a е неподвижна точка, т.е. $f(a) = a$;
  - за всяко $b \in \mathcal{A}$ със свойството, че $f(b) = b$ имаме $a \sqsubseteq b$.
  - Ще означаваме най-малката неподвижна точка на f като $\texttt{lfp}(f)$.

least fixed point

Теорема 1.5 (Клини)**.** Нека $\mathcal{A}$ е област на Скот. Всяко $f \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$ притежава най-малка неподвижна точка.

Доказателство. Определяме монотонно растяща редица от елементи на $\mathcal{A}$ по следния начин:

В [?] се нарича теорема на Кнастер-Тарски. Според уикипедия е теорема на Клини

$$a_0 \overset{\text{деф}}{=} \perp \qquad // \ = f^0(\perp)$$
$$a_{n+1} \overset{\text{деф}}{=} f(a_n) \qquad // \ = f^{n+1}(\perp).$$

Първо ще докажем с индукция по n, че $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ е верига. Ясно е, че $a_0 \sqsubseteq a_1$. Да приемем, че $a_n \sqsubseteq a_{n+1}$. Тогава, понеже всяко непрекъснато изображение е монотонно, то имаме, че

$$\underbrace{f(a_n)}_{a_{n+1}} \sqsubseteq \underbrace{f(a_{n+1})}_{a_{n+2}}.$$

Нека $a \overset{\text{деф}}{=} \bigsqcup_i a_i$. Тогава

$$\begin{aligned}
f(a) &= f(\bigsqcup_i a_i) && // \ a \overset{\text{деф}}{=} \bigsqcup_i a_i \\
&= \bigsqcup_i f(a_i) && // \ f \text{ е непрекъсната} \\
&= \bigsqcup_i a_{i+1} && // \ a_{i+1} = f(a_i) \\
&= \bigsqcup_i a_i && // \text{ защото } (a_i)_{i=0}^{\infty} \text{ е верига} \\
&= a.
\end{aligned}$$

Така доказахме, че a е *неподвижна точка* на f. Остана да видим, че е най-малката неподвижна точка на f.

Нека $b = f(b)$. С индукция по n ще докажем, $(\forall n)[a_n \sqsubseteq b]$.

- За $n = 0$ е очевидно.
- Да приемем, че $a_n \sqsubseteq b$. Тогава $a_{n+1} \overset{\text{деф}}{=} f(a_n) \sqsubseteq f(b) = b$, защото f е монотонно изображение.

Така доказахме, че b е горна граница на веригата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Заключаваме, че $a \stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup_n a_n \sqsubseteq b$. Следователно, a е *най-малката неподвижна точка* на f, т.е. $a = \mathtt{lfp}(f)$. $\square$

Твърдение 1.10. За всяко $f \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$ е изпълнено, че

$$(\forall a \in \mathtt{Pref}(f))[\mathtt{lfp}(f) \sqsubseteq a],$$

където

$$\mathtt{Pref}(f) \stackrel{\text{деф}}{=} \{a \in \mathcal{A} \mid f(a) \sqsubseteq a\}$$

е множеството от всички преднеподвижни точки на f. Това означава, че $\mathtt{lfp}(f)$ е най-малката преднеподвижна точка на f.

Доказателство. Знаем от Теоремата на Клини, че $\mathtt{lfp}(f) = \bigsqcup_n f^n(\perp)$. Също така знаем, че $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ е верига, където за улеснение сме положили $b_n \stackrel{\text{деф}}{=} f^n(\perp)$. Ясно е също, че $\mathtt{Pref}(f) \neq \emptyset$, защото $\mathtt{lfp}(f) \in \mathtt{Pref}(f)$. Да фиксираме прозиволен елемент $a \in \mathtt{Pref}(f)$. С индукция по n ще докажем, че $b_n \sqsubseteq a$ за всяко n.

- За $n = 0$ е очевидно, защото тогава $b_0 \stackrel{\text{деф}}{=} \perp \sqsubseteq a$.
- Да приемем, че $b_n \sqsubseteq a$. Ще докажем, че $b_{n+1} \sqsubseteq a$. Но това е лесно.

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= f(b_n) && /\!/ \text{ от деф. на } b_{n+1} \\ &\sqsubseteq f(a) && /\!/ \ b_n \sqsubseteq a \ \&\ f \text{ е мон.} \\ &\sqsubseteq a && /\!/ \ a \in \mathtt{Pref}(f). \end{aligned}$$

Така доказахме, че за всяко n, $b_n \sqsubseteq a$, откъдето следва, че a е горна граница за веригата $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, откъдето директно получаваме, че

$$\mathtt{lfp}(f) = \bigsqcup_n b_n \sqsubseteq a.$$

$\square$

Задача 1.1. Покажете, че съществува област на Скот $\mathcal{A}$ и $f \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{м}}{\to} \mathcal{A}]$, което притежава най-малка неподвижна точка, но $\bigsqcup_n f^n(\perp^{\mathcal{A}})$ не е.

Упътване. Да разгледаме $\mathcal{A} = (A, \sqsubseteq, a_0)$, където елементите на A са подредени по следния начин:

$$A = \{a_0 \sqsubset a_1 \sqsubset \cdots \sqsubset a_n \sqsubset \cdots \sqsubset b_0 \sqsubset b_1\}.$$

т.е. A е съставена от веригата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ веднага следвана от елементите b_0 и b_1. Да обърнем внимание, че $\bigsqcup_n a_n = b_0$.

Да разгледаме изображението $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, където за всяко n,

$$\begin{aligned} f(a_n) &= a_{n+1} \\ f(b_0) &= b_1 \\ f(b_1) &= b_1. \end{aligned}$$

Лесно се вижда, че това изображение е монотонно. Обаче f не е непрекъснато изображение, защото $\bigsqcup_n a_n = b_0$, и тогава:

$$f(\bigsqcup_n a_n) = f(b_0) = b_1 \neq b_0 = \bigsqcup_n a_{n+1} = \bigsqcup_n \{f(a_n)\}.$$

Според дефиницията на изображението f, единствената неподвижна точка на f е елементът b_1. Това означава, че b_1 е също и най-малката неподвижна точка. Това е пример за монотонно изображение, което не е непрекъснато, но притежава най-малка неподвижна точка, макар и тя да не може да не е $\bigsqcup_n f^n(a_0)$. □

1.5 Най-малко решение на система от уравнения

Задача 1.2. Нека $f \in [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{B}]$ и $g \in [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{C}]$. Докажете, че $h \in [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{B} \times \mathcal{C}]$, където

$$h(a) \stackrel{\text{деф}}{=} \langle f(a), g(a) \rangle.$$

В такъв случай ще означаваме $h = f \times g$.

Доказателство. Нека $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ е верига в $\mathcal{A}$. Тогава:

$$\begin{aligned}
h(\bigsqcup_i a_i) &= \langle f(\bigsqcup_i a_i), g(\bigsqcup_i a_i) \rangle && \text{// от деф.}\\
&= \langle \bigsqcup_i f(a_i), \bigsqcup_i g(a_i) \rangle && \text{// } f \text{ и } g \text{ са непр.}\\
&= \bigsqcup_i \langle f(a_i), g(a_i) \rangle && \text{// от \textit{Твърдение} 1.2}\\
&= \bigsqcup_i h(a_i) && \text{// от деф.}
\end{aligned}$$

□

Обърнете внимание на следващото твърдение, защото ще го използваме често по-късно. То представлява обобщение на предишната задача и има сходно доказателство.

Твърдение 1.11. Нека $f_i \in [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{B}_i]$, за $i = 1, \ldots, n$. Тогава

✍ Докажете сами!

$$g \in [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i],$$

където

$$g(a) \stackrel{\text{деф}}{=} \langle f_1(a), f_2(a), \ldots, f_n(a) \rangle.$$

В такъв случай ще означаваме $g = f_1 \times f_2 \cdots \times f_n$.

Нека $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ са области на Скот и да разгледаме изображенията

$$f_i : \prod_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k \to \mathcal{A}_i,$$

за $i = 1, \ldots, n$. Казваме, че $\bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ е **решение на системата**

$$\bigstar = \begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \\ \vdots \\ f_n(x_1,\ldots,x_n) = x_n, \end{cases}$$

ако са в сила равенствата

$$\begin{aligned} & f_1(a_1,\ldots,a_n) = a_1 \\ & \vdots \\ & f_n(a_1,\ldots,a_n) = a_n. \end{aligned}$$

Казваме, че $\bar{a}$ е **най-малкото решение** на системата $\bigstar$, ако за всяко друго решение $\bar{b}$ е изпълнено, че $\bar{a} \sqsubseteq \bar{b}$.

Теорема 1.6. За произволни изображения $f_i \in [\prod_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}_i]$, за $i = 1,\ldots,n$, системата

$$\begin{aligned} & f_1(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \\ & \vdots \\ & f_n(x_1,\ldots,x_n) = x_n, \end{aligned}$$

притежава най-малко решение.

Доказателство. Първо да дефинираме както в *Твърдение* 1.11 непрекъснатото изображение

$$g \overset{\text{деф}}{=} f_1 \times \cdots \times f_n : \prod_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k \to \prod_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k,$$

като

$$g(\bar{a}) \overset{\text{деф}}{=} \langle f_1(\bar{a}),\ldots,f_n(\bar{a})\rangle.$$

От Теоремата на Клини знаем, че g притежава най-малка неподвижна точка $\bar{a} = \langle a_1,\ldots,a_n\rangle$. Ще проверим, че $\overline{a}$ е най-малкото решение на системата.

- Понеже $\overline{a}$ е неподвижна точка на g, то

  $$\begin{aligned} g(a_1,\ldots,a_n) &= \langle f_1(\overline{a}),\ldots,f_n(\overline{a})\rangle && \text{// от деф. на } g \\ &= \langle a_1,\ldots,a_n\rangle && \text{// } \overline{a} \text{ е неподвижна точка.} \end{aligned}$$

  Оттук директно следва, че $f_i(\bar{a}) = a_i$, за $i = 1,\ldots,n$, и следователно $\overline{a}$ е решение на системата.

- Нека $\bar{b} = \langle b_1,\ldots,b_n\rangle$ е друго решение на системата, т.е. $f_i(\bar{b}) = b_i$, за $i = 1,\ldots,n$. Тогава $g(\bar{b}) = \langle f_1(\bar{b}),\ldots,f_n(\bar{b})\rangle = \bar{b}$. Следователно $\bar{b}$ е неподвижна точна на g. Понеже $\overline{a} = \mathtt{lfp}(g)$, то $\overline{a} \sqsubseteq \bar{b}$.

Така достигнахме до извода, че $\overline{a}$ е най-малкото решение на системата. □

Забележка 1.2. Да разгледаме изображенията $f \in [\mathcal{A} \times \mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$, $g \in [\mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{B}]$ и системата

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x \\ g(y) &= y. \end{aligned}$$

За да можем директно да се позовем на *Теорема* 1.6 и да твърдим, че тази система има най-малко решение, ние трябва да разгледаме следната модификация на системата:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x \\ \hat{g}(x, y) &= y, \end{aligned}$$

където $\hat{g}(x, y) = g(y)$, т.е. добавяме един фиктивен аргумент, защото искаме всички изображения да имат равен брой аргументи.

Ще завършим този раздел с две твърдения, които ще улеснят нашите разсъждения при решаването на задачи.

Твърдение 1.12. Да разгледаме две изображения

$$\begin{aligned} f &\in [\mathcal{A} \times \mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}] \\ g &\in [\mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{B}], \end{aligned}$$

за които имаме системата от уравнения

$$\bigstar = \begin{cases} f(x, y) = x \\ g(y) = y. \end{cases}$$

Нека $b_0 = \mathtt{lfp}(g)$ и $a_0 = \mathtt{lfp}(\hat{f})$, където $\hat{f}(a) \overset{\text{деф}}{=} f(a, b_0)$. Тогава $\langle a_0, b_0 \rangle$ е най-малкото решение на системата $\bigstar$.

Доказателство.

- Първо, понеже $b_0 = \mathtt{lfp}(g)$, то очевидно $g(b_0) = b_0$. Освен това, $a_0 = \mathtt{lfp}(\hat{f})$, откъдето следва, че $a_0 = f(a_0, b_0)$. Ясно е, че $\langle a_0, b_0 \rangle$ е решение на системата $\bigstar$.
- Сега нека $\langle a, b \rangle$ е произволно решение на системата $\bigstar$. Да видим, че $\langle a_0, b_0 \rangle \sqsubseteq \langle a, b \rangle$.
  - Първо, ясно е, че $b = g(b)$. Понеже $b_0 = \mathtt{lfp}(g)$, то $b_0 \sqsubseteq b$.
  - Второ, ясно е, че

$$\begin{aligned} a &= f(a, b) && \text{// } a \text{ е решение на } \bigstar \\ &\sqsupseteq f(a, b_0) && \text{// } b \sqsupseteq b_0 \\ &= \hat{f}(a) && \text{// от деф.} \end{aligned}$$

  Получихме, че $a \in \mathtt{Pref}(\hat{f})$. От *Твърдение* 1.10 знаем, че

$$a_0 \overset{\text{деф}}{=} \mathtt{lfp}(\hat{f}) \sqsubseteq a.$$

Заключваваме, че $\langle a_0, b_0\rangle \sqsubseteq \langle a, b\rangle$.

□

Нещата започнаха да стават прекалено абстрактни, затова нека да видим един прост пример, който показва, че всъщност горното твърдение е близо до нашата интуиция.

Пример 1.13. Нека да разгледаме следната програма на езика `haskell`:

```
ghci> let g(x,y) = if x == 0 then 0 else g(x-1,y) + y
ghci> let f(x) = if x == 0 then 1 else g(x,f(x-1))
```

Лесно се съобразява, че всъщност

$$g(x, y) = x * y.$$

Това означава, че можем да пренапишем дефиницията на f по следния начин:

```
ghci> let f(x) = if x == 0 then 1 else x * f(x - 1)
```

Сега лесно се съобразява, че $f(x) = x!$, за $x \in \mathbb{N}$. Да не забравяме, че в haskell имаме и константата undefined. Това означава, че ако се ограничим до $\mathbb{N}_\perp$, то по горния начин сме дефинирали следните две функции:

$$f(x) = \begin{cases} x!, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases} \tag{1.2}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} x \cdot y, & \text{ако } x, y \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако } \perp \in \{x, y\}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Ясно е, че тези функции са точни, а следователно и непрекъснати. Целта на *Глава* 3 е да формализираме разсъжданията, които направихме по-горе. Ще видим, че на тази програма можем да съпоставим система от *непрекъснати* изображения.

$x + \perp \stackrel{\text{деф}}{=} \perp$
В *Глава* 3 ще видим, че на всяка програма съпоставяме система от *непрекъснати* изображения. В конкретния пример можем директно да докажем, че Γ и Δ са непрекъснати изображения.

$$\Gamma(f, g)(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ g(x, f(x-1)), & x > 0 \\ \perp, & x = \perp \end{cases}$$

$$\Delta(g)(x, y) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ g(x-1, y) + y, & x > 0 \\ \perp, & x = \perp. \end{cases}$$

Да видим как можем да дефинираме тези изображения на haskell и как можем получим редицата от апроксимации на най-малките неподвижни точки по Теоремата на Клини.

```
ghci> let gamma(f, g)(x) = if x == 0 then 1 else g(x, f(x - 1))
ghci> let delta(g)(x, y) = if x == 0 then 0 else g(x - 1, y) + y
-- Започваме да строим редицата от апроксимации по Теоремата на Клини
ghci> let g1 = delta( \(x,y) -> undefined )
```

```
ghci> let g2 = delta(g1)
ghci> let g3 = delta(g2)
ghci> g3(2,4)
8
ghci> g3(3,4)
*** Exception: Prelude.undefined
-- Можем да подходим и по-мързеливо, като направо дефинираме безкрайния
-- списък от тези апроксимации.
ghci> let approx = (\(x,y) -> undefined):[delta(g) | g <- approx]
ghci> let g9 = approx !! 9
ghci> g9(8,100)
800
ghci> g9(9,100)
*** Exception: Prelude.undefined
-- най-малката неподвижна точка на delta
ghci> let psi(x) = (approx !! (x+1))(x)
```

Горният пример ни подсказва, че с индукция по k, можем да докажем, че ако имаме редицата

$$\begin{aligned} g_0 &= \perp^{(2)} \\ g_{k+1} &= \Delta(g_k), \end{aligned}$$

то, за произволнен индекс k, имаме

$$g_k(x,y) = \begin{cases} x \cdot y, & \text{ако } x < k \text{ и } y \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогава с помощта на Теоремата на Клини можем да докажем, че

$$\mathtt{lfp}(\Delta)(x,y) = \begin{cases} x \cdot y, & \text{ако } x, y \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако } \perp \in \{x, y\}. \end{cases}$$

Нека сега да разгледаме изображението

$$\hat{\Gamma}(f)(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma(f, \mathtt{lfp}(\Delta))(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x = 0 \\ x \cdot f(x-1), & \text{ако } x > 0 \\ \perp, & \text{ако } x = \perp. \end{cases}$$

Нека отново да видим как можем да дефинираме това изображение на haskell и как можем получим редицата от апроксимации на най-малките неподвижни точки по Теоремата на Клини.

```
ghci> let gamma(f,g)(x) = if x == 0 then 1 else g(x,f(x-1))
ghci> let gamma'(f) = gamma(f, \(x, y) -> x * y)
ghci> :t gamma'
gamma' :: (a -> a) -> a -> a
ghci> let approx' = (\x -> undefined):[gamma'(f) | f <- approx']
ghci> let f9 = approx' !! 9
ghci> f9(8)
```

```
40320
ghci> f9(9)
*** Exception: Prelude.undefined
ghci> let phi(x) = (approx' !! (x+1))(x)
ghci> phi(8)     -- phi е най-малката неподвижна точка на gamma'
40320            -- лесно се съобразява, че phi(x) == x!
```

Горният пример ни подсказва, че с индукция по k, можем да докажем, че ако имаме редицата

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \perp^{(1)} \\
f_{k+1} &= \hat{\Gamma}(f_k),
\end{aligned}
$$

то, за произволен индекс k, имаме

$$
f_k(x) = \begin{cases} x!, & \text{ако } x < k \\ \perp, & \text{иначе.} \end{cases}
$$

Отново по Теоремата на Клини,

$$
\mathtt{lfp}(\hat{\Gamma})(x) = \begin{cases} x!, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако } x = \perp. \end{cases}
$$

От *Твърдение* 1.12 знаем, че двойката $(\mathtt{lfp}(\hat{\Gamma})), \mathtt{lfp}(\Delta))$ е най-малкото решение на системата, което е точно двойката изображения (f, g) с дефиниции (1.2) и (1.3).

Твърдение 1.13. Да разгледаме изображенията $f \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{B}]$ и $g \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$ и системата:

$$
\bigstar = \begin{cases} \quad f(y) = x \\ \quad g(y) = y. \end{cases}
$$

Нека $a_0 = \mathtt{lfp}(g)$. Тогава най-малкото решение на системата $\bigstar$ е

$$
\langle f(a_0), a_0 \rangle.
$$

Доказателство.

- Лесно се съобразява, че $\langle f(a_0), a_0 \rangle$ е решение на системата $\bigstar$.
- Нека $\langle c, d \rangle$ е решение на системата $\bigstar$. Тогава $g(d) = d$ и понеже $a_0 = \mathtt{lfp}(g)$, то $a_0 \sqsubseteq d$. Освен това, $c = f(d) \sqsupseteq f(a_0)$. Получихме, че $\langle f(a_0), a_0 \rangle \sqsubseteq \langle c, d \rangle$.

Заключаваме, че $\langle f(a_0), a_0 \rangle$ е най-малкото решение на системата $\bigstar$. □

Пример 1.14. Да разгледаме следната програма:

```
ghci> :{  -- използване на multiline дефиниции
ghci> let g(x, y, z) = if x == y + z then z
ghci|                     else if z == x + 1 then 0
ghci|                       else g(x, y, z + 1)
ghci| :}
ghci> let f(x, y) = g(x, y, 0)
```

Лесно се съобразява, че

$$g(x, y) = \begin{cases} x - y, & \text{ако } x \geq y \\ 0, & \text{ако } x < y. \end{cases}$$

Тази функция ще я означаваме като $x \dot{-} y$. На горната програма можем да съпоставим системата от непрекъснати изображения:

$$\Gamma(g)(x, y) = g(x, y, 0)$$
$$\Delta(g)(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{ако } x = y + z \\ 0, & \text{ако } z = x + 1 \\ g(x, y, z + 1), & \text{иначе и } x, y, z \in \mathbb{N} \\ \perp, & \perp \in \{x, y, z\}. \end{cases}$$

```
ghci> :{  -- Multiline
ghci> let delta(g)(x, y, z) = if x == y + z then z
ghci|                            else if z == x + 1 then 0
ghci|                              else g(x, y, z + 1)
ghci| :}
ghci> :t delta
delta :: ((t, t, t) -> t) -> (t, t, t) -> t
ghci> let approx = (\(x,y,z) -> undefined):[delta(g) | g <- approx]
ghci> let g9 = approx !! 9
ghci> g9(20,11,1)  -- 20-11 \in [1, 10)
9
ghci> g9(20,1,11) -- 20-1 \in [11, 20)
19
ghci> g9(2,11,4)  -- 2+1 \not\in [4, 13)
*** Exception: Prelude.undefined
```

Горният пример ни подсказва, че с индукция по k, можем да докажем, че ако имаме редицата

$$g_0 = \perp^{(3)}$$
$$g_{k+1} = \Delta(g_k),$$

то, за произволно k, имаме

$$g_k(x, y, z) = \begin{cases} 0, & x + 1 \in [z, z + k) \\ x - y, & x \geq y \ \& \ x - y \in [z, z + k) \\ \perp, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогава можем да приложим Теоремата на Клини и да докажем, че

$$\texttt{lfp}(\Delta)(x,y,z) = \begin{cases} x \dot{-} y, & z \leq x+1 \\ \perp, & z > x+1 \text{ или } \perp \in \{x,y,z\}. \end{cases}$$

Тогава от *Твърдение* 1.13 следва, че

$$\texttt{lfp}(\Gamma)(x,y) = \texttt{lfp}(\Delta)(x,y,0) = \begin{cases} x \dot{-} y, & x,y \in \mathbb{N} \\ \perp, & \perp \in \{x,y\}. \end{cases}$$

Съобразете, че $\texttt{lfp}(\Gamma) = \bigsqcup_k f_k$, където $f_k(x,y) = g_k(x,y,0)$.

1.6 Алгебрични области на Скот

[?], [?]

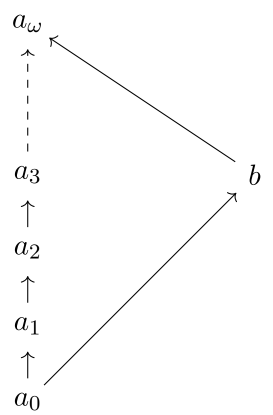
- Нека $\mathcal{A}$ е област на Скот. Казваме, че елементът c е **компактен**, ако за всяка верига $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, за която $c \sqsubseteq \bigsqcup_i a_i$, съществува индекс i_0, за който $c \sqsubseteq a_{i_0}$. Компактните елементи на $\mathcal{A}$ ще означаваме с $K(\mathcal{A})$.

- Ще казваме, че областта на Скот $\mathcal{A}$ е **алгебрична**, ако за всеки елемент $a \in \mathcal{A}$, съществува верига от *компактни* елементи $(c_i)_{i=0}^{\infty}$ в $\mathcal{A}$, за която $a = \bigsqcup_i c_i$.

Пример 1.15. Нека да разгледаме $\mathcal{A} = \langle A, \sqsubseteq, \perp \rangle$, където

$$A = \{a_0, a_1, \ldots, \} \cup \{a_\omega, b\},$$

релацията $\sqsubseteq$ е представена на *Фигура* 1.3. Лесно се съобразява, че $\mathcal{A}$ е област на Скот. Всеки от елементите на A е компактен, с изключение на a_ω и b. Също така е ясно, че $\mathcal{A}$ *не е* алгебрична област на Скот, защото няма верига от крайни елементи, чиято точна горна граница да е елементът b.



Фигура 1.3: Графично представяне на $\sqsubseteq$ върху $\mathcal{A}$

Пример 1.16. Областта на Скот $\mathcal{F}_n$ е алгебрична. Компактните елементи са тези функции f, за които $|Dom(f)| < \infty$, т.е. крайните функции.

Теорема 1.7. Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са области на Скот, където $\mathcal{A}$ е *алгебрична*. Тогава $f \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{B}]$ точно тогава, когато за произволен елемент $a \in A$,

$$f(a) = \bigsqcup \{ f(c) \mid c \sqsubseteq a \;\&\; c \in K(\mathcal{A}) \}.$$

Доказателство. [?, стр. 17]

(1) Нека $f \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{B}]$ и да разгледаме произволен елемент $a \in A$. Нека c е комапктен елемент, за който $c \sqsubseteq a$. Тогава $f(c) \sqsubseteq f(a)$, защото f е монотонно изображение. Това означава, че $f(a)$ е горна граница на множеството $\{ f(c) \mid c \sqsubseteq a \;\&\; c \in K(\mathcal{A}) \}$.

Всяко непрекъснато изображение е монотонно

Нека сега b е друга горна граница на $\{f(c) \mid c \sqsubseteq a \ \& \ c \in K(\mathcal{A})\}$. Ще докажем, че $f(a) \sqsubseteq b$.

Понеже $\mathcal{A}$ е алгебрична област на Скот, то $a = \bigsqcup_i c_i$, за някоя вергига $(c_i)_{i=0}^{\infty}$ от компактни елементи. Знаем, че $f(c_i) \sqsubseteq b$ за всеки компактен елемент $c_i \sqsubseteq a$. Тогава $\bigsqcup_i f(c_i) \sqsubseteq b$ и следователно $f(\bigsqcup_i c_i) \sqsubseteq b$, защото f е непрекъснато изображение. Понеже $a = \bigsqcup_i c_i$, то получаваме, че $f(a) \sqsubseteq b$.

$(f(c_i))_{i=0}^{\infty}$ образуват верига и следователно притежава точна горна граница

От всичко това следва, че

$$f(a) = \bigsqcup \{f(c) \mid c \sqsubseteq a \ \& \ c \in K(\mathcal{A})\}.$$

(2) Сега да разгледаме обратната посока, т.е. нека f е изображение, за което за произволен елемент $a \in A$ е изпълнено, че

$$f(a) = \bigsqcup \{f(c) \mid c \sqsubseteq a \ \& \ c \in K(\mathcal{A})\}.$$

Нека първо да проверим, че f е монотонно изображение. За целта, нека разгледаме произволни елементи $a, b \in A$, за които $a \sqsubseteq b$. Ясно е, че

$$\{f(c) \mid c \sqsubseteq a \ \& \ c \in K(\mathcal{A})\} \subseteq \{f(c) \mid c \sqsubseteq b \ \& \ c \in K(\mathcal{A})\}.$$

Оттук директно получаваме, че

$$\begin{aligned} f(a) &= \bigsqcup \{f(c) \mid c \sqsubseteq a \ \& \ c \in K(\mathcal{A})\} \\ &\sqsubseteq \bigsqcup \{f(c) \mid c \sqsubseteq b \ \& \ c \in K(\mathcal{A})\} \\ &= f(b). \end{aligned}$$

Така, щом f е монотонно изображение, то можем да заключим, че за произволна верига $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ е изпълнено

$$\bigsqcup_i f(a_i) \sqsubseteq f(\bigsqcup_i a_i).$$

За другата посока, да разгледаме произволна верига $(a_i)_{i=0}^{\infty}$. Тогава ако c е компактен елемент и $c \sqsubseteq \bigsqcup_i a_i$, то съществува индекс i_0, за който $c \sqsubseteq a_{i_0}$. Понеже f е монотонно изображение, то

$$f(c) \sqsubseteq f(a_{i_0}) \sqsubseteq \bigsqcup_i f(a_i).$$

Това означава, че елементът $\bigsqcup_i f(a_i)$ е горна граница на множеството

$$\{f(c) \mid c \sqsubseteq \bigsqcup_i a_i \ \& \ c \in K(\mathcal{A})\}.$$

Оттук заключаваме, че

$$f(\bigsqcup_i a_i) = \bigsqcup \{f(c) \mid c \sqsubseteq \bigsqcup_i a_i \ \& \ c \in K(\mathcal{A})\} \sqsubseteq \bigsqcup_i f(a_i).$$

$\square$

Използвайки факта, че $\mathcal{F}_n$ е алгебрична област на Скот, то имаме следната полезна харектеризация.

Следствие 1.4. Следните условия са еквивалентни:

(1) $\Gamma \in [\mathcal{F}_n \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{F}_m]$;

(2) $\Gamma(f)(\overline{x}) \simeq y \iff (\exists \theta \subseteq f)[\ \theta$ е крайна функция & $\Gamma(\theta)(\overline{x}) \simeq y\ ]$.

Понякога се оказва, че за проверката дали даден оператор Γ е непрекъснат е по-лесно да се провери условието (2). Особено на упражнение ще се използва често характеризацията (2).

1.7 Задачи

Задача 1.3. Нека $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ е верига от елементи на $[\mathcal{A} \to \mathcal{B}]$, където $\mathcal{B}$ е *плоска* област на Скот. Тогава:

Достатъчно е всяка верига в $\mathcal{B}$ да се стабилизира

- $(\bigsqcup_i f_i)(a) = \perp \implies (\forall i)[\ f_i(a) = b\ ]$;
- $(\bigsqcup_i f_i)(a) = b \neq \perp \implies (\exists i_0)(\forall i \geq i_0)[\ f_i(a) = b\ ]$.

Задача 1.4. Нека $f \in [\mathcal{A} \overset{\text{м}}{\to} \mathcal{B}]$, където $\mathcal{B}$ е *плоска* област на Скот. Тогава за всяка верига $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ в $\mathcal{A}$ е изпълнено, че:

Достатъчно е всяка верига в $\mathcal{B}$ да се стабилизира

- $f(\bigsqcup_i a_i) = \perp \implies (\forall i)[\ f(a_i) = \perp\ ]$;
- $f(\bigsqcup_i a_i) = b \neq \perp \implies (\exists i_0)(\forall i \geq i_0)[\ f(a_i) = b\ ]$.

Задача 1.5. Ако $f \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} B]$ и $g \in [\mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]$, то $g \circ f \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]$, където

$$(g \circ f)(a) \overset{\text{деф}}{=} g(f(a)).$$

Задача 1.6. Докажете, че ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са алгебрични области на Скот, то $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ също е алгебрична област на Скот.

Задача 1.7. Нека е даден следния оператор $\Gamma : \mathcal{F}_1^{\perp} \to \mathcal{F}_1^{\perp}$:

$$\Gamma(f)(x) = \begin{cases} \perp, & |Dom(f)| < \infty \\ 1, & |Dom(f)| = \infty. \end{cases}$$

Проверете дали:

а) Γ е монотонен оператор;

б) Γ е компактен оператор.

Решение.

а) Трябва да проверим дали:

$$(\forall f, g \in \mathcal{F}_1^{\perp})[f \sqsubseteq g \implies \Gamma(f) \sqsubseteq \Gamma(g)].$$

Нека $f \sqsubseteq g$ са произволни елементи от $\mathcal{F}_1^{\perp}$. Ще разгледаме два случая.

- f е крайна функция. Тогава $\Gamma(f) = \lambda x.\perp$ и е очевидно, че
$$\Gamma(f) \sqsubseteq \Gamma(g).$$
- f не е крайна функция. Щом $f \sqsubseteq g$, то g също не е крайна функция. Тогава
$$(\forall x \in \mathbb{N}_{\perp})[\Gamma(f)(x) = 1 = \Gamma(g)(x)],$$
от което следва, че
$$\Gamma(f) \sqsubseteq \Gamma(g).$$

Разгледахме всички възможни случаи за f и във всеки от тях получихме, че $\Gamma(f) \sqsubseteq \Gamma(g)$. Следователно, Γ е монотонен оператор.

б) Според *Твърдение* **??**, достатъчно е да докажем, че за произволни елементи $f \in \mathcal{F}_1^{\perp}$, $x, y \in \mathbb{N}_{\perp}$,

$$\Gamma(f)(x) = y \implies (\exists \theta \sqsubseteq f)[\theta \text{ е крайна } \& \ \Gamma(\theta)(x) = y]]. \tag{1.4}$$

Нека f е не е крайна функция. Тогава е ясно, че за всяко $x \in \mathbb{N}_{\perp}$, $\Gamma(f)(x) = 1$. От друга страна, понеже θ е крайна, $\Gamma(\theta)(x) = \perp$ за всяко $x \in \mathbb{N}_{\perp}$. Така видяхме, че ако f не е крайна, то за произволна $\theta \sqsubseteq f$ и произволно $x \in \mathbb{N}_{\perp}$, $\Gamma(\theta)(x) \neq 1$. От това следва, че Формула (1.4) не е изпълнена и тогава Γ не е компактен оператор.

□

Задача 1.8. Нека е даден следния оператор $\Gamma : \mathcal{F}_2^{\perp} \to \mathcal{F}_2^{\perp}$:

$$\Gamma(f)(x, y) = \begin{cases} y, & x = 0 \\ f(x, f(x-1, y)), & x > 0 \\ \perp, & x = \perp. \end{cases}$$

а) Докажете, че Γ е компактен оператор.

б) Намерете $\mathtt{lfp}(\Gamma)$.

в) Има ли Γ други неподвижни точки ?

Задача 1.9. Монотонен ли е операторът $\Gamma : [\mathbb{N}_{\perp} \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_{\perp}] \to \mathbb{N}_{\perp}$, където:

$$\Gamma(f) = \begin{cases} n, & |Dom(f)| = n \\ \perp, & |Dom(f)| = \infty \end{cases}$$

Задача 1.10. Какви свойства има оператора $\Gamma : \mathcal{F}_1^{\perp} \times \mathcal{F}_1^{\perp} \to \mathcal{F}_1^{\perp}$, където:

$$\Gamma(f, g)(x) = \begin{cases} g(x), & f \sqsubseteq g \\ f(x), & g \sqsubseteq f \ \& \ f \not\sqsubseteq g \\ \perp, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Задача 1.11. Нека разгледаме $f \in [\mathbb{N}_{\perp} \xrightarrow{\text{м}} \mathbb{N}_{\perp}]$. Съобразете, че $\mathtt{lfp}(f) = f(\perp)$. [**?**, стр. 122]

Задача 1.12. Знаем, че всяко изображение $f \in [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{A}]$ притежава най-малка неподвижна точка.

- Вярно ли е, че съществуват изображения от вида $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, които са монотонни, *не* са непрекъснати, но въпреки това притежават най-малка неподвижна точка? [**?**, стр. 131]

- Вярно ли е, че съществуват изображения от вида $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, които са не са монотонни, но въпреки това притежават най-малка неподвижна точка?

Дайте примери за такава области на Скот $\mathcal{A}$ и изображения $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Обосновете заключенията си.

Глава 2

Допълнителни свойства на областите на Скот

2.1 Област на Скот от непрекъснати изображения

Следващата теорема е важна, защото с нейна помощ се доказват много свойства на непрекъснатите изображения.

[?, стр. 127]
[?, стр. 178]

Теорема 2.1. Нека $\mathcal{A} = (A, \sqsubseteq, \perp)$ да бъде област на Скот и нека множеството

$$E = \{a_{m,n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

от елементи на A притежава свойството, че

$$n \leq n' \ \& \ m \leq m' \ \Rightarrow \ a_{n,m} \sqsubseteq a_{n',m'}.$$

Тогава множеството E има точна горна граница, която означаваме с $\bigsqcup E$, и са изпълнени равенствата

$$\bigsqcup E = \bigsqcup_m (\bigsqcup_n a_{n,m}) = \bigsqcup_n (\bigsqcup_m a_{n,m}) = \bigsqcup_n a_{n,n}.$$

Доказателство. Първо ще въведем някои означения.

- Да фиксираме произволно m. Тогава можем да подредим елементите на множеството $\{a_{n,m} \mid n \in \mathbb{N}\}$ във възходящ ред:

  $$a_{0,m} \sqsubseteq a_{1,m} \sqsubseteq a_{2,m} \sqsubseteq \cdots$$

  Следователно тя има точна горна граница $b_m \stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup\{a_{n,m} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

По дефиниция, всяка монотонно растяща редица в област на Скот притежава точна горна граница.

- Аналогично, при фиксирано n, можем да подредим елементите на множеството $\{a_{n,m} \mid m \in \mathbb{N}\}$ в монотонно растяща редица:

  $$a_{n,0} \sqsubseteq a_{n,1} \sqsubseteq a_{n,2} \sqsubseteq \ldots,$$

  която притежава точна горна граница $c_n \stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup\{a_{n,m} \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Това означава, че трябва да докажем следното:

$$\bigsqcup E = \bigsqcup_m b_m = \bigsqcup_n c_n = \bigsqcup_n a_{n,n}.$$

1) Първо да съобразим, че множеството $\{b_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ образува верига в $\mathcal{A}$ и следователно притежава точна горна граница $\bigsqcup_m b_m$. Нека да разгледаме произволни $m \leq m'$. Тогава
$$(\forall n)[a_{n,m} \sqsubseteq a_{n,m'} \sqsubseteq \bigsqcup_k a_{k,m'} = b_{m'}].$$
Следователно $b_{m'}$ е горна граница на веригата $(a_{n,m})_{n=0}^{\infty}$ и понеже b_m е точна горна граница на $(a_{n,m})_{n=0}^{\infty}$, то получаваме, че
$$b_m \sqsubseteq b_{m'}.$$
Това означава, че $(b_m)_{m=0}^{\infty}$ е верига в $\mathcal{A}$ и тя притежава точна горна граница $\bigsqcup_m b_m$.

2) С подобни разсъждения можем да докажем, че множеството $\{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ образува верига в $\mathcal{A}$, която притежава точна горна граница $\bigsqcup_n c_n$.

3) Сега ще докажем, че
$$\bigsqcup_m b_m = \bigsqcup_n c_n.$$
Имаме, че
$$(\forall m)(\forall n)[a_{n,m} \sqsubseteq \bigsqcup_n a_{n,m} = b_m \sqsubseteq \bigsqcup_m b_m],$$
което е еквивалентно на
$$(\forall n)(\forall m)[a_{n,m} \sqsubseteq b_m \sqsubseteq \bigsqcup_m b_m].$$
Да фиксираме произволно n. Тогава $\bigsqcup_m b_m$ е горна граница на веригата $(a_{n,m})_{m=0}^{\infty}$. Следователно, $c_n = \bigsqcup_m a_{n,m} \sqsubseteq \bigsqcup_m b_m$. Така получаваме, че $\bigsqcup_m b_m$ е горна граница и на веригата $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ и тогава
$$\bigsqcup_n c_n \sqsubseteq \bigsqcup_m b_m.$$
С аналогични разсъждения можем да докажем също, че
$$\bigsqcup_m b_m \sqsubseteq \bigsqcup_n c_n.$$
Така доказахме, че
$$\bigsqcup_m b_m = \bigsqcup_n c_n.$$

4) Сега ще докажем, че
$$\bigsqcup E = \bigsqcup_m b_m.$$
За целта ще проверим следното:

   а) $\bigsqcup_m b_m$ е горна граница на E.
   б) Ако d е друга горна граница на E, то $\bigsqcup_m b_m \sqsubseteq d$.

- $\bigsqcup_m b_m$ е горна граница на E, защото
$$(\forall m)(\forall n)[a_{n,m} \sqsubseteq b_m \sqsubseteq \bigsqcup_m b_m].$$

- Нека d е друга горна граница на E, т.е.

$$(\forall m)(\forall n)[a_{n,m} \sqsubseteq d].$$

Да фиксираме произволно m. Тогава d е горна граница на веригата $(a_{n,m})_{n=0}^{\infty}$. Това означава, че $b_m = \bigsqcup_n a_{n,m} \sqsubseteq d$. Получаваме, че d е горна граница на веригата $(b_m)_{m=0}^{\infty}$, откъдето следва, че $\bigsqcup_m b_m \sqsubseteq d$.

Заключаваме, че $\bigsqcup_m b_m$ е точната горна граница на E. Обобщавайки всичко от по-горе, следва, че:

$$\bigsqcup E = \bigsqcup_m b_m = \bigsqcup_n c_n.$$

5) Остана да видим, че

$$\bigsqcup E = \bigsqcup_n a_{n,n}.$$

- Да разгледаме произволен елемент $a_{n,m} \in E$. Нека $k = \max\{n, m\}$. Ясно е, че $a_{n,m} \sqsubseteq a_{k,k} \sqsubseteq \bigsqcup_n a_{n,n}$. Следователно, $\bigsqcup_n a_{n,n}$ е горна граница на E, откъдето получаваме

$$\bigsqcup E \sqsubseteq \bigsqcup_n a_{n,n}.$$

- Нека d е горна граница на E. Тогава $(\forall n)(\forall m)[a_{n,m} \sqsubseteq d]$ и в частност, $(\forall n)[a_{n,n} \sqsubseteq d]$. Сега можем да заключим, че $\bigsqcup_n a_{n,n} \sqsubseteq d$.

Така доказахме, че $\bigsqcup_n a_{n,n}$ е точна горна граница на E.

С това доказателството на теоремата е завършено. □

Лема 2.1. Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са области на Скот. Нека $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ е верига от елементи на $[\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{B}]$. Да дефинираме изображението h на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ по следния начин

$$h(a) \overset{\text{деф}}{=} \bigsqcup\{f_k(a) \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Изображението h е *непрекъснато* и е *точна горна граница* на веригата $(f_k)_{k=0}^{\infty}$, т.е. $h = \bigsqcup_k f_k$.

Доказателство. Доказателството, че h е точна горна граница на веригата $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ е лесно.

Ако $b_k = f_k(a)$, то $h(a)$ е точната горна граница на веригата $(b_k)_{k=0}^{\infty}$ в $\mathcal{B}$

- Да разгледаме произволен елемент $a \in A$. Лесно се вижда, че понеже $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ е верига, то $(f_k(a))_{k=0}^{\infty}$ също е верига. Това е така, защото всяко непрекъснато изображение е също така и монотонно.

  $\bigsqcup_n f_n(a)$ е съкратен запис за $\bigsqcup\{f_n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

  Получаваме, че за всяко k, $f_k(a) \sqsubseteq^{\mathcal{B}} \bigsqcup_n f_n(a) \overset{\text{деф}}{=} h(a)$. Понеже това е вярно за произволно $a \in A$, $(\forall k)[f_k \sqsubseteq h]$, което означава, че h е горна граница на веригата.

- Да разгледаме произволно изображение g, което е горна граница на веригата $(f_k)_{k=0}^{\infty}$. За произволен елемент $a \in A$,

$$(\forall k)[f_k(a) \sqsubseteq^{\mathcal{B}} g(a)].$$

Това означава, че $g(a)$ е горна граница на веригата $(f_k(a))_{k=0}^{\infty}$. Понеже $h(a) = \bigsqcup_k\{f_k(a)\}$ е точната горна граница на веригата $(f_k(a))_{k=0}^{\infty}$, то $h(a) \sqsubseteq^{\mathcal{B}} g(a)$. Оттук следва, че $h \sqsubseteq g$.

По-сложната част от доказателството е проверката, че h е непрекъснато изображение. Да вземем една монотонно растяща редица $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ от елементи на A. Ще докажем, че

За момента дори не е ясно дали $\{h(a_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ е верига в $\mathcal{B}$

$$h(\bigsqcup_k a_k) = \bigsqcup_k\{h(a_k)\}.$$

Нека $e_{n,m} \stackrel{\text{деф}}{=} f_n(a_m)$. Понеже всяко f_n е непрекъснато и следователно монотонно изображение, то имаме

$$n \leq n' \ \&\ m \leq m' \ \Rightarrow\ e_{n,m} \sqsubseteq^{\mathcal{B}} e_{n',m'}.$$

Следователно,

$$\begin{aligned}
h(\bigsqcup_m a_m) &= \bigsqcup_n(f_n(\bigsqcup_m a_m)) && \text{// от деф. на } h\\
&= \bigsqcup_n(\bigsqcup_m f_n(a_m)) && \text{// защото } f_n \text{ е непр.}\\
&= \bigsqcup_n(\bigsqcup_m e_{n,m}) = \bigsqcup_m(\bigsqcup_n e_{n,m}) && \text{// от \textit{Теорема} 2.1}\\
&= \bigsqcup_m(\bigsqcup_n f_n(a_m)) && \text{// от деф. на } e_{n.m}\\
&= \bigsqcup_m\{h(a_m)\}. && \text{// от деф. на } h
\end{aligned}$$

□

Да напомним, че релацията $\sqsubseteq$ между две изображения е дефинирана като

$$f \sqsubseteq g \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall a \in A)[f(a) \sqsubseteq^{\mathcal{B}} g(a)].$$

Следствие 2.1. $([\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{B}], \sqsubseteq, \perp)$ е област на Скот.

Нека $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ и $\mathcal{A}$ са области на Скот и да разгледаме $f : \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}$. Казваме, че f е **непрекъснато изображение по i-тия аргумент**, ако за всяка верига $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ в $\mathcal{A}_i$, то

$$f(b_1, \ldots, b_{i-1}, \bigsqcup_k a_k, b_{i+1}, \ldots, b_n) = \bigsqcup_k f(b_1, \ldots, b_{i-1}, a_k, b_{i+1}, \ldots, b_n).$$

Твърдение 2.1. Нека $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ и $\mathcal{A}$ са области на Скот. Едно изображение $f : \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}$ е непрекъснато точно тогава, когато f е непрекъснато по всеки от аргументите си.

Доказателство. За по-просто изложение, да разгледаме случая $n = 2$.

✍ Обобщете това твърдение за $n > 2$.

($\Rightarrow$) Лесно се съобразява, че ако f е непрекъснато изображение, то f е непрекъснато по всеки от аргументите си.

($\Leftarrow$) Нека сега f е непрекъснато по всеки от аргументите си. Ще докажем, че f е непрекъснато. Нека $\{\langle a_n, b_n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ е верига в $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Понеже от *Твърдение* 1.2 знаем, че

$$\bigsqcup_n \langle a_n, b_n\rangle = \langle \bigsqcup_n a_n, \bigsqcup_n b_n\rangle,$$

ще докажем, че

$$\bigsqcup_n f(a_n, b_n) = f(\bigsqcup_n a_n, \bigsqcup_n b_n).$$

Да положим $e_{n,m} = f(a_n, b_m)$. Понеже f е непрекъснато по всеки от аргументите си, лесно се вижда, че f е монотонно изображение по всеки от аргументите си. Следователно,

$$n \leq n' \ \& \ m \leq m' \ \Rightarrow \ e_{n,m} \sqsubseteq e_{n',m'}.$$

Получаваме, че

$$\begin{aligned}
\bigsqcup_n f(a_n, b_n) &= \bigsqcup_n e_{n,n} && \text{// от опр. на } e_{n,m}\\
&= \bigsqcup_n (\bigsqcup_m e_{n,m}) && \text{// от } \textit{Теорема } 2.1\\
&= \bigsqcup_n (\bigsqcup_m f(a_n, b_m)) && \text{// от опр. на } e_{n,m}\\
&= \bigsqcup_n f(a_n, \bigsqcup_m b_m) && \text{// } f \text{ е непр. по втория си аргумент}\\
&= f(\bigsqcup_n a_n, \bigsqcup_m b_m) && \text{// } f \text{ е непр. по първия си аргумент.}
\end{aligned}$$

□

2.2 Оператор за най-малка неподвижна точка

Теорема 2.2. Нека $\mathcal{A}$ е област на Скот и нека $f \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$. Тогава изображението $Y_{\mathcal{A}} : [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}] \to \mathcal{A}$, определено като

$$Y_{\mathcal{A}}(f) = \mathtt{lfp}(f),$$

е непрекъснато, т.е. $Y_{\mathcal{A}} \in [[\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}] \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$.

Знаем от *Теорема* 1.5, че най-малката неподвижна точка на f е елемента $\bigsqcup_n f^n(\perp^{\mathcal{A}})$.

Доказателство. Нека да вземем една верига $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ от непрекъснати изображения. Нашата цел е да докажем, че

$$Y_{\mathcal{A}}(\bigsqcup_n f_n) = \bigsqcup_n Y_{\mathcal{A}}(f_n).$$

Да означим с h точната горна граница на $(f_n)_{n=0}^{\infty}$. Знаем, че $h(a) = \bigsqcup_n f_n(a)$.

Твърдение 2.2. За всяко $k \geq 1$, $h^k(a) = \bigsqcup_n f_n^k(a)$.

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по k, като случая $k = 1$ следва от дефиницията на h. Нека приемем, че твърдението е вярно за произволно $k \geq 1$. Ще докажем, че твърдението е вярно за $k + 1$.

$$h^{k+1}(a) = h(h^k(a))$$

$$
\begin{aligned}
&= h(\bigsqcup_n f_n^k(a)) && \text{// от инд. предположение}\\
&= \bigsqcup_n h(f_n^k(a)) && \text{// } h \text{ е непрекъснато изображение}\\
&= \bigsqcup_n (\bigsqcup_m f_m(f_n^k(a))).
\end{aligned}
$$

Да положим $b_n = f_n^k(a)$, за всяко n. Понеже $f_n \sqsubseteq f_{n'}$, лесно се съобразява, че за $n \leq n'$ имаме $b_n \sqsubseteq^{\mathcal{A}} b_{n'}$.

Сега да положим $e_{m,n} = f_m(b_n)$. Отново, понеже $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ и $(f_m)_{m=0}^{\infty}$ са вериги, имаме

$$m \leq m' \;\&\; n \leq n' \;\Rightarrow\; e_{m,n} \sqsubseteq^{\mathcal{A}} e_{m',n'}.$$

Това означава, че можем да приложим *Теорема* 2.1 за множеството $E = \{e_{m,n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Получаваме, че

$$
\begin{aligned}
h^{k+1}(a) &= \bigsqcup_n (\bigsqcup_m f_m(f_n^k(a))) && \text{// от горното равенство}\\
&= \bigsqcup_n (\bigsqcup_m e_{m,n}) && \text{// от определението на } e_{m,n}\\
&= \bigsqcup_n e_{n,n} && \text{// от } \textit{Теорема } 2.1\\
&= \bigsqcup_n f_n(f_n^k(a)) = \bigsqcup_n f_n^{k+1}(a)
\end{aligned}
$$

С това твърдението е доказано. $\square$

Сега вече сме готови да докажем непрекъснатостта на $Y_{\mathcal{A}}$. Имаме, че:

$$
\begin{aligned}
Y_{\mathcal{A}}(\bigsqcup_n f_n) &= Y_{\mathcal{A}}(h) && \text{// от опр. на } h\\
&= \bigsqcup_m h^m(\perp^{\mathcal{A}}) && \text{// от опр. на } Y_{\mathcal{A}}\\
&= \bigsqcup_m (\bigsqcup_n f_n^m(\perp^{\mathcal{A}})) && \text{// от горното твърдение.}
\end{aligned}
$$

Да положим $e_{m,n} = f_n^m(\perp^{\mathcal{A}})$. Отново лесно се съобразява, че

$$m \leq m' \;\&\; n \leq n' \;\Rightarrow\; e_{m,n} \sqsubseteq^{\mathcal{A}} e_{m',n'}.$$

Получаваме, че

$$
\begin{aligned}
Y_{\mathcal{A}}(\bigsqcup_n f_n) &= \bigsqcup_m (\bigsqcup_n f_n^m(\perp^{\mathcal{A}})) && \text{// от горното равенство}\\
&= \bigsqcup_m (\bigsqcup_n e_{m,n}) && \text{// от опр. на } e_{m,n}\\
&= \bigsqcup_n (\bigsqcup_m e_{m,n}) && \text{// от } \textit{Теорема } 2.1\\
&= \bigsqcup_n (\bigsqcup_m f_n^m(\perp^{\mathcal{A}})) = \bigsqcup_n Y_{\mathcal{A}}(f_n). && \text{// от опр. на } Y_{\mathcal{A}}.
\end{aligned}
$$

$\square$

2.3 Изоморфни области на Скот

Нека $\mathcal{A}_1 = (A_1,\ \sqsubseteq_1,\ \perp_1)$ и $\mathcal{A}_2 = (A_2,\ \sqsubseteq_2\ ,\ \perp_2)$ са области на Скот. Ще казваме, че $\mathcal{A}_1$ е **изоморфна** на $\mathcal{A}_2$, което ще означаваме като

$$\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2,$$

ако съществува *биективна* функция $F : A_1 \to A_2$ със свойството:

Ясно е, че $F(\perp_1) = \perp_2$

$$(\forall a, b \in A_1)[\ a \sqsubseteq_1 b \iff F(a) \sqsubseteq_2 F(b)\ ].$$

В такъв случай ще казваме, че F задава изоморфизъм между $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$.

Когато искаме да означим, че $\mathcal{A}_1$ е изоморфна на $\mathcal{A}_2$ чрез F, то понякога ще пишем $\mathcal{A}_1 \cong_F \mathcal{A}_2$.

Твърдение 2.3. Ако $\mathcal{A}_1 \cong_F \mathcal{A}_2$, то $F \in [\mathcal{A}_1 \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}_2]$.

Упътване. Да разгледаме произволна верига $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ от елементи на $\mathcal{A}_1$. Ще докажем, че

$$F(\bigsqcup_i a_i) = \bigsqcup_i F(a_i).$$

- Първо, от дефиницията веднага следва, че F е монотонно изображение, защото $a \sqsubseteq_1 b \implies F(a) \sqsubseteq_2 F(b)$. Това означава, че $(F(a_i))_{i=0}^{\infty}$ е монотонно растяща верига от елементи на $\mathcal{A}_2$. От *Твърдение* 1.6 получаваме, че

$$\bigsqcup_i F(a_i) \sqsubseteq_2 F(\bigsqcup_i a_i).$$

- За другата посока, нека $b \in \mathcal{A}_2$ е горна граница на веригата $(F(a_i))_{i=0}^{\infty}$, т.е.

$$(\forall i)[\ F(a_i) \sqsubseteq_2 b\ ].$$

Ще докажем, че $F(\bigsqcup_i a_i) \sqsubseteq_2 b$. Понеже F е *върху* A_2, то съществува елемент $a \in A_1$, такъв че $F(a) = b$. Тогава:

$$\begin{aligned}
(\forall i)[\ F(a_i) \sqsubseteq_2 F(a)\ ] &\implies (\forall i)[\ a_i \sqsubseteq_1 a\ ] && /\!/\ F \text{ е изоморфизъм}\\
&\implies \bigsqcup_i a_i \sqsubseteq_1 a && /\!/\ a \text{ е горна граница}\\
&\implies F(\bigsqcup_i a_i) \sqsubseteq_1 F(a). && /\!/\ F \text{ е изоморфизъм}
\end{aligned}$$

Понеже $b = F(a)$, заключаваме, че

$$F(\bigsqcup_i a_i) \sqsubseteq_2 b.$$

□

Твърдение 2.4. Нека $f \in [\mathcal{A}_1 \overset{\text{м}}{\to} \mathcal{A}_2]$ и $g \in [\mathcal{A}_2 \overset{\text{м}}{\to} \mathcal{A}_1]$, като

- $f \circ g = \mathtt{id}_2$;
- $g \circ f = \mathtt{id}_1$.

$\mathtt{id}_i(a) \stackrel{\text{деф}}{=} a$ за вс. $a \in \mathcal{A}_i$

Тогава са изпълнени свойствата:

(1) $\mathcal{A}_1 \cong_f \mathcal{A}_2$;

(2) $\mathcal{A}_2 \cong_g \mathcal{A}_1$;

Твърдение 2.5. Нека $\mathcal{A}_1 \cong_F \mathcal{A}_2$. Тогава:

(1) $[\mathcal{A}_1 \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}_1] \cong_G [\mathcal{A}_2 \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}_2]$, където

$$G(f) \stackrel{\text{деф}}{=} F \circ f \circ F^{-1};$$

Графично това може да се изобрази така:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_1 \arrow[r, "f"] & \mathcal{A}_1 \arrow[d, "F"] \\
\mathcal{A}_2 \arrow[u, "F^{-1}"] \arrow[r, dashed, "G(f)"] & \mathcal{A}_2
\end{tikzcd}$$

(2) ако $f \in [\mathcal{A}_1 \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}_1]$, то
$$F(\mathtt{lfp}(f)) = \mathtt{lfp}(G(f)).$$

Упътване. Ще докажем (1) като използвме *Твърдение* 2.4.

- Ще докажем, че G е монотонно изображение. Нека $f, h \in [\mathcal{A}_1 \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}_1]$ и $f \sqsubseteq h$, т.е.
$$(\forall a \in \mathcal{A}_1)[\ f(a) \sqsubseteq_1 h(a)\ ].$$
Ще докажем, че $G(f) \sqsubseteq G(h)$, т.е.
$$(\forall b \in \mathcal{A}_2)[\ G(f)(b) \sqsubseteq_1 G(h)(b)\ ].$$
Да разгледаме произволен елемент $b \in \mathcal{A}_2$. Понеже F е биекция, то съществува елемент $a \in A_1$, такъв че $F(a) = b$, т.е. $F^{-1}(b) = a$. Тогава:
$$\begin{aligned}
G(f)(b) &\stackrel{\text{деф}}{=} F(f(F^{-1}(b))) \\
&= F(f(a)) && /\!/\ F^{-1}(b) = a \\
&\sqsubseteq_2 F(h(a)) && /\!/\ f(a) \sqsubseteq h(a) \text{ и } F \text{ е изом.} \\
&= F(h(F^{-1}(b))) && /\!/\ F^{-1}(b) = a \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} G(h)(b).
\end{aligned}$$

- Нека $G(f) \sqsubseteq G(h)$. Ще докажем, че $f \sqsubseteq h$. За целта, нека $a \in A_1$. Понеже F е сюрективна, то съществува $b \in A_2$, за който $F^{-1}(b) = a$. Понеже
$$G(f) \stackrel{\text{деф}}{=} F \circ f \circ F^{-1} \sqsubseteq F \circ h \circ F^{-1} = G(h),$$
то получаваме, че
$$F(f(F^{-1}(b))) \sqsubseteq_2 F(h(F^{-1}(b))).$$
Оттук,
$$F(f(a)) \sqsubseteq_2 F(h(a)) \implies f(a) \sqsubseteq_1 h(a),$$
защото F е изоморфизъм.

Сега преминаваме към доказателството на (2). Да напомним, че за $f \in [\mathcal{A}_1 \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}_1]$, означаваме

$$\begin{aligned} f^0 &= \lambda x.\bot_1 \\ f^{n+1} &= f \circ f^n. \end{aligned}$$

Понеже f е непрекъснато изображение е ясно, че $(f^n(\bot_1))_{n=0}^{\infty}$ е верига. Също така знаем, че

$$\mathtt{lfp}(f) = \bigsqcup_n f^n(\bot_1).$$

След аналогични разсъждения можем да съобразим, че

$$\mathtt{lfp}(G(f)) = \bigsqcup_n G(f)^n(\bot_2).$$

Първо ще докажем с индукция по n, че

$$(\forall n)[\ (G(f))^n = G(f^n)\ ]. \tag{2.1}$$

- За $n = 0$ имаме, че за произволен елемент $b \in \mathcal{A}_2$,

$$\begin{aligned} (G(f))^0(b) &\overset{\text{деф}}{=} \bot_2 \\ &= F(\bot_1) && // \ F \text{ е изом.} \\ &= F(f^0(F^{-1}(b))) && // \ f^0(F^{-1}(b)) \overset{\text{деф}}{=} \bot_1 \\ &= (F \circ f^0 \circ F^{-1})(b) \\ &\overset{\text{деф}}{=} G(f^0)(b). \end{aligned}$$

- Нека да приемем, че твърдението е вярно за n. Тогава за $n+1$ имаме, че:

$$\begin{aligned} (G(f))^{n+1} &\overset{\text{деф}}{=} G(f) \circ (G(f))^n \\ &= G(f) \circ G(f^n) && // \ \text{от И.П.} \\ &\overset{\text{деф}}{=} (F \circ f \circ F^{-1}) \circ (F \circ f^n \circ F^{-1}) \\ &= F \circ f \circ (F^{-1} \circ F) \circ f^n \circ F^{-1} \\ &= F \circ f \circ f^n \circ F^{-1} && // \ F^{-1} \circ F = id \\ &= F \circ f^{n+1} \circ F^{-1} && // \ f \circ f^n = f^{n+1} \\ &\overset{\text{деф}}{=} G(f^{n+1}). \end{aligned}$$

Тогава:

$$\begin{aligned} F(\mathtt{lfp}(f)) &= F(\bigsqcup_n f^n(\bot_1)) && // \ \mathtt{lfp}(f) = \bigsqcup_n f^n(\bot_1) \\ &= \bigsqcup_n F(f^n(\bot_1)) && // \ F \text{ е непр.} \\ &= \bigsqcup_n F(f^n(F^{-1}(\bot_2))) && // \ F^{-1}(\bot_2) = \bot_1 \\ &= \bigsqcup_n (F \circ f^n \circ F^{-1})(\bot_2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup_n G(f^n)(\bot_2) \\
&= \bigsqcup_n G(f)^n(\bot_2) && \text{// от (2.1)} \\
&= \mathtt{lfp}(G(f)).
\end{aligned}
$$

□

Твърдение 2.6. За произволни области на Скот $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ е изпълнено, че

$$[\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} [\mathcal{B} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{C}]] \cong [\mathcal{A} \times \mathcal{B} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{C}].$$

Упътване. Докажете, че изображението

$$\mathtt{curry} : [\mathcal{A} \times \mathcal{B} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{C}] \to [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} [\mathcal{B} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{C}]],$$

където

$$\mathtt{curry}(f)(a)(b) \stackrel{\text{деф}}{=} f(a,b)$$

задава изоморфизъм. □

Забележка 2.1. Когато на хаскел пишем типовата сигнатура на някоя функция като

```
f :: a -> b -> c
```

в действителност се има предвид следното

```
f :: a -> (b -> c)
```

На практика тези две задачи ни казват, че няма значение дали използваме *curried* или *uncurried* версията на една функция. На хаскел е по-удобно да използваме *curried* версията, защото като фиксираме първия аргумент на една функция получаваме нова функция наготово. Например,

```
ghci> let plus x y = x + y
ghci> :t plus
plus :: Num a => a -> a -> a
ghci> let plus1 = plus 1
ghci> :t plus1
plus1 :: Num a => a -> a
```

Всъщност, хаскел има функциите `curry` и `uncurry` вградени в стандартната библиотека:

```
ghci> :t curry
curry :: ((a, b) -> c) -> a -> b -> c
ghci> :t uncurry
uncurry :: (a -> b -> c) -> (a, b) -> c
```

Задача 2.1. Докажете, че съществуват области на Скот $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, за които

$$[[\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{B}] \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{C}] \ncong [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} [\mathcal{B} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{C}]].$$

Точни продължения на частични функции

За една частична функция $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, определяме изображението $f^\star \in [\mathbb{N}^n_\perp \overset{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$ по следния начин:

$$f^\star(\overline{a}) \overset{\text{деф}}{=} \begin{cases} f(\overline{a}), & \text{ако } \perp \not\in \{a_1, \dots, a_n\} \ \&\ f(\overline{a}) \text{ е деф.} \\ \perp, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Изображението $f^\star$ се нарича **точно продължение** на f.

Пример 2.1. Да разгледаме частичната функция $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, дефинирана като $f(x, y) = x + y$. Тогава точното продължение на f е

$$f^\star(x, y) = \begin{cases} x + y, & x, y \in \mathbb{N} \\ \perp, & x = \perp \lor y = \perp. \end{cases}$$

Да дефинираме оператор $\Sigma^\star_n : [\mathbb{N}^n \overset{\text{ч}}{\to} \mathbb{N}] \to [\mathbb{N}^n_\perp \overset{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$ като

$$\Sigma^\star_n(f) = f^\star.$$

Ще наричаме $\Sigma^\star_n$ **продължаващ** оператор, защото на всяка частична функция дава нейното точно продължение.

Теорема 2.3. За всяко естествено число n,

$$[\mathbb{N}^n \overset{\text{ч}}{\to} \mathbb{N}] \cong [\mathbb{N}^n_\perp \overset{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$$

чрез изображението $\Sigma^\star_n$.

Упътване.

- Лесно се съобразява, че $\Sigma^\star_n$ е биективна функция на $[\mathbb{N}^n \overset{\text{ч}}{\to} \mathbb{N}]$ върху $[\mathbb{N}^n_\perp \overset{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$.
- Лесно се проверява също, че $f \subseteq g \iff \Sigma^\star_n(f) \sqsubseteq \Sigma^\star_n(g)$.

$\square$

Следствие 2.2. $\Sigma^\star_n$ е непрекъснато изображение, т.е.

$$\Sigma^\star \in [[\mathbb{N}^n \overset{\text{ч}}{\to} \mathbb{N}] \overset{\text{н}}{\to} [\mathbb{N}^n_\perp \overset{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp]].$$

Пример 2.2. Да разгледаме следната рекурсивна програма `P`:

```
f(x, y) = if x == y then 0
             else 1 + f(x, y + 1)
```

Ако искаме да намерим $\mathcal{D}_V[\![\mathtt{P}]\!](x, y)$, то формално погледнато трябва да намерим най-малката неподвижна точка на оператора

$$\Delta \in [[\mathbb{N}^2_\perp \overset{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp] \overset{\text{н}}{\to} [\mathbb{N}^2_\perp \overset{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp]],$$

където

$$\Delta(g)(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x, y \in \mathbb{N} \ \&\ x = y \\ 1 + g(x, y + 1), & \text{ако } x, y, \in \mathbb{N} \ \&\ x \neq y \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \ \lor \ y = \perp. \end{cases}$$

Лесно се съобразява, че

$$\mathcal{D}_V[\![\mathrm{P}]\!](a,b) = \mathtt{lfp}(\Delta)(a,b) = \begin{cases} a-b, & \text{ако } a,b \in \mathbb{N} \ \& \ a \geq b \\ \perp, & \text{иначе} \end{cases}$$

В някои отношения е по-лесно да подходим по друг начин. Да разглеждаме оператора

$$\Gamma \in [[\mathbb{N}^2 \xrightarrow{\text{ч}} \mathbb{N}] \xrightarrow{\text{н}} [\mathbb{N}^2 \xrightarrow{\text{ч}} \mathbb{N}]],$$

където

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 0, & \text{ако } x = y \\ 1 + f(x, y+1), & \text{ако } x \neq y. \end{cases}$$

Лесно се съобразява, че

$$\mathtt{lfp}(\Gamma)(n,k) \simeq \begin{cases} n-k, & \text{ако } n \geq k \\ \neg !, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Понеже $\Sigma_2^\star$ задава изоморфизъм между областите на Скот $[\mathbb{N}^2 \xrightarrow{\text{ч}} \mathbb{N}]$ и $[\mathbb{N}_\perp^2 \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp]$, то от *Твърдение* 2.5 имаме, че

$$[[\mathbb{N}^2 \xrightarrow{\text{ч}} \mathbb{N}] \xrightarrow{\text{н}} [\mathbb{N}^2 \xrightarrow{\text{ч}} \mathbb{N}]] \cong_{\mathcal{G}} [[\mathbb{N}_\perp^2 \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp] \xrightarrow{\text{н}} [\mathbb{N}_\perp^2 \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp]],$$

където

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \Sigma_2^\star \circ \Gamma \circ (\Sigma_2^\star)^{-1}.$$

Графично това може да се представи така:

$$\begin{tikzcd} {[\mathbb{N}^n \xrightarrow{\text{ч}} \mathbb{N}]} \arrow[r, "\Gamma"] & {[\mathbb{N}^n \xrightarrow{\text{ч}} \mathbb{N}]} \arrow[d, "\Sigma_2^\star"] \\ {[\mathbb{N}_\perp^n \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp]} \arrow[u, "(\Sigma_2^\star)^{-1}"] \arrow[r, dashed, "\mathcal{G}(\Gamma)"] & {[\mathbb{N}_\perp^n \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp]} \end{tikzcd}$$

Сега директно получаваме, че

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_V[\![\mathrm{P}]\!] &\stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{lfp}(\Delta) \\ &= \Sigma_2^\star(\mathtt{lfp}(\Gamma)), \end{aligned}$$

защото $\Delta = \mathcal{G}(\Gamma)$ и от *Твърдение* 2.5 знаем, че

$$\mathtt{lfp}(\mathcal{G}(\Gamma)) = \Sigma_2^\star(\mathtt{lfp}(\Gamma)).$$

2.4 Задачи

Тук с $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ ще означаваме области на Скот.

Много от задачите са от [?, стр. 31]

Задача 2.2. Да разгледаме операторите

$$\Gamma, \Delta \in [[\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{A}] \xrightarrow{\text{н}} [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{A}]].$$

Знаем, че операторът $\Gamma \circ \Delta$ е непрекъснат, където

$$(\Gamma \circ \Delta)(f) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma(\Delta(f)).$$

Вярно ли е, че

$$\mathtt{lfp}(\Gamma \circ \Delta) \sqsubseteq \mathtt{lfp}(\Gamma) \circ \mathtt{lfp}(\Delta)?$$

Обосновете се!

Упътване. Нека $\mathcal{A} = \mathbb{N}_\perp$. Нека например да разгледаме

$$\Delta(f)(x) \stackrel{\text{деф}}{=} f(x+1)$$
$$\Gamma(f)(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{cases} 0, & x \neq \perp \\ \perp, & x = \perp. \end{cases}$$

Да положим $f_\Gamma \stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{lfp}(\Gamma)$ и $f_\Delta \stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{lfp}(\Delta)$. Ясно е, че

$$f_\Delta(x) = \perp$$
$$f_\Gamma(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \perp \\ \perp, & x = \perp. \end{cases}$$

Тогава за произволно $x \in \mathbb{N}_\perp$,

$$(f_\Gamma \circ f_\Delta)(x) = f_\Gamma(f_\Delta(x)) = f_\Gamma(\perp) = \perp.$$

От друга страна, понеже $(\Gamma \circ \Delta)(f) = \Gamma(\Delta(f))$, то

$$(\Gamma \circ \Delta)(f)(x) = \Gamma(\Delta(f))(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \perp \\ \perp, & x = \perp. \end{cases}$$

Лесно се съобразява, че

$$\mathtt{lfp}(\Gamma \circ \Delta)(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \perp \\ \perp, & x = \perp. \end{cases}$$

Заключаваме, че

$$\mathtt{lfp}(\Gamma \circ \Delta) \sqsupset \mathtt{lfp}(\Gamma) \circ \mathtt{lfp}(\Delta).$$

$\square$

Задача 2.3. Да разгледаме операторите

$$\Gamma, \Delta \in [[\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}] \stackrel{\text{н}}{\to} [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]].$$

Знаем, че операторът $\Gamma \circ \Delta$ е непрекъснат, където

$$(\Gamma \circ \Delta)(f) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma(\Delta(f)).$$

Вярно ли е, че

$$\mathtt{lfp}(\Gamma \circ \Delta) \sqsupseteq \mathtt{lfp}(\Gamma) \circ \mathtt{lfp}(\Delta)?$$

Обосновете се!

Упътване. Нека $\mathcal{A} = \mathbb{N}_\perp$. Нека например да разгледаме

$$\Delta(f)(x) \stackrel{\text{деф}}{=} 0$$
$$\Gamma(f)(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \perp, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Да положим $f_\Gamma \stackrel{\text{деф}}{=} \texttt{lfp}(\Gamma)$ и $f_\Delta \stackrel{\text{деф}}{=} \texttt{lfp}(\Delta)$. Ясно е, че

$$f_\Delta(x) = 0$$
$$f_\Gamma(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \bot, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогава за произволно $x \in \mathbb{N}_\bot$,

$$(f_\Gamma \circ f_\Delta)(x) = f_\Gamma(f_\Delta(x)) = f_\Gamma(0) = 0.$$

От друга страна, понеже $(\Gamma \circ \Delta)(f) = \Gamma(\Delta(f))$, то

$$(\Gamma \circ \Delta)(f)(x) = \Gamma(\Delta(f))(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \bot, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лесно се съобразява, че

$$\texttt{lfp}(\Gamma \circ \Delta)(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \bot, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заключаваме, че

$$\texttt{lfp}(\Gamma \circ \Delta) \sqsubset \texttt{lfp}(\Gamma) \circ \texttt{lfp}(\Delta).$$

$\square$

Задача 2.4. Нека $f_0 \sqsubseteq f_1 \sqsubseteq f_2 \sqsubseteq \cdots$ е верига от елементи на $[\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$. Да положим $h = \bigsqcup_n f_n$. Вярно ли е, че

$$h \circ h = \bigsqcup_n (f \circ f)?$$

Обосновете се!

Задача 2.5. Да разгледаме едно изображение $f : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. За произволно $a \in \mathcal{A}$, дефинираме изображението $g_a : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, където

$$g_a(b) \stackrel{\text{деф}}{=} f(a, b).$$

Аналогично, за произволно $b \in \mathcal{B}$, дефинираме изображението $h_b : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, където

$$h_b(a) \stackrel{\text{деф}}{=} f(a, b).$$

Докажете, че следните твърдения са еквивалентни:

1) f е непрекъснато изображение;

2) g_a и h_b са непрекъснати изображения, за всяко $a \in \mathcal{A}$ и $b \in \mathcal{B}$.

Задача 2.6. Да разгледаме $f \in [\mathcal{A} \times \mathcal{B} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]$. За произволно $a \in \mathcal{A}$, дефинираме изображението $g_a : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, където

$$g_a(b) \stackrel{\text{деф}}{=} f(a, b).$$

Вече знаем, че $g_a \in [\mathcal{B} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]$, за всяко $a \in \mathcal{A}$. Да разгледаме изображението $h : \mathcal{A} \to [\mathcal{B} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]$, където

$$h(a) \stackrel{\text{деф}}{=} g_a.$$

Докажете, че h е непрекъснато изображение.

[?, стр. 129]

Задача 2.7. Да разгледаме $f \in [\mathcal{A} \times \mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{B}]$. За произволно $a \in \mathcal{A}$, дефинираме изображението $g_a : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, където

$$g_a(b) \overset{\text{деф}}{=} f(a, b).$$

Вече знаем, че $g_a \in [\mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{B}]$, за всяко $a \in \mathcal{A}$, следователно $\texttt{lfp}(g_a)$ съществува. Да разгледаме изображението $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, където

$$h(a) \overset{\text{деф}}{=} \texttt{lfp}(g_a).$$

Докажете, че h е непрекъснато изображение.

Задача 2.8. Да разгледаме $f \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} [\mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]]$. За произволно $a \in \mathcal{A}$, дефинираме изображението $g_a \in [\mathcal{B} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]$, където

$$g_a(b) \overset{\text{деф}}{=} f(a).$$

Да разгледаме изображението $h : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, където

$$h(a, b) \overset{\text{деф}}{=} g_a(b).$$

Докажете, че h е непрекъснато изображение.

Задача 2.9. Нека са дадени областите на Скот $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ и изображението

$$\texttt{eval} : [\mathcal{D} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{E}] \times \mathcal{D} \to \mathcal{E},$$

където

$$\texttt{eval}(f, d) \overset{\text{деф}}{=} f(d).$$

Докажете, че `eval` е непрекъснато изображение.

Упътване. Понеже $\bigsqcup_n (f_n, d_n) = (\bigsqcup_m f_m, \bigsqcup_n d_n)$, ще докажем, че

$$\texttt{eval}(\bigsqcup_m f_m, \bigsqcup_n d_n) = \bigsqcup_n \texttt{eval}(f_n, d_n).$$

Знаем, че

$$\begin{aligned}
\texttt{eval}(\bigsqcup_m f_m, \bigsqcup_n d_n) &= (\bigsqcup_m f_m)(\bigsqcup_n d_n) && (\text{от опр. на } \texttt{eval}) \\
&= \bigsqcup_m (f_m(\bigsqcup_n d_n)) && (\text{от опр. на } \bigsqcup_m f_m) \\
&= \bigsqcup_m (\bigsqcup_n (f_m(d_n)) && (\text{всяка } f_m \text{ е непр.})
\end{aligned}$$

Нека да положим $e_{m,n} = f_m(d_n)$. Лесно се съобразява, че

$$m \leq m' \ \&\ n \leq n' \ \Rightarrow \ e_{m,n} \sqsubseteq^{\mathcal{E}} e_{m',n'}.$$

Така получаваме, че

$$\texttt{eval}(\bigsqcup_m f_m, \bigsqcup_n d_n) = \bigsqcup_m (\bigsqcup_n (f_m(d_n)) \qquad (\text{от по-горе})$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigsqcup_{m,n} e_{m,n} = \bigsqcup_{n} e_{n,n} && (\text{от } \textit{Теорема } 2.1)\\
&= \bigsqcup_{n} f_n(d_n) && (\text{ от опр. на } e_{m,n})\\
&= \bigsqcup_{n} \mathtt{eval}(f_n, d_n).
\end{aligned}
$$

$\square$

Задача 2.10. Нека изображението

$$\mathtt{comp} : ([\mathcal{B} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{C}] \times [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{B}]) \to [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]$$

е определено като

$$\mathtt{comp}(g, f) \stackrel{\text{деф}}{=} g \circ f.$$

Докажете, че `comp` е непрекъснато изображение.

$(g \circ f)(a) = g(f(a))$

Упътване. Трябва да докажем, че за всяка монотонно растяща редица $\{(g_n, f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$,

[?, стр. 124]

$$\Gamma(\bigsqcup_n (g_n, f_n))(a) = \bigsqcup_n \Gamma(g_n, f_n)(a),$$

за произволно $a \in A$. Да фиксираме едно $a \in A$ и да положим $g_n(f_k(a)) = e_{n,k}$. Лесно се вижда, че

$$n \le n' \ \&\ k \le k' \ \Rightarrow\ e_{n,k} \sqsubseteq e_{n',k'}.$$

Тогава:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\bigsqcup_n (g_n, f_n))(a) &= \Gamma(\bigsqcup_n g_n, \bigsqcup_k f_k)(a)\\
&= (\bigsqcup_n g_n)(\bigsqcup_k f_k(a)) && (\text{ по деф. на } \Gamma)\\
&= (\bigsqcup_n g_n)(\bigsqcup_k b_k) && (\text{ полагаме } b_k = f_k(a))\\
&= \bigsqcup_k (\bigsqcup_n g_n)(b_k) && (\bigsqcup_n g_n \text{ е непр.})\\
&= \bigsqcup_k (\bigsqcup_n g_n(b_k)) && (\text{ по деф. на } \bigsqcup_n g_n)\\
&= \bigsqcup_k (\bigsqcup_n g_n(f_k(a))) && (\text{ полагаме } e_{n,k} = g_n(f_k(a)))\\
&= \bigsqcup_k \bigsqcup_n e_{n,k} = \bigsqcup_n e_{n,n} && (\text{ от } \textit{Теорема } 2.1)\\
&= \bigsqcup_n g_n(f_n(a)) = \bigsqcup_n \Gamma(g_n, f_n)(a).
\end{aligned}
$$

$\square$

Забележка 2.2. В хаскел има операция композиция на функции.

Когато пишем (.) означава, че операцията е инфиксна

```
ghci> :t (.)
(.) :: (b -> c) -> (a -> b) -> a -> c
```

[?, стр. 131]

Задача 2.11. Нека $f \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{B}]$ и $g \in [\mathcal{B} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$. Докажете, че

- $\mathtt{lfp}(g \circ f) \sqsubseteq g(\mathtt{lfp}(f \circ g))$;
- $f(\mathtt{lfp}(g \circ f)) \sqsubseteq \mathtt{lfp}(f \circ g)$.

Оттук заключете, че

$$\mathtt{lfp}(g \circ f) = g(\mathtt{lfp}(f \circ g)) \text{ и } f(\mathtt{lfp}(g \circ f)) = \mathtt{lfp}(f \circ g).$$

Задача 2.12. Нека $f \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$. Да разгледаме множеството

$$B = \{a \in \mathcal{A} \mid f(a) = a\}.$$

Вярно ли е, че

$$\mathcal{B} = (B, \sqsubseteq^{\mathcal{A}}, \mathtt{lfp}(f))$$

е област на Скот? Обосновете се!

Задача 2.13. Нека $f \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$. Да разгледаме множеството

$$B = \{a \in \mathcal{A} \mid f(a) \sqsubseteq a\}.$$

Вярно ли е, че

$$\mathcal{B} = (B, \sqsubseteq^{\mathcal{A}}, \mathtt{lfp}(f))$$

е област на Скот? Обосновете се!

Задача 2.14. Да разгледаме множеството

$$B = \{f \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{м}}{\to} \mathcal{A}] \mid f \circ f = f\}.$$

Вярно ли е, че

$$\mathcal{B} = (B,\ \sqsubseteq,\ \lambda x.\bot^{\mathcal{A}})$$

е област на Скот, където

$$f \sqsubseteq g \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall a \in \mathcal{A})[f(a) \sqsubseteq^{\mathcal{A}} g(a)]?$$

Обосновете се!

Задача 2.15. Да разгледаме множеството

$$B = \{f \in [\mathbb{N}_\bot \stackrel{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\bot] \mid f \circ f = f\}.$$

Вярно ли е, че

$$\mathcal{B} = (B,\ \sqsubseteq,\ \lambda x.\bot)$$

е област на Скот, където

$$f \sqsubseteq g \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall a \in \mathbb{N}_\bot)[f(a) \sqsubseteq g(a)]?$$

Обосновете се!

Задача 2.16. Нека $f \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{м}}{\to} \mathcal{B}]$ и $g \in [\mathcal{B} \stackrel{\text{м}}{\to} \mathcal{A}]$ имат свойствата:

- $f \circ g = id_{\mathcal{B}}$;

- $g \circ f = id_{\mathcal{A}}$.

Докажете, че f и g са точни и непрекъснати.

Задача 2.17. Да разгледаме областта на Скот

$$\mathcal{O} = (\{\bot, \top\}, \sqsubseteq, \bot),$$

където $\bot \sqsubseteq \top$. За произволна област на Скот $\mathcal{A}$ и елемент $a \in \mathcal{A}$, $a \neq \bot$, дефинираме изображенията:

а) $f_a : \mathcal{A} \to \mathcal{O}$, където

$$f_a(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{cases} \top, & a \sqsubseteq x \\ \bot, & a \not\sqsubseteq x. \end{cases}$$

Вярно ли е, че f_a е точно непрекъснато изображение? Обосновете се!

б) $\hat{f}_a : \mathcal{A} \to \mathcal{O}$, където

$$\hat{f}_a(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{cases} \bot, & a \sqsubseteq x \\ \top, & a \not\sqsubseteq x. \end{cases}$$

Вярно ли е, че $\hat{f}_a$ е точно непрекъснато изображение? Обосновете се!

в) $g_a : \mathcal{A} \to \mathcal{O}$, където

$$g_a(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{cases} \bot, & x \sqsubseteq a \\ \top, & x \not\sqsubseteq a. \end{cases}$$

Вярно ли е, че g_a е точно непрекъснато изображение? Обосновете се!

г) $\hat{g}_a : \mathcal{A} \to \mathcal{O}$, където

$$\hat{g}_a(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{cases} \top, & x \sqsubseteq a \\ \bot, & x \not\sqsubseteq a. \end{cases}$$

Вярно ли е, че $\hat{g}_a$ е точно непрекъснато изображение? Обосновете се!

д) Докажете, че

$$f \in [\mathcal{D} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}] \iff (\forall a \in \mathcal{A})[g_a \circ f \in [\mathcal{D} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{O}]].$$

Задача 2.18. Да разгледаме изображението

$$\Gamma : [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{B}] \times [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{C}] \to [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{B} \times \mathcal{C}],$$

където $\Gamma(f, g)(a) \stackrel{\text{деф}}{=} \langle f(a), g(b) \rangle$.

- Докажете, че Γ е добре дефинирано изображение, т.е. за всеки непрекъснати f и g, $\Gamma(f, g)$ е непрекъснато изображение.
- Докажете, че Γ е непрекъснато изображение.

задачата е оттук

Задача 2.19. Докажете, че изображението

$$\texttt{uncurry} : [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} [\mathcal{B} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{C}]] \to [\mathcal{A} \times \mathcal{B} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{C}],$$

дефинирано като

$$\texttt{uncurry}(f)(a, b) \stackrel{\text{деф}}{=} f(a)(b),$$

е непрекъснато.

Задача 2.20. Докажете, че изображението

$$\mathtt{curry} : [\mathcal{A} \times \mathcal{B} \overset{\text{н}}{\rightarrow} \mathcal{C}] \rightarrow [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\rightarrow} [\mathcal{B} \overset{\text{н}}{\rightarrow} \mathcal{C}]],$$

дефинирано като

$$\mathtt{curry}(f)(a)(b) \overset{\text{деф}}{=} f(a,b),$$

е непрекъснато.

2.4.1 Регулярни езици

Да фиксираме азбуката $\Sigma = \{a_1, \dots, a_k\}$. Да дефинираме полиномите над Σ като

$$\tau ::= \emptyset \mid \varepsilon \mid a_i \cdot X_j \mid \tau_1 + \tau_2.$$

където $i = 1, \dots, k$, а X е променлива. За всеки полином $\tau[X_1, \dots, X_n]$ дефинираме оператора

$$[\![\tau]\!] : \mathcal{P}(\Sigma^\star)^n \to \mathcal{P}(\Sigma^\star)$$

по следния начин:

- $[\![\emptyset]\!](L_1, \dots, L_n) = \emptyset$.
- $[\![\varepsilon]\!](L_1, \dots, L_n) = \varepsilon$.
- $[\![a_i \cdot X_j]\!](L_1, \dots, L_n) = \{a_i\} \cdot L_j$.
- $[\![\tau_1 + \tau_2]\!](L_1, \dots, L_n) = [\![\tau_1]\!](L_1, \dots, L_n) \cup [\![\tau_2]\!](L_1, \dots, L_n)$.

Задача 2.21. Докажете, че за всеки полином τ имаме, че $[\![\tau]\!]$ е непрекъснато изображение в областта на Скот $\mathcal{S} = (\mathcal{P}(\Sigma^\star), \subseteq, \emptyset)$.

Пример 2.3. Да разгледаме системата

$\tau_1[X_1, X_2] \equiv b \cdot X_1 + a \cdot X_2$
$\tau_2[X_1, X_2] \equiv \varepsilon$

$$\begin{aligned} X_1 &= b \cdot X_1 + a \cdot X_2 \\ X_2 &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Дефинираме непрекъснатия оператор

$$\Gamma : \mathcal{P}(\Sigma^\star)^2 \to \mathcal{P}(\Sigma^\star)^2,$$

където:

$$\Gamma(L_1, L_2) = ([\![\tau_1]\!](L_1, L_2), [\![\tau_2]\!](L_1, L_2)).$$

От Теоремата на Клини ние знам как можем да намерим най-малката неподвижна точка на Γ, която ще бъде и най-малкото решение на горната система.

- $(L_0, M_0) \stackrel{\text{деф}}{=} (\emptyset, \emptyset)$;
- $(L_1, M_1) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma(L_0, M_0) = ([\![\tau_1]\!](L_0, M_0), [\![\tau_2]\!](L_0, M_0)) = (\emptyset, \varepsilon)$;
- $(L_2, M_2) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma(L_1, M_1) = ([\![\tau_1]\!](L_1, M_1), [\![\tau_2]\!](L_1, M_1)) = (\{a\}, \varepsilon)$;
- $(L_3, M_3) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma(L_2, M_2) = ([\![\tau_1]\!](L_2, M_2), [\![\tau_2]\!](L_2, M_2)) = (\{ba, a\}, \varepsilon)$;
- $(L_4, M_4) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma(L_3, M_3) = ([\![\tau_1]\!](L_3, M_3), [\![\tau_2]\!](L_3, M_3)) = (\{bba, ba, a\}, \varepsilon)$;
- $(L_5, M_5) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma(L_4, M_4) = ([\![\tau_1]\!](L_4, M_4), [\![\tau_2]\!](L_4, M_4)) = (\{bba, bba, ba, a\}, \varepsilon)$.

Лесно се съобразява, че $L_n = \{b^k a \mid k < n\}$. Тогава

$$\mathtt{lfp}(\Gamma) = (\bigcup_n L_n, \{\varepsilon\}) = (b^\star a, \{\varepsilon\}).$$

Задача 2.22. Докажете, че най-малкото решение на системата

$$X_1 = a \cdot X_1 + b \cdot X_2 + \varepsilon$$
$$X_2 = b \cdot X_2 + \varepsilon$$

е двойката $(a^\star b^\star, b^\star)$.

Задача 2.23. Да разгледаме системата от оператори

$$\llbracket \tau_1 \rrbracket(L_1, \ldots, L_n) = L_1$$
$$\vdots$$
$$\llbracket \tau_n \rrbracket(L_1, \ldots, L_n) = L_n.$$

Знаем, че тя притежава най-малко решение $(\hat{L}_1, \ldots, \hat{L}_n)$. Докажете, че всеки от езиците $\hat{L}_i$ е регулярен.

Докажете, че всеки регулярен език е елемент от най-малкото решение на някоя система от оператори от горния вид.

2.4.2 Безконтекстни езици

Да фиксираме азбуката $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Да дефинираме термове от тип 1 като

$$\tau ::= X_i \mid a_j \mid \varepsilon \mid \emptyset \mid \tau_1 \cdot \tau_2 \mid (\tau_1 + \tau_2),$$

където $j = 1, \ldots, n$, а X_i са изброимо безкрайна редица от променливи. За всеки терм $\tau[X_1, \ldots, X_n]$ дефинираме оператора

$$\llbracket \tau \rrbracket : (\mathcal{P}(\Sigma^\star))^n \to \mathcal{P}(\Sigma^\star)$$

по следния начин:

- $\llbracket X_i \rrbracket(L_1, \ldots, L_n) = L_i$.
- $\llbracket a_j \rrbracket(L_1, \ldots, L_n) = \{a_j\}$.
- $\llbracket \varepsilon \rrbracket(L_1, \ldots, L_n) = \varepsilon$.
- $\llbracket \emptyset \rrbracket(L_1, \ldots, L_n) = \emptyset$.
- $\llbracket \tau_1 \cdot \tau_2 \rrbracket(L_1, \ldots, L_n) = \llbracket \tau_1 \rrbracket(L_1, \ldots, L_n) \cdot \llbracket \tau_2 \rrbracket(L_1, \ldots, L_n)$.
- $\llbracket \tau_1 + \tau_2 \rrbracket(L_1, \ldots, L_n) = \llbracket \tau_1 \rrbracket(L_1, \ldots, L_n) \cup \llbracket \tau_2 \rrbracket(L_1, \ldots, L_n)$.

Задача 2.24. Докажете, че за всеки терм τ, $\llbracket \tau \rrbracket$ е непрекъснато изображение в областта на Скот $\mathcal{S} = (\mathcal{P}(\Sigma^\star), \subseteq, \emptyset)$.

Задача 2.25. Докажете, че $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathtt{lfp}(\llbracket \tau \rrbracket)$, където

$$\tau[X] \equiv \varepsilon + a \cdot X \cdot b.$$

С други думи, $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ е най-малкото решение на уравнението

$$X = a \cdot X \cdot b + \varepsilon.$$

Нека сега да разгледаме термовете $\tau_1[X_1, \ldots, X_n], \ldots, \tau_n[X_1, \ldots, X_n]$.

Задача 2.26. Да разгледаме системата от оператори

$$\begin{aligned} [\![\tau_1]\!](L_1, \dots, L_n) &= L_1 \\ &\vdots \\ [\![\tau_n]\!](L_1, \dots, L_n) &= L_n. \end{aligned}$$

Знаем, че тя притежава най-малко решение $(\hat{L}_1, \dots, \hat{L}_n)$. Докажете, че всеки от езиците $\hat{L}_i$ е безконтекстен.

Докажете, че всеки безконтекстен език е елемент от най-малкото решение на някоя система от оператори от горния вид.

Задача 2.27. Да дефинираме термове от тип 2 като

Това е аналог на нормалната форма на Чомски

$$\tau ::= a_j \mid \varepsilon \mid \emptyset \mid X_i \cdot X_k \mid (\tau_1 + \tau_2),$$

където $j = 1, \dots, n$, а X_i са изброимо безкрайна редица от променливи. Докажете горното твърдение, като замените термовете от тип 1 с тези от тип 2.

Пример 2.4. Да разгледаме системата

$$\begin{aligned} X_1 &= X_3 \cdot X_2 + \varepsilon \\ X_2 &= X_1 \cdot X_4 \\ X_3 &= a \\ X_4 &= b. \end{aligned}$$

Нека $(\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3, \hat{L}_4)$ е най-малкото решение на системата. Докажете, че $\hat{L}_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\hat{L}_2 = \{a^n b^{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\hat{L}_3 = \{a\}$ и $\hat{L}_4 = \{b\}$.

Глава 3

Езикът REC

3.1 Синтаксис

Основно следваме [?, Глава 9]

Ще разглеждаме един много прост език за функционално програмиране.

- константи $\mathtt{n} \in \mathbf{Num}_\perp$, за всяко $n \in \mathbb{N}_\perp$;
- изброимо много променливи от тип 0 (обектови променливи) $\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}, \dots$, евентуално с индекси;
- изброимо много променливи от тип 1 (или функционални променливи) $\mathtt{f}, \mathtt{g}, \mathtt{h}, \dots$, евентуално с индекси. Формално погледнато, трябва на всяка функционална променлива $\mathtt{f}$ да съпоставим число - брой аргументи, които приема. Нека да означим с $\#\mathtt{f}$ броя аргументи на f. Обикновено броят аргументи на $\mathtt{f}$ ще е ясен от контекста.
- Термовете $\tau_0, \tau_1, \dots$ в **REC** имат следния синтаксис:

$$\tau ::= \mathtt{n} \mid \mathtt{x} \mid \tau_1 + \tau_2 \mid \tau_1 \mathrel{\mathtt{==}} \tau_2 \mid \mathtt{if}\ \tau_1\ \mathtt{then}\ \tau_2\ \mathtt{else}\ \tau_3 \mid \mathtt{f}_i(\tau_1, \dots, \tau_{m_i}).$$

- Ще записваме $\tau[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k]$, когато искаме да означим, че променливите на терма τ са *измежду* посочените.
- С $\tau[\mathtt{x}/\mu]$ ще означаваме терма получен от τ, в който всяко срещане на обектовата променлива $\mathtt{x}$ е заменена с терма μ.

За разлика от [?], няма да въвеждаме термове от тип **Bool**

Константите не са числа! Константите са синтактични обекти, докато числата са семантични обекти

Удобно е в нашия език още на синтактично ниво да правим разлика между двата типа променливи, които имаме в езика

Тук $m_i = \#\mathtt{f}_i$

Една **рекурсивна програма** $\mathtt{P}$ на езика **REC** има следния общ вид:

$$\mathtt{P} = \begin{cases} \mathtt{f}_1(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_1}) = \tau_1[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_1}, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k] \\ \vdots \\ \mathtt{f}_k(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_k}) = \tau_k[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_k}, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k] \end{cases}$$

[?, стр. 141]

Една програма е просто текст със специален формат. Важният въпрос е каква функция (семантика) отговаря на този текст (синтаксис)

Може да си мислите, че $\mathtt{f}_1$ е `main` функцията на нашата програма

В такъв случай казваме, че термът τ_i задава *дефиницията* на фунционалната променлива $\mathtt{f}_i$.

Пример 3.1. Да разгледаме програмата $\mathtt{P}$ на езика хаскел:

```
h(x) = f(x, 1)
f(x,y) = if x == y then 0
         else f(x, y+1) + 1
```

Да положим

$$\tau_1[\mathtt{x},\mathtt{h},\mathtt{f}] \stackrel{\text{деф}}{\equiv} \mathtt{f(x,1)}$$
$$\tau_2[\mathtt{x},\mathtt{y},\mathtt{h},\mathtt{f}] \stackrel{\text{деф}}{\equiv} \mathtt{if\ x\ ==\ y\ then\ 0\ else\ f(x,y+1)\ +\ 1}.$$

Тогава програмата `P` приема следния вид:

$$\mathtt{h}(\mathtt{x}) = \tau_1[\mathtt{x},\mathtt{h},\mathtt{f}]$$
$$\mathtt{f}(\mathtt{x},\mathtt{y}) = \tau_2[\mathtt{x},\mathtt{y},\mathtt{h},\mathtt{f}].$$

3.2 Денотационна семантика

3.2.1 Стойност на терм

Нека първо да дефинираме следните *изображения*

$$\mathtt{plus} : \mathbb{N}_\perp^2 \to \mathbb{N}_\perp, \text{ където}$$
$$\mathtt{plus}(a,b) = \begin{cases} a+b, & \text{ако } a,b \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако } \perp \in \{a,b\} \end{cases}$$
$$\mathtt{eq} : \mathbb{N}_\perp^2 \to \mathbb{N}_\perp, \text{ където}$$
$$\mathtt{eq}(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{ако } a = b \ \&\ a,b \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{ако } a \neq b \ \&\ a,b \in \mathbb{N} \\ \perp, & \text{ако } \perp \in \{a,b\} \end{cases}$$
$$\mathtt{if} : \mathbb{N}_\perp^3 \to \mathbb{N}_\perp, \text{ където}$$
$$\mathtt{if}(a,b,c) = \begin{cases} b, & \text{ако } a \in \mathbb{N}^+ \\ c, & \text{ако } a = 0 \\ \perp, & \text{ако } a = \perp. \end{cases}$$

Спестяваме си труда от въвеждането на булевия тип променливи

Озн. $\mathbb{N}^+ \stackrel{\text{деф}}{=} \mathbb{N} \setminus \{0\}$
[?, стр. 155]

Задача 3.1. Докажете, че изображенията `plus`, `eq`, `if` са непрекъснати.

За всеки терм $\tau[\mathtt{x}_1,\dots,\mathtt{x}_n,\mathtt{f}_1,\dots,\mathtt{f}_k]$, ще разгледаме изображението със сигнатура

$$[\![\tau]\!] : [\mathbb{N}_\perp^{m_1} \to \mathbb{N}_\perp] \times \cdots \times [\mathbb{N}_\perp^{m_k} \to \mathbb{N}_\perp] \to [\mathbb{N}_\perp^n \to \mathbb{N}_\perp],$$

което ще дефинираме с индукция по построението на термовете.

- ако $\tau \equiv \mathtt{c}$, за някоя константа, то

$$[\![\mathtt{c}]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} c.$$

- ако $\tau \equiv \mathtt{x}_i$, за някоя обектова променлива, то

$$[\![\mathtt{x}_i]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} a_i.$$

- ако $\tau \equiv \tau_1 + \tau_2$, то

$$[\![\tau_1+\tau_2]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{plus}([\![\tau_1]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}), [\![\tau_2]\!](\overline{\varphi})(\overline{a})).$$

Знаем, че изображенията `plus` и `eq` са непрекъснати

- ако $\tau \equiv \tau_1$ `==` τ_2, то

$$[\![\tau_1 \texttt{ == } \tau_2]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} \texttt{eq}([\![\tau_1]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}), [\![\tau_2]\!](\overline{\varphi})(\overline{a})).$$

- ако $\tau \equiv$ `if` τ_1 `then` τ_2 `else` τ_3, то

$$[\![\texttt{if } \tau_1 \texttt{ then } \tau_2 \texttt{ else } \tau_3]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} \texttt{if}([\![\tau_1]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}), [\![\tau_2]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}), [\![\tau_3]\!](\overline{\varphi})(\overline{a})).$$

- ако $\tau \equiv \texttt{f}_i(\tau_1, \dots, \tau_{m_i})$, то

Термовете τ_j може да имат различен брой променливи. Ако се наложи, разширяваме ги с фиктивни променливи

$$[\![\texttt{f}_i(\tau_1, \dots, \tau_{m_i})]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} \varphi_i([\![\tau_1]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}), \dots, [\![\tau_{m_i}]\!](\overline{\varphi})(\overline{a})).$$

Пример 3.2. Да разгледаме следния терм:

$$\tau[\texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{z}] \stackrel{\text{деф}}{\equiv} \texttt{if x == } 5 \texttt{ then y else z}.$$

Да видим каква е негова стойност при произволни стойности $a, b, c \in \mathbb{N}_\perp$:

$$[\![\tau]\!](a,b,c) = \begin{cases} [\![\texttt{y}]\!](a,b,c), & \text{ако } [\![x \texttt{ == } 5]\!](a,b,c) \in \mathbb{N}^+ \\ [\![\texttt{z}]\!](a,b,c), & \text{ако } [\![x \texttt{ == } 5]\!](a,b,c) = 0 \\ \perp, & \text{ако } [\![x \texttt{ == } 5]\!](a,b,c) = \perp \end{cases}$$
$$= \begin{cases} b, & \text{ако } a = 5 \\ c, & \text{ако } a \in \mathbb{N} \ \& \ a \neq 5 \\ \perp, & \text{ако } a = \perp. \end{cases}$$

Нека сега да видим следния пример на хаскел.

```
ghci> let f(x) = if x == undefined then 0 else 1
ghci> f(2)
*** Exception: Prelude.undefined
```

Това означава, че функцията `==` е точна, т.е. не можем да сравняваме с $\perp$, което съответства на нашата денотационна семантика.

Лема 3.1 (Лема за замяната)**.** Да разгледаме терма $\tau[\texttt{x}_1, \dots, \texttt{x}_n, \texttt{f}_1, \dots, \texttt{f}_k]$ и *функционалните* термове $\mu_1[\texttt{f}_1, \dots, \texttt{f}_k], \dots, \mu_n[\texttt{f}_1, \dots, \texttt{f}_k]$. Тогава

$$[\![\tau[\bar{\texttt{x}}/\bar{\mu}]]\!](\bar{\varphi}) = [\![\tau]\!](\bar{\varphi})([\![\mu_1]\!](\bar{\varphi}), \dots, [\![\mu_n]\!](\bar{\varphi}))$$

за произволни $\varphi_i \in [\mathbb{N}_\perp^{m_i} \to \mathbb{N}_\perp]$, за $i = 1, \dots, k$.

Доказателство. Доказателството се провежда с *индукция по построението на терма* τ.

Важно е, че нямаме обектови променливи в $\mu_1, \dots, \mu_n$

Substitution Lemma, [**?**, стр. 149]

Това твърдение е без д-во в [**?**, стр. 188]

- Нека да започнем с най-лесния случай. Нека $\tau \equiv \mathtt{c}$, за някоя константа. Тогава $\tau[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}] \equiv \mathtt{c}$. Това означава, че

$$[\![\tau[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}]]\!](\bar{\varphi}) = [\![\mathtt{c}]\!](\bar{\varphi}) \stackrel{\text{деф}}{=} c.$$

c е константа, докато $c \in \mathbb{N}_\perp$

От друга страна, имаме също, че

$$[\![\mathtt{c}]\!](\bar{\varphi})([\![\mu_1]\!](\bar{\varphi}), \ldots, [\![\mu_n]\!](\bar{\varphi})) \stackrel{\text{деф}}{=} c.$$

- Нека $\tau \equiv \mathtt{x}_i$. Тогава $\mathtt{x}_i[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}] \equiv \mu_i$ и следователно

$$[\![\mathtt{x}_i[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}]]\!](\bar{\varphi}) = [\![\mu_i]\!](\bar{\varphi}).$$

От друга страна, по дефиниция на стойност на терм,

$$[\![\mathtt{x}_i]\!](\bar{\varphi})([\![\mu_1]\!](\bar{\varphi}), \ldots, [\![\mu_n]\!](\bar{\varphi})) = [\![\mu_i]\!](\bar{\varphi}).$$

- Нека $\tau \equiv \tau_1 + \tau_2$. От **И.П.** имаме, че за $j = 1, 2$ е изпълнено следното:

$$[\![\tau_j[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}]]\!](\bar{\varphi}) = [\![\tau_j]\!](\bar{\varphi})(\underbrace{[\![\mu_1]\!](\bar{\varphi})}_{b_1}, \ldots, \underbrace{[\![\mu_n]\!](\bar{\varphi})}_{b_n}).$$

Тогава

$$\begin{aligned}
[\![\tau[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}]]\!](\bar{\varphi}) &= [\![\tau_1[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}] + \tau_2[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}]]\!](\bar{\varphi}) \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{plus}([\![\tau_1[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}]]\!](\bar{\varphi}), [\![\tau_2[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}]]\!](\bar{\varphi})) \\
&= \mathtt{plus}([\![\tau_1]\!](\bar{\varphi})(b_1, \ldots, b_n), [\![\tau_2]\!](\bar{\varphi})(b_1, \ldots, b_n)) && \text{// от \textbf{И.П.}} \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} [\![\tau]\!](\bar{\varphi})(b_1, \ldots, b_n) \\
&= [\![\tau]\!](\bar{\varphi})([\![\mu_1]\!](\bar{\varphi}), \ldots, [\![\mu_n]\!](\bar{\varphi})). && \text{// } b_j \stackrel{\text{деф}}{=} [\![\mu_j]\!](\bar{\varphi})
\end{aligned}$$

✍ Докажете сами останалите два случая. Те не крият изненади.

- Нека $\tau \equiv \tau_1 \;\mathtt{==}\; \tau_2$.
- Нека $\tau \equiv \mathtt{if}\ \tau_0\ \mathtt{then}\ \tau_1\ \mathtt{else}\ \tau_2$.
- Нека $\tau \equiv \mathtt{f}_i(\tau_1, \ldots, \tau_{m_i})$. Имаме, че

$$\tau[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}] \equiv \mathtt{f}_i(\tau_1[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}], \ldots, \tau_{m_i}[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}]). \tag{3.1}$$

Нека за улеснение да означим $b_i \stackrel{\text{деф}}{=} [\![\mu_i]\!](\bar{\varphi})$, за $i = 1, \ldots, n$. Прилагаме **И.П.** за термовете $\tau_1, \ldots, \tau_{m_i}$ и получаваме за $j = 1, \ldots, m_i$,

$$\begin{aligned}
[\![\tau_j[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}]]\!](\bar{\varphi}) &= [\![\tau_j]\!](\bar{\varphi})(\underbrace{[\![\mu_1]\!](\bar{\varphi})}_{b_1}, \ldots, \underbrace{[\![\mu_n]\!](\bar{\varphi})}_{b_n}) && \text{// от \textbf{И.П.}} \\
&= [\![\tau_j]\!](\bar{\varphi})(b_1, \ldots, b_n) && \text{// } b_i \stackrel{\text{деф}}{=} [\![\mu_i]\!](\bar{\varphi}).
\end{aligned}$$

Следователно,

$$[\![\tau[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}]]\!](\bar{\varphi}) = [\![\mathtt{f}_i(\tau_1[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}], \ldots, \tau_{m_i}[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}])]\!](\bar{\varphi}) \qquad \text{// от (3.1)}$$

$$
\begin{aligned}
&\stackrel{\text{деф}}{=} \varphi_i(\llbracket \tau_1[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}]\rrbracket(\bar{\varphi}), \dots, \llbracket \tau_{m_i}[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mu}]\rrbracket(\bar{\varphi})) \\
&= \varphi_i(\llbracket \tau_1\rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{b}), \dots, \llbracket \tau_{m_i}\rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{b})) && \text{// от } \textbf{И.П.} \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \llbracket \mathtt{f}_i(\tau_1, \dots, \tau_{m_i})\rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{b}) \\
&= \llbracket \tau\rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{b}) && \text{// } \tau \equiv \mathtt{f}_i(\tau_1, \dots, \tau_{m_i}) \\
&= \llbracket \tau\rrbracket(\bar{\varphi})(\llbracket \mu_1\rrbracket(\bar{\varphi}), \dots, \llbracket \mu_n\rrbracket(\bar{\varphi})) && \text{// } b_i \stackrel{\text{деф}}{=} \llbracket \mu_i\rrbracket(\bar{\varphi}).
\end{aligned}
$$

□

Забележка 3.1. В частния случай, когато функционалните термове $\mu_1, \dots, \mu_n$ са константите $\mathtt{c}_1, \dots, \mathtt{c}_n$, получаваме, че

$$\llbracket \tau[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mathtt{c}}]\rrbracket(\bar{\varphi}) = \llbracket \tau\rrbracket(\bar{\varphi})(\bar{c}).$$

3.2.2 Термални оператори

Вече дефинирахме как на всеки терм $\tau[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k]$ съпоставяме изображението $\llbracket \tau\rrbracket$ със сигнатура

$$\llbracket \tau\rrbracket : [\mathbb{N}_\perp^{m_1} \to \mathbb{N}_\perp] \times \cdots \times [\mathbb{N}_\perp^{m_k} \to \mathbb{N}_\perp] \to [\mathbb{N}_\perp^{n} \to \mathbb{N}_\perp]$$

Едно от основните свойства, които трябва да притежават тези изображения е да бъдат *непрекъснати* относно областите на Скот, за които са дефинирани. Причината за това е, че искаме да дефинираме семантиката на една програма като използваме най-малкото решение на система от такива оператори, а според Теоремата на Клини, за да можем да направим това, трябва да работим с непрекъснати оператори. Следващият пример ни показва, че трябва да сме по-внимателни върху какви елементи разглеждаждаме тези изображения.

Пример 3.3. Да разгледаме терма

$$\tau[\mathtt{x}, \mathtt{f}, \mathtt{g}] \stackrel{\text{деф}}{\equiv} \mathtt{f}(\mathtt{g}(\mathtt{x})),$$

и следните две изображения от тип $[\mathbb{N}_\perp \to \mathbb{N}_\perp]$:

Обърнете внимание, че φ не е монотонна функция. Тя дори не е точна. Функцията ψ не е точна, но е монотонна. Знаем, че φ не е непрекъсната

$$\varphi(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{cases} 42, & \text{ако } x = \perp \\ \perp, & \text{ако } x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\psi(x) \stackrel{\text{деф}}{=} 42, \text{ за всяко } x \in \mathbb{N}_\perp.$$

Лесно се вижда, че $\langle \varphi, \varphi\rangle \sqsubseteq \langle \varphi, \psi\rangle$, но

$$\llbracket \tau\rrbracket(\varphi, \varphi) \not\sqsubseteq \llbracket \tau\rrbracket(\varphi, \psi),$$

защото за произволно $a \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
\llbracket \tau\rrbracket(\varphi, \varphi)(a) &= \varphi(\varphi(a)) && \text{// стойност на терм} \\
&= 42 \\
&\not\sqsubseteq \perp && \text{// плоска наредба} \\
&= \varphi(\psi(a)) && \text{// защото } \psi(a) \neq \perp \\
&= \llbracket \tau\rrbracket(\varphi, \psi)(a) && \text{// от деф. на } \tau
\end{aligned}
$$

Това означава, че за конкретния терм τ, изображението $\llbracket \tau\rrbracket$ не е монотонно, откъдето следва, че то не е непрекъснато.

От *Твърдение* 1.3 знаем, че всеки непрекъснат оператор е монотонен. Щом $\llbracket \tau\rrbracket$ не е монотоненно, то той със сигурност не е непрекъснато.

Всъщност на нас е необходимо да можем да подаваме като аргументи на $[\![\tau]\!]$ само такива φ, които можем да дефинираме на езика **REC**. Според семантиката на термовете, която дефинирахме по-горе, не е ясно дали можем да дефинираме терм на езика **REC**, чиято семантика да бъде изображението φ. Естествено е да разгледаме терма

$$\tau[\mathtt{x}] \stackrel{\text{деф}}{\equiv} \mathtt{if}\ \mathtt{x} == \perp\ \mathtt{then}\ 42\ \mathtt{else}\ \perp.$$

Каква е семантиката на този терм? Следваме дефиницията на стойност на терм, за произволно $a \in \mathbb{N}_\perp$, и получаваме:

$$[\![\tau]\!](a) = \begin{cases} 42, & \text{ако } [\![\mathtt{x} == \perp]\!](a) \in \mathbb{N}^+ \\ \perp, & \text{ако } [\![\mathtt{x} == \perp]\!](a) = 0 \\ \perp, & \text{ако } [\![\mathtt{x} == \perp]\!](a) = \perp \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 42, & \text{ако } \underbrace{[\![\mathtt{x}]\!](a)}_{\in\mathbb{N}} = \underbrace{[\![\perp]\!](a)}_{\in\mathbb{N}} \\ \perp, & \text{ако } \underbrace{[\![\mathtt{x}]\!](a)}_{\in\mathbb{N}} \neq \underbrace{[\![\perp]\!](a)}_{\in\mathbb{N}} \\ \perp, & \text{ако } [\![\mathtt{x}]\!](a) = \perp \text{ или } [\![\perp]\!](a) = \perp \end{cases}$$
$$= \perp.$$

Това *не* е доказателство, че не можем да дефинираме функцията φ на езика **REC**. Тук ние твърдим само, че очевидният опит за дефиниция на φ се проваля. По-нататък ще видим, че наистина не може да дефинираме φ на нашия език, защото тя не е непрекъсната функция.

Да видим, какво ще стане ако преведем директно горния пример на `хаскел`.

```
ghci> let phi(x) = if x == undefined then 42 else undefined
ghci> let psi(x) = 42
ghci> phi(0)
*** Exception: Prelude.undefined
ghci> phi(undefined)
*** Exception: Prelude.undefined
ghci> psi(0)
42
```

Виждаме, че тук `хаскел` следва нашата семантика за езика **REC**. Направените по-горе бележки ни насочват към следната дефиниция на **термален оператор**.

Определение 3.1. За всеки терм от вида $\tau[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k]$ дефинираме оператора

$$\Gamma_\tau : [\mathbb{N}_\perp^{m_1} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp] \times \cdots \times [\mathbb{N}_\perp^{m_k} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp] \to [\mathbb{N}_\perp^{n} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp],$$

където

$$\Gamma_\tau(\bar{\varphi})(\bar{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} [\![\tau]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}).$$

Обърнете внимание, че все още не е ясно защо $\Gamma_\tau(\overline{\varphi}) \in [\mathbb{N}_\perp^n \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp]$

В следващия раздел ще се концентрираме върху доказателството на следния основен резултат:

За всеки терм $\tau[\bar{\mathtt{x}}, \bar{\mathtt{f}}]$, операторът Γ_τ е непрекъснат.

3.2.3 Непрекъснатост на термалните оператори

Първата ни задача ще бъде да проверим, че операторът Γ_τ е коректно дефиниран. Това означава, че трябва да се уверим, че винаги когато подадем като аргументи на Γ_τ непрекъснати изображения, то Γ_τ връща непрекъснато изображение.

Забележка 3.2. В този раздел всички доказателства се провеждат с индукция по построението на термовете.

Твърдение 3.1. Да разгледаме един терм $\tau[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k]$. Нека $\overline{a} \sqsubseteq \overline{b}$. Тогава Озн. $\overline{a}_i = (a_i^1, \dots, a_i^n)$

$$[\![\tau]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}) \sqsubseteq [\![\tau]\!](\overline{\varphi})(\overline{b}),$$

където $\varphi_i \in [\mathbb{N}_\perp^{m_i} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp]$, за $i = 1, \dots, k$.

Упътване. Индукция по построението на терма τ.

- Нека $\tau \equiv \mathtt{c}$.
- Нека $\tau \equiv \mathtt{x}_i$. Тогава

$$\begin{aligned}
[\![\tau]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}) &= [\![\mathtt{x}_i]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}) \\
&= a_i && \text{// стойност на терм} \\
&\sqsubseteq b_i && \text{// } \overline{a} \sqsubseteq \overline{b} \\
&= [\![\mathtt{x}_i]\!](\overline{\varphi})(\overline{b}) && \text{// стойност на терм} \\
&= [\![\tau]\!](\overline{\varphi})(\overline{b}).
\end{aligned}$$

- Нека $\tau \equiv \tau_1 + \tau_2$. Тук ще използваме, че от **И.П.**, за $j = 1, 2$, имаме

$$[\![\tau_j]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}) \sqsubseteq [\![\tau_j]\!](\overline{\varphi})(\overline{b}). \tag{3.2}$$

  Освен това, понеже изображението `plus` е непрекъснато, то то е и монотонно.

$$\begin{aligned}
[\![\tau]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}) &= [\![\tau_1 + \tau_2]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}) \\
&\overset{\text{деф}}{=} \mathtt{plus}([\![\tau_1]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}), [\![\tau_2]\!](\overline{\varphi})(\overline{a})) \\
&\sqsubseteq \mathtt{plus}([\![\tau_1]\!](\overline{\varphi})(\overline{b}), [\![\tau_2]\!](\overline{\varphi})(\overline{b})) && \text{// от (3.2) и мон.} \\
&\overset{\text{деф}}{=} [\![\tau_1 + \tau_2]\!](\overline{\varphi})(\overline{b}).
\end{aligned}$$

✍ За домашно!

- Нека $\tau \equiv \tau_1 \;\mathtt{==}\; \tau_2$.
- Нека $\tau \equiv \mathtt{if}\ \tau_0\ \mathtt{then}\ \tau_1\ \mathtt{else}\ \tau_2$.
- Нека $\tau \equiv \mathtt{f}_i(\tau_1, \dots, \tau_{m_i})$. Тук ще използваме, че от **И.П.**, за $j = 1, \dots, m_i$, имаме

$$[\![\tau_j]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}) \sqsubseteq [\![\tau_j]\!](\overline{\varphi})(\overline{b}). \tag{3.3}$$

  Тогава

$$[\![\tau]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}) = [\![\mathtt{f}_i(\tau_1, \dots, \tau_{m_i})]\!](\overline{\varphi})(\overline{a})$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\text{деф}}{=} \varphi_i([\![\tau_1]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}), \ldots, [\![\tau_{m_i}]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}))\\
&\sqsubseteq \varphi_i([\![\tau_1]\!](\overline{\varphi})(\bar{b}), \ldots, [\![\tau_{m_i}]\!](\overline{\varphi})(\bar{b})) && \text{// от (3.3) и } \varphi_i \text{ е мон.}\\
&\stackrel{\text{деф}}{=} [\![\tau]\!](\overline{\varphi})(\bar{b}).
\end{aligned}$$

□

Следствие 3.1. Да разгледаме един терм $\tau[\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n, \mathtt{f}_1, \ldots, \mathtt{f}_k]$. Тогава за произволна верига $(\bar{a}_i)_{i=0}^{\infty}$ в $\mathbb{N}_\perp^n$,

$$[\![\tau]\!](\overline{\varphi})(\bigsqcup_i \overline{a}_i) = \bigsqcup_i [\![\tau]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}_i),$$

където $\varphi_i \in [\mathbb{N}_\perp^{n_i} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$, за $i = 1, \ldots, k$.

Доказателство. За терма τ и $\overline{\varphi}$, да разгледаме изображението

$$\psi(\overline{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} [\![\tau]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}).$$

От *Твърдение* 3.1 следва, че $\psi \in [\mathbb{N}_\perp^n \stackrel{\text{м}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$. Понеже всяка верига в $\mathbb{N}_\perp^n$ се стабилизира, то директно от *Твърдение* 1.5 следва, че $\psi \in [\mathbb{N}_\perp^n \stackrel{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$, което означава, че за произволна верига $(\overline{a}_i)_{i=0}^{\infty}$,

$$\psi(\bigsqcup_i \overline{a}_i) = \bigsqcup_i \psi(\overline{a}_i),$$

което означава, че

$$[\![\tau]\!](\overline{\varphi})(\bigsqcup_i \overline{a}_i) = \bigsqcup_i [\![\tau]\!](\overline{\varphi})(\overline{a}_i).$$

□

Следствие 3.2. Да разгледаме произволен терм $\tau[\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n, \mathtt{f}_1, \ldots, \mathtt{f}_k]$. Тогава за произволни $\varphi_i \in [\mathbb{N}^{m_i} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$, за $i = 1, \ldots k$, имаме, че

$$\Gamma_\tau(\bar{\varphi}) \in [\mathbb{N}_\perp^n \stackrel{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp].$$

Щом термалните оператори Γ_τ са добре дефинирани, ще проверим, че са непрекъснати. Първата стъпка ще бъде проверката, че те са монотонни.

Лема 3.2. Нека $\mu[\mathtt{f}_1, \ldots, \mathtt{f}_k]$ е *функционален* терм. Да разгледаме произволна верига $(\overline{\varphi}_r)_{r=0}^{\infty}$ от елементи на

Да напомним, че $m_i \stackrel{\text{деф}}{=} \#\mathtt{f}_i$

$$[\mathbb{N}_\perp^{m_1} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp] \times \cdots \times [\mathbb{N}_\perp^{m_k} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp].$$

Тогава $[\![\mu]\!]$ е непрекъснато изображение, т.е.

$$[\![\mu]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r) = \bigsqcup_r [\![\mu]\!](\overline{\varphi}_r).$$

Доказателство. Индукция по построението на терма μ.

- Нека $\mu \equiv \mathtt{c}$. Този случай е очевиден.

- Нека $\mu \equiv \mu_1 + \mu_2$. Ще използваме, че `plus` е непрекъснато изображение.

$$\begin{aligned}
[\![\mu]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r) &\stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{plus}([\![\mu_1]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r), [\![\mu_2]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r)) \\
&= \mathtt{plus}(\bigsqcup_r [\![\mu_1]\!](\overline{\varphi}_r), \bigsqcup_r [\![\mu_2]\!](\overline{\varphi}_r)) && \text{// от И.П.} \\
&= \bigsqcup_r \mathtt{plus}([\![\mu_1]\!](\overline{\varphi}_r), [\![\mu_2]\!](\overline{\varphi}_r)) && \text{// } \mathtt{plus} \text{ е непр.} \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup_r [\![\mu]\!](\overline{\varphi}_r).
\end{aligned}$$

- Нека $\mu \equiv \mu_1$ `==` μ_2. Използвайте, че `eq` е непрекъснато изображение.
- Нека $\mu \equiv$ `if` μ_0 `then` μ_1 `else` μ_2. Използвайте *Задача* 3.1.
- Нека $\mu \equiv \mathtt{f}_i(\mu_1, \dots, \mu_{m_i})$. От И.П. знаем, че $[\![\mu_j]\!]$ са непрекъснати изображения за $j = 1, \dots, m_i$, а от *Твърдение* 1.3 следва, че $[\![\mu_j]\!]$ са монотонни. Тогава за произволни индекси $n \leq n'$ и $r \leq r'$ имаме, че $\overline{\varphi}_n \stackrel{\text{деф}}{=} (\varphi_n^1, \dots, \varphi_n^k)$

$$\begin{aligned}
\varphi_n^i([\![\mu_1]\!](\overline{\varphi}_r), \dots, [\![\mu_{m_i}]\!](\overline{\varphi}_r)) &\sqsubseteq \varphi_n^i([\![\mu_1]\!](\overline{\varphi}_{r'}), \dots, [\![\mu_{m_i}]\!](\overline{\varphi}_{r'})) \\
&\sqsubseteq \varphi_{n'}^i([\![\mu_1]\!](\overline{\varphi}_{r'}), \dots, [\![\mu_{m_i}]\!](\overline{\varphi}_{r'})).
\end{aligned}$$

Това означава, че ако положим

$$e_{n,r} \stackrel{\text{деф}}{=} \varphi_n^i([\![\mu_1]\!](\overline{\varphi}_r), \dots, [\![\mu_{m_i}]\!](\overline{\varphi}_r)),$$

то

$$n \leq n' \ \&\ r \leq r' \implies e_{n,r} \sqsubseteq e_{n',r'}.$$

Сега можем да приложим *Теорема* 2.1, според която

$$\bigsqcup_n (\bigsqcup_r e_{n,r}) = \bigsqcup_n e_{n,n}. \tag{3.4}$$

Тогава

$$\begin{aligned}
[\![\mu]\!](\bigsqcup_n \overline{\varphi}_n) &= [\![\mathtt{f}_i(\mu_1, \dots, \mu_{m_i})]\!](\bigsqcup_n \overline{\varphi}_n) \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} (\bigsqcup_n \varphi_n^i)([\![\mu_1]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r), \dots, [\![\mu_{m_i}]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r)) \\
&= \bigsqcup_n \{\varphi_n^i([\![\mu_1]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r), \dots, [\![\mu_{m_i}]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r))\} && \text{// от } \textit{Теорема } 1.2 \\
&= \bigsqcup_n \{\varphi_n^i(\bigsqcup_r [\![\mu_1]\!](\overline{\varphi}_r), \dots, \bigsqcup_r [\![\mu_{m_i}]\!](\overline{\varphi}_r))\} && \text{// от И.П. за } \mu_j \\
&= \bigsqcup_n \{\bigsqcup_r \underbrace{\varphi_n^i([\![\mu_1]\!](\overline{\varphi}_r), \dots, [\![\mu_{m_i}]\!](\overline{\varphi}_r))}_{e_{n,r}}\} && \text{// } \varphi_n^i \text{ е непр.} \\
&= \bigsqcup_n \underbrace{\varphi_n^i([\![\mu_1]\!](\overline{\varphi}_n), \dots, [\![\mu_{m_i}]\!](\overline{\varphi}_n))}_{e_{n,n}} && \text{// от (3.4)} \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \bigsqcup_n [\![\mathtt{f}_i(\mu_1, \dots, \mu_{m_i})]\!](\overline{\varphi}_n) \\
&= \bigsqcup_n [\![\mu]\!](\overline{\varphi}_n).
\end{aligned}$$

□

Следствие 3.3. Нека $\tau[\bar{\mathtt{x}}, \bar{\mathtt{f}}]$ е терм. Да разгледаме произволни елементи $\overline{a}$ на $\mathbb{N}_\perp^n$ и произволна верига $(\overline{\varphi}_r)_{r=0}^\infty$ от елементи на

$$[\mathbb{N}_\perp^{m_1} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp] \times \cdots \times [\mathbb{N}_\perp^{m_k} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp].$$

Тогава

$$[\![\tau]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r)(\overline{a}) = \bigsqcup_r [\![\tau]\!](\overline{\varphi}_r)(\overline{a}).$$

Доказателство.

$$\begin{aligned}
[\![\tau]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r)(\overline{a}) &= [\![\tau[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mathtt{a}}]]\!](\bigsqcup_r \overline{\varphi}_r) && \text{// от Лема за замяната}\\
&= \bigsqcup_r [\![\tau[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mathtt{a}}]]\!](\overline{\varphi}_r) && \text{// от \textit{Лема} 3.2}\\
&= \bigsqcup_r [\![\tau]\!](\overline{\varphi}_r)(\overline{a}) && \text{// от Лема за замяната}
\end{aligned}$$

□

Вече имаме всичко необходимо за да се убедим, че термалните оператори са непрекъснати.

Теорема 3.1. За всеки терм $\tau[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k]$, операторът

$$\Gamma_\tau : [\mathbb{N}_\perp^{m_1} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp] \times \cdots \times [\mathbb{N}_\perp^{m_k} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp] \to [\mathbb{N}_\perp^{n} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp],$$

дефиниран като

$$\Gamma_\tau(\bar{\varphi})(\bar{a}) = [\![\tau]\!](\overline{\varphi})(\bar{a}),$$

е непрекъснат.

Доказателство. От *Следствие* 3.2 имаме, че Γ_τ е коректно дефиниран. Сега директно се позоваваме на *Следствие* 3.3. □

3.2.4 Предаване на параметрите по име

Нека е дадена една рекурсивна програма $\mathtt{P}[\bar{\mathtt{x}}, \bar{\mathtt{f}}]$, където:

Можем да си мислим, че $\mathtt{f}_1$ е нещо като `main` функция за програмата `P`.

$$\mathtt{P} = \begin{cases}
\mathtt{f}_1(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_1}) = \tau_1[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_1}, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k]\\
\mathtt{f}_2(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_2}) = \tau_2[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_2}, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k]\\
\vdots\\
\mathtt{f}_k(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_k}) = \tau_k[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_k}, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k]
\end{cases}$$

Нека $\overline{\gamma} \in [\mathbb{N}_\perp^{m_1} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp] \times \cdots \times [\mathbb{N}_\perp^{m_k} \xrightarrow{\text{н}} \mathbb{N}_\perp]$ е *най-малкото решение* на системата

$$\Gamma_{\tau_1}(\varphi_1, \dots, \varphi_k) = \varphi_1$$

$$\vdots$$
$$\Gamma_{\tau_k}(\varphi_1, \dots, \varphi_k) = \varphi_k.$$

От Теоремата на Клини знаем, че такова съществува.

За дадената рекурсивна програма $\mathtt{P}[\bar{\mathtt{x}}, \bar{\mathtt{f}}]$, определяме **денотационната семантика с предаване на параметрите по име** като изображението $\mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!] \in [\mathbb{N}_\perp^{m_1} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$, където:

$$\mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!](a_1, \dots, a_{m_1}) \stackrel{\text{деф}}{=} \gamma_1(a_1, \dots, a_{m_1}).$$

3.2.5 Предаване на параметрите по стойност

Основната разлика между денотационната семантика по име и по стойност е, че при семантиката по стойност изискваме да работим *само с точни функции.*

Сигурни сме единствено, че термалните оператори запазват непрекъснатостта

Забележка 3.3. Да обърнем внимание, че термалните оператори Γ_τ не запазват точните функции, т.е. възможно е $\varphi \in [\mathbb{N}_\perp^n \stackrel{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$, но $\Gamma_\tau(\varphi) \notin [\mathbb{N}_\perp^m \stackrel{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$. Например, да разгледаме терма

$$\tau[\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{f}] \equiv \mathtt{x},$$

т.е. изобщо не се обръщаме към функционалния аргумент. Тогава ако $a \neq \perp$, но $b = \perp$, то $[\![\tau]\!](\varphi)(a, b) \neq \perp$.

Да се уверим, че хаскел „смята” по подобен начин.

```
ghci> let f(x,y,g) = x
ghci> let h(x,y) = f(x,y,(\z -> z))
ghci> h(1,undefined)
1
```

Вижда се, че макар и да подаваме точна функция като аргумент на `f`, то новополучената функция `h` не е точна.

Поради тази причина, за да дефинираме семантика с предаване на параметрите по стойност, ще използваме най-малки неподвижни точки на други оператори, *които винаги връщат точни функции.*

Теорема 3.2. За всеки терм $\tau[\bar{\mathtt{x}}, \bar{\mathtt{f}}]$, операторът

$$\Delta_\tau : [\mathbb{N}_\perp^{m_1} \stackrel{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp] \times \dots \times [\mathbb{N}_\perp^{m_k} \stackrel{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp] \to [\mathbb{N}_\perp^n \stackrel{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp],$$

дефиниран като

$$\Delta_\tau \stackrel{\text{деф}}{=} \Sigma_\star \circ \Gamma_\tau,$$

е непрекъснат.

Доказателство. Първо да съобразим, че Δ_τ е коректно дефиниран оператор, т.е. за $\bar{\varphi} \in [\mathbb{N}_\perp^{m_1} \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp] \times \cdots \times [\mathbb{N}_\perp^{m_k} \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp]$ имаме, че $\Delta_\tau(\bar{\varphi}) \in [\mathbb{N}_\perp^{n} \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp]$. Това е ясно, защото $\Sigma_\star$ превръща всяко изображение в точно.

От *Твърдение* 1.9 знаем, че $\Sigma_\star$ е непрекъснат оператор, а от *Твърдение* 1.5 знаем, че композиция на непрекъснати оператори е също непрекъснат оператор. Заключаваме, че Δ_τ е непрекъснат оператор. □

Нека разгледаме рекурсивната програма $\mathtt{P}[\bar{\mathtt{x}}, \bar{\mathtt{f}}]$ на езика **REC**, където:

Тук отново можем да си мислим за $\mathtt{f}_1$ като за `main` функцията на програмата `P`.

$$\mathtt{P} = \begin{cases} \mathtt{f}_1(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_1}) = \tau_1[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_1}, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k] \\ \mathtt{f}_2(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_2}) = \tau_2[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_2}, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k] \\ \vdots \\ \mathtt{f}_k(\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_k}) = \tau_k[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_{m_k}, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k] \end{cases}$$

Нека $\bar{\delta} \in [\mathbb{N}_\perp^{m_1} \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp] \times \cdots \times [\mathbb{N}_\perp^{m_k} \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp]$ е *най-малкото решение* на системата, която съответства на програмата `P`:

$$\begin{aligned} &\Delta_{\tau_1}(\psi_1, \dots, \psi_k) = \psi_1 \\ &\vdots \\ &\Delta_{\tau_k}(\psi_1, \dots, \psi_k) = \psi_k. \end{aligned}$$

Понеже Δ_{τ_i} са непрекъснати оператори, то Теоремата на Клини знаем, че такива точни изображения $\bar{\delta}$ съществуват.

За рекурсивната програма $\mathtt{P}[\bar{\mathtt{x}}, \bar{\mathtt{f}}]$, определяме **денотационната семантика с предаване на параметрите по стойност** като изображението $\mathcal{D}_V[\![\mathtt{P}]\!] \in [\mathbb{N}_\perp^{m_1} \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp]$, където:

$$\mathcal{D}_V[\![\mathtt{P}]\!](a_1, \dots, a_{m_1}) \stackrel{\text{деф}}{=} \delta_1(a_1, \dots, a_{m_1}).$$

3.2.6 Сравнение между двете семантики

Пример 3.4. Да разгледаме програмата `P` на езика **REC**:

```
f(x) = g(f(x))
g(x) = 0
```

Да проверим, че $\mathcal{D}_V[\![\mathtt{P}]\!] \neq \mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!]$. Имаме, че

$$\begin{aligned} \tau_1[\mathtt{x}, \mathtt{f}, \mathtt{g}] &\equiv \mathtt{g}(\mathtt{f}(\mathtt{x})) \\ \tau_2[\mathtt{x}, \mathtt{f}, \mathtt{g}] &\equiv \mathtt{0}. \end{aligned}$$

За $i = 1, 2$ дефинираме операторите

$$\Delta_{\tau_i} \in [[\mathbb{N}_\perp \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp] \times [\mathbb{N}_\perp \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp] \xrightarrow{\text{н}} [\mathbb{N}_\perp \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp]],$$

които имат следните дефиниции:

$$\Delta_{\tau_1}(\varphi, \psi)(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{cases} \psi(\varphi(x)), & \text{ако } x \neq \perp \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases}$$

$$\Delta_{\tau_2}(\varphi, \psi)(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{cases} 0, & \text{ако } x \neq \perp, \\ \perp, & \text{ако } x = \perp. \end{cases}$$

Нека $\Delta \stackrel{\text{деф}}{=} \Delta_{\tau_1} \times \Delta_{\tau_2}$. За да намерим най-малкото решение на системата, трябва да намерим най-малката неподвижна точка на Δ. Ще получим това най-малко решение като точна горна граница на редица от двойки функции (φ_i, ψ_i). Имаме, че $\varphi_0 \stackrel{\text{деф}}{=} \lambda x.\perp$ и $\psi_0 \stackrel{\text{деф}}{=} \lambda x.\perp$. За произволно $x \in \mathbb{N}_\perp$ имаме, че

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &\stackrel{\text{деф}}{=} \Delta_{\tau_1}(\varphi_0, \psi_0)(x) \\ &= \begin{cases} \psi_0(\varphi_0(x)), & \text{ако } x \neq \perp \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases} \\ &= \perp \\ \psi_1(x) &\stackrel{\text{деф}}{=} \Delta_{\tau_2}(\varphi_0, \psi_0)(x) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ако } x \neq \perp \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases} \end{aligned}$$

Това означава, че $\Delta(\varphi_0, \psi_0) = (\varphi_1, \psi_1)$. При следващата итерация получаваме следното:

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &\stackrel{\text{деф}}{=} \Delta_{\tau_1}(\varphi_1, \psi_1)(x) \\ &= \begin{cases} \psi_1(\varphi_1(x)) & \text{ако } x \neq \perp \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases} \\ &= \begin{cases} \psi_1(\perp) & \text{ако } x \neq \perp \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases} \\ &= \perp \\ \psi_2(x) &\stackrel{\text{деф}}{=} \Delta_{\tau_2}(\varphi_1, \psi_1)(x) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ако } x \neq \perp \\ \perp, & \text{ако } x = \perp \end{cases} \\ &= \psi_1(x). \end{aligned}$$

Получихме, че $\Delta(\varphi_1, \psi_1) = (\varphi_1, \psi_1)$ и следователно $\mathtt{lfp}(\Delta) = (\varphi_1, \psi_1)$. Тогава за всяко $a \in \mathbb{N}_\perp$,

$$\mathcal{D}_V[\![\mathtt{P}]\!](a) = \varphi_1(a) = \perp.$$

Сега да намерим семантика по име на горната програма. За $i = 1, 2$ дефинираме операторите

$$\Gamma_{\tau_i} \in [[\mathbb{N}_\perp \stackrel{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp] \times [\mathbb{N}_\perp \stackrel{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp] \stackrel{\text{н}}{\to} [\mathbb{N}_\perp \stackrel{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp]],$$

които имат следните дефиниции

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tau_1}(\varphi, \psi)(x) &\stackrel{\text{деф}}{=} \psi(\varphi(x)) \\ \Gamma_{\tau_2}(\varphi, \psi)(x) &\stackrel{\text{деф}}{=} 0. \end{aligned}$$

Търсим най-малката неподвижна точна на оператора

$$\Gamma(\varphi, \psi) \stackrel{\text{деф}}{=} (\Gamma_{\tau_1}(\varphi, \psi), \Gamma_{\tau_2}(\varphi, \psi)).$$

Имаме, че $\varphi_0 \stackrel{\text{деф}}{=} \lambda x.\bot$ и $\psi_0 \stackrel{\text{деф}}{=} \lambda x.\bot$. Сега, за произволно $x \in \mathbb{N}_\bot$, получаваме:

т.е. това са функциите, които винаги връщат $\bot$

$$\varphi_1(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma_{\tau_1}(\varphi_0, \psi_0)(x) = \psi_0(\varphi_0(x)) = \bot$$
$$\psi_1(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma_{\tau_2}(\varphi_0, \psi_0)(x) = 0.$$

Това означава, че $\Gamma(\varphi_0, \psi_0) = (\varphi_1, \psi_1)$. Итерираме процеса още веднъж, и получаваме:

Единствената разлика е, че тук не разглеждаме отделен случай дали $x = \bot$

$$\varphi_2(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma_{\tau_1}(\varphi_1, \psi_1)(x) = \psi_1(\varphi_1(x)) = 0$$
$$\psi_2(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma_{\tau_2}(\varphi_1, \psi_1)(x) = 0.$$

Това означава, че $\Gamma(\varphi_1, \psi_1) = (\varphi_2, \psi_2)$. Отново итерираме процеса:

$$\varphi_3(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma_{\tau_1}(\varphi_2, \psi_2)(x) = \psi_2(\varphi_2(x)) = 0 = \varphi_2(x)$$
$$\psi_3(x) \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma_{\tau_2}(\varphi_2, \psi_2)(x) = 0 = \psi_2(x).$$

Получихме, че $\Gamma(\varphi_2, \psi_2) = (\varphi_2, \psi_2)$ и следователно $\mathtt{lfp}(\Gamma) = (\varphi_2, \psi_2)$. Тогава, за всяко $a \in \mathbb{N}_\bot$,

$$\mathcal{D}_N[\![\mathrm{P}]\!](a) = \varphi_2(a) = 0.$$

Това означава, че денотационната семантика по име на програмата `P` е константната функция, която винаги връща 0. Обърнете внимание, че също $\mathcal{D}_N[\![\mathrm{P}]\!](\bot) = 0$.

Можем да проверим нашите изчисления за най-малките неподвижни точки на операторите Γ и Δ от горния пример като преведем техните дефиниции на `хаскел`.

```
ghci> let gamma1(f,g)(x) = g(f(x))
ghci> let gamma2(f,g)(x) = 0
ghci> let gamma(f,g) = (gamma1(f,g), gamma2(f,g))
ghci> let omega = \x -> undefined
ghci> let approxCBN = (omega, omega) : [gamma(f,g) | (f,g) <- approxCBN ]
ghci> let (f3, g3) = approxCBN !! 3
ghci> f3(undefined)
0
ghci> f3(55)
0
ghci> :set -XBangPatterns
ghci> let delta1(f,g)(!x) = g(f(x))
ghci> let delta2(f,g)(!x) = 0
ghci> let delta(f,g) = (delta1(f,g), delta2(f,g))
ghci> let approxCBV = (omega, omega) : [delta(f,g) | (f,g) <- approxCBV ]
ghci> let (f3', g3') = approxCBV !! 3
ghci> f3'(undefined)
undefined
ghci> f3'(0)
undefined
ghci> f3'(55)
undefined
```

Горният пример показва, че съществуват програми $\mathtt{P}$, за които двете денотационни семантики са различни, но все пак $\mathcal{D}_V[\![\mathtt{P}]\!] \sqsubseteq \mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!]$. Ще видим, че това свойство е вярно за всяка програма $\mathtt{P}$ на езика **REC**.

Твърдение 3.2. Да разгледаме произволен терм $\tau[\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_n, \mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_k]$. Тогава всеки

$$\bar{\varphi} \in [\mathbb{N}_\perp^{m_1} \to \mathbb{N}_\perp] \times \cdots \times [\mathbb{N}_\perp^{m_k} \to \mathbb{N}_\perp]$$

е изпълнено, че

$$\Delta_\tau(\bar{\varphi}) \sqsubseteq \Gamma_\tau(\bar{\varphi}).$$

Упътване. Понеже за всяка $\varphi \in [\mathbb{N}_\perp^n \to \mathbb{N}_\perp]$,

$$\Sigma_\star(\varphi) \sqsubseteq \varphi,$$

по получаваме, че

$$\Delta_\tau(\bar{\varphi}) \stackrel{\text{деф}}{=} \Sigma_\star(\Gamma_\tau(\bar{\varphi})) \sqsubseteq \Gamma_\tau(\bar{\varphi}).$$

Обърнете внимание, че ако φ е точна функция, то $\Gamma_\tau(\varphi)$ е непрекъсната, но може да не е точна.

□

Теорема 3.3. За всяка рекурсивна програма $\mathtt{P}$ е изпълнено, че

$$\mathcal{D}_V[\![\mathtt{P}]\!] \sqsubseteq \mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!].$$

Доказателство. Първо с индукция по k ще докажем, че

$$(\forall k)[\ \bar{\delta}_k \sqsubseteq \bar{\gamma}_k\ ].$$

За $k = 0$ е ясно, защото $\delta_0^i(\bar{x}) = \perp = \gamma_0^i(\bar{x})$. Да приемем, че $\bar{\delta}_k \sqsubseteq \bar{\gamma}_k$. Тогава

Озн. $\bar{\delta}_k = (\delta_k^1, \dots, \delta_k^n)$

$$\begin{aligned}
\delta_{k+1}^i &\stackrel{\text{деф}}{=} \Delta_{\tau_i}(\bar{\delta}_k) \\
&\sqsubseteq \Gamma_{\tau_i}(\bar{\delta}_k) && \text{// \textit{Твърдение} 3.2} \\
&\sqsubseteq \Gamma_{\tau_i}(\bar{\gamma}_k) && \text{// } \Gamma_{\tau_i} \text{ е мон., а от \textbf{И.П.} имаме, че } \bar{\delta}_k \sqsubseteq \bar{\gamma}_k \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \gamma_{k+1}^i.
\end{aligned}$$

Заключаваме, че $\bar{\delta}_{k+1} \sqsubseteq \bar{\gamma}_{k+1}$. Сега е лесно да съобразим, че

$$\delta^i = \bigsqcup_k \delta_k^i \sqsubseteq \bigsqcup_k \gamma_k^i = \gamma^i.$$

Оттук следва, че

$$\bar{\delta} = \bigsqcup_k \bar{\delta}_k \sqsubseteq \bigsqcup_k \bar{\gamma}_k = \bar{\gamma}. \tag{3.5}$$

Сега, за произволни елементи $\bar{a}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_V[\![\mathtt{h}]\!](\bar{a}) &\stackrel{\text{деф}}{=} \delta_1(\bar{a}) \\
&\sqsubseteq \gamma_1(\bar{a}) && \text{// от (3.5) имаме, че } \bar{\delta} \sqsubseteq \bar{\gamma} \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \mathcal{D}_N[\![\mathtt{h}]\!](\bar{a}).
\end{aligned}$$

□

3.3 Операционна семантика

3.3.1 Предаване на параметрите по име

Правилата за извод с предаване на параметрите по име, които означаваме като $\mu \rightarrow_N^P c$, са същите като тези с предаване на параметрите по стойност като единствената разлика е, че вместо правилата $(4)_{\mathbb{N}}$ и $(4)_\perp$ имаме правилото (4).

За всяко $a \in \mathbb{N}_\perp$,

$$\frac{}{\texttt{a} \rightarrow_N^P a}\ (1)$$

$$\frac{\mu_1 \rightarrow_N^P a_1 \quad \mu_2 \rightarrow_N^P a_2 \quad a = \texttt{plus}(a_1, a_2)}{\mu_1 + \mu_2 \rightarrow_N^P a}\ (2_+)$$

$$\frac{\mu_1 \rightarrow_N^P a_1 \quad \mu_2 \rightarrow_N^P a_2 \quad a = \texttt{eq}(a_1, a_2)}{\mu_1 \texttt{ == } \mu_2 \rightarrow_N^P a}\ (2_{==})$$

$$\frac{\mu_0 \rightarrow_N^P a_0 \quad \mu_1 \rightarrow_N^P a_1 \quad a_0 \in \mathbb{N}^+}{\texttt{if } \mu_0 \texttt{ then } \mu_1 \texttt{ else } \mu_2 \rightarrow_N^P a_1}\ (3_{\mathtt{t}})$$

$$\frac{\mu_0 \rightarrow_N^P 0 \quad \mu_2 \rightarrow_N^P a_2}{\texttt{if } \mu_0 \texttt{ then } \mu_1 \texttt{ else } \mu_2 \rightarrow_N^P a_2}\ (3_{\mathtt{f}})$$

$$\frac{\mu_0 \rightarrow_N^P \perp}{\texttt{if } \mu_0 \texttt{ then } \mu_1 \texttt{ else } \mu_2 \rightarrow_N^P \perp}\ (3_\perp)$$

$$\frac{\tau_i[\mathtt{x}_1/\mu_1, \ldots, \mathtt{x}_{m_i}/\mu_{m_i}] \rightarrow_N^P a}{\mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i}) \rightarrow_N^P a}\ (4)$$

За фиксирана декларация P, нека за всеки *функционален* терм μ да дефинираме

$$\mathrm{eval}_N^P[\![\mu]\!] \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{cases} b, & \text{ако } \mu \rightarrow_N^P b \\ \perp, & \text{ако } \mu \text{ няма извод до константа.} \end{cases}$$

Операционната семантика по име на рекурсивната програма $\mathtt{P}[\bar{\mathtt{x}}, \bar{\mathtt{f}}]$ представлява изображението

$$\mathcal{O}_N[\![\mathtt{P}]\!] \in [\mathbb{N}_\perp^{m_1} \stackrel{\text{н}}{\rightarrow} \mathbb{N}_\perp],$$

където
$$\mathcal{O}_N[\![\mathtt{P}]\!](a_1, \dots, a_{m_1}) \stackrel{\text{деф}}{=} \text{eval}^P_N[\![\mathtt{f}_1(\mathtt{a}_1, \dots, \mathtt{a}_{m_1})]\!],$$
за произволни $a_1, \dots, a_{m_1} \in \mathbb{N}_\perp$.

Забележка 3.4. Всъщност ние все още няма как да знаем, че за всяка програма P, $\mathcal{O}_N[\![\mathtt{P}]\!]$ е непрекъснато изображение. Този факт може да се докаже директно, но вместо това, ние ще видим, че $\mathcal{O}_N[\![\mathtt{P}]\!] = \mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!]$ и оттам ще получим непрекъснатостта на $\mathcal{O}_N[\![\mathtt{P}]\!]$, защото от дефиницията на $\mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!]$ е ясно, че то непрекъснато изображение.

Пример 3.5. Нека за програмата P:

```
f(x,y) = if x == y then 0 else 1 + f(x,y+1)
```

да разгледаме няколко извода с правилата на операционната семантика по име.

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{}{3 \to_N^P 3}\,(1) \qquad \dfrac{}{2 \to_N^P 2}\,(1)
  }{\texttt{3 == 2} \to_N^P 0}\,(2_{==})
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{}{1 \to_N^P 1}\,(1) \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{
          \dfrac{}{3 \to_N^P 3}\,(1) \qquad \dfrac{}{\texttt{2+1} \to_N^P 3}\,(1)
        }{\texttt{3 == 2 + 1} \to_N^P 1}\,(2_{==})
        \qquad
        \dfrac{}{0 \to_N^P 0}\,(1)
      }{\texttt{if 3 == 2+1 then 0 else 1+f(3,2+1+1)} \to_N^P 0}\,(2_{\mathtt{t}})
    }{\texttt{f(3,2+1)} \to_N^P 0}\,(4)
  }{\texttt{1 + f(3,2+1)} \to_N^P 1}\,(2_{+})
}{
  \dfrac{\texttt{if 3 == 2 then 0 else 1 + f(3,2+1)} \to_N^P 1}{\texttt{f(3,2)} \to_N^P 1}\,(4)
}\,(2_{\mathtt{f}})
$$

Фигура 3.1: Крайно дърво на извод започващо от функционалния терм `f(3,2)`

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{2 \to_N^P 2}\,(1) \qquad \dfrac{}{\perp \to_N^P \perp}\,(1)
    }{\texttt{3 ==}\ \perp \to_N^P \perp}\,(2_{==})
  }{\texttt{if 3 ==}\ \perp\ \texttt{then 0 else 1 + f(3,}\perp\texttt{+1)} \to_N^P \perp}\,(2_{\perp})
}{\texttt{f(3,}\perp\texttt{)} \to_N^P \perp}\,(4)
$$

Фигура 3.2: Крайно дърво на извод започващо от функционалния терм `f(3,⊥)`

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      (1)\,\dfrac{}{\texttt{2} \to^{P}_{N} 2}
      \qquad
      \dfrac{}{\texttt{3} \to^{P}_{N} 3}\,(1)
    }{\texttt{2 == 3} \to^{P}_{N} 0}\,(2_{==})
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{}{\texttt{1} \to^{P}_{N} 1}\,(1)
      \qquad
      \dfrac{
        \dfrac{
          \dfrac{
            (1)\,\dfrac{}{\texttt{2} \to^{P}_{N} 2}
            \qquad
            \dfrac{
              (1)\,\dfrac{}{\texttt{3} \to^{P}_{N} 3}
              \qquad
              \dfrac{}{\texttt{1} \to^{P}_{N} 1}\,(1)
            }{\texttt{3+1} \to^{P}_{N} 4}\,(2_{+})
          }{\texttt{2 == 3+1} \to^{P}_{N} 0}\,(2_{==})
          \qquad
          \dfrac{\vdots}{\texttt{1 + f(2,3+1+1)} \to^{P}_{N} \square}
        }{\texttt{if 2 == 3+1 then 0 else 1 + f(2,3+1+1)} \to^{P}_{N} \square}\,(2_{\mathtt{f}})
      }{\texttt{f(2,3+1)} \to^{P}_{N} \square}\,(4)
    }{\texttt{1+f(2,3+1)} \to^{P}_{N} \square}\,(2_{+})
  }{\texttt{if 2 == 3 then 0 else 1 + f(2,3+1)} \to^{P}_{N} \square}\,(2_{\mathtt{f}})
}{\texttt{f(2,3)} \to^{P}_{N} \square}\,(4)
$$

Фигура 3.3: Част от безкрайното дърво на извод започващо от функционалния терм `f(2,3)`

3.3.2 Теорема за еквивалентност

Твърдение 3.3. Да разгледаме една програма $\mathtt{P}$. Нека $\mu[\mathtt{f}_1, \dots, \mathtt{f}_n]$ е *функционален* терм. Тогава

$$\mathrm{eval}_N^P[\![\mu]\!] \sqsubseteq [\![\mu]\!](\bar{\gamma}),$$

където $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ е някоя неподвижна точка на оператора

$$\Gamma \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma_{\tau_1} \times \dots \times \Gamma_{\tau_n},$$

който съответства на програмата $\mathtt{P}$.

Винаги с μ ще означаваме функционални термове; с τ - произволни термове

В [?, стр. 192], [?, стр. 157] доказателството е друго

Сравнете с *Твърдение* 3.5

За това твърдение не е необходимо $\bar{\gamma}$ да бъде най-малката неподвижна точка на Γ, а просто решение. Само за другата посока ще е важно да е най-малкото решение.

Доказателство. Ако от терма μ *няма извод* до елемент на $\mathbb{N}_\perp$, то по дефиниция $\mathrm{eval}_N^P[\![\mu]\!] = \perp$ и в този случай е очевидно, че

$$\mathrm{eval}_N^P[\![\mu]\!] \sqsubseteq [\![\mu]\!](\bar{\gamma}).$$

Интересният случай е когато от терма μ *има извод* до елемент на $\mathbb{N}_\perp$. Тогава ще докажем, че за произволен функционален терм μ и елемент $a \in \mathbb{N}_\perp$,

$$\mu \to_N^{\mathtt{P}} a \implies [\![\mu]\!](\bar{\gamma}) = a. \tag{3.6}$$

Доказателството на (3.6) ще проведем с индукция по дължината на извода $\mu \to_N^P a$.

Константата $\mathtt{a}$ има стойност елементът a, която принадлежи на $\mathbb{N}_\perp$

Нека изводът има дължина 1. Понеже μ е функционален терм, според правилата на операционната семантика, единствената възможност е $\mu \equiv \mathtt{a}$. Тогава е очевидно, че $[\![\mu]\!](\bar{\gamma}) = a$. Ясно е, че в този случай,

$$\mathtt{a} \to_N^{\mathtt{P}} a \implies [\![\mathtt{a}]\!](\bar{\gamma}) = a.$$

Нека (3.6) е изпълнено, когато $\mu \to_N^P a$ има извод с дължина $< \ell$. Ще докажем твърдението когато изводът има дължина ℓ. Трябва да разгледаме различни случаи в зависимост от вида на функционалния терм μ.

- Да разгледаме случая, когато $\mu \equiv \mu_1 + \mu_2$. Нека $\mu_1 + \mu_2 \to_N^P a$ като дължината на извода е ℓ. Според правилата за извод в операционната семантика по име, имаме следната ситуация:

$$\dfrac{(\text{Извод с дълж. } \ell_1)\ \dfrac{\vdots}{\mu_1 \to_N^P a_1} \qquad \dfrac{\vdots}{\mu_2 \to_N^P a_2}\ (\text{Извод с дълж. } \ell_2)}{\mu_1 + \mu_2 \to_N^P a}\ \text{правило } (2_+)$$

  където $a = \mathtt{plus}(a_1, a_2)$, и дължината на извода $\ell = \ell_1 + \ell_2 + 1$. Ясно е, че изводите на $\mu_1 \to_N^P a_1$ и $\mu_2 \to_N^P a_2$ са с дължини $< \ell$. Следователно можем да приложим **И.П.** за μ_1 и μ_2, откъдето получаваме, че

$$\mu_1 \to_N^P a_1 \implies [\![\mu_1]\!](\bar{\gamma}) = a_1$$
$$\mu_2 \to_N^P a_2 \implies [\![\mu_2]\!](\bar{\gamma}) = a_2.$$

  Тогава получаваме, че ако $\mu_1 + \mu_2 \to_N^P a$, то

$$\begin{aligned} [\![\mu_1 + \mu_2]\!](\bar{\gamma}) &\stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{plus}([\![\mu_1]\!](\bar{\gamma}), [\![\mu_2]\!](\bar{\gamma})) \\ &= \mathtt{plus}(a_1, a_2) \\ &= a. \end{aligned}$$

- Случаят, когато $\mu \equiv \mu_1$ `==` μ_2 е лесен.
- Случаят, когато $\mu \equiv$ `if` μ_0 `then` μ_1 `else` μ_2, е лесен.
- Нека имаме функционалния терм $\mu \equiv \mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i})$ и $\mu \to_N^P a$. Според правилата за извод в операционната семантика по име, имаме следната ситуация:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\tau_i[\mathtt{x}_1/\mu_1, \ldots, \mathtt{x}_{m_i}/\mu_{m_i}] \to_N^P a}\ \text{Извод с дълж. } (\ell - 1)}{\mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i}) \to_N^P a}\ \text{правило (4)}$$

Понеже изводът $\tau_i[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}] \to_N^P a$ има дължина $\ell - 1 < \ell$, от **И.П.** имаме, че

$$\tau_i[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}] \to_N^P a \implies [\![\tau_i[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!](\overline{\gamma}) = a.$$

Лесно се съобразява, че:

Озн. $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Единствено в този случай се използва, че $\overline{\gamma}$ е решение на системата от оператори, като не е задължително да е най-малкото решение.

$$\begin{aligned}
[\![\tau_i[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!](\overline{\gamma}) &= [\![\tau_i]\!](\overline{\gamma})([\![\mu_1]\!](\overline{\gamma}), \ldots, [\![\mu_{m_i}]\!](\overline{\gamma})) && \text{// Лема за замяната}\\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma_{\tau_i}(\overline{\gamma})([\![\mu_1]\!](\overline{\gamma}), \ldots, [\![\mu_{m_i}]\!](\overline{\gamma}))\\
&= \gamma_i([\![\mu_1]\!](\overline{\gamma}), \ldots, [\![\mu_{m_i}]\!](\overline{\gamma})) && \text{// } \gamma_i = \Gamma_{\tau_i}(\overline{\gamma})\\
&\stackrel{\text{деф}}{=} [\![\mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i})]\!](\overline{\gamma}). && \text{// стойност на терм}
\end{aligned}$$

Обединявайки всичко, което знаем, получаваме:

$$\begin{aligned}
\mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i}) \to_N^P a &\implies \tau_i[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}] \to_N^P a && \text{// правило (4)}\\
&\implies [\![\tau_i[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!](\overline{\gamma}) = a && \text{// \textbf{И.П.}}\\
&\implies [\![\mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i})]\!](\overline{\gamma}) = a.
\end{aligned}$$

С това доказателството на (3.6) е завършено. □

Следствие 3.4. За всяка рекурсивна програма `P` на езика **REC** имаме, че

$$\mathcal{O}_N[\![\mathtt{P}]\!] \sqsubseteq \mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!].$$

Доказателство. Нека $\overline{\gamma}$ е най-малкото решение на системата от непрекъснати оператори, която съответства на програмата `P`. Тогава

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_N[\![\mathtt{P}]\!](a_1, \ldots, a_{m_1}) &\stackrel{\text{деф}}{=} \mathrm{eval}_N^P[\![\mathtt{f}_1(\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_{m_1})]\!]\\
&\sqsubseteq [\![\mathtt{f}_1(\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_{m_1})]\!](\overline{\gamma}) && \text{// \textit{Твърдение} 3.3}\\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \gamma_1([\![\mathtt{a}_1]\!](\overline{\gamma}), \ldots, [\![\mathtt{a}_{m_1}]\!](\overline{\gamma})) && \text{// стойност на терм}\\
&= \gamma_1(a_1, \ldots, a_{m_1}) && \text{// } [\![\mathtt{a}_i]\!](\overline{\gamma}) = a_i\\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!](a_1, \ldots, a_{m_1}).
\end{aligned}$$

□

Така получихме едната посока на теоремата за еквивалентност. Сега преминаваме към доказателството на другата посока.

Нека сега $\overline{\gamma}$ е най-малкото решение на системата от оператори, която съответства на програма $\mathtt{P}$ за денотационната семантика по име. Да напомним, че това означава, че $\overline{\gamma} = \bigsqcup_r \overline{\gamma}_r$, където $\gamma^i_{r+1} = \Gamma_{\tau_i}(\overline{\gamma}_r)$ и $\overline{\gamma}_r = (\gamma^1_r, \ldots, \gamma^k_r)$.

Съобразете защо не можем да докажем по-простото твърдение, че за всеки функционален терм μ и всяко r, $[\![\mu]\!](\overline{\gamma}_r) \sqsubseteq \mathrm{eval}^P_N[\![\mu]\!]$.

Твърдение 3.4. Да разгледаме една програма $\mathtt{P}$ в езика **REC**, като $\overline{\gamma} = \bigsqcup_r \overline{\gamma}_r$ е най-малкото решение на системата от оператори за $\mathtt{P}$. Тогава за произволен терм $\tau[\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n, \mathtt{f}_1, \ldots, \mathtt{f}_k]$ и произволни функционални термове

$$\mu_1[\mathtt{f}_1, \ldots, \mathtt{f}_k], \ldots, \mu_n[\mathtt{f}_1 \ldots, \mathtt{f}_k],$$

и всяко r, е изпълнено, че:

$$[\![\tau]\!](\overline{\gamma}_r)(\mathrm{eval}^P_N[\![\mu_1]\!], \ldots, \mathrm{eval}^P_N[\![\mu_n]\!]) \sqsubseteq \mathrm{eval}^P_N[\![\tau[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!].$$

Доказателство. За произволно естествено число r, нека твърдението $\mathtt{Include}(r)$ да гласи следното:

„за произволен терм $\tau[\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n, \mathtt{f}_1, \ldots, \mathtt{f}_k]$ и произволни функционални термове $\mu_1[\mathtt{f}_1, \ldots, \mathtt{f}_k], \ldots, \mu_n[\mathtt{f}_1 \ldots, \mathtt{f}_k]$, е изпълнено, че:

$$[\![\tau]\!](\overline{\gamma}_r)(\mathrm{eval}^P_N[\![\mu_1]\!], \ldots, \mathrm{eval}^P_N[\![\mu_n]\!]) \sqsubseteq \mathrm{eval}^P_N[\![\tau[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!].\text{"}$$

Трябва да докажем, че $\mathtt{Include}(r)$ е изпълнено за всяко r. Това ще направим с индукция по r.

- Първо ще докажем $\mathtt{Include}(0)$. Това ще направим с индукция по построението на терма τ. Да разгледаме произволни функционални термове μ_i и за улеснение да положим $a_i \stackrel{\text{деф}}{=} \mathrm{eval}^P_N[\![\mu_i]\!]$.

  – Нека $\tau \equiv \mathtt{c}$. Тогава:

  $$\begin{aligned} [\![\mathtt{c}]\!](\overline{\gamma}_0)(\overline{a}) &\stackrel{\text{деф}}{=} c \\ &\stackrel{\text{деф}}{=} \mathrm{eval}^P_N[\![\mathtt{c}]\!] && \text{// правило (1)} \\ &= \mathrm{eval}^P_N[\![\mathtt{c}[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!]. \end{aligned}$$

  – Нека $\tau \equiv \mathtt{x}_i$. Тогава:

  $$\begin{aligned} [\![\mathtt{x}_i]\!](\overline{\gamma}_0)(\overline{a}) &\stackrel{\text{деф}}{=} a_i \\ &= \mathrm{eval}^P_N[\![\mu_i]\!] && \text{// } a_i \stackrel{\text{деф}}{=} \mathrm{eval}^P_N[\![\mu_i]\!] \\ &= \mathrm{eval}^P_N[\![\mathtt{x}_i[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!]. \end{aligned}$$

  – Нека $\tau \equiv \tau_1 + \tau_2$. В този случай, τ е съставен от по-простите термове τ_1 и τ_2. От **И.П.** за τ_1 и τ_2 следва, че за $i = 1, 2$ е изпълнено следното:

  $$[\![\tau_i]\!](\overline{\gamma}_0)(\overline{a}) \sqsubseteq \mathrm{eval}^P_N[\![\tau_i[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!]. \tag{3.7}$$

  Да напомним, че изображението $\mathtt{plus}$ е непрекъснато, откъдето следва, че също така е монотонно. Тогава:

  $$\begin{aligned} [\![\tau_1 + \tau_2]\!](\overline{\gamma}_0)(\overline{a}) &\stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{plus}([\![\tau_1]\!](\overline{\gamma}_0)(\overline{a}), [\![\tau_2]\!](\overline{\gamma}_0)(\overline{a})) \\ &\sqsubseteq \mathtt{plus}(\mathrm{eval}^P_N[\![\tau_1[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!], \mathrm{eval}^P_N[\![\tau_2[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!]) && \text{// от (3.7)} \\ &= \mathrm{eval}^P_N[\![\tau[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!] && \text{// правило } (2_+) \end{aligned}$$

✍ Тези два случая са за домашно!

– Нека $\tau \equiv \tau_1$ `==` τ_2.
– Нека $\tau \equiv$ `if` τ_0 `then` τ_1 `else` τ_2.
– Нека $\tau \equiv \mathtt{f}_i(\rho_1, \dots, \rho_{m_i})$. Тогава

$$
\begin{aligned}
[\![\tau]\!](\overline{\gamma}_0)(\overline{a}) &\stackrel{\text{деф}}{=} \gamma_0^i([\![\rho_1]\!](\overline{\gamma}_0)(\overline{a}), \dots, [\![\rho_{m_i}]\!](\overline{\gamma}_0)(\overline{a})) \\
&= \bot && // \ \gamma_0^i(\overline{x}) \stackrel{\text{деф}}{=} \bot \\
&\sqsubseteq \mathrm{eval}_N^P[\![\tau[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!].
\end{aligned}
$$

Така доказахме, че `Include`(0) е изпълнено.

- Нека $r > 0$. Да приемем, че `Include`$(r-1)$ е изпълнено. Ще докажем `Include`(r). Единственият случай, който заслужава внимание е

✍ Разгледайте сами останалите случаи за τ и се убедете, че те наистина се доказват по същия начин както при $r = 0$

$$\tau \equiv \mathtt{f}_i(\rho_1, \dots, \rho_{m_i}).$$

Доказателствата на всички останали случаи за τ протичат по абсолютно същия начин както при $r = 0$.

Понеже термът τ е построен с помощта на термовете ρ_j, за $j = 1, \dots, m_i$, можем да приложим **И.П.** за тях и да получим, че

$$
\begin{aligned}
[\![\rho_j]\!](\overline{\gamma}_r)(\underbrace{\mathrm{eval}_N^P[\![\mu_1]\!]}_{a_1}, \dots, \underbrace{\mathrm{eval}_N^P[\![\mu_n]\!]}_{a_n}) &= \underbrace{[\![\rho_j]\!](\overline{\gamma}_r)(a_1, \dots, a_n)}_{b_j} \\
&\sqsubseteq \underbrace{\mathrm{eval}_N^P[\![\rho_j[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!]}_{c_j}. && // \text{ от } \textbf{И.П.}
\end{aligned}
$$

Обърнете внимание, че ρ'_j са функционални термове

Нека за наше улеснение да положим $\rho'_j \stackrel{\text{деф}}{=} \rho[\bar{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]$. Това означава, че до момента имаме следното:

$$[\![\tau_i]\!](\overline{\varphi})(\underbrace{[\![\rho_1]\!](\overline{\gamma}_r)(\overline{a})}_{b_1}, \dots, \underbrace{[\![\rho_{m_i}]\!](\overline{\gamma}_r)(\overline{a})}_{b_{m_i}}) \sqsubseteq [\![\tau_i]\!](\overline{\varphi})(\underbrace{\mathrm{eval}_N^P[\![\rho'_1]\!]}_{c_1}, \dots, \underbrace{\mathrm{eval}_N^P[\![\rho'_{m_i}]\!]}_{c_{m_i}}),$$

за произволни непрекъснати изображения $\overline{\varphi}$.

Като обединим всичко от по-горе, получаваме следното:

$$
\begin{aligned}
[\![\tau]\!](\overline{\gamma}_r)(\overline{a}) &= [\![\mathtt{f}_i(\rho_1, \dots, \rho_{m_i})]\!](\overline{\gamma}_r)(\overline{a}) \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \gamma_r^i(\underbrace{[\![\rho_1]\!](\overline{\gamma}_r)(\overline{a})}_{b_1}, \dots, \underbrace{[\![\rho_{m_i}]\!](\overline{\gamma}_r)(\overline{a})}_{b_{m_i}}) \\
&= \gamma_r^i(b_1, \dots, b_{m_i}) \\
&\sqsubseteq \gamma_r^i(c_1, \dots, c_{m_i}) && // \ \gamma_r^i \text{ е непр. и следователно мон.} \\
&= \Gamma_{\tau_i}(\overline{\gamma}_{r-1})(c_1, \dots, c_{m_i}) && // \ \gamma_r^i \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma_{\tau_i}(\overline{\gamma}_{r-1}) \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} [\![\tau_i]\!](\overline{\gamma}_{r-1})(c_1, \dots, c_{m_i}) \\
&= [\![\tau_i]\!](\overline{\gamma}_{r-1})(\underbrace{\mathrm{eval}_N^P[\![\rho'_1]\!]}_{c_1}, \dots, \underbrace{\mathrm{eval}_N^P[\![\rho'_{m_i}]\!]}_{c_{m_i}})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sqsubseteq \mathrm{eval}_N^P[\![\tau_i[\mathtt{x}_1/\rho'_1,\ldots,\mathtt{x}_{m_i}/\rho'_{m_i}]]\!] && \text{// от } \mathtt{Include}(r-1)\\
&= \mathrm{eval}_N^P[\![\mathtt{f}_i(\rho'_1,\ldots,\rho'_{m_i})]\!] && \text{// от правило (4)}\\
&= \mathrm{eval}_N^P[\![\mathtt{f}_i(\rho_1[\overline{\mathtt{x}}/\overline{\mu}],\ldots,\rho_{m_i}[\overline{\mathtt{x}}/\overline{\mu}])]\!] && \text{// } \rho'_j \stackrel{\text{деф}}{=} \rho[\overline{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]\\
&= \mathrm{eval}_N^P[\![\mathtt{f}_i(\rho_1,\ldots,\rho_{m_i})[\overline{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!] && \text{// правила за замяна}\\
&= \mathrm{eval}_N^P[\![\tau[\overline{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!].
\end{aligned}
$$

Заключаваме, че

$$[\![\tau]\!](\overline{\gamma}_r)(\underbrace{\mathrm{eval}_N^P[\![\mu_1]\!]}_{a_1},\ldots,\underbrace{\mathrm{eval}_N^P[\![\mu_n]\!]}_{a_n}) \sqsubseteq \mathrm{eval}_N^P[\![\tau[\overline{\mathtt{x}}/\overline{\mu}]]\!].$$

Така доказахме $\mathtt{Include}(r)$.

Най-накрая заключаваме, че $(\forall r)\mathtt{Include}(r)$. □

Следствие 3.5. Нека μ е функционален терм. Тогава $\mathrm{eval}_N^P[\![\mu]\!]$ е горна граница на веригата $([\![\mu]\!](\overline{\gamma}_r))_{r=0}^{\infty}$.

Лема 3.3. За всяка рекурсивна програма $\mathtt{P}$, произволен *функционален* терм μ,

$$[\![\mu]\!](\overline{\gamma}) \sqsubseteq \mathrm{eval}_N^P[\![\mu]\!],$$

където $\overline{\gamma} = \mathtt{lfp}(\Gamma)$, а $\Gamma = \Gamma_{\tau_0} \times \Gamma_{\tau_2} \times \cdots \times \Gamma_{\tau_k}$ е операторът, който съответства на програмата $\mathtt{P}$.

Упътване.

$$
\begin{aligned}
[\![\mu]\!](\overline{\gamma}) &= [\![\mu]\!](\bigsqcup_r \overline{\gamma}_r) && \text{// } \overline{\gamma} = \bigsqcup_r \overline{\gamma}_r\\
&= \bigsqcup_r [\![\mu]\!](\overline{\gamma}_r) && \text{// от \textit{Лема} 3.2}\\
&\sqsubseteq \mathrm{eval}_N^P[\![\mu]\!]. && \text{// от \textit{Следствие} 3.5}
\end{aligned}
$$

□

Теорема 3.4. За всяка рекурсивна програма $\mathtt{P}$ на езика **REC** е изпълнено:

$$\mathcal{O}_N[\![\mathtt{P}]\!] = \mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!].$$

Доказателство. Ние вече знаем от *Следствие* 3.4, че

Озн. $\overline{\gamma} = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ е най-малкото решение на системата от оператори съответстващи на програмата $\mathtt{P}$

$$\mathcal{O}_N[\![\mathtt{P}]\!] \sqsubseteq \mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!].$$

Остава да докажем обратната посока, а именно

$$\mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!] \sqsubseteq \mathcal{O}_N[\![\mathtt{P}]\!].$$

За произволни елементи $\overline{a} \in \mathbb{N}_\perp^n$, имаме следните връзки:

$$\mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!](\overline{a}) \stackrel{\text{деф}}{=} \gamma_1(\overline{a})$$

$$
\begin{aligned}
&= \Gamma_{\tau_1}(\overline{\gamma})(\overline{a}) && /\!/\ \gamma_1 \stackrel{\text{деф}}{=} \Gamma_{\tau_1}(\overline{\gamma})\\
&\stackrel{\text{деф}}{=} [\![\tau_1]\!](\overline{\gamma})(\overline{a})\\
&= [\![\tau_1[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mathtt{a}}]]\!](\overline{\gamma}) && /\!/\ \text{Лема за замяната}\\
&\sqsubseteq \mathrm{eval}^P_N[\![\tau_1[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mathtt{a}}]]\!] && /\!/\ \textit{Твърдение } 3.4\\
&= \mathrm{eval}^P_N[\![\mathtt{f}_1(\mathtt{a}_1,\dots,\mathtt{a}_{m_1})]\!] && /\!/\ \text{правило (4) на опер. сем.}\\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \mathcal{O}_N[\![\mathtt{P}]\!](\overline{a}).
\end{aligned}
$$

□

3.3.3 Предаване на параметрите по стойстност

В операционната семантика показва как свеждаме един *функционален* терм до естествено число или $\perp$. Да разгледаме една програмата P.

За всеки *функционален терм* μ дефинираме **извод** $\mu \to^P_V a$ **с предаване на параметрите по стойност** посредством индукция по построението на функционалния терм μ.

Тук разликата, в сравнение с [?, ?] е, че $\perp$ е константа в езика

Да напомним, че функционален терм е терм без свободни обектови променливи

В [?] се използва означението $\mathtt{P} \vdash_V \mu \to n$

$$\frac{}{\mathtt{a} \to^P_V a}\ (1)$$

$$\frac{\mu_1 \to^P_V a_1 \qquad \mu_2 \to^P_V a_2 \qquad a = \mathtt{plus}(a_1, a_2)}{\mu_1 + \mu_2 \to^P_V a}\ (2_+)$$

$$\frac{\mu_1 \to^P_N a_1 \qquad \mu_2 \to^P_N a_2 \qquad a = \mathtt{eq}(a_1, a_2)}{\mu_1 \texttt{ == } \mu_2 \to^P_N a}\ (2_{==})$$

$$\frac{\mu_0 \to^P_V a_0 \qquad \mu_1 \to^P_V a_1 \qquad a_0 \in \mathbb{N}^+}{\mathtt{if}\ \mu_0\ \mathtt{then}\ \mu_1\ \mathtt{else}\ \mu_2 \to^P_V a_1}\ (3_{\mathtt{t}})$$

$$\frac{\mu_0 \to^P_V 0 \qquad \mu_2 \to^P_V a_2}{\mathtt{if}\ \mu_0\ \mathtt{then}\ \mu_1\ \mathtt{else}\ \mu_2 \to^P_V a_2}\ (3_{\mathtt{f}})$$

$$\frac{\mu_0 \to^P_V \perp}{\mathtt{if}\ \mu_0\ \mathtt{then}\ \mu_1\ \mathtt{else}\ \mu_2 \to^P_V \perp}\ (3_{\perp})$$

$$\frac{\mu_1 \to^P_V a_1 \qquad \cdots \qquad \mu_{m_i} \to^P_V a_{m_i} \qquad \tau_i[\mathtt{x}_1/\mathtt{a}_1,\dots,\mathtt{x}_{m_i}/\mathtt{a}_{m_i}] \to^P_V a \qquad \perp \notin \{a_1,\dots,a_{m_i}\}}{\mathtt{f}_i(\mu_1,\dots,\mu_{m_i}) \to^P_V a}\ (4_{\mathbb{N}})$$

$$\frac{\mu_1 \to_V^P a_1 \qquad \cdots \qquad \mu_{m_i} \to_V^P a_{m_i} \qquad \bot \in \{a_1, \dots, a_{m_i}\}}{\mathtt{f}_i(\mu_1, \dots, \mu_{m_i}) \to_V^P \bot}\,(4_\bot)$$

Докато доказателства за денотационна семантика протичаха с индукция по построението на термовете, доказателствата за операционна семантика обикновено протичат с индукция по дължината на извода.

За фиксираната програма $\mathtt{P}$, с всеки *функционален* терм $\mu[\bar{\mathtt{f}}]$ асоциираме

$$\mathrm{eval}_V^P[\![\mu]\!] \stackrel{\text{деф}}{=} \begin{cases} b, & \text{ако } \mu \to_V^P b \\ \bot, & \text{ако } \mu \text{ няма извод до константа.} \end{cases}$$

Операционната семантика по стойност на рекурсивната програма $\mathtt{P}[\bar{\mathtt{x}}, \bar{\mathtt{f}}]$ представлява изображението $\mathcal{O}_V[\![\mathtt{P}]\!] \in [\mathbb{N}_\bot^{m_0} \stackrel{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\bot]$ дефинирано като

$$\mathcal{O}_V[\![\mathtt{P}]\!](a_1, \dots, a_{m_1}) \stackrel{\text{деф}}{=} \mathrm{eval}_V^P[\![\mathtt{f}_1(\mathtt{a}_1, \dots, \mathtt{a}_{m_1})]\!],$$

за произволни $a_1, \dots, a_{m_1} \in \mathbb{N}_\bot$.

Забележка 3.5. Можем директно да докажем, че $\mathcal{O}_V[\![\mathtt{P}]\!]$ е точно изображение. Но това е излишно. Това свойство ще следва от теоремата за еквивалентност, която ще докажем след малко, защото вече знаем, че денотационната семантика по стойност представлява точно изображение.

Пример 3.6. Да разгледаме отново програмата $\mathtt{P}$, където:

```
f(x) = g(f(x)) where
  g(x) = 0
```

За нея вече видяхме, че $\mathcal{D}_V[\![\mathtt{P}]\!] \sqsubseteq \mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!]$, но $\mathcal{D}_V[\![\mathtt{P}]\!] \neq \mathcal{D}_N[\![\mathtt{P}]\!]$.

Да разгледаме операционната семантика на тази програма. Лесно се съобразява, че $\mathtt{f(1)} \to_N^P 0$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\mathtt{0[x/g(f(1))]} \to_N^P 0}\ \text{правило (1)}}{\mathtt{g(f(x))[x/1]} \to_N^P 0}\ \text{правило (4)}}{\mathtt{f(1)} \to_N^P 0}\ \text{правило (4)}$$

Да видим защо $\mathtt{f(1)}$ няма извод до елемент в операционната семантика по стойност.

$$\cfrac{(1)\,\cfrac{}{\mathtt{1} \to_V^P 1} \qquad \cfrac{\text{правило }(4_\mathbb{N})\,\cfrac{\vdots}{\mathtt{f(1)} \to_V^P \Box} \qquad (1)\,\cfrac{}{\mathtt{0[x/\Box]} \to_V^P 0}}{\mathtt{g(f(x))[x/1]} \to_V^P \Box}\ (4_\bot) \text{ или } (4_\mathbb{N})}{\mathtt{f(1)} \to_V^P \Box}\ \text{правило } (4_\mathbb{N})$$

3.3.4 Теорема за еквивалентност

Сравнете с *Твърдение* 3.3

Твърдение 3.5. Нека μ е *функционален* терм и

$$\bar{\delta} \in [\mathbb{N}_\perp^{m_1} \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp] \times \cdots \times [\mathbb{N}_\perp^{m_k} \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp]$$

е решение на системата от уравнения Δ_{τ_i} съответстващи на програмата $\mathtt{P}$. Тогава

Тук не е необходимо $\bar{\delta}$ да бъде най-малкото решение [?, стр. 182]

$$\mathrm{eval}_V^P[\![\mu]\!] \sqsubseteq [\![\mu]\!](\bar{\delta}).$$

Доказателство. Ако от терма μ *няма извод* до елемент на $\mathbb{N}_\perp$, то по дефиниция $\mathrm{eval}_N^P[\![\mu]\!] = \perp$ и в този случай е очевидно, че

Тук до голяма степен повтаряме същите разсъждения както в доказателството на *Твърдение* 3.3

$$\mathrm{eval}_V^P[\![\mu]\!] \sqsubseteq [\![\mu]\!](\bar{\delta}).$$

Ако $\mu \to_V^P \perp$, то е ясно, че $\mathrm{eval}_V^P[\![\mu]\!] \sqsubseteq [\![\mu]\!](\bar{\delta})$

Интересният случай е когато от терма μ *има извод* до елемент на $\mathbb{N}$. Тогава ще докажем, че за произволен функционален терм μ и елемент $a \in \mathbb{N}$,

$$\mu \to_V^P a \implies [\![\mu]\!](\bar{\delta}) = a. \tag{3.8}$$

Доказателството на (3.8) ще проведем с индукция по дължината ℓ на извода $\mu \to_V^P a$.

Първо, нека $\ell = 1$. Тогава единствения случай, който трябва да разгледаме е $\mu \equiv \mathtt{a}$. Този случай е прекалено лесен.

Нека сега изводът $\mu \to_V^P a$ има дължина $\ell > 1$. Понеже правилата за извод строго следват дефиницията на термовете, трябва да разгледаме следните случаи.

- Нека $\mu \equiv \mu_1 + \mu_2$, като $\mathrm{eval}_V^P[\![\mu]\!] = a$. Тогава:

$$\dfrac{(\text{извод с дълж. } \ell_1)\ \dfrac{\vdots}{\mu_1 \to_V^P a_1} \qquad \dfrac{\vdots}{\mu_2 \to_V^P a_2}\ (\text{извод с дълж. } \ell_2)}{\mu \to_V^P a}\ \text{правило } (2_+)$$

  Тук имаме, че $\ell = \ell_1 + \ell_2 + 1$ и $a = \mathtt{plus}(a_1, a_2)$. Следователно можем да приложим **И.П.** за μ_1 и μ_2, откъдето получаваме, че

$$\begin{aligned} \mu_1 \to_V^P a_1 &\implies [\![\mu_1]\!](\bar{\delta}) = a_1 \\ \mu_2 \to_V^P a_2 &\implies [\![\mu_2]\!](\bar{\delta}) = a_2. \end{aligned}$$

  Тогава получаваме, че ако $\mu_1 + \mu_2 \to_V^P a$, то

$$\begin{aligned} [\![\mu_1 + \mu_2]\!](\bar{\delta}) &\stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{plus}([\![\mu_1]\!](\bar{\gamma}), [\![\mu_2]\!](\bar{\delta})) \\ &= \mathtt{plus}(a_1, a_2) \\ &= a. \end{aligned}$$

- Нека $\mu \equiv \mu_1 \texttt{ == } \mu_2$. Този случай не крие изненади.

  ✍ Домашно!

- Нека $\mu \equiv \mathtt{if}\ \tau_0\ \mathtt{then}\ \tau_1\ \mathtt{else}\ \tau_2$.

- Нека $\mu \equiv \mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i})$ и да приемем, че $\mu \to_V^P a$. Според правилата на операционната семантика, единствената възможна ситуация е следната. Съществуват елементи $a_1, \ldots, a_{m_i} \in \mathbb{N}$, за които:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\mu_1 \to_V^P a_1}\,(\text{дължк. }\ell_1) \quad \cdots \quad \dfrac{\vdots}{\mu_{m_i} \to_V^P a_{m_i}}\,(\ell_{m_i}) \quad \dfrac{\vdots}{\tau_i[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mathtt{a}}] \to_V^P a}\,(\text{дължк. }\ell_0)}{\mathtt{f}_i(\mu_1,\dots,\mu_{m_i}) \to_V^P a}\,(\text{дължк. }\ell)\ \text{правило } (4_{\mathbb{N}})$$

Понеже за $j = 1,\dots,m_i$ изводът на $\mu_j \to_V^P a_j$ има дължина $\ell_j < \ell$, то от **И.П.** за (3.8) имаме, че

$$[\![\mu_j]\!](\bar{\delta}) = a_j. \tag{3.9}$$

Аналогично, понеже изводът на $\tau_i[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mathtt{a}}] \to_V^{\mathtt{P}} a$ има дължина $\ell_0 < \ell$, и очевидно термът $\tau_i[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mathtt{a}}]$ е функционален, то от **И.П.** за (3.8) имаме, че

$\ell_0 + \ell_1 + \cdots \ell_{m_i} + 1 = \ell$

$$[\![\tau_i[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mathtt{a}}]]\!](\bar{\delta}) = a. \tag{3.10}$$

Получаваме следното:

$$\begin{aligned}
[\![\mu]\!](\bar{\delta}) &= [\![\mathtt{f}_i(\mu_1,\dots,\mu_{m_i})]\!](\bar{\delta}) \\
&= \delta_i(\underbrace{[\![\mu_1]\!](\bar{\delta})}_{a_1},\dots,\underbrace{[\![\mu_{m_i}]\!](\bar{\delta})}_{a_{m_i}}) && \text{// стойност на терм} \\
&= \delta_i(a_1,\dots,a_{m_i}) && \text{// от (3.9)} \\
&= \Delta_{\tau_i}(\bar{\delta})(a_1,\dots,a_{m_i}) && \text{// } \delta_i = \Delta_{\tau_i}(\bar{\delta}) \\
&= \Sigma_\star(\Gamma_{\tau_i}(\bar{\delta}))(\bar{a}) && \text{// } \Delta_{\tau_i} \stackrel{\text{деф}}{=} \Sigma_\star \circ \Gamma_{\tau_i} \\
&= \Gamma_{\tau_i}(\bar{\delta})(\bar{a}) && \text{// защото } \bot \notin \{a_1,\dots,a_n\} \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} [\![\tau_i]\!](\bar{\delta})(\bar{a}) && \text{// } \bar{\delta} \text{ са непрекъснати} \\
&= [\![\tau_i[\bar{\mathtt{x}}/\bar{\mathtt{a}}]]\!](\bar{\delta}) && \text{// Лема за замяната} \\
&= a && \text{// от (3.10)}
\end{aligned}$$

□

Обърнете внимание, че дотук използвахме само, че $\bar{\delta}$ е решение на системата от оператори Δ_{τ_i} зададена от програмата P. Не сме използвали, че $\bar{\delta}$ е най-малкото решение.

Следствие 3.6. За всяка рекурсивна програма P на езика **REC** имаме, че

$$\mathcal{O}_V[\![\mathtt{P}]\!] \sqsubseteq \mathcal{D}_V[\![\mathtt{P}]\!].$$

Доказателство. Тогава

Озн. с $\bar{\delta}$ най-малкото решение на системата от оператори за програмата P

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_V[\![\mathtt{P}]\!](\bar{a}) &\stackrel{\text{деф}}{=} \text{eval}_V^P[\![\mathtt{f}_1(\mathtt{a}_1,\dots,\mathtt{a}_{m_1})]\!] \\
&\sqsubseteq [\![\mathtt{f}_1(\mathtt{a}_1,\dots,\mathtt{a}_{m_1})]\!](\bar{\delta}) && \text{// от } \textit{Твърдение } 3.5 \\
&= \delta_1([\![\mathtt{a}_1]\!](\bar{\delta}),\dots,[\![\mathtt{a}_{m_1}]\!](\bar{\delta})) \\
&= \delta_1(a_1,\dots,a_{m_1}) \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \mathcal{D}_V[\![\mathtt{P}]\!](\bar{a}).
\end{aligned}$$

□

Обръщаме нашето внимание към доказателството на обратната посока, т.е. $\mathcal{D}_V[\![h]\!] \sqsubseteq \mathcal{O}_V[\![h]\!]$. Нека сега $\overline{\delta}$ е най-малкото решение на системата от оператори, която съответства на програма `P` за денотационната семантика по стойност. Да напомним, че това означава, че $\overline{\delta} = \bigsqcup_r \overline{\delta}_r$, където $\delta^i_{r+1} = \Delta_{\tau_i}(\overline{\delta}_r)$

Твърдение 3.6. Тогава за всеки *функционален* терм $\mu[\mathtt{f}_1, \ldots, \mathtt{f}_k]$ и всяко r,

$$[\![\mu]\!](\overline{\delta}_r) \sqsubseteq \mathrm{eval}^P_V[\![\mu]\!].$$

Упътване.

Сравнете с *Твърдение* 3.4. Основната разлика е, че тук можем да минем само с функционални термове. Това не можем да направим при семантиката по име поради разликата в правилата за извод. Всъщност можем да го направим, ако имаме лема за симулацията, но тя сега е сложена като задача

Доказателството на това твърдение следва същата схема като доказателството на *Твърдение* 3.4. За произволно естествено число r, нека твърдението $\mathtt{Include}(r)$ да гласи следното:

„за произволен функционален терм $\mu[\mathtt{f}_1, \ldots, \mathtt{f}_l]$ е изпълнено, че:

$$[\![\mu]\!](\overline{\delta}_r) \sqsubseteq \mathrm{eval}^P_V[\![\mu]\!].\text{”}$$

Трябва да докажем, че $\mathtt{Include}(r)$ е изпълнено за всяко r. Това ще направим с индукция по r.

- Първо ще докажем $\mathtt{Include}(0)$. Това ще направим с индукция по построението на терма τ. Доказателството протича по същия начин (с индукция по построението на термовете) както доказателството в този случай на *Твърдение* 3.4.

  – Нека $\mu \equiv \mathtt{a}$.

  – Нека $\mu \equiv \mu_1 + \mu_2$. От **И.П.** имаме, че за $i = 1, 2$ е изпълнено

  $$[\![\mu_i]\!](\overline{\delta}_0) \sqsubseteq \mathrm{eval}^P_V[\![\mu_i]\!].$$

  Тогава

  $$\begin{aligned}[\![\mu_1 + \mu_2]\!](\overline{\delta}_0) &= \mathtt{plus}([\![\mu_1]\!](\overline{\delta}_0), [\![\mu_2]\!](\overline{\delta}_0)) \\ &\sqsubseteq \mathtt{plus}(\mathrm{eval}^P_V[\![\mu_1]\!], \mathrm{eval}^P_V[\![\mu_2]\!]) \qquad /\!/ \text{ от И.П. и мон. на } \mathtt{plus} \\ &= \mathrm{eval}^P_V[\![\mu_1 + \mu_2]\!] \qquad /\!/ \text{ от правило } (2_+)\end{aligned}$$

  – Нека $\mu \equiv \mu_1 \mathtt{==} \mu_2$.

  – Нека $\mu \equiv \mathtt{if}\ \mu_1\ \mathtt{then}\ \mu_2\ \mathtt{else}\ \mu_3$.

  – Нека $\mu \equiv \mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i})$.

- Нека $r > 0$. Да приемем, че $\mathtt{Include}(r-1)$ е изпълнено. Ще докажем $\mathtt{Include}(r)$ с индукция по построението на термовете. Единственият случай, който заслужава внимание е

  $$\mu \equiv \mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i}).$$

  Доказателствата на всички останали случаи за μ протичат по абсолютно същия начин както при $r = 0$.

  Понеже термът μ е построен с помощта на термовете μ_j, за $j = 1, \ldots, m_i$, можем да приложим **И.П.** за тях и да получим, че

  $$b_j \stackrel{\text{деф}}{=} [\![\mu_j]\!](\overline{\delta}_r) \sqsubseteq \mathrm{eval}^P_V[\![\mu_j]\!].$$

  Трябва да разгледаме два случая.

– Ако $\perp \notin \{b_1, \ldots, b_{m_i}\}$. Тогава, понеже работим в плоска наредба,

$$\mathrm{eval}_V^P[\![\mu_j]\!] = b_j.$$

От правилата на операционната семантика, това означава, че в този случай имаме следния извод:

$$\frac{\dfrac{\vdots}{\mu_1 \to_V^P b_1} \qquad \cdots \qquad \dfrac{\vdots}{\mu_{m_i} \to_V^P b_{m_i}} \qquad \dfrac{\vdots}{\tau_i[\mathtt{x}_1/\mathtt{b}_1, \ldots, \mathtt{x}_{m_i}/\mathtt{b}_{m_i}] \to_V^P b}}{\mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i}) \to_V^P b}\ (4_{\mathbb{N}})$$

Оттук следва, че:

$$\mathrm{eval}_V^P[\![\mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i})]\!] = \mathrm{eval}_V^P[\![\tau_i[\mathtt{x}_1/\mathtt{b}_1, \ldots, \mathtt{x}_{m_i}/\mathtt{b}_{m_i}]]\!]. \tag{3.11}$$

Получаваме, че:

$$\begin{aligned}
[\![\mu]\!](\bar{\delta}_r) &= [\![\mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i})]\!](\bar{\delta}_r) \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \delta_r^i(\underbrace{[\![\mu_1]\!](\bar{\delta}_r)}_{b_1}, \ldots, \underbrace{[\![\mu_{m_i}]\!](\bar{\delta}_r)}_{b_{m_i}}) && /\!/\ \bar{\delta}_r = (\delta_r^1, \ldots, \delta_r^k) \\
&= \delta_r^i(b_1, \ldots, b_{m_i}) \\
&= \Delta_{\tau_i}(\bar{\delta}_{r-1})(b_1, \ldots, b_{m_i}) && /\!/\ \delta_r^i = \Delta_{\tau_i}(\bar{\delta}_{r-1}) \\
&= \Sigma_\star(\Gamma_{\tau_i}(\bar{\delta}_{r-1}))(b_1, \ldots, b_{m_i}) && /\!/\ \Delta_{\tau_i} \stackrel{\text{деф}}{=} \Sigma_\star \circ \Gamma_{\tau_i} \\
&= \Gamma_{\tau_i}(\bar{\delta}_{r-1})(b_1, \ldots, b_{m_i}) && /\!/\ \text{всяко } b_j \neq \perp \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} [\![\tau_i]\!](\bar{\delta}_{r-1})(b_1, \ldots, b_{m_i}) && /\!/\ \bar{\delta}_{r-1} \text{ са непрекъснати} \\
&= [\![\tau_i[\mathtt{x}_1/\mathtt{b}_1, \ldots, \mathtt{x}_{m_i}/\mathtt{b}_{m_i}]]\!](\bar{\delta}_{r-1}) && /\!/\ \text{Лема за замяната} \\
&\sqsubseteq \mathrm{eval}_V^P[\![\tau_i[\mathtt{x}_1/\mathtt{b}_1, \ldots, \mathtt{x}_{m_i}/\mathtt{b}_{m_i}]]\!] && /\!/\ \text{от } \mathtt{Include}(r-1) \\
&= \mathrm{eval}_V^P[\![\mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i})]\!] && /\!/\ \text{от (3.11)} \\
&= \mathrm{eval}_V^P[\![\mu]\!].
\end{aligned}$$

– Нека $\perp \in \{b_1, \ldots, b_{m_i}\}$. Тогава е лесно, защото:

$$\begin{aligned}
[\![\mu]\!](\bar{\delta}_r) &= [\![\mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i})]\!](\bar{\delta}_r) \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \delta_r^i(\underbrace{[\![\mu_1]\!](\bar{\delta}_r)}_{b_1}, \ldots, \underbrace{[\![\mu_{m_i}]\!](\bar{\delta}_r)}_{b_{m_i}}) && /\!/\ \bar{\delta}_r = (\delta_r^1, \ldots, \delta_r^k) \\
&= \delta_r^i(b_1, \ldots, b_{m_i}) && /\!/\ b_j \stackrel{\text{деф}}{=} [\![\mu_j]\!](\bar{\delta}_r) \\
&= \perp && /\!/\ \delta_r^i \text{ е точно изображение} \\
&\sqsubseteq \mathrm{eval}_V^P[\![\mathtt{f}_i(\mu_1, \ldots, \mu_{m_i})]\!] \\
&= \mathrm{eval}_V^P[\![\mu]\!].
\end{aligned}$$

□

Следствие 3.7. Нека μ е функционален терм. Тогава $\mathrm{eval}_V^P[\![\mu]\!]$ е горна граница на веригата $([\![\mu]\!](\bar{\delta}_r))_{r=0}^{\infty}$.

Лема 3.4. За всяка рекурсивна програма $\mathtt{P}$, произволен *функционален* терм μ,

$$[\![\mu]\!](\overline{\delta}) \sqsubseteq \mathrm{eval}_V^P[\![\mu]\!],$$

където $\delta = \mathtt{lfp}(\Delta)$, а Δ е операторът, който съответства на системата от уравнения за $\mathtt{P}$.

Упътване. Знаем, че $\overline{\delta} = \bigsqcup_r \overline{\delta}_r$. Тогава:

$$\begin{aligned}
[\![\mu]\!](\overline{\delta}) &= [\![\mu]\!](\bigsqcup_r \overline{\delta}_r) \\
&= \bigsqcup_r [\![\mu]\!](\overline{\delta}_r) && \text{// от } \textit{Следствие } 3.7 \\
&\sqsubseteq \mathrm{eval}_V^P[\![\mu]\!]. && \text{// от } \textit{Твърдение } 3.6
\end{aligned}$$

□

Теорема 3.5. За всяка рекурсивна програма $\mathtt{P}$ на езика **REC** е изпълнено:

$$\mathcal{D}_V[\![\mathtt{P}]\!] = \mathcal{O}_V[\![\mathtt{P}]\!].$$

Доказателство. От *Следствие* 3.6 знаем, че

$$\mathcal{O}_V[\![\mathtt{P}]\!] \sqsubseteq \mathcal{D}_V[\![\mathtt{P}]\!].$$

Остава да докажем другата посока, а именно, че

$$\mathcal{D}_V[\![\mathtt{P}]\!] \sqsubseteq \mathcal{O}_V[\![\mathtt{P}]\!].$$

Но това е лесно:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_V[\![\mathtt{P}]\!](\overline{a}) &\stackrel{\text{деф}}{=} \delta_1(\overline{a}) \\
&= \delta_1([\![\mathtt{a}_1]\!](\overline{\delta}), \dots, [\![\mathtt{a}_{m_1}]\!](\overline{\delta})) && \text{// } a_j = [\![\mathtt{a}_j]\!](\overline{\delta}) \\
&= [\![\mathtt{f}_1(\mathtt{a}_1, \dots, \mathtt{a}_{m_1})]\!](\overline{\delta}) && \text{// деф. на стойност на терм} \\
&\sqsubseteq \mathrm{eval}_V^P[\![\mathtt{f}_1(\mathtt{a}_1, \dots \mathtt{a}_{m_1})]\!] && \text{// от } \textit{Твърдение } 3.6 \\
&\stackrel{\text{деф}}{=} \mathcal{O}_V[\![\mathtt{P}]\!](\overline{a}).
\end{aligned}$$

□

Глава 4

Доказване на свойства на програми

След като вече имаме точна дефиниция на семантиката на една рекурсивна програма, можем да видим как можем да доказваме формално свойства на рекурсивни програми.

4.1 Свойства

- Да фиксираме една област на Скот $\mathcal{A}$. Подмножествата $P \subseteq \mathcal{A}$ ще наричаме **свойства**.
- Казваме, че P е **непрекъснато (или допустимо, индуктивно) свойство** над областта на Скот $\mathcal{A}$, ако за всяка верига $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ от елементи на $\mathcal{A}$, е изпълнено:

В [?, стр. 166] се наричат *inclusive subsets*. В [?] се наричат *chain-complete assertions*

$$\frac{P(a_0) \qquad P(a_1) \qquad P(a_2) \qquad P(a_3) \qquad \dots}{P(\bigsqcup_i a_i)}$$

Понеже $\mathcal{A}$ е област на Скот, ние знаем, че $\bigsqcup_i a_i$ съществува

Нека да видим, че има свойства, който не са непрекъснати.

Пример 4.1. Нека да разгледаме областта на Скот от точните изображения $[\mathbb{N}_\perp \overset{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$. Да разгледаме свойството $P \subseteq [\mathbb{N}_\perp \overset{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$, което е дефинирано по следния начин:

$$P(f) \overset{\text{деф}}{\equiv} (\exists x \in \mathbb{N})[f(x) = \perp].$$

Да разгледаме изображенията f_i, дефинирани по следния начин:

$$f_i(x) = \begin{cases} 42, & x \in \mathbb{N} \ \& \ x \leq i \\ \perp, & x \in \mathbb{N} \ \& \ x > i \\ \perp, & x = \perp. \end{cases}$$

Лесно се съобразява, че $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ е верига в $[\mathbb{N}_\perp \overset{\text{т}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$ и че за всяко i, $P(f_i)$. Да разгледаме точната горна граница g на тази верига, за която знаем, че за всяко $y \in \mathbb{N}$,

$$g(x) = y \iff (\exists i)[f_i(x) = y].$$

Според конструкцията на g, $g(x) = 42$ за всяко $x \in \mathbb{N}$. Оттук директно получаваме, че $\neg P(g)$. Така видяхме, че P *не е непрекъснато свойство*.

Задача 4.1. Докажете, че свойството Q над $[\mathbb{N}_\perp \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp]$, където

$$Q(f) \iff (\forall x \in \mathbb{N})[f(x) \neq \perp],$$

е непрекъснато.

4.1.1 Основни свойства

Твърдение 4.1. Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са области на Скот и $f_1, f_2 \in [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{B}]$. Тогава следните свойства над $\mathcal{A}$ са непрекъснати:

- $P(a) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} f_1(a) \sqsubseteq f_2(a)$;
- $P(a) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} f_1(a) = f_2(a)$;

Твърдение 4.2. Нека $\mathcal{A}$ е област на Скот. Да фиксираме произволен елемент $a_0 \in \mathcal{A}$. Тогава следните свойства над $\mathcal{A}$ са непрекъснати:

- $P(a) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} a \sqsubseteq a_0$;
- $P(a) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} a = a_0$;

4.1.2 Сечение

Твърдение 4.3. Нека P_1 и P_2 непрекъснати свойства над областта на Скот $\mathcal{A}$. Тогава $P_1 \cap P_2$ също е непрекъснато свойство.

4.1.3 Обединение

Твърдение 4.4. Нека P_1 и P_2 непрекъснати свойства над областта на Скот $\mathcal{A}$. Тогава $P_1 \cup P_2$ също е непрекъснато свойство.

4.1.4 Допълнение

Твърдение 4.5. Съществува непрекъснато свойство P над областта на Скот $\mathcal{A}$, за което $\mathcal{A} \setminus P$ **не** е непрекъснато свойство.

Доказателство. Да вземем $\mathcal{A} = [\mathbb{N}_\perp \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp]$. Свойството Q от *Задача* 4.1 е непрекъснато, докато $[\mathbb{N}_\perp \xrightarrow{\text{т}} \mathbb{N}_\perp] \setminus Q = P$, което е точно свойството от *Пример* 4.1, а за него знаем, че не е непрекъснато. □

4.1.5 Частична коректност

- Да разгледаме едно свойство I в областта на Скот $\mathcal{A}$, което наричаме условие за входа, и свойство O в областта на Скот $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, което наричаме условие за изхода.
- **Свойство от тип частична коректност** относно I и O представлява свойство $P \subseteq [\mathcal{A} \to \mathcal{B}]$ със следната дефиниция

$$P(f) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall a \in \mathcal{A})[\ I(a) \ \&\ f(a) \neq \perp \implies O(a, f(a))\ ].$$

Твърдение 4.6. Нека $I \subseteq \mathcal{A}$, а O е непрекъснато свойство в $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

$$P(f) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall a \in \mathcal{A})[\ I(a) \ \&\ f(a) \neq \perp \implies O(a, f(a))\ ].$$

Тогава свойството P е непрекъснато в областта на Скот $[\mathcal{A} \to \mathcal{B}]$.

4.1.6 Тотална коректност

Свойство от тип тотална коректност относно I и O представлява свойство $P \subseteq [\mathcal{A} \to \mathcal{B}]$ със следната дефиниция

$$P(f) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall a \in \mathcal{A})[I(a) \implies (f(a) \neq \bot \ \& \ O(a, f(a)))].$$

Твърдение 4.7. Нека I е свойство в $\mathcal{A}$, а O е непрекъснато свойство в $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Тогава свойството

$$P(f) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall a \in \mathcal{A})[I(a) \implies (f(a) \neq \bot \ \& \ O(a, f(a)))]$$

е непрекъснато в $[\mathcal{A} \to \mathcal{B}]$.

4.2 Правило на Скот

[?, стр. 166]

- Нека $\mathcal{A}$ е област на Скот и нека $f \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$.
- Всяко $P \subseteq A$ ще наричаме свойство.
- Тогава **правилото на Скот** гласи следното:

С $\mathtt{lfp}(f)$ означаваме най-малката неподвижна точка на f (от англ. least fixed point)

$$\frac{P(\bot) \qquad (\forall a \in \mathcal{A})[P(a) \implies P(f(a))]}{P(\mathtt{lfp}(f))}$$

Доказателство.

$\square$

Сравнете с *Твърдение* 1.10

Задача 4.2. Нека $f \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$. Да означим множеството от преднеподвижни точки на f като

$$\mathtt{Pref}(f) \stackrel{\text{деф}}{=} \{a \in \mathcal{A} \mid f(a) \sqsubseteq a\}.$$

Тогава

$$(\forall a \in \mathcal{A})[a \in \mathtt{Pref}(f) \implies \mathtt{lfp}(f) \sqsubseteq a].$$

Доказателство. Да фиксираме елемент $a \in \mathtt{Pref}(f)$. Да разгледаме непрекъснатото свойство

$$P(b) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} b \sqsubseteq a.$$

Сами се убедете, че P е непрекъснато свойство!

Ясно е, че $P(\bot)$. Нека $b \in \mathcal{A}$, за който $P(b)$. Ще докажем, че $P(f(b))$.

$$\begin{aligned} b \sqsubseteq a &\implies f(b) \sqsubseteq f(a) && /\!/ \ f \text{ е мон.} \\ &\implies f(b) \sqsubseteq f(a) \sqsubseteq a && /\!/ \ a \in \mathtt{Pref}(f) \\ &\implies f(b) \sqsubseteq a && /\!/ \ \sqsubseteq \text{ е транз. рел..} \end{aligned}$$

От правилото на Скот, заключаваме, че $P(\mathtt{lfp}(f))$, т.е. $\mathtt{lfp}(f) \sqsubseteq a$. $\square$

Задача 4.3. Нека $f, g \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$ като имаме свойствата:

- $f(\bot) \sqsubseteq g(\bot)$;
- $f \circ g \sqsubseteq g \circ f$.

Докажете, че $\mathtt{lfp}(f) \sqsubseteq \mathtt{lfp}(g)$.

Доказателство. Разгледайте непрекъснатото свойството

$$P(a) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} f(a) \sqsubseteq g(a).$$

От условието имаме, че $P(\perp)$. Нека $P(a)$. Ще докажем, че $P(g(a))$.

$$\begin{aligned} P(a) &\iff f(a) \sqsubseteq g(a) \\ &\implies g(f(a)) \sqsubseteq g(g(a)) && \text{// } g \text{ е мон.} \\ &\implies f(g(a)) \sqsubseteq g(g(a)) && \text{// } f \circ g \sqsubseteq g \circ f \\ &\iff P(g(a)). \end{aligned}$$

Тогава по правилото на Скот ще заключим, че $P(\texttt{lfp}(g))$, откъдето

$$f(\texttt{lfp}(g)) \sqsubseteq g(\texttt{lfp}(g)) = \texttt{lfp}(g).$$

Това означава, че $\texttt{lfp}(g)$ е преднеподвижна точка на f, т.е.

$$\texttt{lfp}(g) \in \texttt{Pref}(f).$$

Понеже $\texttt{lfp}(f)$ е най-малката преднеподвижна точка на f, то заключаваме, че $\texttt{lfp}(f) \sqsubseteq \texttt{lfp}(g)$. □

Задача 4.4. Нека $h \in [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{B}]$, $f \in [\mathcal{A} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{A}]$, $g \in [\mathcal{B} \xrightarrow{\text{н}} \mathcal{B}]$, като имаме свойствата:

- h е точна, т.е. $h(\perp^{\mathcal{A}}) = \perp^{\mathcal{B}}$;
- $g \circ h = h \circ f$.

Докажете, че $\texttt{lfp}(g) = h(\texttt{lfp}(f))$.

Упътване.

- Разгледайте непрекъснатото свойство

  $$P_1(a) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} h(a) \sqsubseteq g(h(a)).$$

  Докажете с правилото на Скот, че $P_1(\texttt{lfp}(f))$. Тогава

  $$\begin{aligned} h(\texttt{lfp}(f)) \sqsubseteq g(h(\texttt{lfp}(f)) &\iff h(f(\texttt{lfp}(f))) \sqsubseteq g(h(\texttt{lfp}(f) \\ &\iff h(f(\texttt{lfp}(f))) \sqsubseteq h(f(\texttt{lfp}(f))) \\ &\iff g(h(\texttt{lfp}(f))) \sqsubseteq h(\texttt{lfp}(f)). \end{aligned}$$

  Това означава, че $h(\texttt{lfp}(f))$ е преднеподвижна точка на g, т.е.

  $$h(\texttt{lfp}(f)) \in \texttt{Pref}(g).$$

  Заключаваме, че $\texttt{lfp}(g) \sqsubseteq h(\texttt{lfp}(f))$.

- Другата посока е по-лесна. Разгледайте непрекъснатото свойство

  $$P_2(a) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} h(a) \sqsubseteq \texttt{lfp}(g).$$

  Докажете, че $P_2(\texttt{lfp}(f))$.

□

Задача 4.5. Нека $f, g \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$ като имаме свойствата:

- $f(\perp) = g(\perp)$;
- $f \circ g = g \circ f$.

Докажете, че $\mathtt{lfp}(f \circ g) = \mathtt{lfp}(g \circ f)$.

Упътване. Разгледайте непрекъснатото свойство

$$P(a) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} g(f(a)) \sqsubseteq a.$$

Лесно се вижда, че P е непрекъснато свойство, защото f и g са непрекъснати изображения.

Ясно е, че $P(\perp)$. Нека $P(a)$. Ще докажем, че $P(f(g(a))$.

$$\begin{aligned} g(f(a)) \sqsubseteq a &\implies g(f(g(f(a)))) \sqsubseteq g(f(a)) \\ &\implies g(f(f(g(a)))) \sqsubseteq f(g(a)) \\ &\implies P(f(g(a))). \end{aligned}$$

От правилото на Скот заключваме, че $P(\mathtt{lfp}(f \circ g))$. Това означава, че

$$g(f(\mathtt{lfp}(f \circ g))) \sqsubseteq \mathtt{lfp}(f \circ g),$$

т.е. $\mathtt{lfp}(f \circ g) \in \mathtt{Pref}(g \circ f)$. Следователно,

$$\mathtt{lfp}(g \circ f) \sqsubseteq \mathtt{lfp}(f \circ g).$$

За другата посока разсъждаваме аналогично. □

Задача 4.6. Нека $p \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$ и $h \in [\mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$, като h е точна, т.е. $h(\perp) = \perp$. Да разгледаме

$$\Gamma \in [[\mathcal{A} \times \mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}] \stackrel{\text{н}}{\to} [\mathcal{A} \times \mathcal{A} \stackrel{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]],$$

където

$$\Gamma(f)(x, y) = \begin{cases} y, & p(x) = 0 \\ h(f(h(x), y)), & p(x) \in \mathbb{N}^+ \\ \perp, & p(x) = \perp. \end{cases}$$

Докажете, че ако $f_\Gamma \stackrel{\text{деф}}{=} \mathtt{lfp}(\Gamma)$, то

$$(\forall a, b \in \mathcal{A})[h(f_\Gamma(a, b)) = f_\Gamma(a, h(b))].$$

Упътване. Разгледайте непрекъснатото свойство

$$P(g) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall a, b \in \mathcal{A})[h(g(a, b)) = g(a, h(b))].$$

□

Задача 4.7. Нека $p \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$ и $h \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$, като p е точна, т.е. $p(\perp) = \perp$. Да разгледаме

$$\Gamma \in [[\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}] \overset{\text{н}}{\to} [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]],$$

където:

$$\Gamma(f)(x) = \begin{cases} x, & p(x) = 0 \\ f(f(h(x))), & p(x) \in \mathbb{N}^+ \\ \perp, & p(x) = \perp. \end{cases}$$

Докажете, че ако $f_\Gamma \overset{\text{деф}}{=} \mathtt{lfp}(\Gamma)$, то

$$(\forall a \in \mathcal{A})[f_\Gamma(f_\Gamma(a)) = f_\Gamma(a)].$$

Упътване. Разгледайте непрекъснатото свойство

$$P(g) \overset{\text{деф}}{\equiv} (\forall a \in \mathcal{A})[f_\Gamma(g(a)) = g(a)].$$

□

Задача 4.8. Нека $p \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathbb{N}_\perp]$ и $h, k \in [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$, като h е точна, т.е. $h(\perp) = \perp$. Да разгледаме $\Gamma_{1,2} \in [[\mathcal{A} \times \mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}] \overset{\text{н}}{\to} [\mathcal{A} \times \mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]]$, където:

$$\Gamma_1(f)(x, y) = \begin{cases} y, & p(x) = 0 \\ h(f(k(x), y)), & p(x) \in \mathbb{N}^+ \\ \perp, & p(x) = \perp; \end{cases}$$

$$\Gamma_2(f)(x, y) = \begin{cases} y, & p(x) = 0 \\ f(k(x), h(y)), & p(x) \in \mathbb{N}^+ \\ \perp, & p(x) = \perp; \end{cases}$$

Докажете, че ако $f_1 \overset{\text{деф}}{=} \mathtt{lfp}(\Gamma_1)$ и $f_2 = \mathtt{lfp}(\Gamma_2)$, то $f_1 = f_2$.

Упътване. Разгледайте непрекъснатото изображение Δ, където

$$\Delta(f, g) = \langle \Gamma_1(f), \Gamma_2(g) \rangle.$$

Разгледайте свойството:

$$P(f, g) \overset{\text{деф}}{\equiv} f = g \ \&\ (\forall a, b \in \mathcal{A})[h(f(a, b))) = f(a, h(b))].$$

Първо трябва да се съобрази, че това свойство е непрекъснато, което не е трудно. Ясно е, че $P(\Omega, \Omega)$. Докажете, че $P(f, g) \implies P(\Delta(f, g))$. □

Задача 4.9. Операторът $\Gamma : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_2$ е зададен с равенството:

$$\Gamma(f)(x, y) = \begin{cases} y, & \text{ако } y | x \\ f(f(x, y+1)), x), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажете, че:

а) операторът Γ е компактен;

б) $(\forall x, y \in \mathbb{N})[!f_\Gamma(x,y) \ \& \ y \not| x \ \Rightarrow \ f_\Gamma(x,y) \mid x]$.

Задача 4.10. Операторът $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$ е зададен с равенството:

$$\Gamma(f)(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x \leq 1 \\ x/2, & \text{ако } 2|x \ \& \ x > 1 \\ f(f(3\lfloor x/2 \rfloor + 2)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Докажете, че:

а) операторът Γ е компактен;

б) $(\forall x \in \mathbb{N})[!f_\Gamma(x) \ \& \ x > 1 \ \Rightarrow \ f_\Gamma(x) \ \leq x/2]$.

4.3 Задачи

Задача 4.11. Да фиксираме $a_0 \in \mathcal{A}$ и да разгледаме $P \subseteq [\mathcal{A} \overset{\text{н}}{\to} \mathcal{A}]$, където

$$P(f) \overset{\text{деф}}{\equiv} \texttt{lfp}(f) = a_0.$$

Проверете дали P е непрекъснато свойство.

Задача 4.12. Даден е следния оператор $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} 3.f(\sqrt{x}, y) + 2, & \text{ако } x \text{ е точен квадрат} \\ y, & \text{ако } x \text{ не е точен квадрат} \end{cases}$$

Да се докаже, че:

а) операторът Γ е компактен.

б) ако $f_\Gamma = \texttt{lfp}(\Gamma)$, то:

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})[3.f_\Gamma(x,y) + 2 \simeq f_\Gamma(x, 3y+2)].$$

Упътване. Подточка а) е стандартна.

- Нека първо да разгледаме операторите Γ_1 и Γ_2, където

$$\Delta_1(f) \overset{\text{деф}}{=} 3f(x,y) + 2$$
$$\Delta_2(f) \overset{\text{деф}}{=} f(x, 3y+2).$$

  Съобразете, че те са непрекъснати.

- От *Твърдение* 4.1 следва, че свойството

$$P(f) \overset{\text{деф}}{\equiv} \Delta_1(f) = \Delta_2(f)$$

  е непрекъснато.

- Използвайте правилото на Скот върху P за да докажете, че $P(f_\Gamma)$. Това означава, че $3f_\Gamma(x,y) + 2 \simeq f_\Gamma(x, 3y+2)$ за всяко $x, y \in \mathbb{N}$.

$\square$

Задача 4.13. Даден е следния оператор $\Gamma : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_1$:

$$\Gamma(f)(x,y) \simeq \begin{cases} (f(\sqrt{x}, y))^2, & \text{ако } x \text{ е точен квадрат} \\ y, & \text{иначе} \end{cases}$$

Да се докаже, че:

а) операторът Γ е компактен.

б) ако f_Γ е най-малката неподвижна точка на Γ, то:

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})[(f_\Gamma(x,y))^2 \simeq f_\Gamma(x, y^2)].$$

Задача 4.14. Нека $p_0, p_1, p_2 \dots$ е редицата от всички прости числа в нарастващ ред. Операторът $\Gamma : \mathcal{F}_3 \to \mathcal{F}_3$ действа по правилото:

$$\Gamma(f)(x,y,z) \simeq \begin{cases} x^x y, & \text{ако } p_z = x \ \& \ x, y, z \in \mathbb{N} \\ f(x+x, y, z+2), & \text{ако } p_z = x \ \& \ x, y, z \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Да се докаже, че:

а) операторът Γ е компактен.

б) ако $f_\Gamma = \texttt{lfp}(\Gamma)$, то:

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{N})[!f_\Gamma(x,y,z) \implies (\exists \text{ просто число } p)[p \geq x \ \& \ p^p y \mid f_\Gamma(x,y,z)].$$

Задача 4.15. Операторът $\Gamma : \mathcal{F}_3 \to \mathcal{F}_3$ е зададен с равенството:

$$\Gamma(f)(x,y,z) = \begin{cases} z, & y = 0 \ \& \ x, z \in \mathbb{N} \\ f(x, y-1, xy+z), & y > 0 \ \& \ x, z \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

а) Докажете, че Γ е компактен;

б) Докажете, че ако $f_\Gamma = \texttt{lfp}(\Gamma)$, то

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})[f_\Gamma(x, y, 0) = \frac{xy(y+1)}{2}].$$

Упътване. Да разгледаме свойството над естествените числа

$$P(y) \stackrel{\text{деф}}{\equiv} (\forall x, z \in \mathbb{N})[f_\Gamma(x,y,z) = \frac{xy(y+1)}{2} + z].$$

Докажете с математическа индукция по $y \in \mathbb{N}$, че $(\forall y \in \mathbb{N})[P(y)]$. $\square$

Забележка 4.1. Да разгледаме програмата на езика **REC**:

```
h(x,y) = f(x,y,0) where
  f(x,y,z) = if y == 0 then z
             else f(x, y-1, x*y + z)
```

Съобразете, че ние горе на практика доказахме, че

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})[\mathcal{D}_V [\![\mathtt{h}]\!](x,y) = \frac{xy(y+1)}{2}].$$

Библиография

[1] S. Abramsky and A. Jung. Domain theory. In S. Abramsky, D. M. Gabbay, and T. S. E. Maibaum, editors, *Handbook of Logic in Computer Science*, volume 3, pages 1–168. Clarendon Press, 1994.

[2] Hendrik Barendregt. *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*, volume 103: North-Holland. 1984.

[3] Richard Bird. *Thinking Functionally with Haskell.* Cambridge University Press, 2015.

[4] Roberto Bruni and Ugo Montanari. *Models of Computation.* Springer, 2017.

[5] Bryan O'Sullivan, John Goerzen, and Don Stewart. *Real World Haskell.* O'Reilly Media, Inc., 1st edition, 2008.

[6] John C. Reynolds. *Theories of Programming Languages.* Cambridge University Press, 1998.

[7] Glynn Winskel. *The Formal Semantics of Programming Languages.* MIT Press, 1993.

[8] Ангел Дичев и Иван Сосков. *Теория на програмите.* СУ „Св. Климент Охридски", 1998.

[9] Стела Николова и Александра Соскова. *Семантика на езиците за програмиране. Ръководство.* СОФТЕХ, 2008.

Азбучен указател